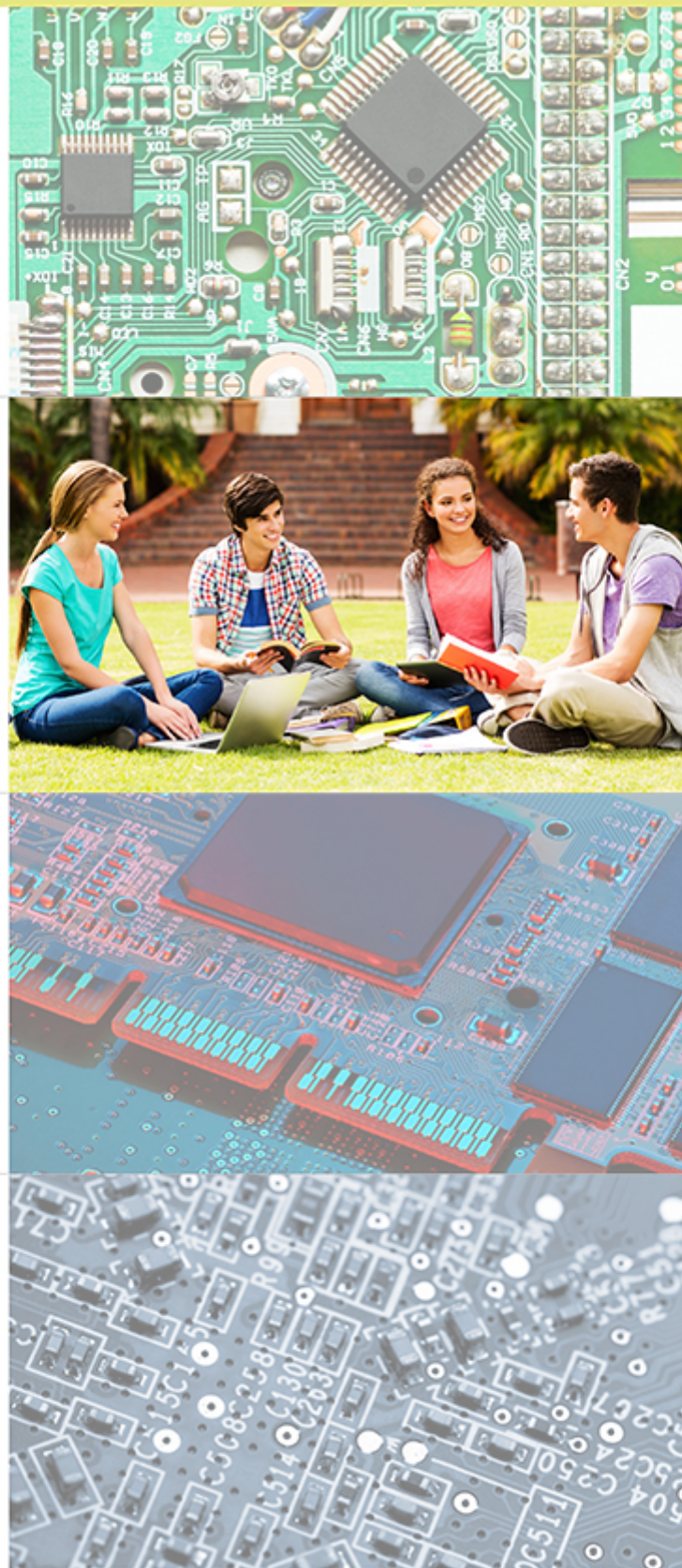
Introdução aos Circuitos Elétricos

JAMES A. SVOBODA
RICHARD C. DORF

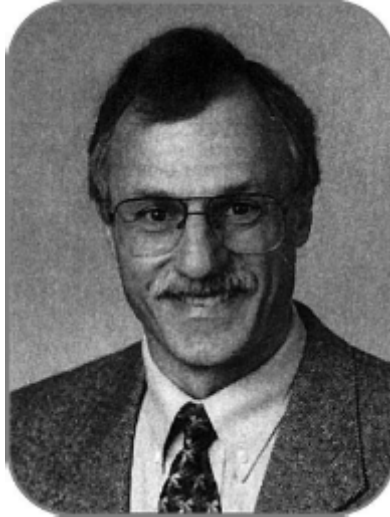
9ª edição

Material Suplementar

Este livro conta com os seguintes materiais suplementares:

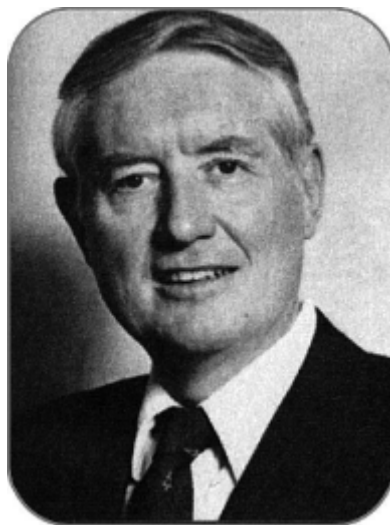
- Ilustrações da obra em formato de apresentação (acesso restrito a docentes);
- Instructor's Solutions Manual: Manual de soluções em formato (.pdf), em inglês (acesso restrito a docentes);
- Arquivos do Matlab e PSpice (acesso livre);
- Uso do MATLAB: Tutorial do Matlab (.pdf) (acesso livre).

O acesso ao material suplementar é gratuito, bastando que o leitor se cadastre em: http://gen-io.grupogen.com.br.

GEN-IO (GEN | Informação Online) é o repositório de materiais suplementares e de serviços relacionados com livros publicados pelo GEN | Grupo Editorial Nacional, maior conglomerado brasileiro de editoras do ramo científico-técnico-profissional, composto por Guanabara Koogan, Santos, Roca, AC Farmacêutica, Forense, Método, Atlas, LTC, E.P.U. e Forense Universitária. Os materiais suplementares ficam disponíveis para acesso durante a vigência das edições atuais dos livros a que eles correspondem.

Os Autores

James A. Svoboda é professor-associado de engenharia elétrica e de engenharia da computação na Clarkson University, onde ministra cursos sobre tópicos como circuitos, eletrônica e programação de computadores. É Ph.D. em engenharia elétrica pela University of Wisconsin em Madison, M.S. pela University of Colorado e B.S. pelo General Motors Institute.

Circuitos II é um dos cursos favoritos do professor Svoboda. Ele ministrou esse curso a 6.500 alunos de graduação da Clarkson University nos últimos 35 anos. Em 1986, recebeu o Distinguished Teaching Award da Clarkson University.

O professor Svoboda escreveu vários artigos científicos a respeito das vantagens do uso de *nullors* na modelagem de circuitos elétricos para análise em computadores. Ele se interessa pelos efeitos da tecnologia sobre o ensino de engenharia e criou vários pacotes de software para serem usados no curso de Circuitos II.

Richard C. Dorf, professor de engenharia elétrica e de computação da University of California, Davis, ministra cursos de graduação e pós-graduação de engenharia elétrica nos campos de circuitos e sistemas de controle. É Ph.D. em engenharia elétrica pela Escola de Pós-Graduação da Marinha dos Estados Unidos, M.S. pela University of Colorado e B.S. pela Clarkson University. Muito interessado pela disciplina de engenharia elétrica e ciente de sua

importância para atender a necessidades sociais e econômicas, tem escrito e proferido conferências em vários países a respeito das contribuições e avanços da engenharia elétrica.

O professor Dorf tem uma grande experiência na educação e na indústria e se mantém profissionalmente ativo nos campos da robótica, automação, circuitos elétricos e comunicações. Foi professor visitante da University of Edinburgh, na Escócia, do Instituto de Tecnologia de Massachusetts, da Stanford University e da University of California, em Berkeley.

Fellow do Institute of Electrical and Electronic Engineers e da American Society for Engineering Education, o Dr. Dorf é muito conhecido pelos profissionais da área por seus livros *Modern Control Systems*, décima segunda edição (Prentice Hall, 2008) – Sistemas de Controle Modernos, 12ª edição (LTC, 2013) e *The International Encyclopedia of Robotics* (Wiley, 1988). O Dr. Dorf é também coautor de *Circuits, Devices and Systems* (com Ralph Smith), quinta edição (Wiley, 1992). O Dr. Dorf foi o compilador do largamente usado *Electrical Engineering Handbook*, terceira edição (CRC Press e IEEE Press), publicado em 2011. Sua obra mais recente é *Technology Ventures*, quarta edição (McGraw-Hill, 2013).

Prefácio

O tema central de *Introdução aos Circuitos Elétricos* é a ideia de que os circuitos elétricos fazem parte da estrutura básica da tecnologia moderna. Dado este tema, procuramos mostrar que a análise e o projeto de circuitos elétricos estão indissoluvelmente ligados à capacidade do engenheiro de projetar sistemas eletrônicos, de comunicações, de computação e de controle, além de produtos acabados.

Abordagem e Organização

Este livro se destina a um curso de um a três períodos sobre circuitos elétricos ou análise de circuitos lineares e foi estruturado de modo a permitir a maior *flexibilidade* possível. O fluxograma da Figura 1 mostra organizações alternativas para os capítulos que podem acomodar cursos com diferentes perfis sem prejudicar a continuidade.

A apresentação se destina a estudantes que estão sendo expostos pela primeira vez aos conceitos básicos dos circuitos elétricos e o leque de assuntos cobertos é bastante amplo. Os alunos devem iniciar o curso com conhecimentos básicos de cálculo diferencial e integral.

Este livro procura preparar o leitor para resolver problemas realistas na área dos circuitos elétricos. Sendo assim, os circuitos são apresentados como resultado de invenções reais e como resposta a necessidades reais das fábricas, dos escritórios e das residências. Embora as ferramentas de análise dos circuitos elétricos possam ser parcialmente abstratas, os circuitos elétricos são os alicerces da sociedade moderna. Conhecimentos básicos de análise e projeto de circuitos elétricos são indispensáveis para todos os engenheiros.

O que Há de Novo na 9ª Edição

Revisões para Melhorar a Exposição

O Capítulo 10, que trata dos circuitos de corrente alternada, passou por uma extensa revisão para tornar o texto mais claro. Além disso, foram feitas modificações em vários capítulos para melhorar a exposição. Algumas foram pequenas, envolvendo apenas frases ou parágrafos, mas outras se estenderam a várias páginas ou mesmo a seções inteiras. Muitas vezes, essas revisões foram acompanhadas por exemplos; em consequência, a 9ª edição contém 36 novos exemplos.

Mais Problemas

A 9ª edição contém 180 problemas novos, o que aumenta o número total de problemas para mais de 1.400. Esta edição utiliza vários tipos de problemas com vários graus de dificuldade, como, por exemplo,

- Problemas elementares de análise de circuitos.
- Análise de circuitos complexos.
- Problemas elementares de projeto. (Dado um circuito e uma resposta desejada, determinar os valores dos componentes.)
- Comparações. (Problemas de várias partes que chamam a atenção para semelhanças e diferenças entre duas situações.)
- Problemas envolvendo os programas MATLAB e PSpice.
- Problemas de projeto. (Dadas algumas especificações, projetar um circuito que atenda a essas especificações.)
- Como Podemos Testar . . . ? (Verificar se uma solução está correta.)

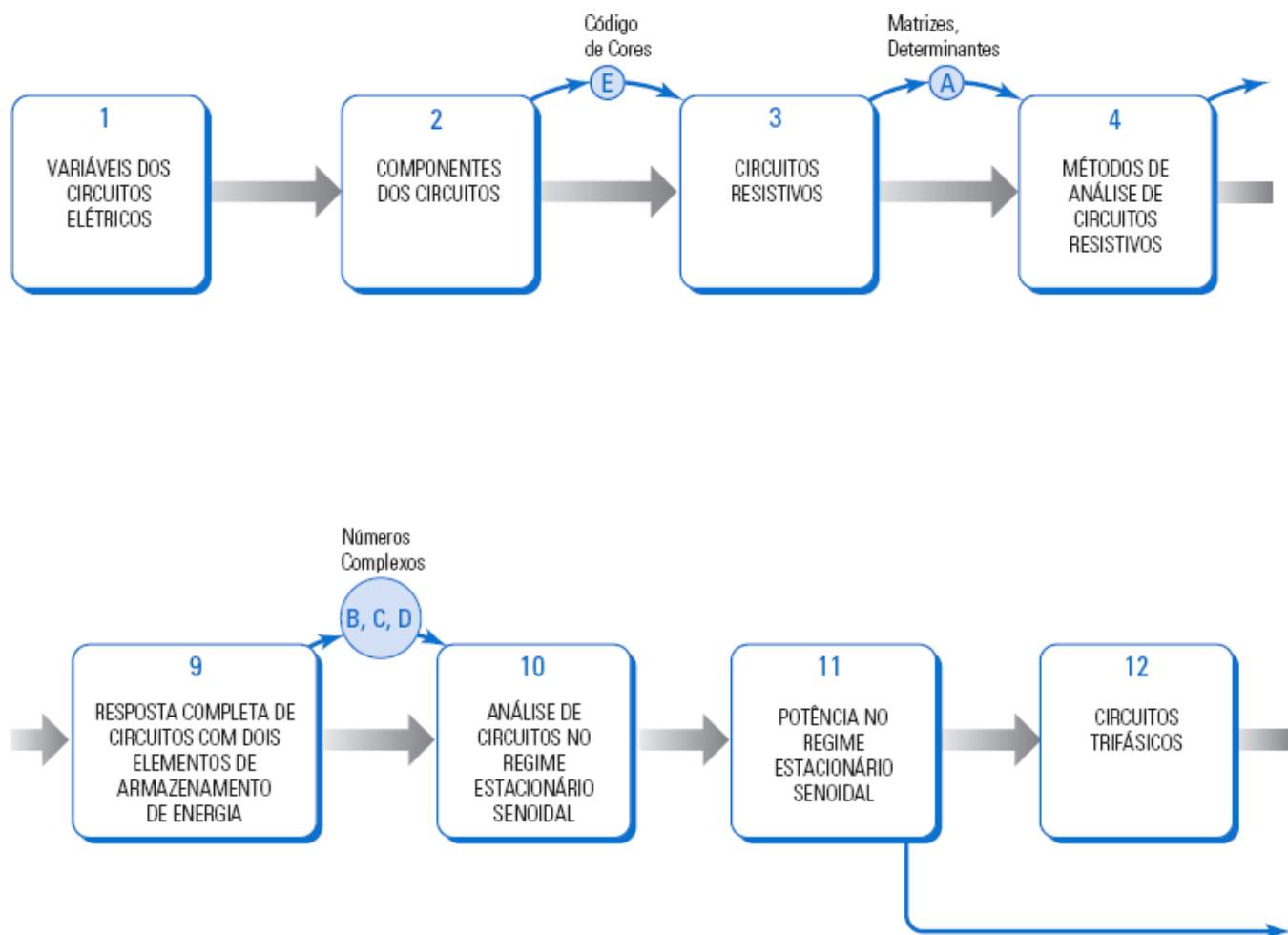



FIGURA 1 Fluxograma mostrando sequências alternativas dos tópicos do livro.

Características das Edições Anteriores que Foram Mantidas

Introdução

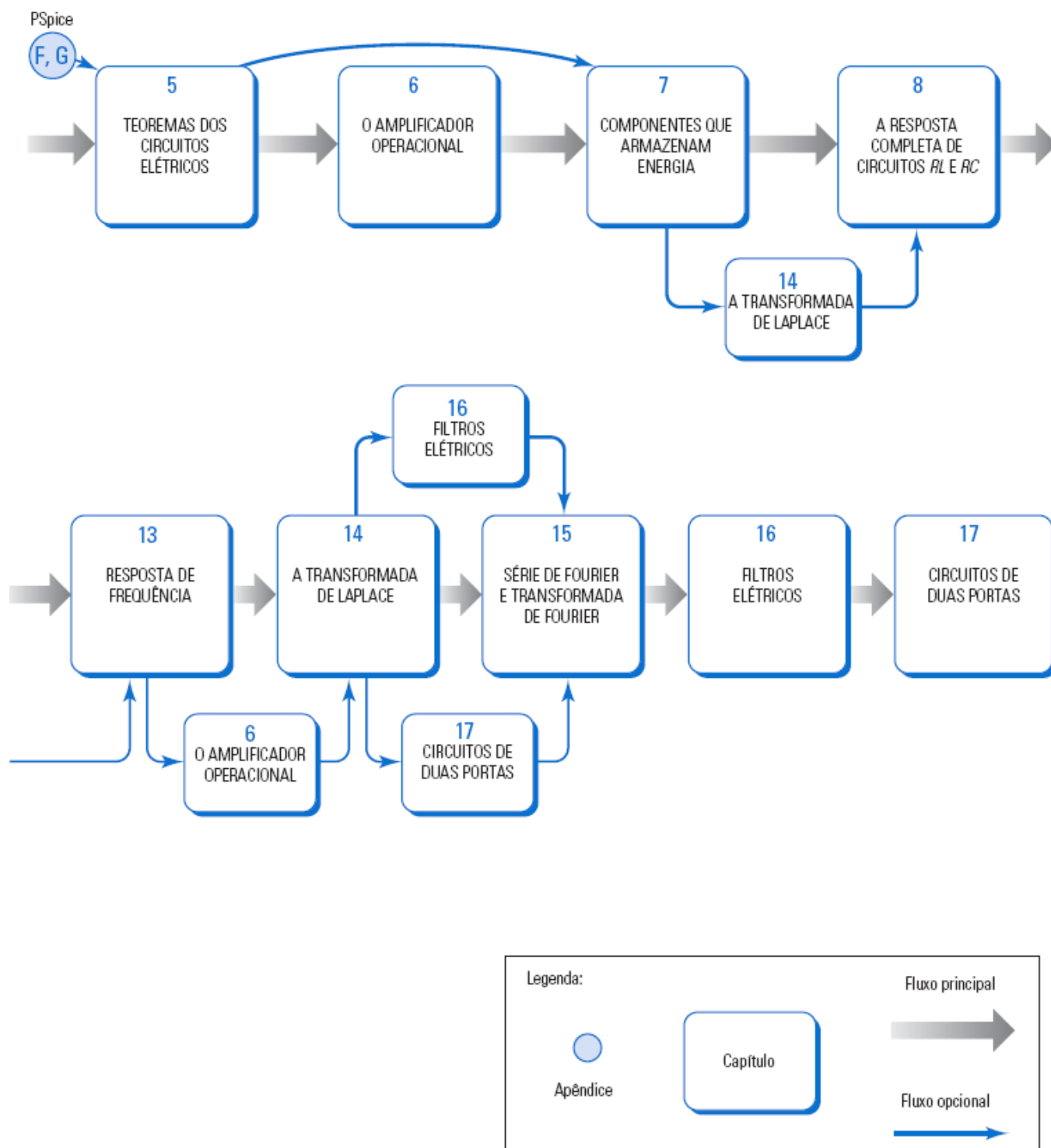
Cada capítulo começa com uma introdução que serve de motivação para os assuntos que serão abordados no capítulo.

Exemplos

Como um dos objetivos principais deste livro é capacitar os estudantes para a solução de problemas, incluímos quase 300 exemplos ilustrativos. Cada exemplo possui um título que informa ao leitor exatamente o que está sendo ilustrado nesse exemplo em particular.

Em alguns exemplos são propostos vários métodos de solução. Esses exemplos servem para mostrar aos estudantes que vários métodos diferentes podem ser usados para chegar ao mesmo resultado ou que, em alguns casos, pode haver mais de uma solução para um problema. Isso ajuda os alunos a desenvolver o pensamento crítico necessário para fazer a melhor opção nos casos em que várias escolhas são possíveis.

O uso do PSpice e do MATLAB para resolver problemas de circuitos recebeu uma atenção especial. Foram incluídos dois apêndices, um dedicado ao PSpice e outro ao MATLAB. Esses apêndices descrevem as aplicações principais dos dois programas e ilustram os passos necessários para utilizá-los. Além disso, o PSpice e o MATLAB são usados em vários capítulos para resolver problemas de projeto e análise de circuitos. Assim, por exemplo, o PSpice é usado no Capítulo 5 para determinar um circuito equivalente de Thévenin e no Capítulo 15 para representar entradas e saídas de circuitos como séries de Fourier. O MATLAB é usado várias vezes para traçar gráficos de entradas e saídas de circuitos que facilitam a visualização dos resultados de cálculos matemáticos. O MATLAB também ajuda a executar operações aritméticas longas e tediosas. No Capítulo 10, por exemplo, o MATLAB é usado para analisar circuitos de corrente alternada usando números

complexos; no Capítulo 14, é usado para executar a expansão em frações parciais necessária para calcular uma transformada inversa de Laplace.

Naturalmente, usar o PSpice e o MATLAB é muito mais do que simplesmente rodar os programas. Dedicamos uma atenção especial à interpretação da saída desses programas de computador e à confirmação de que as respostas estão corretas. Em geral, isso é feito na seção chamada "Como Podemos Testar...?" que aparece no final de cada capítulo. Assim, por exemplo, a Seção 8.9 mostra como interpretar e verificar uma resposta transitória fornecida pelo PSpice e a Seção 13.7 mostra como interpretar e verificar uma resposta de frequência fornecida pelo MATLAB ou pelo PSpice.

Exemplos de Projeto, Método para Solução de Problemas e "Como Podemos Testar...?"

Todos os capítulos terminam com um exemplo de projeto que utiliza os métodos discutidos no capítulo para resolver um problema de projeto. Um método formal para solução de problemas é apresentado no Capítulo 1 e usado em todos os exemplos de projeto. Um dos passos mais importantes do método para solução de problemas consiste em

verificar se a solução está correta. Todos os capítulos incluem uma seção intitulada “Como Podemos Testar. . .?” que ilustra o modo como os resultados obtidos no capítulo podem ser testados para verificar se estão corretos.

Fórmulas, Equações e Comentários Importantes

Equações, fórmulas e comentários importantes são destacados no texto para facilitar a consulta.

Tabelas e Figuras Importantes

Os métodos e processos apresentados neste livro estão condensados em algumas tabelas e figuras que poderão ser úteis ao leitor durante a solução dos problemas.

- Tabela 1.5-1. A convenção passiva.
- Figura 2.7-1 e Tabela 2.7-1. Fontes dependentes.
- Tabela 3.10-1. Fontes em série e em paralelo.
- Tabela 3.10-1. Elementos em série e em paralelo. Divisão de tensão e de corrente.
- Figura 4.2-3. Tensões de nó e correntes e tensões nos elementos.
- Figura 4.5-4. Correntes de malha e correntes e tensões nos elementos.
- Figuras 5.4-3 e 5.4-4. Circuitos equivalentes de Thévenin.
- Figura 6.3-1. O amplificador operacional ideal.
- Figura 6.5-1 Circuitos com operadores operacionais.
- Tabela 7.8-1 Capacitores e indutores.
- Tabela 7.13-2. Capacitores e indutores em série e em paralelo.
- Tabela 8.11-1. Solução de circuitos de primeira ordem.
- Tabelas 9.13-1, 2 e 3. Circuitos de segunda ordem.
- Tabela 10.5-1 Divisão de tensão e corrente em circuitos de CA.
- Tabela 10.16-1. Circuitos de CA no domínio da frequência (fasores e impedâncias)
- Tabela 11.5-1. Potência em circuitos de CA.
- Tabelas 11.13-1 e 11.13-2. Indutores acoplados e transformadores ideais.
- Tabela 13.4-1. Circuitos ressonantes.
- Tabelas 14.2-1 e 14.2-2. Transformadas de Laplace.
- Tabela 14.7-1. Representações de elementos no domínio do tempo e da frequência.
- Tabela 15.4-1 Séries de Fourier de algumas formas de onda periódicas.

Introdução ao Processamento de Sinais

O processamento de sinais é uma aplicação importante dos circuitos elétricos. Este livro apresenta o processamento de sinais de duas formas. Em primeiro lugar, duas seções (as Seções 6.6 e 7.9) descrevem métodos para projetar circuitos elétricos que implementam equações algébricas e diferenciais. Em segundo lugar, numerosos exemplos e problemas em vários capítulos do livro ilustram o processamento de sinais. Os sinais de entrada e saída de um circuito elétrico são identificados explicitamente em cada um desses exemplos e problemas. Esses exemplos e problemas investigam a relação ente os sinais de entrada e saída que é imposta pelo circuito.

Exemplos e Exercícios Interativos

Muitos exemplos deste livro são rotulados como exemplos interativos. Isso significa que versões digitais do exemplo estão disponíveis no site da LTC Editora. A Figura 2 ilustra a relação entre o exemplo do livro e a versão disponível na Internet. A Figura 2*a* mostra um exemplo do Capítulo 3. O exemplo interativo da Figura 2*b* é semelhante ao da Figura 2*a*, mas apresenta algumas diferenças:

- Os valores dos parâmetros do circuito podem mudar.
- A polaridade das fontes pode mudar.
- A polaridade de referência da tensão medida pode mudar.

- A pergunta pode ser diferente. No exemplo mostrado na Figura 2*b*, o aluno deve calcular o valor de um dos componentes do circuito a partir da tensão medida.

Nos problemas interativos, o computador propõe um problema, recebe uma resposta e verifica se a resposta está correta. Assim, o aluno fica sabendo na hora se está dominando o assunto. Nos problemas interativos, os valores dos parâmetros são escolhidos de forma pseudoaleatória, de modo que o aluno dispõe de um suprimento quase inesgotável de problemas para praticar.

O exercício interativo mostrado na Figura 2*c* envolve um circuito semelhante, mas que não é o mesmo do exemplo. Nos exercícios interativos, como nos problemas interativos, o computador propõe um problema, recebe uma resposta e verifica se a resposta está correta. O aluno também pode fazer com que o computador apresente exemplos de problemas resolvidos, apertando o botão Exemplos Resolvidos.

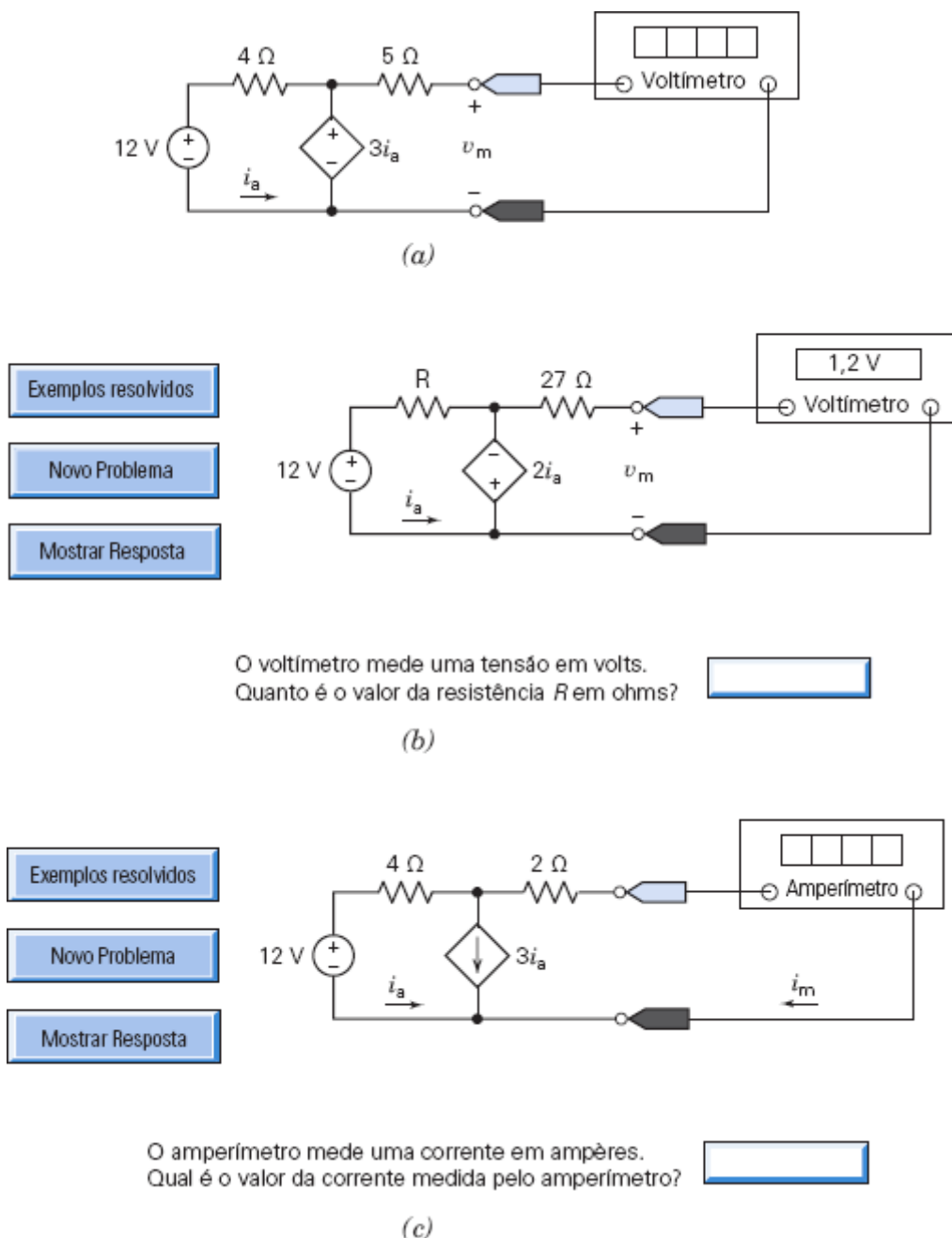



FIGURA 2 (*a*) O circuito do Exemplo 3.2-5. (*b*) Um exemplo interativo correspondente. (*c*) Um exercício interativo correspondente.

Novos exemplos ou exercícios podem ser obtidos apertando o botão Novo Problema. O aluno pode ver a resposta correta apertando o botão Mostrar Resposta. Os exemplos e exercícios interativos oferecem centenas de problemas para o aluno praticar, com um número quase inesgotável de valores para os parâmetros, todos com respostas que podem ser verificadas imediatamente pelo computador.

Agradecimentos

Agradecemos às muitas pessoas que colaboraram na preparação deste livro. Somos especialmente gratos ao nosso editor Daniel Sayre, ao gerente de marketing Chris Ruel e à assistente de marketing Marissa Carroll por seus apoio e entusiasmo. Agradecemos a Tim Lindner e Kevin Holm da Wiley e a Bruce Hobart da Laserwords Maine por seus esforços na produção deste livro. Somos gratos à diagramadora Jenny Welter, à editora de conteúdo Wendy Ashenberg e à assistente editorial Jess Knecht por suas contribuições significativas para este projeto.

Somos especialmente gratos ao corpo de revisores que analisou os problemas e soluções para garantir que estavam corretos.

Revisores Técnicos

Khalid Al-Olimat, Ohio Northern University
Lisa Anneberg, Lawrence Technological University
Horace Gordon, University of South Florida
Lisimachos Kondi, SUNY, Buffalo
Michael Polis, Oakland University
Sannasi Ramanan, Rochester Institute of Technology
William Robbins, University of Minnesota
James Rowland, University of Kansas
Mike Shen, Duke University
Thyagarajan Srinivasan, Wilkes University
Aaron Still, US Naval Academy
Howard Weinert, Johns Hopkins University
Xiao-Bang Xu, Clemson University
Jiann Shiun Yuan, University of Central Florida

Revisores

Rehab Abdel-Kader, Georgia Southern University
Said Ahmed-Zaid, Boise State University
Farzan Aminian, Trinity University
Constantin Apostoaia, Purdue University Calumet
Jonathon Bagby, Florida Atlantic University
Carlotta Berry, Tennessee State University
Kiron Bordoloi, University of Louisville
Mauro Caputi, Hofstra University
Edward Collins, Clemson University
Glen Dudevoir, US Military Academy
Malik Elbuluk, University of Akron
Prasad Enjeti, Texas A&M University
Ali Eydgahi, University of Maryland Eastern Shore
Carlos Figueroa, Cabrillo College
Walid Hubbi, New Jersey Institute of Technology
Brain Huggins, Bradley University
Chris Ianello, University of Central Florida
Simone Jarzabek, ITT Technical Institute
James Kawamoto, Mission College
Rasool Kenarangui, University of Texas Arlington
Jumoke Ladeji-Osias, Morgan State University
Mark Lau, Universidad del Turabo
Seyed Mousavinezhad, Western Michigan University
Philip Munro, Youngstown State University
Ahmad Nafisi, California Polytechnic State University
Arnost Neugroschel, University of Florida

Tokunbo Ogunfunmi, Santa Clara University
Gary Perks, California Polytechnic State University, San Luis Obispo
Owe Petersen, Milwaukee School of Engineering
Ron Pieper, University of Texas, Tyler
Teodoro Robles, Milwaukee School of Engineering
Pedda Sannuti, Rutgers University
Marcelo Simoes, Colorado School of Mines
Ralph Tanner, Western Michigan University
Tristan Tayag, Texas Christian University
Jean-Claude Thomassian, Central Michigan University
John Ventura, Christian Brothers University
Annette von Jouanne, Oregon State University
Ravi Warrier, Kettering University
Gerald Woelfl, Milwaukee School of Engineering
Hewlon Zimmer, US Merchant Marine Academy

Sumário

CAPÍTULO 4

Métodos de Análise de Circuitos Resistivos

CAPÍTULO 5

Teoremas dos Circuitos Elétricos

CAPÍTULO 6
O Amplificador Operacional

CAPÍTULO 7
Componentes que Armazenam Energia

CAPÍTULO 8
A Resposta Completa de Circuitos *RL* e *RC*

CAPÍTULO 9
Resposta Completa de Circuitos com Dois Elementos de Armazenamento de Energia

CAPÍTULO 10
Análise de Circuitos no Regime Estacionário Senoidal

CAPÍTULO 13
Resposta de Frequência

CAPÍTULO 14
A Transformada de Laplace

CAPÍTULO 15
Série de Fourier e Transformada de Fourier

CAPÍTULO 16
Filtros Elétricos

CAPÍTULO 1 Variáveis dos Circuitos Elétricos

NESTE CAPÍTULO

1.1 *Introdução*

Circuito é um conjunto de componentes elétricos ligados entre si. Os engenheiros usam circuitos elétricos para resolver problemas que são importantes para a sociedade moderna. Em particular:

1. Circuitos elétricos são usados na geração, transmissão e consumo da energia elétrica.
2. Circuitos elétricos são usados na codificação, decodificação, armazenamento, recuperação, transmissão e processamento da informação.

Neste capítulo, vamos fazer o seguinte:

- Representar a corrente e a tensão de um componente, com atenção especial para o sentido de referência da corrente e a polaridade de referência da tensão.
- Calcular a potência e a energia fornecida e recebida por um componente.
- Usar a convenção passiva para determinar se o produto da corrente pela tensão de um componente é a potência fornecida pelo componente ou a potência recebida pelo componente.
- Usar a notação científica para representar grandezas elétricas com uma larga faixa de valores.

1.2 *Circuito Elétrico e Corrente Elétrica*

A característica marcante da eletricidade, quando comparada com outras fontes de energia, é sua mobilidade e versatilidade. A energia elétrica pode ser conduzida para qualquer lugar através de um par de fios e, dependendo das necessidades do usuário, convertida em luz, calor ou movimento.

Circuito elétrico é um conjunto de componentes elétricos ligados entre si de modo a formar um percurso fechado através do qual pode circular uma corrente.

Considere o circuito simples da Figura 1.2-1, constituído por dois componentes elétricos bem conhecidos, uma bateria e um resistor. Cada componente é representado por um elemento de dois terminais como o da Figura 1.2-2. Os componentes são chamados de dispositivos e os terminais são chamados de nós.

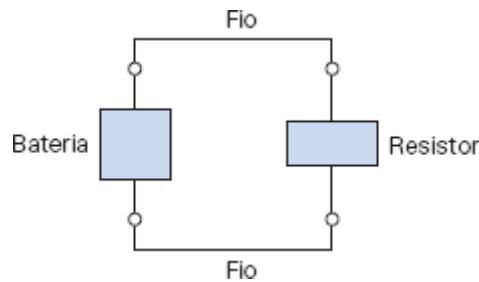



FIGURA 1.2-1 Um circuito simples.

FIGURA 1.2-2 Componente elétrico de dois terminais, a e b.

A carga pode circular em um circuito elétrico. *Corrente é a taxa de variação com o tempo da carga que passa em um determinado ponto*. Carga é a propriedade intrínseca da matéria responsável pelos fenômenos elétricos. A quantidade de carga q pode ser expressa em termos da carga de um elétron, que é igual a $-1{,}602 \times 10^{-19}$ coulombs: –1 coulomb (–1 C) é a carga de $6{,}24 \times 10^{18}$ elétrons. A corrente que atravessa uma determinada área é definida pela carga elétrica q, em coulombs, que passa pela área por unidade de tempo.

Carga é a quantidade de eletricidade responsável pelos fenômenos elétricos.

A corrente pode ser expressa na forma

$$i = \frac{dq}{dt} \qquad (1.2\text{-}1)$$

A unidade de corrente é o ampère (A); um ampère corresponde a 1 coulomb por segundo.

Corrente é a taxa de variação do fluxo de carga elétrica em um determinado ponto.

Neste capítulo vamos usar letras minúsculas, como q, para representar grandezas que variam com o tempo, como $q(t)$, e letras maiúsculas, como Q, para representar grandezas constantes.

A corrente elétrica é tradicionalmente representada como o movimento de cargas positivas. Essa convenção foi criada por Benjamin Franklin, o primeiro grande cientista americano a estudar a eletricidade. Naturalmente, hoje sabemos que o movimento de carga nos condutores metálicos é o resultado do movimento de elétrons, que possuem carga negativa. Mesmo assim, descrevemos a corrente como um movimento de cargas positivas, de acordo com a convenção adotada no passado.

A Figura 1.2-3 mostra a notação que usamos para descrever uma corrente. A notação tem duas partes: um valor (talvez representado pelo nome de uma variável) e um sentido. É indiferente afirmar que a corrente existe *em* um componente ou *atravessa* o componente. A Figura 1.2-3 mostra que há duas formas de atribuir um sentido à corrente em um componente. A corrente i_1 é a taxa de variação da carga elétrica do terminal a para o terminal b. Por outro lado, a corrente i_2 é a taxa de variação da carga elétrica do terminal b para o terminal a. As correntes i_1 e i_2 têm o mesmo valor numérico, mas sentidos opostos. Assim, i_2 é o negativo de i_1:

$$i_1 = -i_2$$

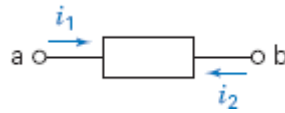



FIGURA 1.2-3 Corrente em um componente.

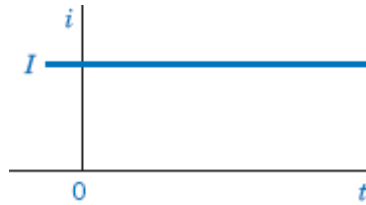



FIGURA 1.2-4 Corrente contínua de valor absoluto I.

Para indicar o sentido da corrente que é considerado positivo, usamos uma seta. Uma descrição completa de uma corrente requer tanto um valor (que pode ser positivo ou negativo) como um sentido (indicado por uma seta).

Se a corrente em um componente é constante, é representada pela letra I, como na Figura 1.2-4. Uma corrente constante é chamada de *corrente contínua* (cc).

A corrente contínua (cc) é uma corrente de valor constante.

Uma corrente que varia com o tempo, $i(t)$, pode ter muitas formas, como de uma rampa, uma senoide ou uma exponencial (Figura 1.2-5). Uma corrente senoidal é chamada de *corrente alternada* (ca).

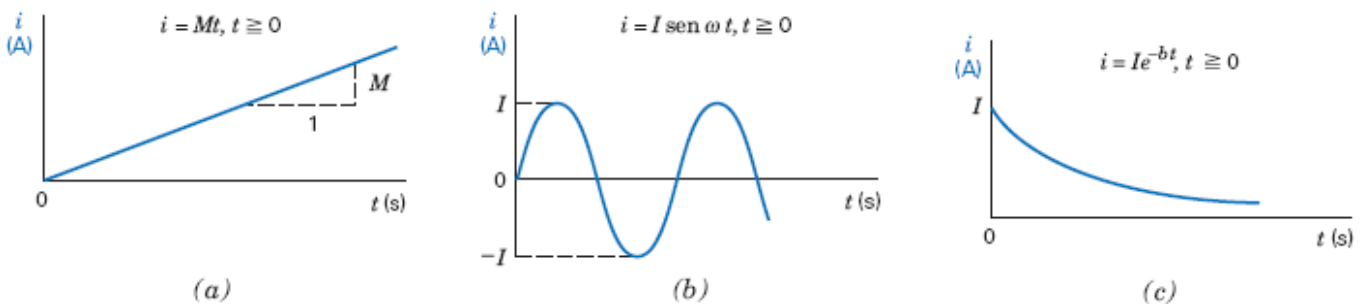



FIGURA 1.2-5 (*a*) Rampa de inclinação M. (*b*) Senoide. (*c*) Exponencial. I é uma constante. A corrente i é zero para $t < 0$.

Se a carga q é conhecida, a corrente i pode ser facilmente calculada usando a Eq. 1.2-1. Alternativamente, se a corrente i é conhecida, a carga q pode ser facilmente calculada; integrando a Eq. 1.2-1, obtemos

$$q = \int_{-\infty}^{1} i\, d\tau = \int_{0}^{1} i\, d\tau + q(0) \qquad (1.2\text{-}2)$$

em que $q(0)$ é a carga no instante $t = 0$.

EXEMPLO 1.2-1 Corrente a Partir da Carga

Determine a corrente em um componente sabendo que a carga que entra no componente é dada por

$$q = 12t \text{ C}$$

em que t é o tempo em segundos.

Solução

Lembre-se de que C representa o coulomb, a unidade de carga. De acordo com a Eq. 1.2-1, temos:

$$i = \frac{dq}{dt} = 12 \text{ A}$$

em que A representa a unidade de corrente, o ampère.

EXEMPLO 1.2-2 Carga a Partir da Corrente

Determine a carga que entrou no terminal de um componente entre os instantes $t = 0$ e $t = 3$ s, sabendo que a corrente no componente nesse intervalo foi a que aparece na Fig. 1.2-6.

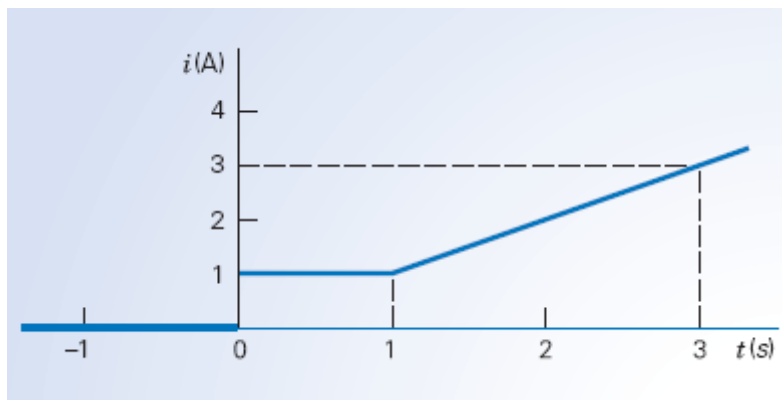



FIGURA 1.2-6 Corrente em função do tempo no Exemplo 1.2-2.

Solução

De acordo com a Figura 1.2-6, a corrente $i(t)$ é dada por

$$i(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 < t \leq 1 \\ t & t > 1 \end{cases}$$

Usando a Eq. 1.2-2, obtemos:

$$\begin{aligned} q(3) - q(0) &= \int_0^3 i(t)dt = \int_0^1 1\,dt + \int_1^3 t\,dt \\ &= t\Big|_0^1 + \frac{t^2}{2}\Big|_1^3 = 1 + \frac{1}{2}(9-1) = 5 \text{ C} \end{aligned}$$

Alternativamente, podemos observar que, para integrar $i(t)$ de $t = 0$ a $t = 3$ s, basta calcular a área sob a curva da Figura 1.2-6. Assim, temos:

$$q = 1 + 2 \times 2 = 5 \text{ C}$$

EXERCÍCIO 1.2-1 Determine a carga que entrou em um componente até o instante t, sabendo que $i(t) = 8t^2 - 4t$ A para $t \geq 0$ e $q(t) = 0$ para $t < 0$.

Resposta: $q(t) = \frac{8}{3}t^3 - 2t^2$ C

EXERCÍCIO 1.2-2 A carga que entrou em um componente de um circuito é dada por $q(t) = 4$ sen $3t$ C para $t \geq 0$ e $q(t) = 0$ para $t < 0$. Determine a corrente no componente para $t > 0$.

Resposta: $i(t) = \frac{d}{dt} 4 \operatorname{sen} 3t = 12 \cos 3t$ A

1.3 Sistemas de Unidades

Quando representamos um circuito e seus componentes, precisamos definir um sistema coerente de unidades para as grandezas presentes no circuito. Em uma reunião da Conferência Geral de Pesos e Medidas realizada em 1960, os representantes modernizaram o sistema métrico e criaram o Sistema Internacional de Unidades, mais conhecido como SI.

SI é a abreviação de Sistema Internacional de Unidades.

A Tabela 1.3-1 mostra as unidades fundamentais, ou básicas, do SI. Os símbolos de unidades que representam nomes próprios (nomes de pessoas) são letras maiúsculas; os outros símbolos são letras minúsculas. Não são usados pontos finais depois dos símbolos e os símbolos são usados sempre no singular. As unidades das outras grandezas físicas, conhecidas como unidades secundárias, são obtidas a partir de combinações das unidades fundamentais. A Tabela 1.3-2 mostra algumas das unidades secundárias mais usadas do SI e suas expressões em termos das unidades fundamentais ou de outras unidades secundárias. São também mostrados os símbolos dessas unidades, caso existam.

Tabela 1.3-1 Unidades Básicas do SI

	UNIDADE DO SI	
GRANDEZA	NOME	SÍMBOLO
Comprimento	metro	m
Massa	quilograma	kg
Tempo	segundo	s
Corrente elétrica	ampère	A
Temperatura termodinâmica	kelvin	K
Quantidade de substância	mol	mol
Intensidade luminosa	candela	cd

Tabela 1.3-2 Algumas Unidades Secundárias do SI

GRANDEZA	NOME DA UNIDADE	EXPRESSÃO	SÍMBOLO
Aceleração linear	metro por segundo ao quadrado	m/s^2	
Velocidade linear	metro por segundo	m/s	

Frequência	hertz	s^{-1}	Hz
Força	newton	$kg \cdot m/s^2$	N
Pressão ou tensão mecânica	pascal	N/m^2	Pa
Massa específica	quilograma por metro cúbico	kg/m^2	
Energia ou trabalho	joule	$N \cdot m$	J
Potência	watt	J/s	W
Carga elétrica	coulomb	$A \cdot s$	C
Potencial elétrico	volt	W/A	V
Resistência elétrica	ohm	V/A	Ω
Condutância	siemens	A/V	S
Capacitância	farad	C/V	F
Fluxo magnético	weber	$V \cdot s$	Wb
Indutância	henry	Wb/A	H

Tabela 1.3-3 Prefixos do SI

MÚLTIPLO	PREFIXO	SÍMBOLO
10^{12}	tera	T
10^{9}	giga	G
10^{6}	mega	M
10^{3}	quilo	k
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	mili	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p
10^{-15}	femto	f

Unidades fundamentais como o metro (m), o segundo (s) e o ampère (A) podem ser usadas para definir as unidades secundárias. Assim, por exemplo, a unidade de corrente, o coulomb (C), é definida como o produto da unidade de corrente pela unidade de tempo (A · s). A unidade de energia, o joule (J), é definida como o produto da unidade de força pela unidade de tempo (N · m).

A grande vantagem do SI é que utiliza um sistema decimal para relacionar unidades maiores ou menores à unidade básica. As potências de 10 são representadas pelos prefixos que aparecem na Tabela 1.3-3. Uma unidade de comprimento muito usada, por exemplo, é o centímetro (cm), que equivale a 0,01 m.

O prefixo nunca é escrito isoladamente; deve sempre ser seguido pelo símbolo de uma unidade. Assim, por exemplo, 2,5 kW equivalem a 2500 W e 12 mA correspondem a 0,012 A.

EXEMPLO 1.3-1 Unidades do SI

Uma massa de 150 gramas é submetida a uma força de 100 newtons. Determine o trabalho necessário para que a massa percorra uma distância de 10 centímetros. Determine também a potência desenvolvida se a massa completar o movimento em 1 milissegundo.

Solução

O trabalho (que, no caso, é igual à energia consumida) é dado por

$$\text{energia} = \text{força} \times \text{distância} = 100 \times 0{,}1 = 10 \text{ J}$$

Observe que usamos a distância em metros. A potência é dada por

$$\text{potência} = \frac{\text{energia}}{\text{intervalo de tempo}}$$

em que o período de tempo é 10^{-3} s. Assim,

$$\text{potência} = \frac{10}{10^{-3}} = 10^4 \text{ W} = 10 \text{ kW}$$

EXERCÍCIO 1.3-1 Qual das três correntes $i_1 = 45\ \mu\text{A}$, $i_2 = 0{,}03$ mA e $i_3 = 25 \times 10^{-4}$ A é a maior?

Resposta: i_3 é a maior.

1.4 *Tensão*

As variáveis básicas de um circuito elétrico são corrente e tensão. Essas variáveis descrevem a passagem de cargas pelos componentes de um circuito e a energia necessária para promover essa passagem. A Figura 1.4-1 mostra a notação que é usada para descrever uma tensão. A notação envolve dois aspectos: um valor (talvez representado pelo nome de uma variável) e um sentido. O valor de uma tensão pode ser positivo ou negativo. O sentido da tensão é dado pela polaridade (+, –). Por uma questão de linguagem, dizemos que existe uma tensão *entre os terminais* de um componente. Como mostra a Figura 1.4-1, há duas formas de indicar a tensão entre os terminais de um componente. A tensão v_{ba} é proporcional ao trabalho necessário para transportar uma carga positiva do terminal *a* para o terminal *b*. Por outro lado, a tensão v_{ab} é proporcional ao trabalho necessário para transportar uma carga positiva do terminal *b* para o terminal *a*. A tensão v_{ab} também pode ser interpretada como a "tensão do terminal *b* em relação ao terminal *a*". Analogamente, a tensão v_{ab} pode ser interpretada como "a tensão do terminal *a* em

relação ao terminal *b*". Alternativamente, podemos dizer que v_{ba} é a queda de tensão do terminal *a* para o terminal *b*. As tensões v_{ab} e v_{ba} têm o mesmo valor absoluto e polaridades opostas. Isso significa que

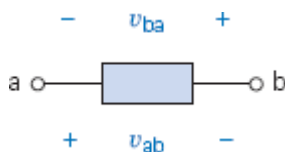



FIGURA 1.4-1 Tensão entre os terminais de um componente.

$$v_{ab} = -v_{ba}$$

Quando estamos considerando a tensão v_{ba}, o terminal b é chamado de "terminal +" e o terminal a é chamado de "terminal –". Por outro lado, quando estamos considerando a tensão v_{ab}, o terminal a é chamado de "terminal +" e o terminal b é chamado de "terminal –".

A tensão entre os terminais de um componente é o **trabalho** (energia) necessário(a) para transportar uma unidade de carga positiva do terminal – para o terminal +. A unidade de tensão é o volt, V.

A tensão entre os terminais de um componente é dada por

$$v = \frac{dw}{dq} \tag{1.4-1}$$

em que *v* é a tensão, *w* é a energia (ou trabalho) e *q* é a carga. Uma carga de 1 coulomb gasta uma energia de 1 joule para percorrer uma diferença de potencial de 1 volt.

1.5 Potência e Energia

É muito importante conhecer a potência e energia fornecidas a um componente. Assim, por exemplo, a luz produzida por uma lâmpada elétrica pode ser expressa em termos de potência. Sabemos que uma lâmpada de 300 watts produz mais luz que uma lâmpada de 100 watts.

Potência é a taxa com a qual a energia é fornecida ou absorvida.

Assim, temos a equação

$$p = \frac{dw}{dt} \tag{1.5-1}$$

em que *p* é a potência em watts, *w* é a energia em joules e *t* é o tempo em segundos. A potência associada à corrente em um componente é dada por

$$p = \frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dq} \cdot \frac{dq}{dt} = v \cdot i \tag{1.5-2}$$

A Eq. 1.5-2 mostra que a potência é simplesmente o produto da tensão entre os terminais de um componente multiplicada pela corrente que o atravessa. A unidade de potência é o watt.

Duas variáveis elétricas são atribuídas a cada componente de um circuito: uma tensão e uma corrente. A Figura 1.5-1 mostra que existem duas formas diferentes de definir o sentido da corrente e a polaridade da

tensão. Na Figura 1.5-1*a*, a corrente entra no componente pelo terminal + da tensão e sai pelo terminal –. Na Figura 1.5-1*b*, por outro lado, a corrente entra no componente pelo terminal – e sai pelo terminal +.

Considere primeiro a Figura 1.5-1*a*. Quando a corrente entra no componente pelo terminal + e sai pelo terminal –, dizemos que a tensão e a corrente "estão de acordo com a convenção passiva". Na convenção passiva, a tensão movimenta uma carga positiva no sentido indicado pela corrente. Nesse caso, a potência calculada multiplicando a tensão entre os terminais do componente pela corrente que o atravessa

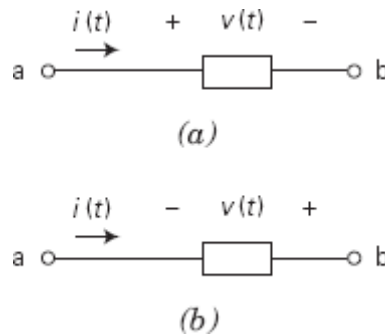



FIGURA 1.5-1 (*a*) A tensão e a corrente no componente **estão de acordo** com a convenção passiva. (*b*) A tensão e a corrente no componente **não estão de acordo** com a convenção passiva.

$$p = vi$$

é a potência **absorvida** pelo componente. (Essa potência também é chamada de "potência recebida pelo componente" e "potência dissipada pelo componente".) A potência absorvida por um componente pode ser positiva ou negativa, dependendo dos valores da tensão e da corrente no componente.

Considere agora a Figura 1.5-1*b*. Nesse caso, a convenção passiva não é adotada. Em vez disso, a corrente entra no componente pelo terminal – e sai pelo terminal +. Isso significa que a tensão movimenta uma carga positiva no sentido oposto ao indicado para a corrente. Assim, quando a tensão e a corrente em um componente não estão de acordo com a convenção passiva, a potência calculada multiplicando a tensão entre os terminais de um componente pela corrente que o atravessa é a potência fornecida pelo componente. A potência fornecida por um componente pode ser positiva ou negativa, dependendo dos valores da tensão e corrente no componente.

A potência absorvida por um componente e a potência fornecida pelo mesmo componente estão relacionadas através da equação

$$\text{potência absorvida} = -\,\text{potência fornecida}$$

As regras da convenção passiva aparecem na Tabela 1.5-1. Quando a tensão e a corrente em um componente estão de acordo com a convenção passiva, a energia absorvida pelo componente pode ser calculada a partir da Eq. 1.5-1 escrevendo a equação na forma:

$$dw = p\,dt \qquad (1.5\text{-}3)$$

Tabela 1.5-1 Potência Absorvida ou Fornecida por um Componente

POTÊNCIA RECEBIDA POR UM COMPONENTE	POTÊNCIA FORNECIDA POR UM COMPONENTE
Como as direções de referência de *v* e *i* estão de acordo com a convenção passiva, a potência	Como as direções de referência de *v* e *i* não estão de acordo com a convenção passiva, a potência
$p = vi$	$p = vi$

é a potência absorvida pelo componente.

é a potência fornecida pelo componente.

Integrando ambos os membros, obtemos:

$$w = \int_{-\infty}^{t} p \, d\tau \qquad (1.5\text{-}4)$$

Se o componente recebe potência apenas para $t \geq t_0$ e se $t_0 = 0$, temos:

$$w = \int_{0}^{t} p \, d\tau \qquad (1.5\text{-}5)$$

EXEMPLO 1.5-1 Potência e Energia Elétrica

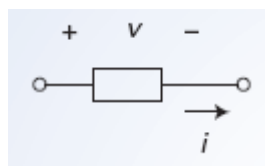



FIGURA 1.5-2 O componente do Exemplo 1.5-1.

Considere o componente da Figura 1.5-2 e suponha que $v = 8$ V e $i = 25$ mA. Determine a potência recebida pelo componente e a energia recebida em um intervalo de 10 ms.

Solução

Como, na Figura 1.5-2, a corrente *i* e a tensão *v* estão de acordo com a convenção passiva, a potência

$$p = vi = 8(0{,}025) = 0{,}2 \text{ W} = 200 \text{ mW}$$

é a potência *recebida* pelo componente. A energia recebida pelo componente em um intervalo de 10 ms é

$$w = \int_{0}^{t} p \, dt = \int_{0}^{0{,}010} 0{,}2 \, dt = 0{,}2(0{,}010) = 0{,}002 \text{ J} = 2 \text{ mJ}$$

EXEMPLO 1.5-2 Potência Elétrica e a Convenção Passiva

$i = 2$ A   + $v_{ab} = 4$ V −

a   b

− $v_{ba} = -4$ V +

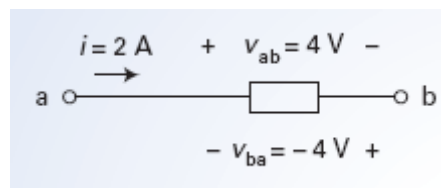



FIGURA 1.5-3 O componente do Exemplo 1.5-2.

Considere o componente da Figura 1.5-3. Como a corrente *i* e a tensão v_{ab} estão de acordo com a convenção passiva, a potência *recebida* pelo componente é dada por

$$i \cdot v_{ab} = 2 \cdot (4) = 8\ \text{W}$$

Como a corrente i e a tensão v_{ba} não estão de acordo com a convenção passiva, a potência *fornecida* pelo componente é dada por

$$i \cdot v_{ba} = 2 \cdot (-4) = -8\text{W}$$

Como era de se esperar,

$$\text{potência recebida} = -\ \text{potência fornecida}$$

EXEMPLO 1.5-3 Potência, Energia e a Convenção Passiva

Considere o componente da Figura 1.5-4 com $v(t) = 12e^{-8t}$ V e $i(t) = 5e^{-8t}$ A para $t \geq 0$. Determine a potência fornecida pelo componente e a energia fornecida pelo componente durante o primeiro segundo de operação. Suponha que v e i são nulas para $t < 0$.

FIGURA 1.5-4 O componente do Exemplo 1.5-3.

Solução

A potência

$$p(t) = v(i)\ i(t) = (12e^{-8t})\ (5e^{-8t}) = 60e^{-16t}\ \text{W}$$

é a potência *fornecida* pelo componente, já que $v(t)$ e $i(t)$ não estão de acordo com a convenção passiva. Isso significa que o componente está fornecendo energia à carga que o atravessa.

A energia fornecida durante o primeiro segundo é

$$w(0{,}1) = \int_0^{0{,}1} p\ dt = \int_0^{0{,}1} (60e^{-16t})\ dt$$

$$= 60\frac{e^{-16t}}{-16}\bigg|_0^{0{,}1} = -\frac{60}{16}(e^{-1{,}6} - 1) = 3{,}75(1 - e^{-1{,}6}) = 2{,}99\ \text{J}$$

EXEMPLO 1.5-4 Energia de um Relâmpago

A corrente média em um relâmpago típico é 2×10^4 A e a duração típica de um relâmpago é 0,1 s (Williams, 1988). A tensão entre as nuvens e o solo é 5×10^8 V. Determine a carga total transferida para a terra e a energia liberada.

Solução

A carga total é

$$Q = \int_0^{0{,}1} i(t)\ dt = \int_0^{0{,}1} 2 \times 10^4\ dt = 2 \times 10^3\ \text{C}$$

A energia total liberada é

$$w = \int_0^{0,1} i(t) \times v(t)\, dt = \int_0^{0,1} (2 \times 10^4)(5 \times 10^8)\, dt = 10^{12}\ \text{J} = 1\ \text{TJ}$$

EXERCÍCIO 1.5-1 A Figura E 1.5-1 mostra quatro componentes identificados pelas letras *A*, *B*, *C* e *D*.

(a) Que componentes fornecem 12 W?

(b) Que componentes absorvem 12 W?

(c) Qual é o valor da potência recebida pelo componente *B*?

(d) Qual é o valor da potência fornecida pelo componente *B*?

(e) Qual é o valor da potência fornecida pelo componente *D*?

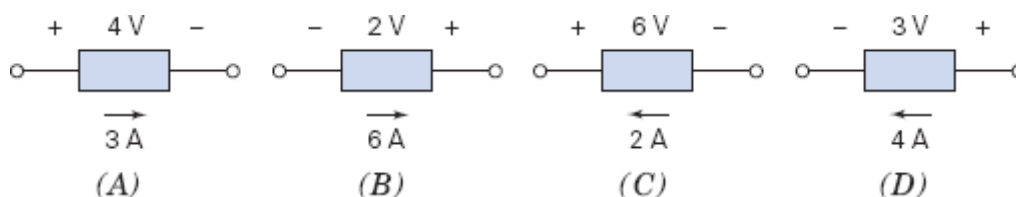



FIGURA E 1.5-1

Respostas: **(a)** *B* e *C*; **(b)** *A* e *D*; **(c)** –12 W; **(d)** 12 W; **(e)** –12 W

1.6 *Análise e Projeto de Circuitos*

A análise e o projeto de circuitos elétricos são as principais atividades descritas neste livro e constituem as habilidades básicas de um engenheiro eletricista. *Análise* de um circuito é o estudo metódico do circuito com o objetivo de conhecer o valor absoluto e o sentido de uma ou mais variáveis do circuito, como corrente ou tensão.

O processo de análise começa com a formulação do problema, que, normalmente, envolve a construção de um modelo do circuito, e termina com um ou mais testes para confirmar que a solução obtida está correta. Em geral, o primeiro passo do engenheiro é verificar quais são os dados disponíveis e que princípios deve usar para determinar a variável desconhecida.

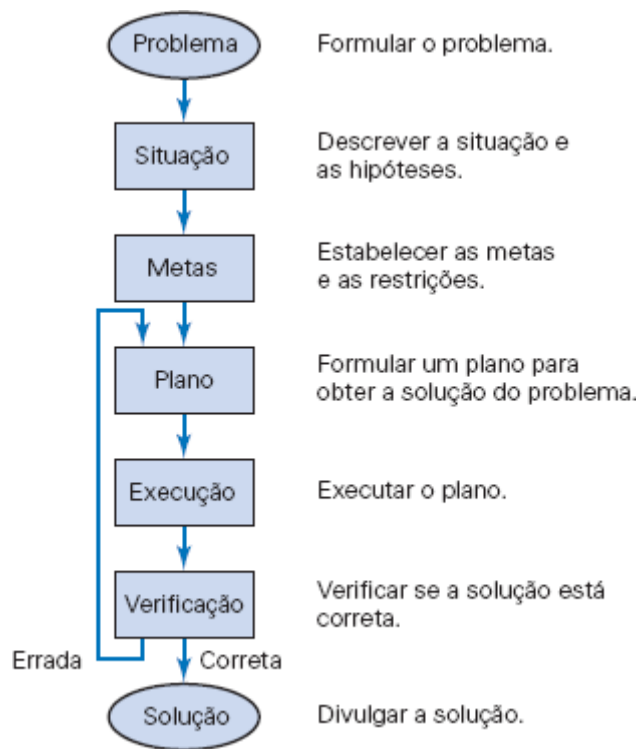



FIGURA 1.6-1 O método de solução de problemas.

O método de solução de problemas que será usado neste livro está representado de forma esquemática na Figura 1.6-1. Na maioria dos casos, o problema já foi formulado e o processo de análise envolve os cinco passos seguintes da Figura 1.6-1. Primeiro, descrevemos a situação e as hipóteses. Também definimos o modelo de circuito que será usado. Em segundo lugar, estabelecemos as metas e restrições e definimos a variável a ser determinada. O terceiro passo consiste em formular um plano para obter a solução do problema. Essa formulação envolve a escolha dos princípios e técnicas a serem empregados na solução. O quarto passo consiste em executar o plano que foi definido no terceiro passo. O passo final é verificar se a solução obtida está correta. Em caso afirmativo, divulgamos a solução registrando-a por escrito ou apresentando-a oralmente. Se o passo de verificação mostra que a solução está errada, voltamos ao terceiro passo, formulamos um plano melhor e executamos novamente os passos 4 e 5.

Vamos ilustrar este método analítico através de um exemplo. No Exemplo 1.6-1, usamos os passos da Figura 1.6-1 para resolver um problema específico.

EXEMPLO 1.6-1 O Método Formal de Solução de Problemas

Um pesquisador em um laboratório supõe que um componente de um circuito está absorvendo potência e usa um voltímetro e um amperímetro para medir a tensão e a corrente, como mostra a Figura 1.6-2. As medidas revelam que a tensão é $v = +12$ V e a corrente é $i = -2$ A. Verifique se a suposição do pesquisador está correta.

Descreva a Situação e as Hipóteses. Estritamente falando, o componente *está* absorvendo potência. O valor da potência absorvida pelo componente pode ser positivo, nulo ou negativo. Quando dizemos que alguém "supõe que um componente está absorvendo potência", estamos querendo dizer que alguém supõe que a potência absorvida pelo componente é positiva.

Os medidores são ideais e foram ligados ao componente de forma a medir a tensão v e a corrente i. Os valores da tensão e da corrente são dados pelas leituras dos medidores.

Estabeleça as Metas. Calcule a potência absorvida pelo componente para verificar se o valor da potência absorvida é positivo.

Formule um Plano. Verifique se a tensão e a corrente no componente estão de acordo com a convenção passiva. Se resposta for afirmativa, a potência absorvida pelo componente será dada por $p = vi$; se a resposta for negativa, a potência absorvida pelo componente será dada por $p = -vi$.

Execute o Plano. De acordo com a Tabela 1.5-1, a tensão e a corrente no componente estão de acordo com a convenção passiva. A potência absorvida pelo componente é, portanto,

$$p = vi = 12 \times (-2) = -24 \text{ W}$$

Como o valor da potência absorvida não é positivo, a suposição do pesquisador está errada.

Verifique se a Solução Está Correta. Vamos inverter a posição das pontas de prova do amperímetro, como na Figura 1.6-3. Agora o amperímetro está medindo a corrente i_1 e não a corrente i e, portanto, $i_1 = 2$ A e $v = 12$ V. Como i_1 e v não estão de acordo com a convenção passiva, $p = i_1 \cdot v = 24$ W é a potência fornecida pelo componente. Fornecer 24 W equivale a absorver –24 W, o que mostra que a solução está correta.

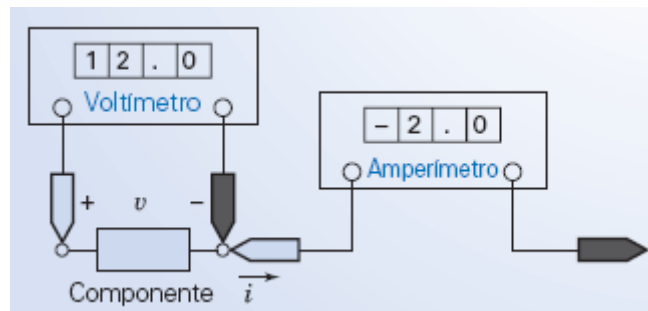



FIGURA 1.6-2 Um componente com um voltímetro e um amperímetro.

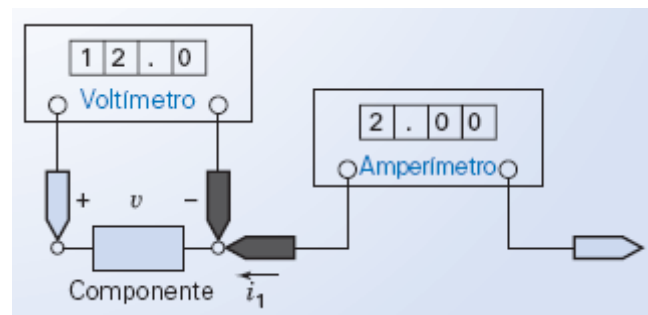



FIGURA 1.6-3 O circuito da Figura 1.6-2 com a posição das pontas de prova do amperímetro invertida.

***Projeto* é uma atividade criativa na qual um indivíduo ou uma equipe procura atingir um objetivo usando os recursos disponíveis. Projeto de circuitos elétricos é o processo de produzir a descrição de um circuito que atenda a uma série de especificações e restrições.**

O projeto de um circuito pode ser dividido em três fases: análise, síntese e avaliação. A primeira fase é a de diagnóstico, formulação e preparação, e termina com uma compreensão do problema e uma definição de metas específicas a serem atingidas. A segunda fase envolve a busca de soluções exequíveis. A terceira consiste em verificar se as soluções propostas atendem aos objetivos desejados e escolher a mais adequada. Neste processo, está implícito um ciclo no qual a solução é revista e aperfeiçoada através de uma nova análise. As três fases fazem parte de uma estratégia para planejar, organizar e aperfeiçoar projetos.

Projeto de um circuito é o processo de criar um circuito que atenda a uma série de requisitos.

O processo de solução de problemas ilustrado na Figura 1.6-1 é usado nos Exemplos de Projeto apresentados em cada capítulo deste livro.

1.7 *Como Podemos Testar...?*

Os engenheiros são frequentemente encarregados de verificar se a solução de um problema está correta. As soluções de problemas de projeto, por exemplo, devem ser verificadas para confirmar que todas as especificações estão sendo atendidas. Além disso, os resultados obtidos com o auxílio de computadores devem ser revistos para evitar possíveis erros na digitação dos dados e as afirmações dos vendedores a respeito dos produtos devem ser confirmadas.

Os estudantes de engenharia muitas vezes também precisam verificar se os resultados que obtiveram estão corretos. Às vezes falta muito pouco tempo para terminar um exame e é importante poder identificar rapidamente as questões que precisam ser refeitas.

Este livro inclui alguns exemplos que ilustram técnicas úteis para verificar se as soluções dos problemas discutidos no capítulo estão corretas. No final de cada capítulo, são propostos alguns problemas que oferecem ao aluno a oportunidade de aplicar essas técnicas.

EXEMPLO 1.7-1 Como Podemos Testar a Potência e a Convenção Passiva?

De acordo com o relatório de uma experiência de laboratório, os valores medidos de v e i no componente da Figura 1.7-1 são –5 V e 2 A, respectivamente. O relatório também afirma que a potência absorvida pelo componente é 10 W. **Como podemos verificar** se o valor da potência absorvida pelo componente está correto?

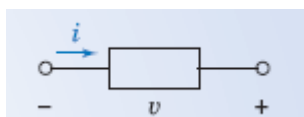



FIGURA 1.7-1 Componente de um circuito com a tensão e a corrente indicadas.

Solução

O componente do circuito absorve –10 W ou +10 W? A tensão e corrente mostradas na Figura 1.7-1 não estão de acordo com a convenção passiva. De acordo com a Tabela 1.5-1, o produto da tensão pela corrente nesse caso é a potência fornecida pelo componente e não a potência absorvida pelo componente. Assim, a potência fornecida pelo componente é

$$p = vi = (-5)\,(2) = -10 \text{ W}$$

Como a potência absorvida e a potência fornecida têm o mesmo valor absoluto e sinais opostos, isso significa que o componente está realmente absorvendo 10 W.

1.8 EXEMPLO DE PROJETO Controlador do Motor de um Foguete

Um pequeno foguete experimental usa o circuito de dois componentes da Figura 1.8-1 para controlar a alimentação do motor desde o instante da decolagem, em $t = 0$, até o combustível acabar, um minuto depois. Durante esse período de um minuto, o componente 1 deve fornecer uma energia de 40 mJ. O componente 1 é uma bateria a ser escolhida.

Sabe-se que $i(t) = De^{-t/60}$ mA para $t \geq 0$ e que a tensão entre os terminais do segundo componente é $v_2(t) = Be^{-t/60}$ V para $t \geq 0$. A corrente no circuito não pode exceder 1 mA. Determine os valores das constantes D e B e descreva a bateria.

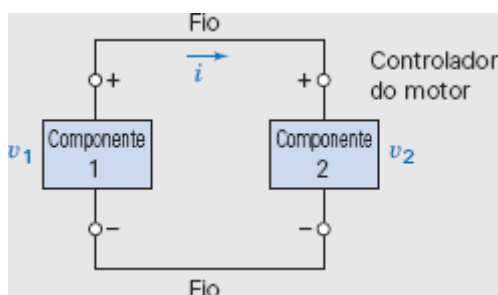



FIGURA 1.8-1 Circuito de controle do motor de um foguete.

Descreva a Situação e as Hipóteses

1. A corrente entra pelo terminal positivo do segundo componente.

2. A corrente sai pelo terminal positivo do primeiro componente.

3. Os fios são ideais e não têm nenhum efeito sobre o circuito (não absorvem energia).

4. O modelo do circuito, que aparece na Figura 1.8-1, supõe que a tensão é a mesma entre os terminais dos dois componentes, ou seja, que $v_1 = v_2$.

5. A tensão na bateria é $v_1 = Be^{-t/60}$ V, em que B é a tensão inicial da bateria, que se descarrega exponencialmente ao fornecer energia ao controlador.

6. O circuito funciona entre os instantes $t = 0$ e $t = 60$ s.

7. Como o valor máximo da corrente é atingido no instante inicial, devemos ter $i(0) = D \leq 1$ mA.

Estabeleça as Metas

Calcular a energia fornecida pelo primeiro componente durante o período de um minuto e escolher os valores das constantes D e B. Descrever a bateria escolhida.

Formule um Plano

Primeiro, calcular $v_1(t)$ e $i(t)$ e determinar a potência, $p_1(t)$, fornecida pelo primeiro componente. Em seguida, usando $p_1(t)$, calcular a energia fornecida durante o período de 60 s.

META	EQUAÇÃO	NECESSIDADE	INFORMAÇÃO
A energia w_1 para os primeiros 60 s	$w_1 = \int_0^{60} p_1(t)\,dt$	$p_1(t)$	v_1 e i conhecidas, exceto pelas constantes D e B

Execute o Plano

Para começar, calculamos $p_1(t)$:

$$\begin{aligned} p_1(t) = iv_1 &= (De^{-t/60} \times 10^{-3}\text{ A})(Be^{-t/60}\text{ V}) \\ &= DBe^{-t/30} \times 10^{-3}\text{ W} = DBe^{-t/30}\text{ mW} \end{aligned}$$

Em segundo lugar, calculamos w_1 no período de 60 s:

$$\begin{aligned} w_1 &= \int_0^{60} (DBe^{-t/30} \times 10^{-3})\,dt = \left.\frac{DB \times 10^{-3} e^{-t/30}}{-1/30}\right|_0^{60} \\ &= -30DB \times 10^{-3}(e^{-2} - 1) = 25{,}9DB \times 10^{-3}\text{ J} \end{aligned}$$

Como queremos que $w_1 \geq 40$ mJ,

$$40 \leq 25{,}9\,DB$$

Em seguida, escolhemos o valor limite, $D = 1$, para obter

$$B \geq \frac{40}{(25{,}9)(1)} = 1{,}54\text{ V}$$

Assim, escolhemos uma bateria de 2 V, sabendo que, nesse caso, a corrente será menor que 1 mA.

Verifique se a Solução Proposta Está Correta

Devemos verificar se a potência fornecida pela bateria de 2 V é pelo menos 40 mJ. Como $i = e^{-t/60}$ mA e $v_2 = 2e^{-t/60}$ V, a energia fornecida pela bateria é

$$w = \int_0^{60} (2e^{-t/60})(e^{-t/60} \times 10^{-3})\,dt = \int_0^{60} 2e^{-t/30} \times 10^{-3}\,dt = 51{,}8\text{ mJ}$$

Assim, a solução está correta e podemos implementá-la encomendando uma bateria de 2 V.

1.9 RESUMO

- A carga é uma propriedade intrínseca da matéria responsável pelos fenômenos elétricos. A corrente em um componente de um circuito é a taxa de variação com o tempo da carga que passa pelo componente. A tensão entre os terminais do componente indica a energia disponível para fazer com que a carga atravesse o componente.
- Dadas a corrente, i, e a tensão, v, em um componente de um circuito, a potência, p, e a energia, w, são dadas por

$$p = v \cdot i \quad \text{e} \quad w = \int_0^1 p \, d\tau$$

- A Tabela 1.5-1 ilustra o uso da convenção passiva para calcular a potência fornecida ou recebida por um componente de um circuito.
- As unidades do SI (Tabela 1.3-1) são hoje adotadas universalmente por engenheiros e cientistas. O uso de prefixos decimais (Tabela 1.3-3) facilita a indicação de valores muito grandes ou muito pequenos das grandezas elétricas.

PROBLEMAS

Seção 1.2 Circuito Elétrico e Corrente Elétrica

P 1.2-1 A carga total que entra em um componente de um circuito é $q(t) = 1{,}25(1 - e^{-5t})$ para $t \geq 0$ e $q(t) = 0$ para $t < 0$. Determine a corrente no componente em um instante $t \geq 0$.

Resposta: $i(t) = 6{,}25e^{-5t}$ A

P 1.2-2 A corrente em um componente de um circuito é $i(t) = 4(1 - e^{-5t})$ A para $t \geq 0$ e $i(t) = 0$ para $t < 0$. Determine a carga total que entrou no componente até um instante $t \geq 0$.

Sugestão: $q(0) = \int_{-\infty}^{0} i(\tau)\, dt = \int_{-\infty}^{0} 0 \, d\tau = 0$

Resposta: $q(t) = 4t + 0{,}8e^{-5t} - 0{,}8$ C para $t \geq 0$

P 1.2-3 A corrente em um componente de um circuito é $i(t) = 4 \text{ sen } 5t$ A para $t \geq 0$ e $i(t) = 0$ para $t < 0$. Determine a carga total que entrou no componente até um instante $t \geq 0$.

Sugestão: $q(0) = \int_{-\infty}^{0} i(\tau)\, dt = \int_{-\infty}^{0} 0 \, d\tau = 0$

P 1.2-4 A corrente em um componente de um circuito é

$$i(t) = \begin{cases} 0 & t < 2 \\ 2 & 2 < t < 4 \\ -1 & 4 < t < 8 \\ 0 & 8 < t \end{cases}$$

em que as correntes estão em ampères e o tempo está em segundos. Determine a carga total que entrou no componente até um instante $t \geq 0$.

Resposta:

$$q(t) = \begin{cases} 0 & t < 2 \\ 2t - 4 & 2 < t < 4 \\ 8 - t & 4 < t < 8 \\ 0 & 8 < t \end{cases}$$

em que a unidade de carga é o coulomb.

P 1.2-5 A carga total $q(t)$, em coulombs, que entra em um componente é dada por

$$q(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 2t & 0 \leq t \leq 2 \\ 3 + e^{-2(t-2)} & t > 2 \end{cases}$$

Determine a corrente $i(t)$ e plote a corrente em função do tempo para $t \geq 0$.

P 1.2-6 Um banho eletroquímico como o da Figura P 1.2-6 é usado para depositar uma fina camada de prata em objetos como bandejas e talheres. Uma corrente de 450 A circula durante 20 minutos e cada coulomb deposita 1,118 mg de prata. Qual é o peso, em gramas, da prata depositada?

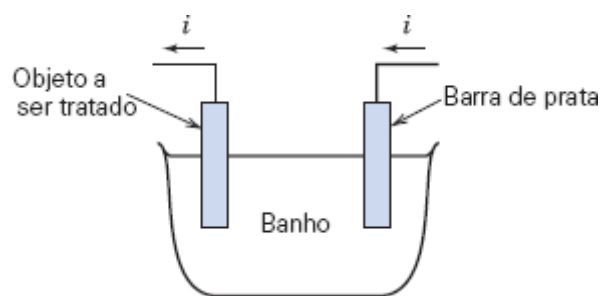



Figura P 1.2-6 Banho eletroquímico.

P 1.2-7 Determine a carga, $q(t)$, e plote a carga em função do tempo se a corrente que entra em um dos terminais de um componente é a mostrada na Figura P 1.2-7. Suponha que $q(t) = 0$ para $t < 0$.

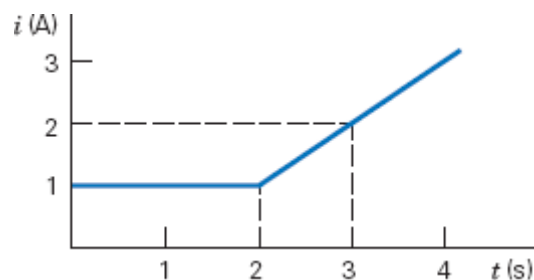



Figura P 1.2-7

Seção 1.3 Sistemas de Unidades

P 1.3-1 Uma corrente constante de 3,2 μA atravessa um componente. Qual é a carga que atravessa o componente no primeiro milissegundo?

Resposta: 3,2 nC

P 1.3-2 Uma carga de 45 nC atravessa um componente de um circuito durante um intervalo de 5 ms. Determine a corrente média que atravessa o componente nesse intervalo.

Resposta: 9 μA

P 1.3-3 Dez bilhões de elétrons por segundo atravessam um componente de um circuito. Qual é a corrente no componente?

Resposta: 1,602 nA

P 1.3-4 A carga que atravessa um fio está plotada em função do tempo na Figura P 1.3-4. Plote a corrente no fio em função do tempo.

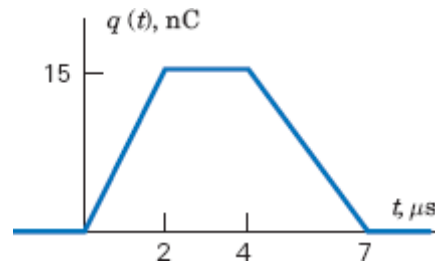



Figura P 1.3-4

P 1.3-5 A corrente em um componente de um circuito está plotada em função do tempo na Figura P 1.3-5. Plote a carga que atravessa o fio em função do tempo para $t > 0$.

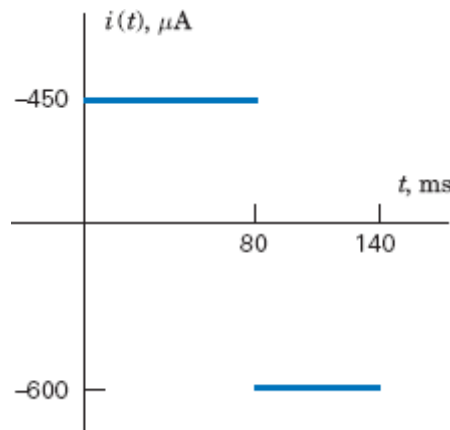



Figura P 1.3-5

P 1.3-6 A corrente em um componente de um circuito está plotada em função do tempo na Figura P 1.3-6. Determine a carga total que atravessa o componente entre 300 e 1200 μs.

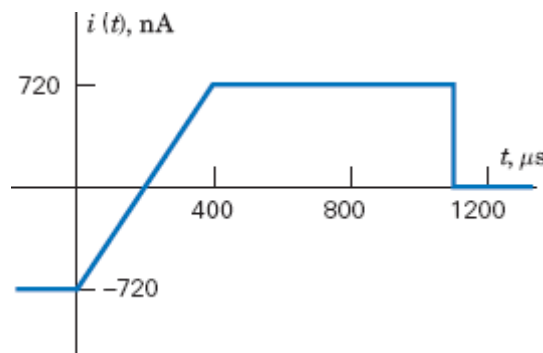



Figura P 1.3-6

Seção 1.5 Potência e Energia

P 1.5-1 A Figura P 1.5-1 mostra quatro componentes, A, B, C e D.

(a) Qual dos componentes fornece 30 mW?

(b) Qual dos componentes recebe 0,03 W?

(c) Qual é o valor da potência recebida pelo componente B?

(d) Qual é o valor da potência fornecida pelo componente B?

(e) Qual é o valor da potência fornecida pelo componente C?

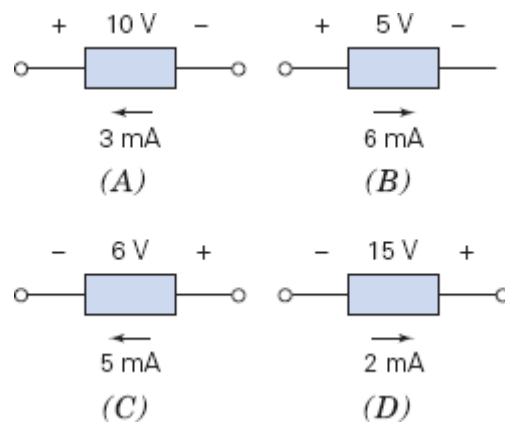



Figura P 1.5-1

P 1.5-2 Um forno elétrico é atravessado por uma corrente constante de 10 A que entra no terminal positivo com uma tensão de 110 V. O forno é usado durante duas horas. (a) Determine a carga em coulombs que atravessa o forno. (b) Determine a potência recebida pelo forno. (c) Se a energia elétrica custa 12 centavos o quilowatt-hora, determine o custo da energia elétrica usada para alimentar o forno durante duas horas.

P 1.5-3 Um aparelho de som portátil usa quatro pilhas tipo AA para fornecer 6 V aos circuitos do aparelho. As quatro pilhas alcalinas armazenam uma energia máxima de 200 watts-segundos. Se o aparelho de som consome uma corrente constante de 10 mA, por quanto tempo o aparelho pode funcionar sem que seja necessário trocar as pilhas?

P 1.5-4 A corrente e a tensão em um componente de um circuito variam da forma mostrada na Figura P 1.5-4. Faça um gráfico da potência fornecida ao componente em função do tempo para $t > 0$. Qual é a energia total fornecida ao componente entre os instantes $t = 0$ e $t = 25$ s? A tensão e a corrente no componente estão de acordo com a convenção passiva.

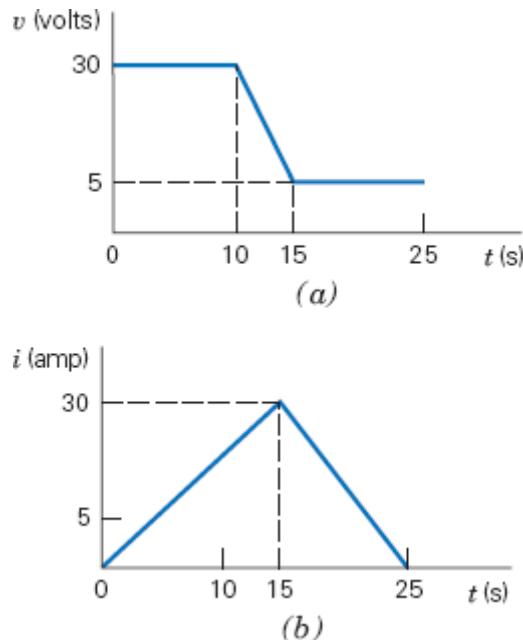



Figura P 1.5-4 (*a*) Tensão $v(t)$ e (*b*) corrente $i(t)$ em um componente.

P 1.5-5 Uma bateria de automóvel é carregada com uma corrente constante de 2 A durante cinco horas. A tensão entre os terminais da bateria é $v = 11 + 0{,}5t$ V para $t > 0$, em que t está em horas. (a) Determine a energia fornecida à bateria durante as cinco horas. (b) Se a energia elétrica custa 15 centavos/kWh, determine o custo para carregar a bateria.

Resposta: (b) 1,84 centavo

P 1.5-6 Determine a potência, $p(t)$, fornecida pelo componente da Figura P 1.5-6 se $v(t) = 4 \cos 3t$ V e $i(t) = \frac{\text{sen } 3t}{12}$ A. Determine $p(t)$ para $t = 0,5$ s e para $t = 1$ s. Observe que a potência fornecida pelo componente é positiva em certos instantes e negativa em outros.

Sugestão: $(\text{sen } at)(\cos bt) = \frac{1}{2}(\text{sen}(a + b)t + \text{sen}(a - b)t)$

Resposta:

$$p(t) = \frac{1}{6}\text{sen } 6t \text{ W}, \; p(0,5) = 0,0235 \text{ W}, \; p(1) = -0,0466 \text{ W}$$

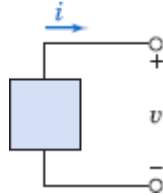



Figura P 1.5-6 Um componente.

P 1.5-7 Determine a potência, $p(t)$, fornecida pelo componente da Figura P 1.5-6 para $v(t) = 8 \text{ sen } 3t$ V e $i(t) = 2 \text{ sen } 3t$ A.

Sugestão: $(\text{sen } at)(\text{sen } bt) = \frac{1}{2}(\cos(a - b)t - \cos(a + b)t)$

Resposta: $p(t) = 8 - 8 \cos 6t$ W

P 1.5-8 Determine a potência, $p(t)$, fornecida pelo componente da Figura P 1.5-6. A tensão no componente é dada por $v(t) = 4(1 - e^{-2t})$ V para $t \geq 0$ e $v(t) = 0$ para $t < 0$. A corrente no componente é dada por $i(t) = 2e^{-2t}$ A para $t \geq 0$ e $i(t) = 0$ para $t < 0$.

Resposta: $p(t) = 8(1 - e^{-2t})e^{-2t}$ W

P 1.5-9 As pilhas de uma lanterna produzem uma tensão de 3 V e a corrente na lâmpada é 200 mA. Qual é a potência absorvida pela lâmpada? Determine a energia absorvida pela lâmpada em um intervalo de cinco minutos.

P 1.5-10 A eletroforese em gel bidimensional é uma técnica usada pelos biólogos para separar as proteínas contidas em uma amostra de tecido. A Figura P 1.5-10*a* mostra a imagem de um gel típico.

O método de preparação do gel utiliza o circuito elétrico ilustrado na Figura 1.5-10*b*. A amostra consiste em um gel e um papel-filtro que contém proteínas ionizadas. Uma fonte de tensão aplica a uma tensão constante elevada, da ordem de 500 V, às extremidades da amostra. A tensão faz com que as proteínas ionizadas migrem, com diferentes velocidades, do papel-filtro para o gel. A corrente na amostra é dada por

$$i(t) = 2 + 30e^{-at} \text{ mA}$$

em que t é o tempo decorrido desde o início do processo, em horas, e o valor da constante a é

$$a = 0,85 \text{ h}^{-1}$$

Determine a energia fornecida pela fonte de tensão durante as primeiras 3 horas do processo.

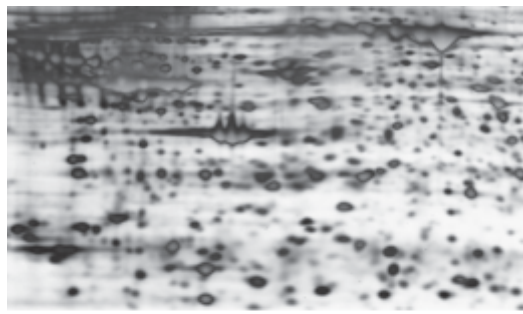
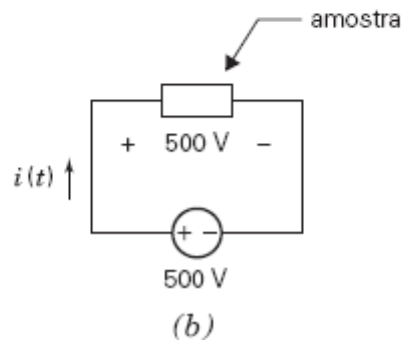



Figura P 1.5-10 (*a*) Imagem de um gel após o processo de eletroforese bidimensional e (*b*) circuito elétrico usado no processo.

Seção 1.7 Como Podemos Testar . . . ?

P 1.7-1 De acordo com a lei de conservação da energia, a soma da potência absorvida por todos os componentes de um circuito deve ser nula. A Figura P 1.7-1 mostra um circuito. As tensões e correntes em todos os componentes estão especificadas. Todas as tensões e correntes estão corretas? Justifique sua resposta.

Sugestão: Calcule as potências absorvidas por todos os componentes. Some essas potências. Se a soma for zero, isso significa que a lei de conservação da energia está sendo respeitada e as tensões e correntes estão provavelmente corretas. Se a soma não for zero, isso significa que nem todas as tensões e correntes estão corretas.

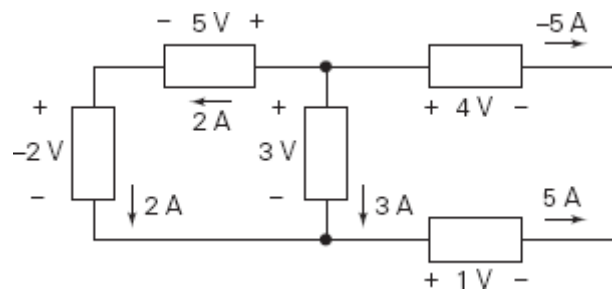



Figura P 1.7-1

P 1.7-2 De acordo com a lei de conservação da energia, a soma da potência absorvida por todos os componentes de um circuito deve ser zero. A Figura P 1.7-2 mostra um circuito. As tensões e correntes em todos os componentes estão especificadas. Todas estas tensões e correntes estão corretas? Justifique sua resposta.

Sugestão: Calcule as potências absorvidas por todos os componentes. Some essas potências. Se a soma for zero, isso significa que a lei de conservação da energia está sendo respeitada e as tensões e correntes estão provavelmente corretas. Se a soma não for zero, isso significa que nem todas as tensões e correntes estão corretas.

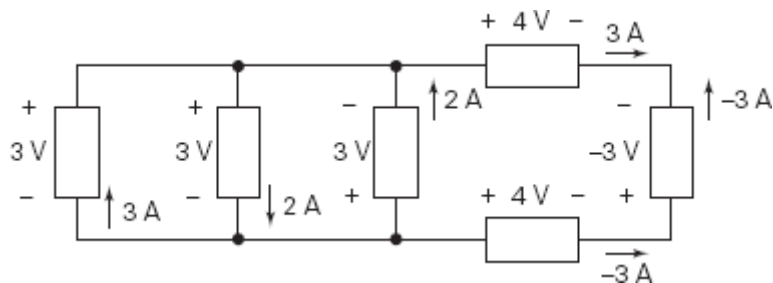



Figura P 1.7-2

P 1.7-3 As correntes e tensões indicadas na Figura P 1.7-3 estão corretas, com uma única exceção: o sentido da corrente em um dos componentes foi invertido. Determine o sentido que não está correto.

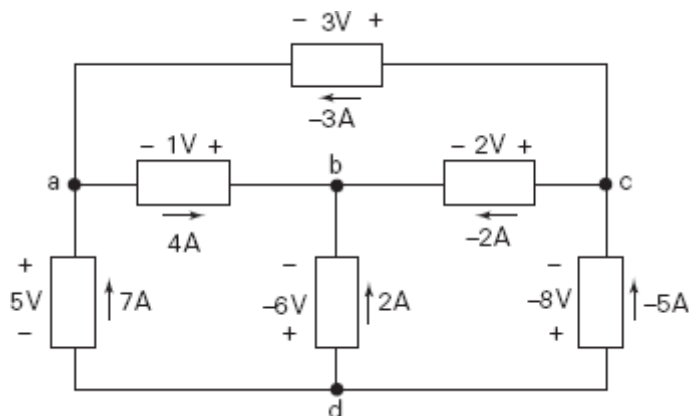



Figura P 1.7-3

Problemas de Projeto

PP 1-1 Um componente está disponível no mercado em três classes, de acordo com a potência de trabalho. Os componentes da classe A podem absorver continuamente uma potência de 1/2 W sem ser danificados; os da classe B podem absorver uma potência de 1/4 W; os da classe C podem absorver uma potência de 1/8 W. Normalmente, os componentes que podem absorver uma potência maior são mais caros e mais volumosos.

Espera-se que a tensão entre os terminais de um componente seja aproximadamente de 20 V e que a corrente no componente seja aproximadamente 8 mA. A precisão dessas estimativas é da ordem de 25 %. A tensão e a corrente estão de acordo com a convenção passiva.

Especifique a classe do componente. A segurança é a consideração mais importante, mas você não deve especificar um componente que seja mais caro que o necessário.

PP 1-2 A tensão entre os terminais de um componente de um circuito é $v(t) = 20(1 - e^{-8t})$ V para $t \geq 0$ e $v(t) = 0$ para $t < 0$. A corrente no elemento é $i(t) = 30e^{-8t}$ mA para $t \geq 0$ e $i(t) = 0$ para $t < 0$. A corrente e a tensão no componente estão de acordo com a convenção passiva. Especifique a potência que o componente deve ser capaz de absorver sem ser danificado.

Sugestão: Use o MATLAB, ou um programa semelhante, para plotar a potência em função do tempo.

CAPÍTULO 2 Componentes dos Circuitos

NESTE CAPÍTULO

2.1 *Introdução*

Como era de se esperar, o comportamento de um circuito elétrico depende do comportamento dos componentes. Naturalmente, componentes de tipos diferentes se comportam de maneira diferente. As equações que descrevem o comportamento dos diversos tipos de componentes dos circuitos são chamadas de equações constitutivas. Frequentemente, as equações constitutivas descrevem uma relação entre a corrente e a tensão do componente. A lei de Ohm é um exemplo típico de equação constitutiva.

Neste capítulo, vamos investigar o comportamento de vários tipos comuns de componentes dos circuitos elétricos:

- Resistores
- Fontes independentes de tensão e de corrente
- Circuitos abertos e curtos-circuitos
- Voltímetros e amperímetros
- Fontes dependentes
- Transdutores
- Chaves

2.2 *Modelos de Engenharia e Modelos Lineares*

A arte da engenharia consiste em tomar uma ideia brilhante e, usando dinheiro, materiais e pessoas competentes, produzir, sem agredir o meio ambiente, algo de interesse do público que possa ser vendido por um preço razoável.

Os engenheiros usam *modelos* para representar os componentes de um circuito elétrico. Um modelo é uma descrição das propriedades de um objeto que são consideradas importantes para o fim que se tem em vista. Frequentemente, o modelo de um componente elétrico é uma equação que relaciona a tensão e a corrente no componente. Embora o modelo de um componente não seja a mesma coisa que o próprio componente, os modelos podem ser usado em cálculos para prever o funcionamento de circuitos que utilizam os componentes correspondentes. Os engenheiros muitas vezes têm que chegar a uma solução de compromisso ao escolherem o modelo que será usado para representar um componente. Modelos simples são fáceis de usar, mas podem não ser suficientemente precisos. Modelos precisos são em geral mais complexos e mais difíceis de usar. O bom senso sugere que os modelos simples sejam usados primeiro. Os resultados obtidos devem ser examinados para verificar se são satisfatórios ou se será necessário adotar modelos mais sofisticados.

Os modelos idealizados de dispositivos elétricos são definidos com precisão. É importante reconhecer a diferença entre os dispositivos reais e os modelos idealizados que chamamos de componentes. O objetivo da análise de circuitos é prever, através do uso de modelos, o comportamento elétrico dos circuitos reais. Para isso, é preciso calcular as tensões e correntes em todos os componentes do circuito, ou seja, determinar os parâmetros dos quais depende o funcionamento global do circuito.

Os modelos dos componentes dos circuitos elétricos podem ser classificados de várias formas. É importante, por exemplo, distinguir os modelos lineares dos modelos não lineares porque os circuitos que contêm apenas elementos lineares são mais fáceis de analisar que os circuitos que contêm um ou mais elementos não lineares.

Dizemos que um componente ou circuito é *linear* se a relação entre a excitação e a resposta do componente apresenta certas propriedades. Considere o componente da Figura 2.2-1. Suponha que a excitação seja a corrente i e que a resposta seja a tensão v. Quando o componente é submetido a uma corrente i_1, a resposta é v_1; quando o componente é submetido a uma corrente i_2, a resposta é v_2. Para que um componente seja considerado linear, é preciso que a excitação $i_1 + i_2$ produza uma resposta $v_1 + v_2$. Esta propriedade recebe o nome de *princípio da superposição*.

Além disso, para que o componente seja considerado linear é necessário que a multiplicação da amplitude da excitação por uma constante resulte em uma multiplicação da amplitude da resposta pela mesma constante. Assim, por exemplo, se a excitação do componente dobra de valor, a resposta do dispositivo deve dobrar de valor. Esta propriedade recebe o nome de *princípio da homogeneidade*. Um componente é linear se, e apenas se, os princípios da superposição e da homogeneidade são satisfeitos para todas as excitações e respostas.

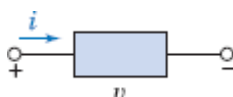



FIGURA 2.2-1 Componente com uma corrente de excitação i e uma tensão de resposta v.

Um **componente linear** satisfaz os princípios da superposição e da homogeneidade.

Vamos expressar matematicamente as duas propriedades básicas de um circuito linear, usando uma seta para indicar a transição da excitação para a resposta:

$$i \rightarrow v$$

Nesse caso, podemos expressar as duas propriedades da forma indicada a seguir.

Superposição:

$$\begin{aligned} i_1 &\rightarrow v_1 \\ i_2 &\rightarrow v_2 \\ i_1 + i_2 &\rightarrow v_1 + v_2 \end{aligned} \qquad (2.2\text{-}1)$$

então:

Homogeneidade:

$$i \rightarrow v$$

$$ki \rightarrow kv \qquad (2.2\text{-}2)$$

então:

Quando um dispositivo não satisfaz o princípio da superposição ou o princípio da homogeneidade (ou ambos), dizemos que é não linear.

EXEMPLO 2.2-1 Um Dispositivo Linear

Considere o componente representado pela relação entre corrente e tensão

$$v = Ri$$

Verifique se o dispositivo é linear.

Solução

A resposta a uma corrente i_1 é

$$v_1 = Ri_1$$

A resposta a uma corrente i_2 é

$$v_2 = Ri_2$$

A soma das respostas é

$$v_1 + v_2 = Ri_1 + Ri_2 = R(i_1 + i_2)$$

Como a soma das respostas a i_1 e i_2 é igual à resposta a $i_1 + i_2$, o princípio da superposição é satisfeito. Vamos considerar agora o princípio da homogeneidade. Como

$$v_1 = Ri_1$$

temos para uma excitação $i_2 = ki_1$

$$v_2 = Ri_2 = Rki_1$$

Assim,

$$v_2 = kv_1$$

satisfaz o princípio da homogeneidade. Como o componente satisfaz os princípios da superposição e da homogeneidade, ele é linear.

EXEMPLO 2.2-2 Um Dispositivo Não Linear

Considere o componente representado pela relação entre corrente e tensão

$$v = i^2$$

Verifique se o dispositivo é linear.

Solução

A resposta a uma corrente i_1 é

$$v_1 = i_1^2$$

A resposta a uma corrente i_2 é

$$v_2 = i_1^2$$

A soma das respostas é

$$v_1 + v_2 = i_1^2 + i_1^2$$

A resposta a $i_1 + i_2$ é

$$(i_1 + i_2)^2 = i_1^2 + 2i_1 i_2 + i_1^2$$

Como

$$i_1^2 + i_1^2 \neq (i_1 + i_2)^2$$

o princípio de superposição não é satisfeito. Isso significa que o dispositivo é não linear.

EXEMPLO 2.2-3 Um Modelo de um Dispositivo Linear

A Figura 2.2-2*a* mostra a relação entre a tensão *v* e a corrente *i* em certo componente linear. Alguns pares de valores da tensão *v* e da corrente correspondente *i* que atravessa o componente são dados na Figura 2.2-2*b*. Represente o componente por uma equação que expresse *v* em função de *i*. A equação é um modelo do componente. Use o modelo para prever o valor de *v* correspondente a uma corrente $i = 100$ mA e o valor de *i* correspondente a uma tensão $v = 18$ V.

v, V	i, mA
4,5	10
11,25	25
22,5	50

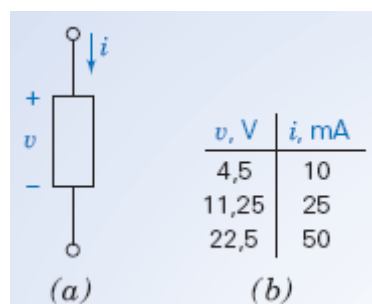



FIGURA 2.2-2 (*a*) Um componente linear e (*b*) uma tabela com pares de valores de tensão e corrente.

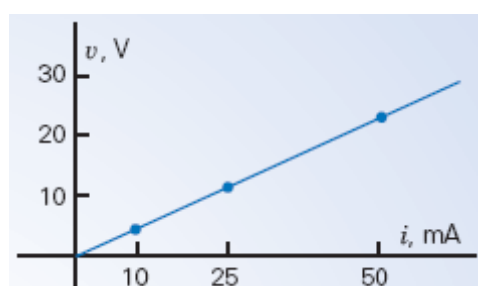



FIGURA 2.2-3 Gráfico da tensão em função da corrente para o componente linear da Figura 2.2-2.

Solução

A Figura 2.2-3 mostra um gráfico da tensão v em função da corrente i. Os pontos da figura correspondem aos dados que aparecem na tabela da Figura 2.2-2b. Como o componente é linear, esperamos que os pontos pertençam a uma linha reta, o que realmente acontece. Podemos representar a linha reta pela equação

$$v = mi + b$$

em que m é a inclinação e b é a ordenada do ponto de interseção com o eixo v. Como a linha reta passa pela origem, $v = 0$ para $i = 0$ e, portanto, $b = 0$. Assim, temos:

$$v = mi$$

A inclinação m pode ser calculada a partir de dois pares de valores da tabela da Figura 2.2-2b. Por exemplo:

$$\frac{11,25 - 4,5}{25 - 10} = 0,45\,\frac{\text{V}}{\text{mA}},\quad \frac{22,5 - 11,25}{50 - 25} = 0,45\,\frac{\text{V}}{\text{mA}}\quad \text{e}\quad \frac{22,5 - 4,5}{50 - 10} = 0,45\,\frac{\text{V}}{\text{mA}}$$

Assim,

$$m = 0,45\,\frac{\text{V}}{\text{mA}} = 450\,\frac{\text{V}}{\text{A}}$$

e

$$v = 450i$$

Esta equação é um modelo do componente linear. De acordo com o modelo, a tensão correspondente a uma corrente $i = 100$ mA $= 0,1$ A é $v = 450(0,1) = 45$ V e a corrente correspondente a uma tensão $v = 18$ V é $i = 18/450 = 0,04$ A $= 40$ mA.

2.3 Componentes Ativos e Passivos

Podemos classificar os componentes dos circuitos em duas categorias, *passivos* e *ativos*, verificando se recebem ou fornecem energia. Dizemos que um componente é passivo se a energia total fornecida ao componente pelo resto do circuito é sempre não negativa (zero ou positiva). No caso de um componente passivo, com a corrente entrando pelo terminal +, como na Figura 2.3-1a, devemos ter:

$$w = \int_{-\infty}^{t} vi\, d\tau \geq 0 \qquad (2.3\text{-}1)$$

para qualquer valor de t.

Um **componente passivo** absorve energia.

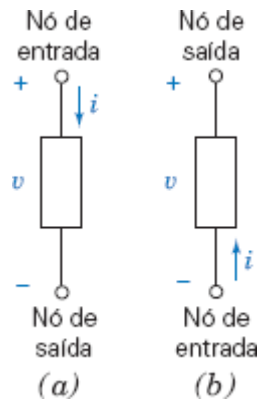



FIGURA 2.3-1 (*a*) O nó de entrada da corrente *i* é o nó positivo da tensão *v*; (*b*) o nó de entrada da corrente *i* é o nó negativo da tensão *v*. O sentido da corrente é do nó de entrada para o nó de saída.

Dizemos que um componente é *ativo* se é capaz de fornecer energia a um circuito. Isso significa que um componente ativo viola a Eq. 2.3-1 quando é adotada a convenção da Figura 2.3-1*a*. Em outras palavras, um componente ativo é capaz de gerar energia elétrica a partir de outras formas de energia. Os componentes ativos são fontes de energia, enquanto os componentes passivos são sorvedouros ou absorvedores de energia. As baterias e geradores são componentes ativos. Considere o componente da Figura 2.3-1*b*. Observe que a corrente entra pelo terminal negativo e sai pelo terminal positivo. Dizemos que este componente é ativo se

$$w = \int_{-\infty}^{t} vi\, d\tau \geq 0 \qquad (2.3\text{-}2)$$

para pelo menos um valor de *t*.

Um **componente ativo** é capaz de fornecer energia elétrica a um circuito.

EXEMPLO 2.3-1 Um Componente Elétrico Ativo

Um circuito possui um componente como o da Figura 2.3-1*b*, no qual a corrente é 5 A (constante) e a tensão é 6 V (constante). Determine a energia fornecida pelo componente no intervalo de tempo de 0 a *T*.

Solução

Como a corrente entra pelo terminal negativo, a energia *fornecida* pelo componente é dada por

$$w = \int_{0}^{T} (6)(5)\, d\tau = 30T \text{ J}$$

Assim, o dispositivo é um componente ativo, uma bateria, no caso.

2.4 *Resistores*

A propriedade de uma substância de resistir à passagem de corrente elétrica é chamada de *resistividade* e representada pelo símbolo ρ. Os materiais que são bons isolantes elétricos possuem valores elevados de resistividade e os materiais que são bons condutores de corrente elétrica possuem baixos valores de resistividade. A Tabela 2.4-1 mostra a resistividade de alguns materiais. O cobre é muito usado na fabricação de fios elétricos porque permite a passagem de corrente quase sem opor resistência. O silício é usado para introduzir resistência elétrica em microcircuitos. O poliestireno é usado como isolante.

Tabela 2.4-1 Resistividade de alguns materiais

MATERIAL	RESISTIVIDADE ρ ($\Omega \cdot$ cm)
Poliestireno	1×10^{18}
Silício	$2{,}3 \times 10^{5}$
Carbono	4×10^{-3}
Alumínio	$2{,}7 \times 10^{-6}$
Cobre	$1{,}7 \times 10^{-6}$

Foto de Hulton Archive/Getty Images

FIGURA 2.4-1 Georg Simon Ohm (1787–1854), que descobriu a lei de Ohm em 1827. O ohm foi escolhido como unidade de resistência elétrica em sua homenagem.

Resistência é a propriedade física de um componente ou dispositivo que se opõe à passagem de corrente elétrica; é representada pelo símbolo *R*.

Georg Simon Ohm mostrou que a corrente em um circuito formado por uma bateria e um fio condutor de seção reta uniforme é dada por

$$i = \frac{Av}{\rho L} \tag{2.4-1}$$

em que A é a área da seção reta, ρ é a resistividade, L é o comprimento e v é a tensão entre os terminais do componente. Ohm, cujo retrato aparece na Figura 2.4-1, definiu a resistência constante R como

$$R = \frac{\rho L}{A} \tag{2.4-2}$$

A lei de Ohm, que relaciona tensão e corrente, foi publicada em 1827 na forma

$$v = Ri \tag{2.4-3}$$

A unidade de resistência R foi chamada de ohm em homenagem a Ohm e normalmente é representada pelo símbolo Ω (letra grega ômega maiúsculo); 1 Ω = 1 V/A. A resistência de 10 m de um cabo comum de TV é 2 mΩ.

Um componente que possui uma resistência *R* é chamado de *resistor*. Um resistor é representado pelo símbolo de dois terminais que aparece na Figura 2.4-2. Quando a lei de Ohm, Eq. 2.4-3, é obedecida, a relação entre *i* e *v* é linear. Como mostra a Figura 2.4-3, um resistor pode ter um comportamento não linear fora da faixa normal de operação. Neste livro, vamos supor que todos os resistores são lineares a menos que

seja dito explicitamente o contrário. Isso equivale a dizer que vamos supor que todos os resistores obedecem à lei de Ohm.

Na Figura 2.4-4, a corrente e a tensão em um resistor estão indicadas. A relação entre os sentidos da corrente e da tensão é importante. O sentido (ou polaridade) da tensão é definido atribuindo um sinal positivo (+) a um dos terminais e um sinal negativo (–) ao outro. A corrente i_a atravessa o resistor do terminal (+) para o terminal (−). Essa relação entre os sentidos de referência da corrente e da tensão é conhecida como convenção passiva. De acordo com a lei de Ohm, se a tensão e a corrente em um componente obedecem à convenção passiva,

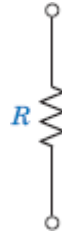



FIGURA 2.4-2 Símbolo de um resistor com uma resistência de *R* ohms.

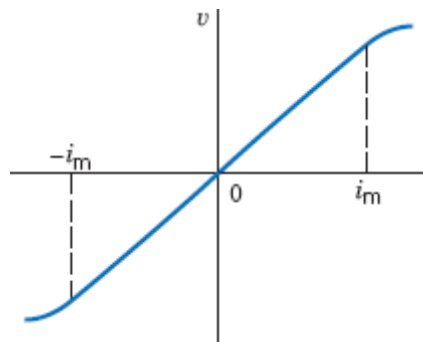



FIGURA 2.4-3 Um resistor operando dentro de um certo intervalo de correntes, $-i_m < i < i_m$, pode ser modelado pela lei de Ohm.

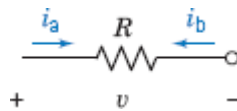



FIGURA 2.4-4 Um resistor com a corrente e a tensão indicadas.

$$v = Ri_a \qquad (2.4\text{-}4)$$

Considere a Figura 2.4-4. Como as correntes i_a e i_b diferem apenas no sentido,

$$i_a = -i_b$$

Como a corrente i_a e a tensão v obedecem à convenção passiva,

$$v = Ri_a$$

Substituindo i_a por $-i_b$, obtemos

$$v = -Ri_b$$

Existe um sinal negativo na equação porque a corrente i_b e a tensão v não obedecem à convenção passiva. Devemos prestar atenção no sentido da corrente e usar o sinal negativo caso isso seja necessário.

A lei de Ohm, Eq. 2.4-3, também pode ser escrita na forma

$$i = Gv \qquad (2.4\text{-}5)$$

em que G é a *condutância*, que é o recíproco da resistência: $G = 1/R$. Muitos engenheiros se acostumaram a chamar a unidade de condutância de mho (*ohm* escrito ao contrário) e representá-la usando o símbolo ℧ (a letra grega ômega maiúsculo de cabeça para baixo). Neste livro, adotaremos a unidade oficial de condutância no SI, que é o siemens (S).

Existem quatro tipos básicos de resistores: resistores de carbono, resistores de filme de carbono, resistores de filme de metal e resistores de fio. Os resistores de carbono foram inventados há quase 100 anos e até hoje são muito usados. Os resistores de filme de carbono substituíram os resistores de carbono em muitas aplicações porque são mais baratos e mais precisos. A Figura 2.4-5 mostra dois resistores de fio.

Cortesia de Vishay Intertechnology, Inc.

FIGURA 2.4-5 (*a*) Resistor de fio com um terminal central ajustável. (*b*) Resistor de fio com um terminal central fixo.

Os resistores de carbono, como os da Figura 2.4-6, são os mais usados por causa do baixo custo e pequeno tamanho. Os resistores de uso geral são fabricados com valores padronizados e tolerâncias de 2, 5, 10 e 20 %. Os resistores de carbono e alguns resistores de outros tipos utilizam um código de cores com três a cinco faixas, criado para identificar a resistência e a tolerância dos resistores. A Figura 2.4-7 mostra um resistor de filme de metal com faixas coloridas. Trata-se de um resistor de 1/4 de watt, o que significa que a potência dissipada no resistor não deve exceder esse valor. Os resistores comerciais podem ter valores entre 1 ohm e 10 megohms. Valores típicos de alguns resistores comerciais aparecem no Apêndice D.

A potência fornecida a um resistor (no caso de ser usada a convenção passiva) é dada por

$$p = vi = v\left(\frac{v}{R}\right) = \frac{v^2}{R} \qquad (2.4\text{-}6)$$

Como $v = iR$, a Eq. 2.4-6 também pode ser escrita na forma

$$p = vi = (iR)i = i^2 R \qquad (2.4\text{-}7)$$

As Eqs. 2.4-6 e 2.4-7 mostram que a potência é uma função não linear da tensão e da corrente no resistor.

Cortesia de Hifi Collective.

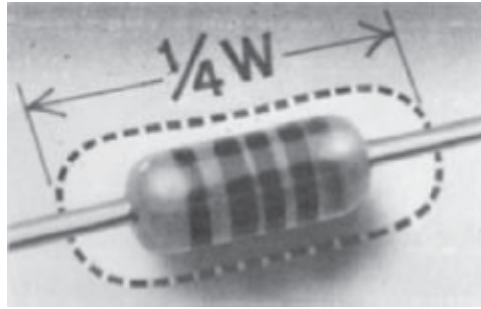
FIGURA 2.4-6 Resistores de carbono.

Cortesia de Vishay Intertechnology, Inc.

FIGURA 2.4-7 Resistor de filme de metal de 1/4 de watt. O corpo do resistor tem 6 mm de comprimento.

EXEMPLO 2.4-1 Potência Dissipada por um Resistor

Vamos criar um modelo para uma bateria de automóvel quando o farol está aceso e o motor não está funcionando. Todos nós já vimos um carro parado com os faróis acesos. Quando deixamos o carro nessa situação por muito tempo, a bateria "arria" ou "descarrega". Uma bateria de automóvel é uma fonte de tensão constante de 12 V e os faróis podem ser modelados por um resistor de 6 ohms. O circuito aparece na Figura 2.4-8. Vamos calcular a corrente i, a potência p e a energia fornecida pela bateria durante um período de quatro horas.

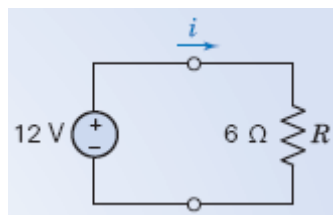



FIGURA 2.4-8 Modelo de uma bateria de automóvel e um par de faróis.

Solução

De acordo com a lei de Ohm, Eq. 2.4-3, temos:

$$v = Ri$$

Como $v = 12$ V e $R = 6\ \Omega$, temos $i = 2$ A.

Para determinar a potência fornecida pela bateria, usamos a relação

$$p = vi = 12(2) = 24\ \text{W}$$

Por fim, a energia fornecida durante um período de quatro horas é dada por

$$w = \int_0^t p\,d\tau = 24t = 24(60 \times 60 \times 4) = 3{,}46 \times 10^5\ \text{J}$$

Uma bateria dispõe de uma quantidade finita de energia armazenada; depois que essa energia é fornecida, a tensão entre os terminais cai a zero e dizemos que a bateria está descarregada. Uma bateria de automóvel típica contém uma energia de 10^6 J quando está totalmente carregada.

EXERCÍCIO 2.4-1 Determine a potência absorvida por um resistor de 100 ohms quando é ligado diretamente a uma fonte constante de 10 V.

Resposta: 1 W

EXERCÍCIO 2.4-2 Uma fonte de tensão $v = 10 \cos t$ V é ligada aos terminais de um resistor de 10 ohms. Determine a potência fornecida ao resistor.

Resposta: $10 \cos^2 t$ W

2.5 *Fontes Independentes*

Alguns dispositivos têm por objetivo fornecer energia elétrica aos circuitos. Esses dispositivos recebem o nome de *fontes*. As fontes podem ser de dois tipos: fonte de tensão e fonte de corrente. A Figura 2.5-1*a* mostra o símbolo usado para representar uma fonte de tensão. A tensão de uma fonte de tensão é especificada, mas a corrente é determinada pelo resto do circuito. Para descrever uma fonte de tensão, basta especificar a função $v(t)$ da fonte, como, por exemplo,

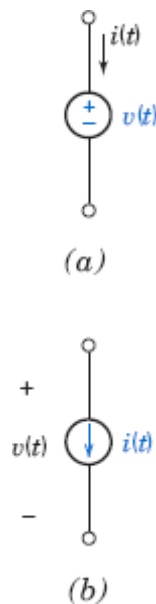



FIGURA 2.5-1 (*a*) Fonte de tensão. (*b*) Fonte de corrente.

$$v(t) = 12 \cos 1000t,\ v(t) = 9 \text{ ou } v(t) = 12 - 2t$$

O tipo mais simples de fonte é um componente ativo de dois terminais.

Uma **fonte** é um gerador de tensão ou de corrente capaz de fornecer energia a um circuito.

A tensão fornecida por uma *fonte de tensão independente* e a corrente fornecida por uma *fonte de corrente independente* não dependem de outras tensões e correntes do circuito.

Uma **fonte independente** é um gerador de tensão ou de corrente que não depende de outras tensões ou correntes do circuito.

Suponha que a fonte de tensão seja uma bateria e

$$v(t) = 9 \text{ volts}$$

A tensão da bateria é 9 volts, seja qual for o circuito em que se encontra. Por outro lado, a corrente da fonte de tensão não é conhecida e depende do circuito. A corrente pode ser 6 ampères se a fonte for ligada a um circuito e 6 miliampères se a fonte for ligada a outro circuito.

A Figura 2.5-1*b* mostra o símbolo usado para representar uma fonte de corrente. A corrente de uma fonte de corrente é especificada, mas a tensão depende do resto do circuito. Uma fonte de corrente é descrita

especificando a função *i*(*t*). Por exemplo:

$$i(t) = 6 \text{ sen } 500t,\ i(t) = -0{,}25 \text{ ou } i(t) = t + 8$$

Uma fonte de corrente especificada por $i(t) = -0{,}25$ miliampère tem uma corrente de – 0,25 miliampère, seja qual for o circuito em que se encontra, mas a tensão entre os terminais da fonte depende do circuito.

Nos parágrafos anteriores, ignoramos algumas complicações para apresentar uma descrição simples do modo como as fontes se comportam. A tensão entre os terminais de uma bateria de 9 volts pode ser um pouco maior ou um pouco menor que 9 volts; o valor exato depende da idade da bateria, da temperatura, de diferenças no processo de fabricação e da corrente no circuito. É importante reconhecer a diferença entre uma fonte real, como uma bateria de automóvel, e as fontes simples de tensão e corrente que foram descritas nos parágrafos anteriores. Seria ideal se as fontes de verdade se comportassem como essas fontes simples. Na verdade, a palavra *ideal* é usada para fazer essa distinção. As fontes simples descritas nos parágrafos anteriores são chamadas de *fonte de tensão ideal* e *fonte de corrente ideal*.

A tensão de uma **fonte de tensão ideal** é dada por uma função conhecida, $v(t)$. A corrente é determinada pelo resto do circuito.

A corrente de uma **fonte de corrente ideal** é dada por uma função conhecida, $i(t)$. A tensão é determinada pelo resto do circuito.

Uma **fonte ideal** produz uma tensão que não depende da corrente que a atravessa ou uma corrente que não depende da tensão entre seus terminais.

EXEMPLO 2.5-1 Uma Bateria Modelada por uma Fonte de Tensão

Suponha que um engenheiro seja encarregado de analisar um circuito que contém uma bateria de 9 volts. O engenheiro precisa levar em conta o fato de que o valor exato da tensão da bateria depende do tempo de uso, da temperatura ambiente e da corrente no circuito? Em geral, isso não é necessário; o engenheiro pode supor que a diferença entre a tensão da bateria e a tensão de uma fonte ideal de 9 volts é tão pequena que pode ser ignorada. Quando isso acontece, dizemos que a bateria pode ser *modelada* por uma fonte de tensão ideal.

Para dar um exemplo específico, considere uma bateria especificada pelo gráfico da tensão em função da corrente que aparece na Figura 2.5-2*a*. O gráfico mostra que a tensão da bateria é $v = 9$ volts para $i \le 10$ miliampères. Quando a corrente é maior que 10 miliampères, a tensão é menor que 9 volts. Para $i \le 10$ miliampères, a variação da tensão da bateria com a corrente pode ser ignorada e a bateria pode ser modelada por uma fonte de tensão ideal.

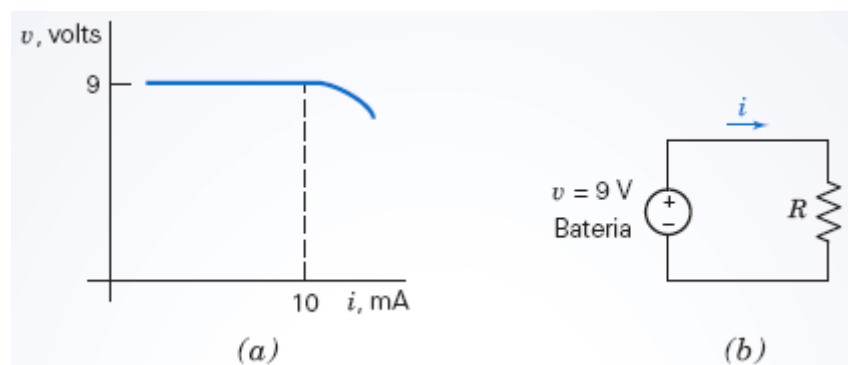



FIGURA 2.5-2 (*a*) Gráfico da tensão de uma bateria em função da corrente na bateria. (*b*) Uso de uma fonte de tensão ideal para modelar a bateria.

Suponha que um resistor seja ligado entre os terminais da bateria, como mostra a Figura 2.5-2*b*. Nesse caso, a corrente na bateria é

$$i = \frac{v}{R} \tag{2.5-1}$$

A relação entre *v* e *i* mostrada na Figura 2.5-2*a* é complicada, mas se torna muito simples se pudermos supor que $i \le 10$ miliampères. Quando a bateria é modelada por uma fonte de tensão ideal de 9 volts, a corrente que atravessa a fonte de tensão passa a ser dada por

$$i = \frac{9}{R} \tag{2.5-2}$$

A diferença entre as duas equações é importante. A Eq. 2.5-1, que envolve a relação entre *v* e *i* indicada na Figura 2.5-2*a*, é mais precisa, mas também é mais complicada. A Eq. 2.5-2 é mais simples, mas pode ser imprecisa.

Suponha que $R = 1000$ ohms. De acordo com a Eq. 2.5-2, a corrente na fonte de tensão ideal é

$$i = \frac{9}{1000} = 9 \text{ mA} \tag{2.5-3}$$

Como a corrente é menor que 10 miliampères, a fonte de tensão ideal é um bom modelo para a bateria e é razoável esperar que a corrente na bateria seja 9 miliampères.

Suponha agora que $R = 600$ ohms. De acordo com a Eq. 2.5-2, a corrente na fonte de tensão ideal é

$$i = \frac{9}{600} = 15 \text{ mA} \tag{2.5-4}$$

Como, nesse caso, a corrente é maior que 10 miliampères, a fonte ideal de tensão não é um bom modelo para a bateria. Devemos, portanto, esperar que a corrente na bateria seja diferente da corrente na fonte de tensão ideal.

O curto-circuito e o circuito aberto são casos especiais de fontes ideais. O *curto-circuito* é uma fonte de tensão ideal com $v(t) = 0$. A corrente em um curto-circuito é determinada pelo resto do circuito. O *circuito aberto* é uma fonte de corrente ideal com $i(t) = 0$. A tensão em um circuito aberto é determinada pelo resto do circuito. A Figura 2.5-3 mostra os símbolos usados para representar um curto-circuito e um circuito aberto. Observe que a potência fornecida pelas duas fontes é nula.

Circuitos abertos e curtos-circuitos podem ser acrescentados a um circuito sem afetar as correntes de tensões e tensões dos outros componentes do circuito. A Figura 2.6-3 mostra como isso pode ser feito. A Figura 2.6-3*a* mostra um circuito típico. Na Figura 2.6-3*b*, um circuito aberto e um curto-circuito foram acrescentados ao circuito da Figura 2.6-3*a*. O circuito aberto foi ligado entre dois nós do circuito original e o curto-circuito foi ligado cortando um fio e introduzindo o curto-circuito. Acrescentar circuitos abertos e curtos-circuitos dessa forma não muda o circuito.

Os circuitos abertos e curtos-circuitos também podem ser considerados casos especiais de resistores. Um resistor com resistência $R = 0$ ($G = \infty$) é um curto-circuito. Um resistor com condutância $G = 0$ ($R = \infty$) é um circuito aberto.

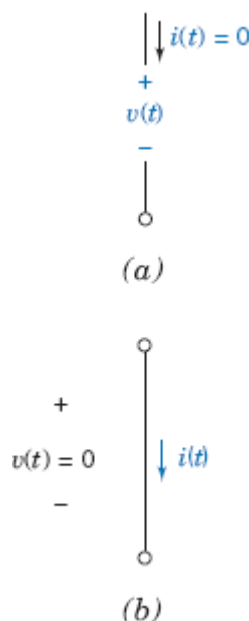



FIGURA 2.5-3 (*a*) Circuito aberto. (*b*) Curto-circuito.

2.6 *Voltímetros e Amperímetros*

Como mostra a Figura 2.6-1, as medidas de corrente e tensão contínua podem ser feitas com medidores de leitura direta (analógicos) ou com medidores digitais. Um medidor de leitura direta dispõe de um ponteiro cuja deflexão depende do valor da variável que está sendo medida. Um medidor digital dispõe de um painel que mostra o valor numérico da variável que está sendo medida.

Para medir uma tensão ou uma corrente, ligamos um medidor ao circuito através de terminais conhecidos como pontas de prova. As pontas de prova são coloridas para indicar o sentido de referência da variável que está sendo medida; em geral, uma das pontas de prova é vermelha e a outra é preta. Um voltímetro ideal mede a tensão da ponta de prova vermelha em relação à ponta de prova preta. O terminal vermelho é o terminal positivo e o terminal preto é o terminal negativo (veja a Figura 2.6-2*b*).

Um amperímetro ideal mede a corrente que atravessa o instrumento, como mostra a Figura 2.6-2*a*, e a tensão v_m entre os terminais do instrumento é zero. Um voltímetro ideal mede a tensão entre os terminais do instrumento, como mostra a Figura 2.6-2*b*, e a corrente i_m que atravessa o instrumento é zero. Nos instrumentos usados na prática, as condições estão próximas das ideais. Nos amperímetros, a tensão entre os terminais é tão pequena que pode ser desprezada; nos voltímetros, a corrente que atravessa o instrumento é tão pequena que pode ser desprezada.

Os voltímetros ideais se comportam como circuitos abertos e os amperímetros ideais se comportam como curtos-circuitos. Em outras palavras, o modelo de voltímetro ideal é um circuito aberto e o modelo de um amperímetro ideal é um curto-circuito. Suponha que ao circuito da Figura 2.6-3*a* sejam acrescentados um circuito aberto com uma tensão v e um curto-circuito com uma corrente i, como mostra a Figura 2.6-3*b*. Na Figura 2.6-3*c*, o circuito aberto foi substituído por um voltímetro e o curto-circuito foi substituído por um amperímetro. Como se pode ver na Figura 2.6-3*b*, a tensão medida pelo voltímetro é v e a corrente medida pelo amperímetro é i. Observe que a Figura 2.6-3*c* poderia ser obtida a partir da Figura 2.6-3*a* acrescentando um voltímetro e um amperímetro. Idealmente, a inserção de um voltímetro e de um amperímetro dessa forma não perturba o circuito. Existe outra interpretação interessante da Figura 2.6-3: o circuito da Figura 2.6-3*b* pode ser obtido a partir da Figura 2.6-3*c* substituindo o voltímetro e o amperímetro por seus modelos (ideais).

O sentido de referência é uma parte importante da especificação da tensão ou da corrente em um componente. As Figuras 2.6-4 e 2.6-5 ilustram o fato de que é preciso prestar atenção ao sentido de referência quando medimos a tensão ou a corrente em um componente. A Figura 2.6-4*a* mostra um voltímetro. As pontas de prova de um voltímetro têm cores diferentes, que indicam a tensão de referência da tensão que está sendo medida. Nas Figuras 2.6-4*b* e 2.6-4*c*, o voltímetro está sendo usado para medir a tensão entre os terminais do resistor de 6 kΩ. Quando o voltímetro é ligado ao circuito da forma indicada na Figura 2.6-4*b*, o voltímetro mede v_a, com + do lado esquerdo, na posição da ponta de prova vermelha. Quando as pontas de prova são invertidas, como na Figura 2.6-4*c*, o voltímetro passa a medir v_b, com + do lado direito, novamente na posição da ponta de prova vermelha. Observe que $v_b = -v_a$.

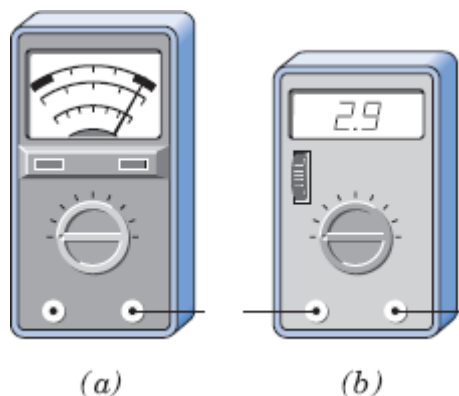



FIGURA 2.6-1 (*a*) Medidor de leitura direta (analógico). (*b*) Medidor digital.

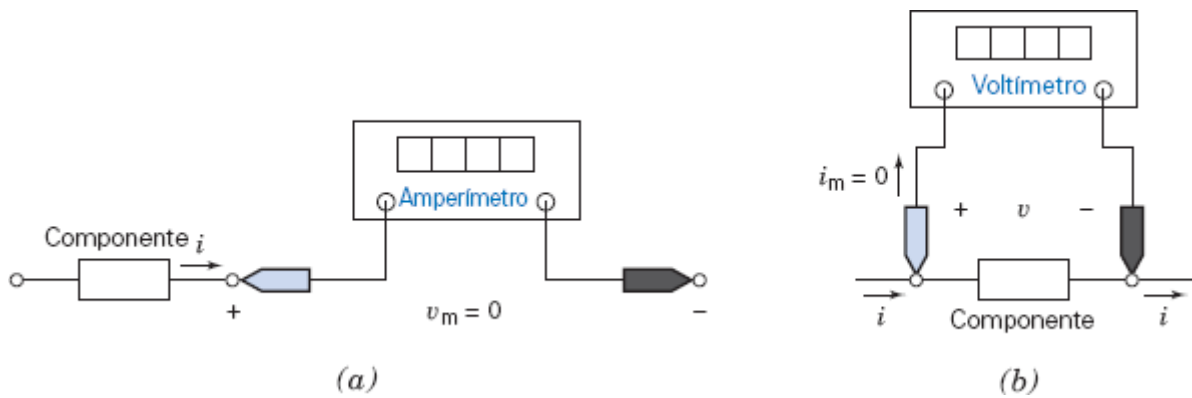



FIGURA 2.6-2 (*a*) Amperímetro ideal. (*b*) Voltímetro ideal.

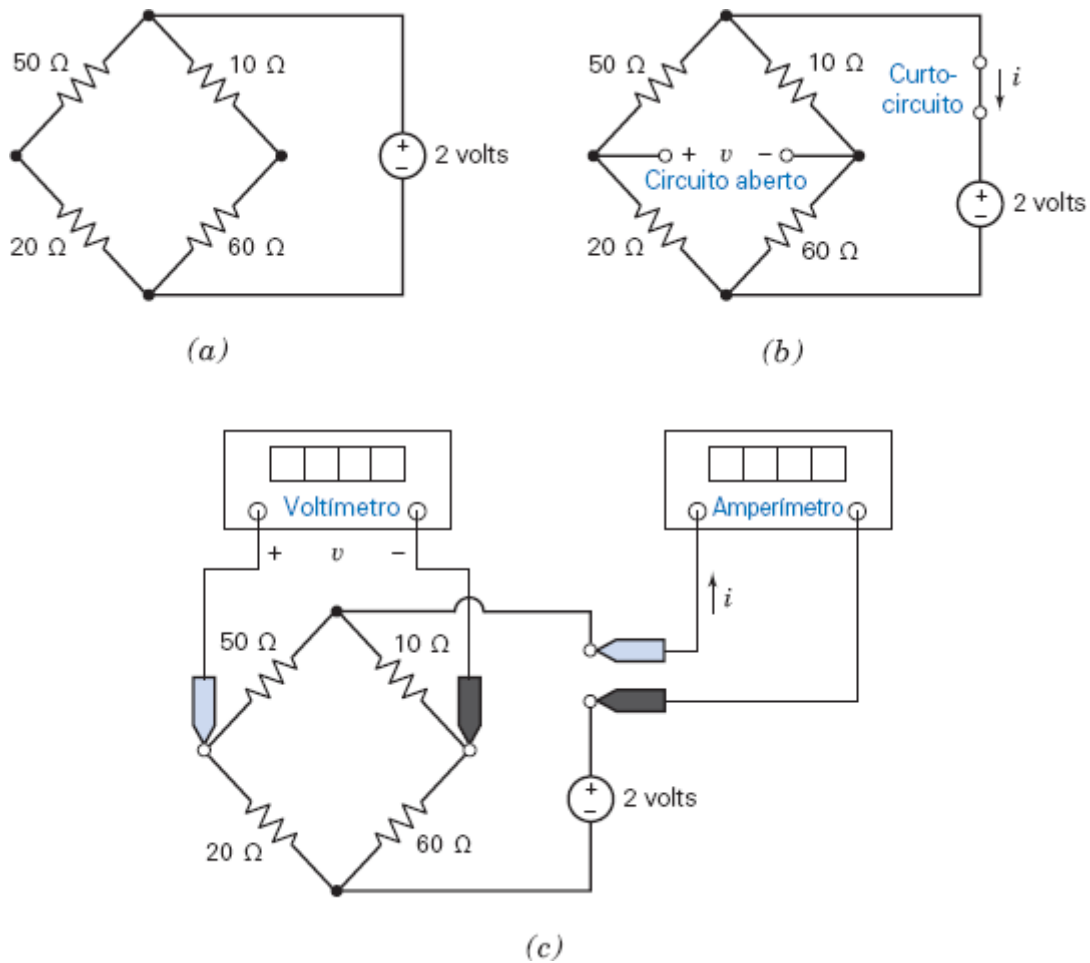



FIGURA 2.6-3 (*a*) Circuito típico. (*b*) O mesmo circuito, com a inclusão de um circuito aberto e um curto-circuito. *(c)* O circuito aberto pode ser substituído por um voltímetro e o curto-circuito pode ser substituído por um amperímetro.

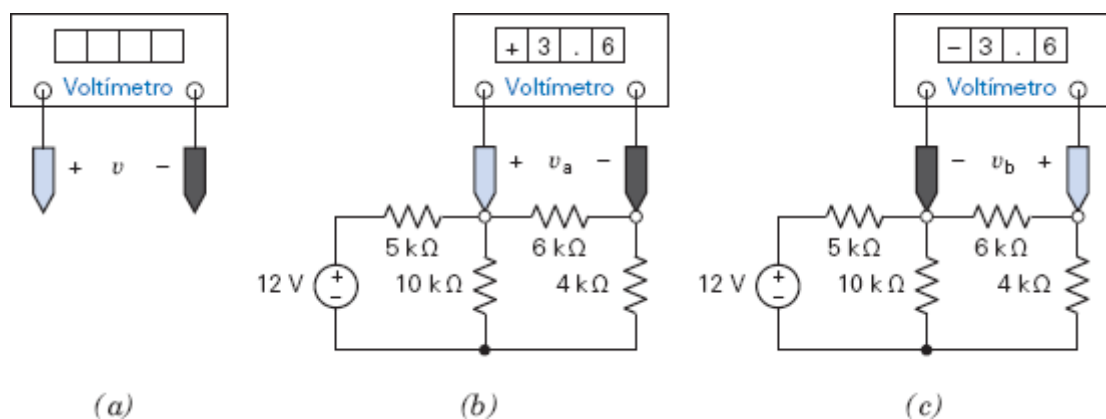



FIGURA 2.6-4 (*a*) Correspondência entre as pontas de prova de um voltímetro e o sentido de referência da tensão medida. Em (*b*), o sinal + de v_a está do lado esquerdo, enquanto em (*c*) o sinal + de v_b está do lado direito. A ponta de prova azul da figura é a

que seria vermelha em um medidor real.

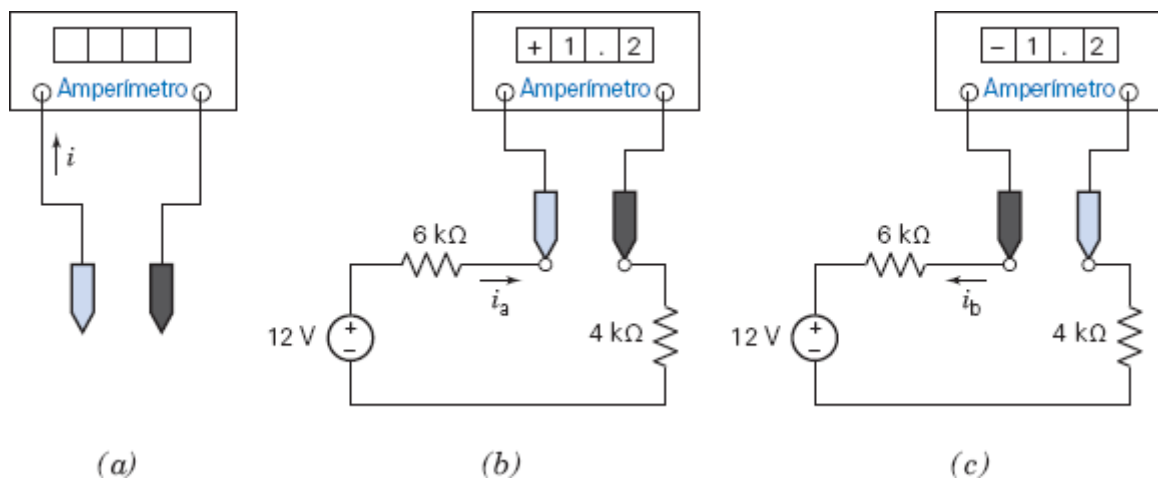



FIGURA 2.6-5 (*a*) Correspondência entre as pontas de prova de um amperímetro e o sentido de referência da corrente medida. Em (*b*), o sentido da corrente i_a é para a direita, enquanto em (*c*) o sentido da corrente i_b é para a esquerda. A ponta de prova azul da figura é a que seria vermelha em um medidor real.

A Figura 2.6-5*a* mostra um amperímetro. As pontas de prova dos amperímetros têm cores diferentes, que indicam o sentido de referência da corrente que está sendo medida. Nas Figuras 2.6-5*b* e 2.6-5*c*, o amperímetro é usado para medir a corrente que atravessa o resistor de 6 kΩ. Quando o amperímetro é ligado ao circuito da forma indicada na Figura 2.6-5*b*, o amperímetro mede i_a, no sentido da ponta de prova vermelha para a ponta de prova preta. Quando as pontas de prova são invertidas, como na Figura 2.6-5c, o amperímetro mede i_b, novamente no sentido da ponta de prova vermelha para a ponta de prova preta. Observe que $i_b = -i_a$.

2.7 Fontes Dependentes

As fontes dependentes são usadas para modelar dispositivos, como transistores e amplificadores, cuja tensão ou corrente é proporcional à tensão ou corrente em outro componente do circuito. (A situação não é a mesma de um resistor, em que a tensão no componente é proporcional à corrente no *mesmo* componente.) Assim, por exemplo, se a tensão de saída de um amplificador é proporcional à tensão de entrada, o amplificador pode ser modelado por uma fonte de tensão dependente.

A Figura 2.7-1*a* mostra um circuito com uma fonte dependente. O símbolo em forma de losango representa a fonte dependente. Os sinais positivo e negativo no interior do losango mostram que a fonte dependente é uma fonte de tensão e indicam a polaridade de referência da tensão. A indicação "5*i*" corresponde ao valor da tensão da fonte dependente. Essa tensão é o produto de dois fatores, 5 e *i*. O segundo fator, *i*, indica que a tensão da fonte é controlada pela corrente, *i*, no resistor de 18 Ω. O primeiro fator, 5, é o ganho da fonte. O ganho deste tipo de fonte dependente é a razão entre a tensão controlada, 5*i*, e a corrente de controle, *i* e, portanto, é medido em unidades de V/A ou Ω. Como se trata de uma fonte de tensão e o valor da tensão é controlado por uma corrente, este tipo de fonte dependente é chamado de fonte de tensão controlada por corrente (FTCC).

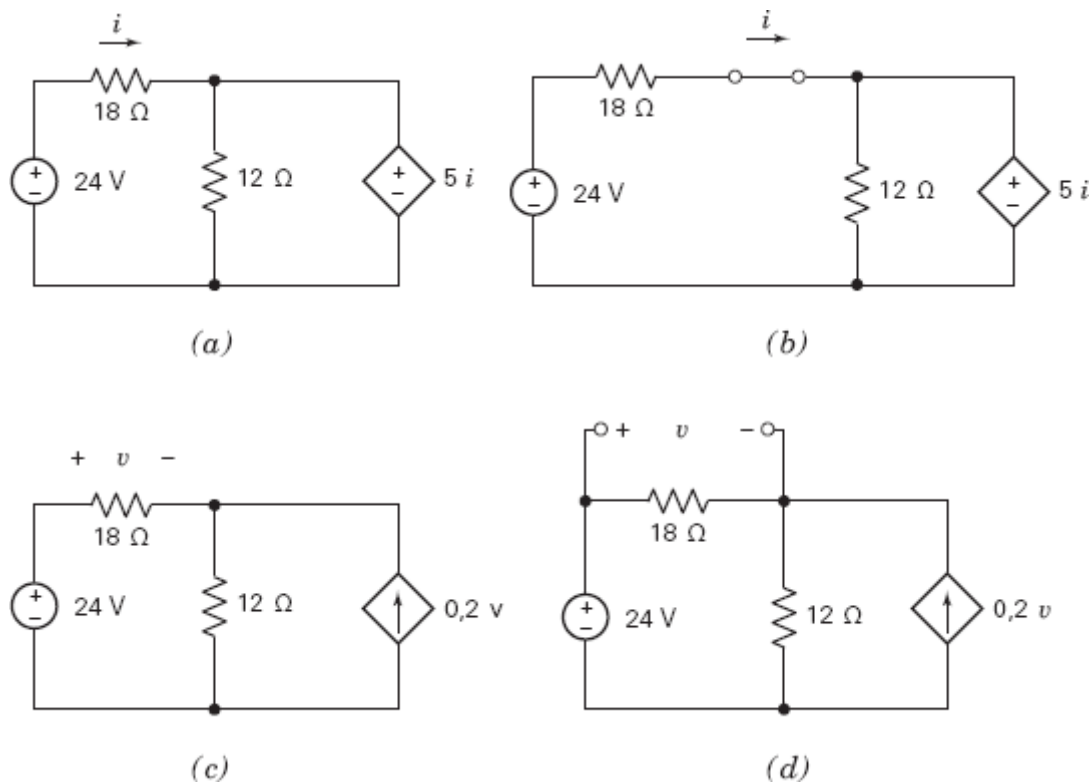



FIGURA 2.7-1 A corrente de controle de uma fonte dependente mostrada (*a*) como a corrente em um componente e (*b*) como a corrente em um curto-circuito em série com o componente. A tensão de controle de uma fonte dependente mostrada em (*c*) como a tensão em um componente e em (*d*) como a tensão em um circuito aberto em paralelo com o componente.

A Figura 2.7-1*b* mostra o circuito da Figura 2.7-1*a* usando um ponto de vista diferente. Na Figura 2.7-1*b*, inserimos um curto-circuito em série com o resistor de 18 Ω e passamos a pensar na corrente de controle *i* como a corrente em um curto-circuito e não como a corrente no resistor de 18 Ω. Agindo dessa forma, podemos sempre tratar a corrente de controle de uma fonte dependente como a corrente em um curto-circuito. Nesta seção, vamos usar o segundo ponto de vista para descrever as fontes controladas por corrente.

A Figura 2.7-1*c* mostra um circuito que contém uma fonte dependente, representada por um símbolo em forma de losango. A seta no interior do losango mostra que a fonte dependente é uma fonte de corrente e indica o sentido de referência da corrente. A indicação "0,2*v*" corresponde ao valor da corrente da fonte dependente. Essa corrente é o produto de dois fatores, 0,2 e *v*. O segundo fator, *v*, indica que a corrente da fonte é controlada pela tensão, *v*, no resistor de 18 Ω. O primeiro fator, 0,2, é o ganho da fonte. O ganho deste tipo de fonte dependente é a razão entre a corrente controlada, 0,2*v*, e a corrente de controle, *v*, e, portanto, é medido em unidades de A/V. Como se trata de uma fonte de corrente e o valor da corrente é controlado por uma tensão, este tipo de fonte dependente é chamado de fonte de corrente controlada por tensão (FCCT).

A Figura 2.7-1*d* mostra o circuito da Figura 2.7-1*c* usando um ponto de vista diferente. Na Figura 2.7-1*d*, inserimos um circuito aberto em paralelo com o resistor de 18 Ω e passamos a pensar na tensão de controle *v* como a tensão em um circuito aberto e não como a tensão entre os terminais do resistor de 18 Ω. Agindo dessa forma, podemos sempre tratar a tensão de controle de uma fonte dependente como a tensão entre os terminais de um circuito aberto. Nesta seção, vamos usar o segundo ponto de vista para descrever as fontes controladas por tensão.

A abordagem apresentada nos parágrafos anterior nos permite discutir as fontes dependentes de forma sistemática. Toda fonte dependente é formada por duas partes: a parte de controle e a parte controlada. A parte de controle é um circuito aberto ou um curto-circuito; a parte controlada é uma fonte de tensão ou uma fonte de corrente. Existem quatro tipos de fontes controladas, que correspondem às quatro formas de escolher uma parte de controle e uma parte controlada. Essas quatro fontes dependentes são chamadas de fonte de tensão controlada por tensão (FTCT), fonte de tensão controlada por corrente (FTCC), fonte de corrente controlada por tensão (FCCT) e fonte de corrente controlada por corrente (FCCC). A Tabela 2.7-1 mostra os símbolos usados para representar fontes dependentes.

Tabela 2.7-1 Fontes Dependentes

DESCRIÇÃO	SÍMBOLO
Fonte de Tensão Controlada por Corrente (FTCC) *r* é o ganho da FTCC. *r* tem unidades de volts/ampère.	+ $v_c = 0$ – i_c ; i_d + – $v_d = ri_c$
Fonte de Tensão Controlada por Tensão (FTCT) *b* é o ganho da FTCT. *b* tem unidades de volts/volt.	$i_c = 0$ + v_c – ; i_d + – $v_d = bv_c$
Fonte de Corrente Controlada por Tensão (FCCT) *g* é o ganho da FCCT. *g* tem unidades de ampères/volt	$i_c = 0$ + v_c – ; + v_d – $i_d = gv_c$
Fonte de Corrente Controlada por Corrente (FCCC) *d* é o ganho da FCCC. *d* tem unidades de ampères/ampère.	+ $v_c = 0$ – i_c ; + v_d – $i_d = di_c$

Considere a FTCC da Tabela 2.7-1. O componente de controle é um curto-circuito. A corrente e tensão do componente de controle são representadas pelos símbolos i_c e v_c. Como a tensão entre os terminais de um curto-circuito é zero, $v_c = 0$. A corrente no curto-circuito, i_c, é o sinal de controle da fonte dependente. O componente controlado é uma fonte de tensão. A corrente e a tensão no componente controlado são representadas pelos símbolos i_d e v_d. A tensão v_d é controlada por i_c:

$$v_d = ri_c$$

A constante *r* é chamada de ganho da FTCC. A corrente i_d, como a corrente em qualquer fonte de tensão, é determinada pelo resto do circuito.

Considere agora a FTCT da Tabela 2.7-1. O componente de controle é um circuito aberto. Como a corrente em um circuito aberto é zero, $i_c = 0$. A tensão no circuito aberto, v_c, é o sinal de controle da fonte dependente. O componente controlado é uma fonte de tensão. A tensão v_d é controlada por v_c:

$$v_d = bv_c$$

A constante *b* é chamada de ganho da FTCT. A corrente i_d é determinada pelo resto do circuito.

De acordo com a Tabela 2.7-1, o elemento de controle da FCCT é um circuito aberto. A corrente no circuito aberto é $i_c = 0$. A tensão no circuito aberto, v_c, é o sinal de controle da fonte dependente. O componente controlado é uma fonte de corrente. A corrente i_d é controlada por v_c:

$$i_d = gv_c$$

A constante g é chamada de ganho da FCCT. A tensão v_d, como a tensão em qualquer fonte de corrente, é determinada pelo resto do circuito.

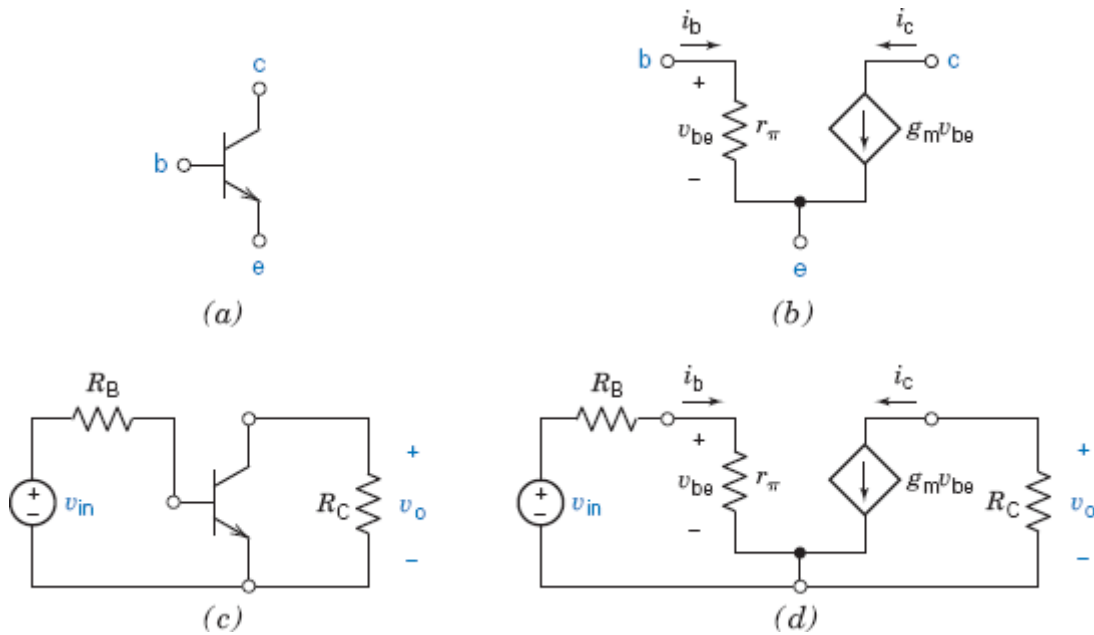



FIGURA 2.7-2 (*a*) Símbolo de um transistor. (*b*) Modelo do transistor. (*c*) Amplificador transistorizado. (*d*) Modelo do amplificador transistorizado.

De acordo com a Tabela 2.7-1, o elemento de controle da FCCC é um curto-circuito. A tensão entre os terminais do curto-circuito é $v_c = 0$. A corrente no curto-circuito, i_c, é o sinal de controle da fonte dependente. O componente controlado é uma fonte de corrente. A corrente i_d é controlada por i_c:

$$i_d = di_c$$

A constante d é chamada de ganho da FCCC. A tensão v_d, como a tensão em qualquer fonte de corrente, é determinada pelo resto do circuito.

A Figura 2.7-2 ilustra o uso de fontes dependentes para modelar dispositivos eletrônicos. Em certas circunstâncias, o comportamento do transistor que aparece na Figura 2.7-2*a* pode ser representado pelo modelo da Figura 2.7-2*b*, formado por uma fonte dependente e um resistor. O elemento de controle da fonte dependente é um circuito aberto ligado aos terminais do resistor. A tensão de controle é v_{be}. O ganho da fonte dependente é g_m. A fonte dependente é usada neste modelo para representar uma propriedade do transistor, a de que a corrente i_c é proporcional à tensão v_{be}, ou seja,

$$i_c = g_m \, v_{be}$$

em que g_m é medida em unidades de ampères/volt. As Figuras 2.7-2*c* e 2.7-2*d* ilustram a utilidade deste modelo. A Figura 2.7-2*d* pode ser obtida a partir da Figura 2.7-2*c* substituindo o transistor por seu modelo.

EXEMPLO 2.7-1 Potência em Circuitos com Fontes Dependentes

Determine a potência absorvida pela FTCT da Figura 2.7-3.

Solução

A FTCT é formada por um circuito aberto e uma fonte de tensão controlada. Como a corrente é zero em um circuito aberto, a potência absorvida pelo circuito aberto é zero.

A tensão v_c entre os terminais do circuito aberto é o sinal de controle da FTCT. A tensão v_c medida pelo voltímetro é

$$v_c = 2 \text{ V}$$

A tensão da fonte de tensão controlada é

$$v_d = 2\,v_c = 4 \text{ V}$$

A corrente da fonte controlada medida pelo amperímetro é

$$i_d = 1{,}5 \text{ A}$$

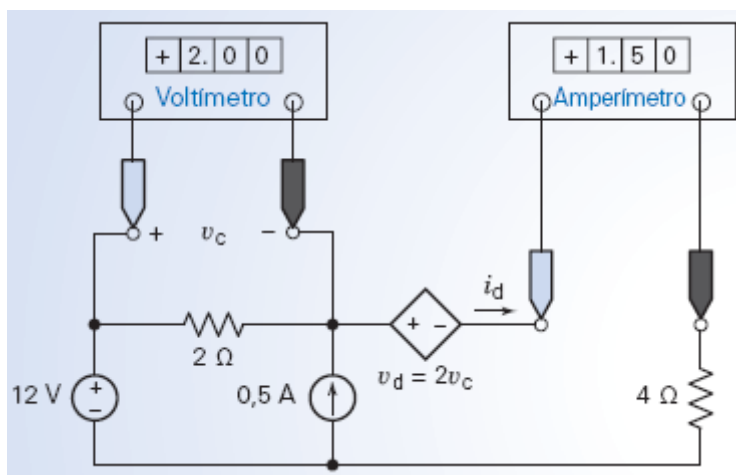



FIGURA 2.7-3 Circuito com uma FTCT. Os medidores mostram que a tensão do componente de controle é v_c = 2,0 volts e que a corrente no componente controlado é i_d = 1,5 ampère.

Como a corrente i_d e a tensão v_d estão de acordo com a convenção passiva,

$$p = i_d v_d = (1{,}5)(4) = 6 \text{ W}$$

é a potência absorvida pela FTCT.

EXERCÍCIO 2.7-1 Determine a potência absorvida pela FCCC da Figura E 2.7-1.

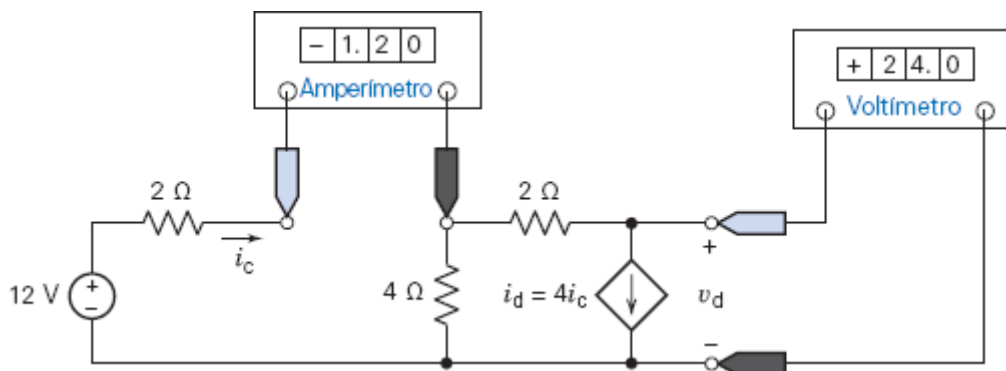



FIGURA E 2.7-1 Circuito com uma FCCC. Os medidores mostram que a corrente no componente de controle é i_c = – 1,2 ampère e que a tensão do componente controlado é v_d = 24 volts.

Sugestão: O componente de controle desta fonte dependente é um curto-circuito. A tensão entre os terminais de um curto-circuito é zero. Assim, a potência absorvida pelo elemento de controle é zero. Qual é a potência absorvida pelo componente controlado?
Resposta: –115,2 watts. (A FCCC fornece +115,2 watts ao resto do circuito.)

2.8 Transdutores

Transdutores são dispositivos que transformam outras grandezas físicas em grandezas elétricas. Nesta seção são descritos dois tipos de transdutores: potenciômetros e sensores de temperatura. Os potenciômetros convertem posição em resistência elétrica; os sensores de temperatura convertem temperatura em corrente elétrica.

A Figura 2.8-1*a* mostra o símbolo de um potenciômetro. O potenciômetro é um resistor com um terceiro contato, conhecido como cursor, que desliza ao longo do resistor. Dois parâmetros, R_p e *a*, são necessários para descrever um potenciômetro. O parâmetro R_p especifica a resistência do potenciômetro ($R_p > 0$). O parâmetro *a* representa a posição do cursor e pode assumir qualquer valor no intervalo $0 \le a \le 1$. Os valores $a = 0$ e $a = 1$ correspondem às posições extremas do cursor.

A Figura 2.8-1*b* mostra um modelo do potenciômetro formado por dois resistores. A resistência dos resistores depende dos parâmetros do potenciômetro, R_p e *a*.

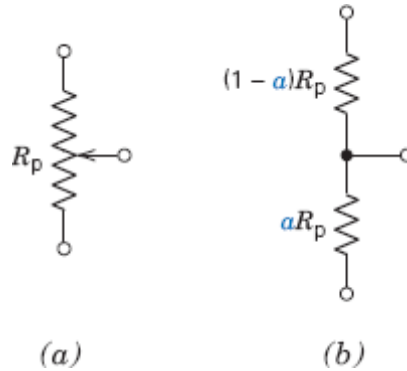



FIGURA 2.8-1 (*a*) Símbolo e (*b*) modelo de um potenciômetro.

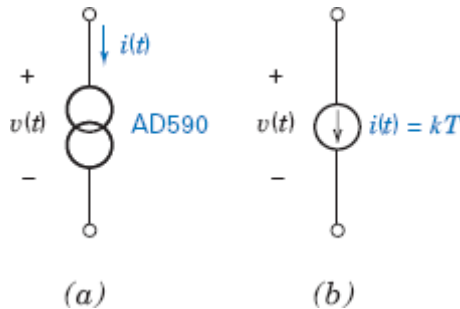



FIGURA 2.8-2 (*a*) Símbolo e (*b*) modelo de um sensor de temperatura.

Frequentemente, a posição do cursor corresponde à posição angular de um eixo ligado ao potenciômetro. Suponha que θ seja a posição angular do eixo em graus e $0 \le \theta \le 360$. Nesse caso,

$$a = \frac{\theta}{360}$$

Sensores de temperatura, como o AD590, fabricado pela empresa Analog Devices, são fontes de corrente cuja corrente é proporcional à temperatura absoluta. A Figura 2.8-2*a* mostra o símbolo usado para representar o sensor de temperatura e a Figura 2.8-2*b* mostra o circuito usado para modelar o sensor de temperatura. Para que o sensor de temperatura funcione corretamente, a tensão *v* deve satisfazer a desigualdade

$$4 \text{ volts} \le v \le 30 \text{ volts}$$

Quando essa condição é satisfeita, a corrente *i*, em microampères, é numericamente igual à temperatura *T* em kelvins. A expressão *numericamente igual* é usada para indicar que a corrente e a temperatura têm o mesmo valor numérico, embora sejam medidas em unidades diferentes. Essa relação pode ser expressa através da equação

$$i = k \cdot T$$

em que $k = 1\ \mu$A/K, uma constante associada ao sensor.

EXEMPLO 2.8-1 Circuito com um Potenciômetro

A Figura 2.8-3*a* mostra um circuito no qual a tensão medida é uma indicação da posição angular de um eixo. Na Figura 2.8-3*b*, a fonte de corrente, o potenciômetro e o voltímetro foram substituídos por modelos dos componentes. Analisando o circuito da Figura 2.8-3*b*, obtemos

$$v_m = R_p I a = \frac{R_p I}{360}\theta$$

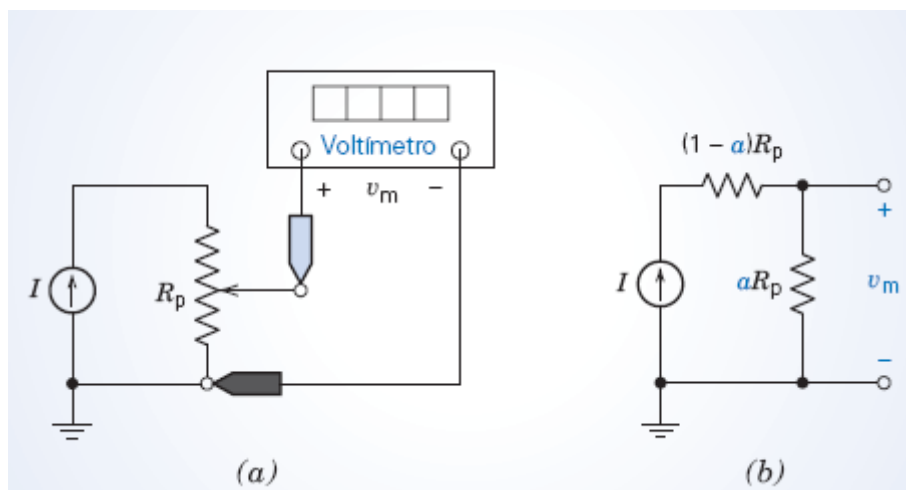



FIGURA 2.8-3 (*a*) Circuito com um potenciômetro. (*b*) Circuito equivalente com um modelo do potenciômetro.

Explicitando o ângulo, obtemos:

$$\theta = \frac{360}{R_p I} v_m$$

Suponha que $R_p = 10$ kΩ e $I = 1$ mA. Nesse caso, um ângulo de 163° corresponde a uma tensão de saída $v_m = 4{,}53$ V e uma leitura de 7,83 V indica que $\theta =$ 282º.

EXERCÍCIO 2.8-1 No circuito da Figura 2.8-3, calcule a tensão medida pelo voltímetro, v_m, para $\theta = 45°$, $R_p = 20$ kΩ e $I = 2$ mA.

Resposta: $v_m = 5$ V

EXERCÍCIO 2.8-2 A tensão e a corrente do sensor de temperatura AD590 da Figura 2.8-2 são 10 V e 280 μA, respectivamente. Determine a temperatura medida.

Resposta: $T = 280°$ K (7º C).

2.9 *Chaves*

As chaves possuem apenas dois estados: aberta e fechada. Uma chave ideal se comporta como um curto-circuito quando está fechada e como um circuito aberto quando está aberta.

As Figuras 2.9-1 e 2.9-2 mostram vários tipos de chaves. Em cada caso, o instante em que a chave muda de estado está indicado. Considere primeiro a chave unipolar de uma posição (SPST[1]) da Figura 2.9-1. A chave da Figura 2.91*a* está inicialmente aberta e muda de estado, passando para fechada, no instante $t = 0$ s. Quando essa chave é modelada como uma chave ideal, é tratada como um circuito aberto para $t < 0$ s e como um curto-circuito para $t > 0$ s. Uma chave ideal muda instantaneamente de estado. A chave da Figura 2.9-1*b* está inicialmente fechada e muda de estado, passando para aberta, no instante $t = 0$ s.

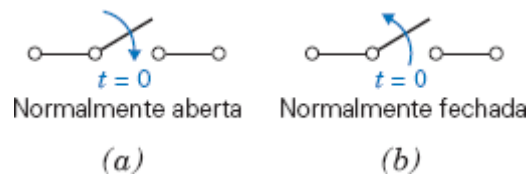



FIGURA 2.9-1 Chaves SPST. (*a*) Normalmente aberta e (*b*) normalmente fechada.

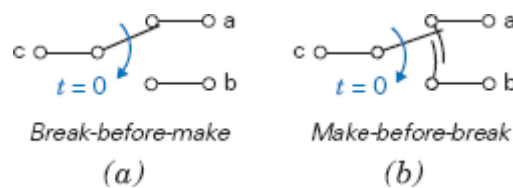



FIGURA 2.9-2 Chaves SPDT. (*a*) *Break-before-make* e (*b*) *make-before-break*.

Considere agora a chave unipolar de duas posições (SPDT[2]) da Figura 2.9-2*a*. A chave SPDT se comporta como duas chaves SPST, uma entre os terminais *c* e *a* e outra entre os terminais *c* e *b*. Antes de $t = 0$ s, a chave entre *c* e *a* está fechada e da chave entre *c* e *b* está aberta. No instante $t = 0$ s, as duas chaves mudam de estado: a chave entre *a* e *c* abre e a chave entre *c* e *b* fecha. Mais uma vez, as chaves ideais são modeladas como circuitos abertos quando estão abertas e como curtos-circuitos quando estão fechadas.

Em alguns circuitos, faz diferença se a ligação entre *c* e *b* é completada antes ou depois de a ligação entre *c* e *a* ser interrompida. Símbolos diferentes são usados para representar os dois tipos de chave unipolar de duas posições. A chave *break-before-make* é fabricada de tal forma que a ligação entre *c* e *b* é completada depois que a ligação entre *c* e *a* é interrompida. O símbolo da chave *break-before-make* aparece na Figura 2.9-2*a*. A chave *make-before-break* é fabricada de tal forma que a ligação entre *c* e *b* é completada antes que a ligação entre *c* e *a* seja interrompida. O símbolo da chave *make-before-break* aparece na Figura 2.9-2*b*.

EXEMPLO 2.9-1 Circuitos com Chaves

A Figura 2.9-3 ilustra o uso de curtos-circuitos e circuitos abertos para modelar chaves ideais. A Figura 2.9-3*a* mostra um circuito com três chaves e a Figura 2.9-3*b* mostra um modelo do mesmo circuito para $t < 0$. As duas chaves unipolares de uma posição mudam de estado no instante $t = 0$ s. A Figura 2.9-3*c* mostra um modelo do circuito no intervalo $0 < t < 2$ s. A chave unipolar de duas posições muda de estado no instante $t = 2$ s. A Figura 2.9-3*d* mostra um modelo do circuito para $t > 2$ s.

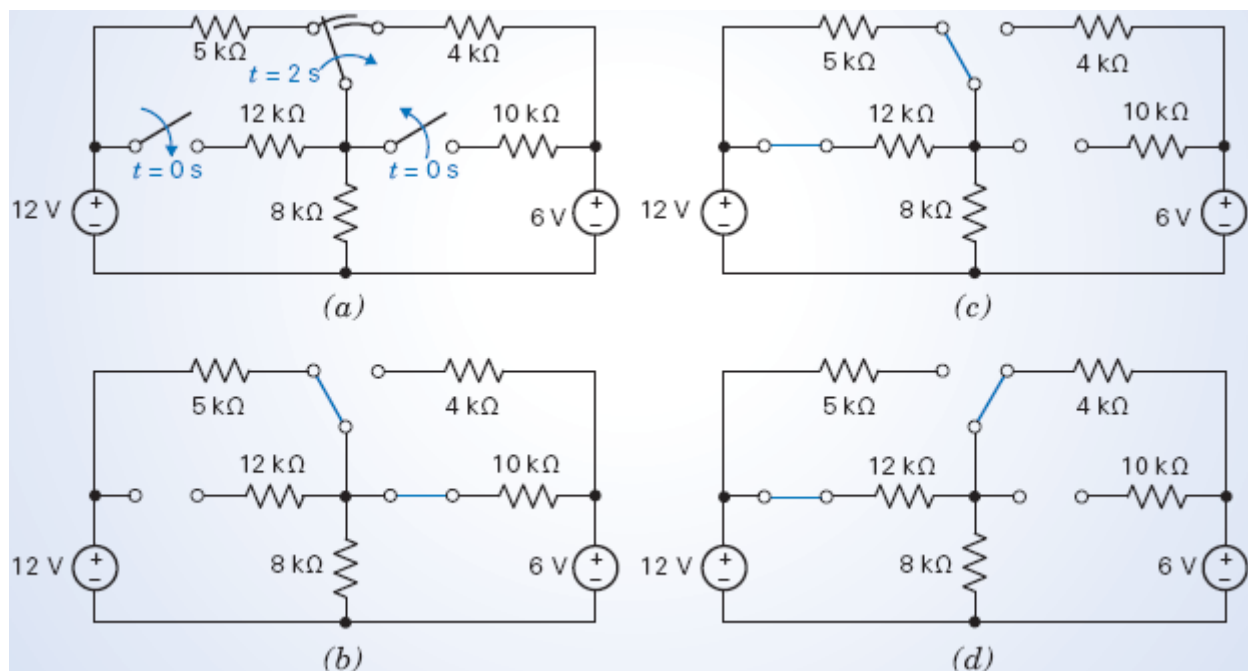



FIGURA 2.9-3 (*a*) Circuito com várias chaves. (*b*) Circuito equivalente para $t \leq 0$ s. (*c*) Circuito equivalente para $0 < t < 2$ s. (*d*) Circuito equivalente para $t > 2$ s.

EXERCÍCIO 2.9-1 Qual é o valor da corrente i da Figura E 2.9-1 no instante $t = 4$ s?

Resposta: $i = 0$ (as duas chaves estão abertas).

EXERCÍCIO 2.9-2 Qual é o valor da tensão v da Figura E 2.9-2 no instante $t = 4$ s? E no instante $t = 6$ s?

Resposta: $v = 6$ volts para $t = 4$ s e $v = 0$ para $t = 6$ s.

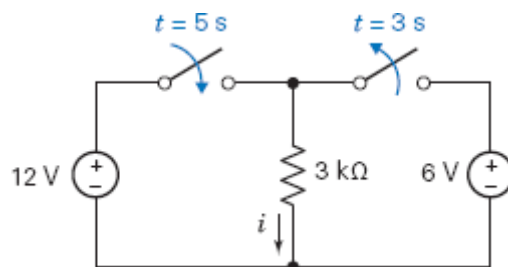



FIGURA E 2.9-1 Circuito com duas chaves SPST.

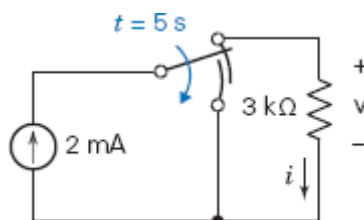



FIGURA E 2.9-2 Circuito com uma chave *make-before-break*.

2.10 *Como Podemos Testar . . . ?*

Os engenheiros são frequentemente encarregados de verificar se a solução de um problema está correta. As soluções de problemas de projeto, por exemplo, devem ser verificadas para confirmar que todas as especificações estão sendo

atendidas. Além disso, os resultados obtidos com o auxílio de computadores devem ser revistos para evitar possíveis erros na digitação dos dados e as afirmações dos vendedores a respeito dos seus produtos devem ser confirmadas.

Os estudantes de engenharia muitas vezes também precisam verificar se os resultados que obtiveram estão corretos. Às vezes falta muito pouco tempo para terminar um exame e é importante poder identificar rapidamente as questões que precisam ser refeitas.

O exemplo a seguir ilustra algumas técnicas que podem ser usadas para verificar se as soluções de problemas do tipo discutido neste capítulo estão corretas.

EXEMPLO 2.10-1 Como Podemos Testar Valores de Tensão e Corrente?

Os medidores do circuito da Figura 2.10-1 indicam que $v_1 = -4$ V, $v_2 = 8$ V e $i = 1$ A. **Como podemos verificar** se os valores de v_1, v_2 e i foram medidos corretamente? Vamos testar os valores de v_1, v_2 e i de duas formas:

(a) Verificando se os valores dados satisfazem a lei de Ohm para os dois resistores.

(b) Verificando se a potência fornecida pela fonte de tensão é igual à potência absorvida pelos resistores.

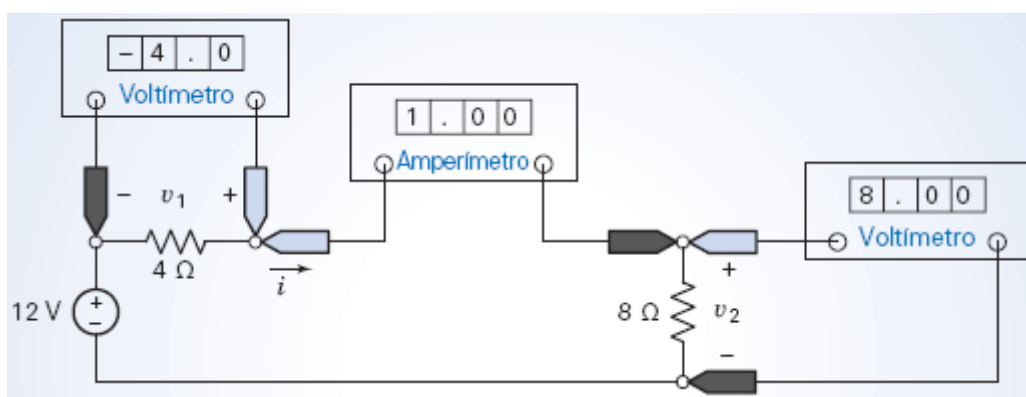



FIGURA 2.10-1 Circuito com medidores.

Solução

(a) Considere o resistor de 8 Ω. A corrente i atravessa o resistor de cima para baixo. Isso significa que a corrente i e a tensão v_2 obedecem à convenção passiva e, de acordo com a lei de Ohm, devemos ter $v_2 = 8i$. Os valores $v_2 = 8$ V e $i = 1$ A satisfazem essa relação.

Considere agora o resistor de 4 Ω. A corrente atravessa o resistor da esquerda para a direita. Isso significa que a corrente i e a tensão v_1 não obedecem à convenção passiva e, de acordo com a lei de Ohm, devemos ter $v_1 = 4(-i)$. Os valores $v_1 = -4$ V e $i = 1$ A satisfazem essa relação.

(b) A corrente i atravessa a fonte de tensão de baixo para cima. Assim, a corrente i e a tensão de 12 V não obedecem à convenção passiva e $12i = 12(1) =$ 12 W é a potência fornecida pela fonte de tensão. A potência absorvida pelo resistor de 4 Ω é $4i^2 = 4(1^2) = 4$ W e a potência absorvida pelo resistor de 8 Ω é $8i^2 = 8(1^2) = 8$ W. A potência fornecida pela fonte de tensão é, portanto, igual à potência absorvida pelos resistores.

2.11 EXEMPLO DE PROJETO Sensor de Temperatura

As correntes elétricas podem ser medidas com facilidade por aparelhos conhecidos como amperímetros. O AD590 da Analog Devices pertence a uma classe de sensores que medem temperaturas transformando temperaturas em correntes. A Figura 2.11-1 mostra o símbolo usado para representar um sensor de temperatura. Para que este modelo de sensor funcione corretamente, a tensão v deve satisfazer a condição

$$4 \text{ volts} \leq v \leq 30 \text{ voltys}$$

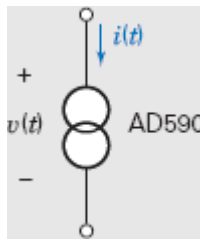



FIGURA 2.11-1 Sensor de temperatura.

Quando essa condição é satisfeita, a corrente *i*, em μA, é numericamente igual à temperatura *T* em K. A expressão *numericamente igual* é usada para indicar que a corrente e a temperatura têm o mesmo valor numérico, embora sejam medidas em unidades diferentes.

$$i = k \cdot T \quad \text{em que} \quad k = 1\frac{\mu\text{A}}{\text{K}}$$

O objetivo é projetar um circuito usando o AD590 para medir a temperatura da água em um recipiente. Além do AD590 e de um amperímetro, várias fontes de alimentação e resistores de diversos valores, com uma tolerância de 2%, estão disponíveis. As fontes de alimentação são fontes de tensão. Fontes de alimentação com tensões de 10, 12, 15, 18 e 24 volts estão disponíveis.

Descreva a Situação e as Hipóteses

Para que o transdutor de temperatura funcione corretamente, é preciso que a tensão entre os terminais do componente esteja entre 4 e 30 volts. As fontes de alimentação e os resistores são usados para estabelecer essa tensão. Um amperímetro será usado para medir a corrente no transdutor de temperatura.

O circuito deve ser capaz de medir temperaturas entre 0º C e 100º C, já que água é líquida apenas nessa faixa de temperatura. Lembre-se de que a temperatura em ºC é igual à temperatura em K menos 273.

Estabeleça a Meta

Usar as fontes de alimentação e os resistores para fazer com que a tensão *v* do transdutor de temperatura esteja entre 4 volts e 30 volts.

Usar um amperímetro para medir a corrente, *i*, no transdutor de temperatura.

Formule um Plano

Modelar a fonte de alimentação como uma fonte de tensão ideal e o transdutor de temperatura como uma fonte de corrente ideal. O circuito da Figura 2.11-2*a* faz com que a tensão entre os terminais do transdutor de temperatura seja igual à tensão da fonte de alimentação. Como todas as fontes de tensão disponíveis têm tensões entre 4 volts e 30 volts, qualquer uma das fontes pode ser usada. Note que os resistores não são necessários.

Na Figura 2.11-2*b*, um curto-circuito foi acrescentado de forma a não perturbar o circuito. Na Figura 2.11-2*c*, esse curto-circuito foi substituído por um amperímetro (ideal). Como o amperímetro mede a corrente no transdutor de temperatura, a leitura do amperímetro é numericamente igual à temperatura em K.

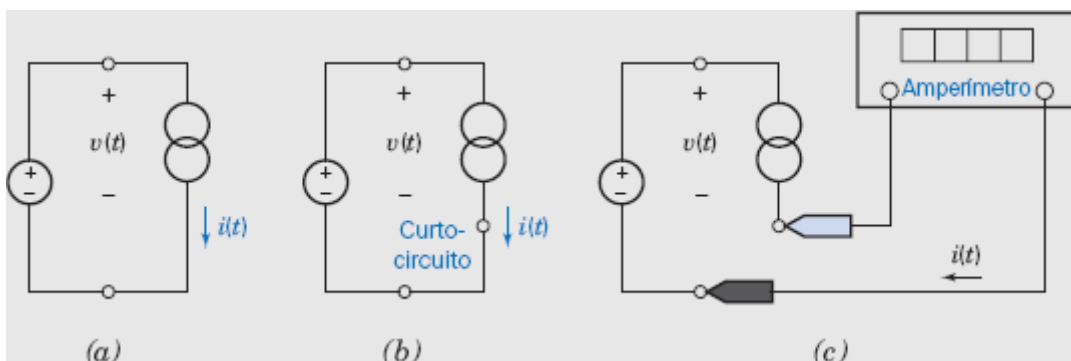



FIGURA 2.11-2 (*a*) Medição de temperatura com um sensor de temperatura. (*b*) Inserção de um curto-circuito. (*c*) Substituição do curto-circuito por um amperímetro.

Embora qualquer das fontes disponíveis seja adequada para atender às especificações, pode haver alguma vantagem em escolher uma das fontes. Por exemplo: é razoável escolher a fonte de alimentação para a qual a potência absorvida pelo transdutor é a menor possível.

Execute o Plano

A potência absorvida pelo transdutor é

$$p = v \cdot i$$

em que v é a tensão da fonte de alimentação. Escolhendo o menor valor possível de v, 10 volts neste caso, fazemos com que a potência absorvida pelo transdutor de temperatura seja a menor possível. A Figura 2.11-3*a* mostra o projeto final. A Figura 2.11-3*b* mostra um gráfico que pode ser usado para determinar a temperatura em graus Celsius correspondente a qualquer corrente medida pelo amperímetro.

Verifique se a Solução Proposta Está Correta

Vamos testar a solução através de um exemplo concreto. Suponha que a temperatura da água seja 27° C, que corresponde a 300 K. Nesse caso, a corrente no sensor de temperatura será

$$i = \left(1\frac{\mu\text{A}}{\text{K}}\right) 300\ \text{K} = 300\ \mu\text{A}$$

Suponha que o amperímetro da Figura 2.11-3*a* indique esse valor, 300 μA. Uma corrente no sensor de 300 μA corresponde a uma temperatura de

$$T = \frac{300\ \mu\text{A}}{1\ \frac{\mu\text{A}}{\text{K}}} = 300\ \text{K} = 27^\circ\ \text{C} = 80{,}6^\circ\ \text{F}$$

O gráfico da Figura 2.11-3*b* mostra que uma corrente de 300 μA no sensor corresponde realmente a uma temperatura de 27° C. Este exemplo mostra que o circuito está funcionando corretamente.

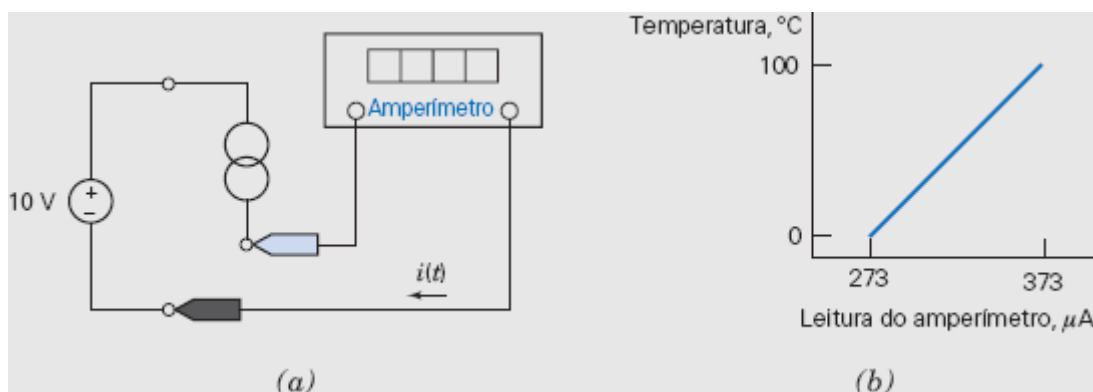



FIGURA 2.11-3 (*a*) Projeto final de um circuito para medir temperatura com um sensor de temperatura. (*b*) Gráfico da temperatura em função da corrente no amperímetro.

2.12 RESUMO

- O engenheiro usa modelos, conhecidos como componentes, para representar os dispositivos utilizados nos circuitos elétricos. Um componente é dito linear se satisfaz os princípios de superposição e homogeneidade.
- A relação entre os sentidos de referência da corrente e da tensão de um componente é muito importante. O sentido de referência (polaridade) da tensão é estabelecido assinalando um terminal do componente como positivo (+) e o outro como negativo (–). A tensão e a corrente estão de acordo com a convenção passiva se o sentido da corrente é do terminal positivo para o terminal negativo.
- Os resistores são componentes muito usados nos circuitos. Quando a tensão e a corrente em um resistor estão de acordo com a convenção passiva, os resistores obedecem à lei de Ohm; a tensão entre os terminais do resistor está relacionada à corrente através da relação $v = Ri$. A potência recebida (dissipada) por um resistor é $p = i^2R = v^2/R$ watts.

- Uma fonte independente fornece uma corrente ou uma tensão que não depende de outras variáveis do circuito. A tensão de uma fonte de tensão independente é especificada, mas a corrente depende do resto do circuito. A corrente de uma fonte de corrente independente é especificada, mas a tensão depende do resto do circuito. As tensões de fontes de tensão independentes e as correntes de fontes de corrente independentes são frequentemente usadas para alimentar circuitos elétricos.
- Uma fonte dependente fornece uma corrente ou tensão que depende de outra variável do circuito. As equações constitutivas das fontes dependentes aparecem na Tabela 2.7-1.
- O **curto-circuito** e o **circuito aberto** são casos especiais de fontes independentes. O **curto-circuito** é uma fonte de tensão ideal com $v(t) = 0$. A corrente em um curto-circuito é determinada pelo resto do circuito. O **circuito aberto** é uma fonte de corrente ideal com $i(t) = 0$. A tensão entre os terminais de um curto-circuito é determinada pelo resto do circuito. Circuitos abertos e curtos-circuitos também podem ser considerados casos especiais de resistores. Um resistor de resistência $R = 0$ ($G = \infty$) é um curto-circuito. Um resistor de condutância $G = 0$ ($R = \infty$) é um circuito aberto.
- Um amperímetro ideal mede a corrente que o atravessa e a tensão entre seus terminais é zero. Um voltímetro ideal mede a tensão entre seus terminais e a corrente que o atravessa é zero. Os voltímetros ideais se comportam como circuitos abertos e os amperímetros ideais se comportam como curtos-circuitos.
- Os transdutores são dispositivos que transformam outra grandeza física, como a posição angular, em uma grandeza elétrica, como a tensão entre dois terminais. Neste capítulo, estudamos dois tipos de transdutores: potenciômetros e sensores de temperatura.
- As chaves são muito usadas em circuitos elétricos para ligar e desligar componentes e circuitos. Uma chave aberta pode ser modelada por um circuito aberto e uma chave fechada pode ser modelada por um curto-circuito.

PROBLEMAS

Seção 2.2 Modelos de Engenharia e Modelos Lineares

P 2.2-1 Um componente é submetido a uma tensão v e a uma corrente i, como mostra a Figura P 2.2-1*a*. Os valores da corrente i e da tensão correspondente v aparecem na Figura P 2.2-1*b*. Verifique se o componente é linear.

v, V	i, A
–3	–3
–4	–2
0	0
12	2
32	4
60	6

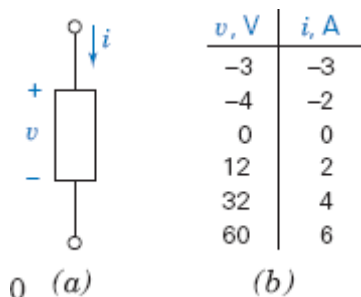



Figura P 2.2-1

P 2.2-2 Um componente é submetido a uma tensão v e a uma corrente i, como mostra a Figura P 2.2-2*a*. Os valores da corrente i e da tensão correspondente v aparecem na Figura P 2.2-2*b*. Represente o componente por uma equação que expresse v em função de i. Essa equação é um modelo do componente. (a) Mostre que o modelo é linear. (b) Use o modelo para prever o valor de v correspondente a uma corrente $i = 40$ mA. (c) Use o modelo para prever o valor de i correspondente a uma tensão $v = 3$ V.

Sugestão: Plote os dados. Se o componente for linear, os pontos correspondentes aos dados estarão em linha reta. Obtenha um modelo linear do componente representando a linha reta por uma equação.

v, V	i, A
−3,6	−30
2,4	20
6,0	50

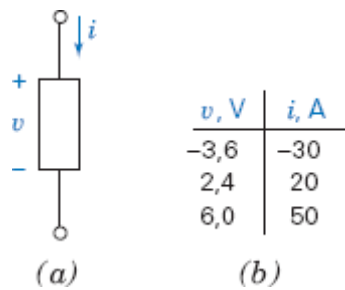



Figura P 2.2-2

P 2.2-3 Um componente linear é submetido a uma tensão v e a uma corrente i, como mostra a Figura P 2.2-3*a*. Os valores da corrente i e da tensão correspondente v aparecem na Figura P 2.2-3*b*. Represente o componente por uma equação que expresse v em função de i. Essa equação é um modelo do componente. (a) Mostre que o modelo é linear. (b) Use o modelo para prever o valor de v correspondente a uma corrente i = 6 mA. (c) Use o modelo para prever o valor de i correspondente a uma tensão v = 12 V.

Sugestão: Plote os dados. Se o componente for linear, os pontos correspondentes aos dados estarão em linha reta. Obtenha um modelo linear do componente representando a linha reta por uma equação.

v, V	i, mA
3,078	12
5,13	20
12,825	50

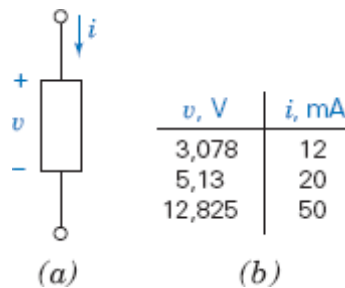



Figura P 2.2-3

P 2.2-4 Um componente é representado pela seguinte relação entre corrente e tensão:

$$v = 3i + 5$$

Verifique se o componente é linear.

P 2.2-5 O circuito da Figura P 2.2-5 é formado por uma fonte de corrente, um resistor e o componente A. Considere três casos.

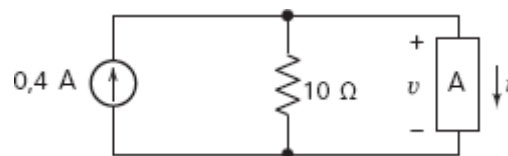



Figura 2.2-5

(a) Quando o componente A é um resistor de 40 Ω, descrito pela equação $i = v/40$, o circuito é representado por

$$0{,}4 = \frac{v}{10} + \frac{v}{40}$$

Determine os valores de v e i. Observe que a equação acima tem apenas uma solução.

(b) Quando o componente A é um resistor não linear descrito pela equação $i = v^2/2$, o circuito é representado por

$$0{,}4 = \frac{v}{10} + \frac{v^2}{2}$$

Determine os valores de v e i. Observe que a equação acima tem duas soluções. Em geral, o comportamento dos sistemas não lineares é mais complexo que o dos sistemas lineares.

(c) Quando o componente A é um resistor não linear, descrito pela equação $i = 0{,}8 + v^2/2$, o circuito é representado por

$$0{,}4 = \frac{v}{10} + 0{,}8 + \frac{v^2}{2}$$

Mostre que esta equação não tem solução. Este tipo de resultado em geral indica um erro de modelagem; pelo menos um dos três componentes do circuito não foi modelado corretamente.

Seção 2.4 Resistores

P 2.4-1 Uma fonte de corrente e um resistor estão ligados em série no circuito da Figura P 2.4-1. Como componentes ligados em série são percorridos pela mesma corrente, $i = i_s$ neste circuito. Suponha que $i_s = 3$ A e $R = 7\ \Omega$. Calcule a tensão v entre os terminais do resistor e a potência absorvida pelo resistor.

Resposta: $v = 21$ V e o resistor absorve 63 W.

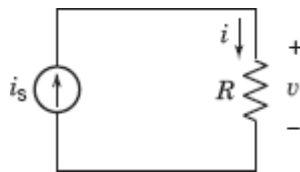



Figura P 2.4-1

P 2.4-2 Uma fonte de corrente e um resistor estão ligados em série no circuito da Figura P 2.4-1. Como componentes ligados em série são percorridos pela mesma corrente, neste circuito $i = i_s$. Suponha que $i = 3$ mA e $v = 48$ V. Calcule a resistência R e a potência absorvida pelo resistor.

P 2.4-3 Uma fonte de tensão e um resistor estão ligados em paralelo no circuito da Figura P 2.4-3. Como componentes ligados em paralelo têm a mesma tensão, $v = v_s$ neste circuito. Suponha que $v_s = 10$ V e $R = 5\ \Omega$. Calcule a corrente i no resistor e a potência absorvida pelo resistor.

Resposta: $i = 2$ A e o resistor absorve 20 W.

Figura 2.4-3

P 2.4-4 Uma fonte de tensão e um resistor estão ligados em paralelo no circuito da Figura P 2.4-3. Como componentes ligados em paralelo têm a mesma tensão, $v = v_s$ neste circuito. Suponha que $v_s = 24$ V e $i = 3$ A. Calcule a resistência R e a potência absorvida pelo resistor.

P 2.4-5 Uma fonte de tensão e dois resistores estão ligados em paralelo no circuito da Figura P 2.4-5. Como componentes ligados em paralelo têm a mesma tensão, $v_1 = v_s$ e $v_2 = v_s$ neste circuito. Suponha que $v_s = 150$ V, $R_1 = 50\ \Omega$ e $R_2 = 25\ \Omega$. Calcule a corrente nos resistores e a potência absorvida pelos resistores.

Sugestão: Observe o sentido de referência das correntes nos resistores.

Resposta: $i_1 = 3$ A e $i_2 = -6$ A. R_1 absorve 450 W e R_2 absorve 900 W.

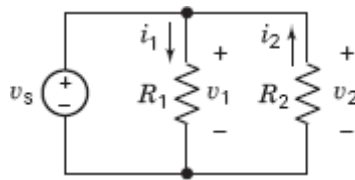



Figura P 2.4-5

P 2.4-6 Uma fonte de corrente e dois resistores estão ligados em série no circuito da Figura P 2.4-6. Como componentes ligados em série têm a mesma corrente, $i_1 = i_s$ e $i_2 = i_s$ neste circuito. Suponha que i_s = 25 mA, R_1 = 4 Ω e R_2 = 8 Ω. Calcule a tensão nos resistores e a potência absorvida pelos resistores.

Sugestão: Observe o sentido de referência da tensão nos resistores.

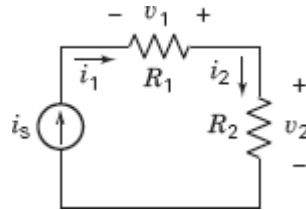



Figura P 2.4-6

P 2.4-7 Um aquecedor elétrico é ligado a uma fonte de tensão contínua de 250 V e absorve 1000 W. Mais tarde, o mesmo aquecedor é ligado a uma fonte de tensão contínua de 220 V. Qual é a nova potência absorvida pelo aquecedor? Qual é a resistência do aquecedor?

Sugestão: Use um resistor como modelo do aquecedor.

P 2.4-8 O equipamento portátil de iluminação de uma mina está situado a 100 metros de distância da fonte de alimentação. As lâmpadas da mina consomem um total de 5 kW e operam com uma tensão contínua de 120 V. Determine área da seção reta dos fios de cobre usados para ligar a fonte às lâmpadas da mina para que a potência dissipada nos fios seja menor ou igual a 5% da potência consumida pelas lâmpadas.

Sugestão: Use resistores como modelos das lâmpadas e do fio.

P 2.4-9 A resistência de um resistor real depende da resistência nominal e da tolerância de acordo com a equação

$$R_{\text{nom}}\left(1-\frac{t}{100}\right) \le R \le R_{\text{nom}}\left(1+\frac{t}{100}\right)$$

em que R_{nom} é a resistência nominal e t é a tolerância da resistência expressa como uma porcentagem. Assim, por exemplo, a resistência de um resistor de 100 Ω com uma tolerância de 2% é dada por

$$98\ \Omega \le R \le 102\ \Omega$$

O circuito da Figura P 2.4-9 possui uma entrada, v_s, e uma saída, v_o. O ganho do circuito é dado por

$$\text{ganho} = \frac{v_o}{v_s} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Determine a faixa de valores possíveis do ganho quando R_1 é a resistência de um resistor de 100 Ω, 2% e R_2 é a resistência de um resistor de 400 Ω, 5%. Expresse o ganho em termos de um ganho nominal e uma tolerância do ganho.

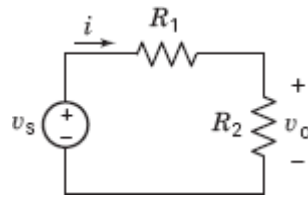



Figura P 2.4-9

P 2.4-10 A fonte de tensão da Figura P 2.4-10 é uma fonte de tensão contínua ajustável. Em outras palavras, a tensão v_s é uma tensão constante, mas o valor da constante pode ser ajustado. Os dados da tabela foram colhidos da seguinte forma: a tensão v_s foi fixada em um certo valor e as tensões nos resistores, v_a e v_b, foram medidas e anotadas. Em seguida, o valor de v_s foi alterado e as novas tensões nos resistores foram medidas e anotadas. O processo foi repetido várias vezes. (Os valores de v_s não foram anotados). Determine o valor da resistência R.

v_a, V	v_b, V
11,75	7,05
7,5	4,5
5,625	3,375
10	6
4,375	2,625

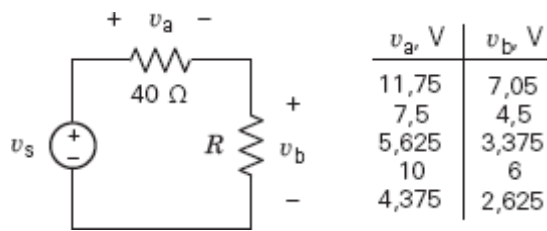



Figura P 2.4-10

P 2.4-11 Considere o circuito da Figura P 2.4-11.

(a) Se a fonte de corrente fornece uma potência de 3,125 W, determine o valor da resistência R.

(b) Se o valor da resistência R é 12 Ω, determine o valor da potência fornecida pela fonte de corrente.

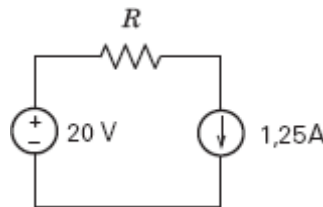



Figura P 2.4-11

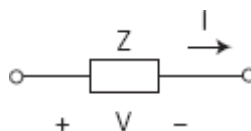
P 2.4-12 Nos *circuitos de corrente alternada* ou *circuitos de ca*, que serão discutidos no Capítulo 10, as correntes e tensões são representadas por números complexos chamados *fasores* e as propriedades dos componentes são descritas por números complexos chamados *impedâncias*. (Os números complexos são discutidos no Apêndice B.) A Figura 2.4-12 mostra um componente de um circuito de ca. **I** e **V** são números complexos que representam a corrente e a tensão no componente e **Z** é um número complexo que descreve as propriedades do elemento. De acordo com a *lei de Ohm para circuitos de ca*,

$$\mathbf{V} = \mathbf{Z}\,\mathbf{I}$$

(a) Suponha que $\mathbf{V} = 12\angle 45^\circ$ V, $\mathbf{I} = B\angle\theta$ A e $\mathbf{Z} = 18 + j8$ Ω. Determine os valores de B e θ.

(b) Suponha que $\mathbf{V} = 48\angle 135^\circ$ V, $\mathbf{I} = 3\angle 15^\circ$ A e $\mathbf{Z} = R + jX$ Ω. Determine os valores de R e X.

Figura P 2.4-12

Seção 2.5 Fontes Independentes

P 2.5-1 Uma fonte de corrente e uma fonte de tensão são ligadas em paralelo com um resistor, como mostra a Figura P 2.5-1. Todos os componentes ligados em paralelo têm a mesma tensão, v_s, neste circuito. Suponha que $v_s = 15$ V, $i_s = 3$ A e $R = 5\ \Omega$. (a) Calcule a corrente i no resistor e a potência absorvida pelo resistor. (b) Mude a corrente da fonte de corrente para $i_s = 5$ A e calcule a nova corrente, i, no resistor e a nova potência absorvida pelo resistor.

Resposta: $i = 3$ A e o resistor absorve 45 W tanto para $i_s = 3$ A como para $i_s = 5$ A.

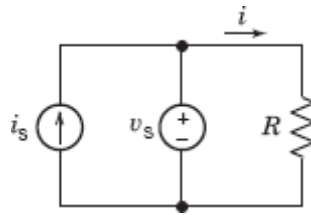



Figura P 2.5-1

P 2.5-2 Uma fonte de corrente e uma fonte de tensão são ligadas em série com um resistor, como mostra a Figura P 2.5-2. Todos os componentes ligados em série têm a mesma corrente, i_s, neste circuito. Suponha que $v_s = 10$ V, $i_s = 3$ A e $R = 5\ \Omega$. (a) Calcule a tensão v entre os terminais do resistor e a potência absorvida pelo resistor. (b) Mude a tensão da fonte de tensão para $v_s = 5$ V e calcule a nova tensão, v, entre os terminais do resistor e a nova potência absorvida pelo resistor.

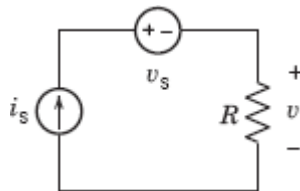



Figura P 2.5-2

P 2.5-3 A fonte de corrente e a fonte de tensão do circuito da Figura P 2.5-3 estão ligadas em paralelo e, portanto, estão submetidas à mesma tensão, v_s. A fonte de corrente e a fonte de tensão também estão ligadas em série e, portanto, são percorridas pela mesma corrente, i_s. Suponha que $v_s = 12$ V e $i_s = 3$ A. Calcule a potência fornecida pelas duas fontes.

Resposta: a fonte de tensão fornece –36 W e a fonte de corrente fornece 36 W.

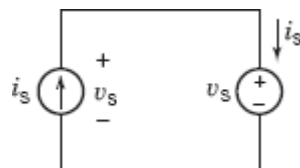



Figura P 2.5-3

P 2.5-4 A fonte de corrente e a fonte de tensão do circuito da Figura P 2.5-4 estão ligadas em paralelo e, portanto, estão submetidas à mesma tensão, v_s. A fonte de corrente e a fonte de tensão também estão em série e, portanto, são percorridas pela mesma corrente, i_s. Suponha que $v_s = 12$ V e $i_s = 2$ A. Calcule a potência fornecida pelas duas fontes.

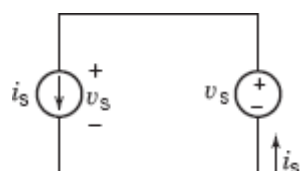



Figura P 2.5-4

P 2.5-5

(a) Determine a potência fornecida pela fonte de tensão da Figura P 2.5-5 se para $t \geq 0$ temos

$$v = 2 \cos t \text{ V}$$

e

$$i = 10 \cos t \text{ mA}$$

(b) Determine a energia fornecida pela fonte de tensão durante o intervalo de tempo $0 \leq t \leq 1$ s.

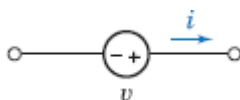



Figura P 2.5-5

P 2.5-6 A Figura P 2.5-6 mostra uma bateria ligada a uma carga. A carga da Figura P 3.5-6 pode representar os faróis de um automóvel, uma câmara digital ou um telefone celular. A energia fornecida pela bateria à carga é dada por

$$w = \int_{t_1}^{t_2} vi \, dt$$

Se a tensão da bateria é constante e a resistência da carga é fixa, a corrente da bateria é constante e

$$w = vi(t_2 - t_1)$$

A capacidade de uma bateria é o produto da corrente da bateria pelo tempo necessário para descarregar a bateria. Em consequência, a energia armazenada em uma bateria é o produto da tensão da bateria pela capacidade da bateria. A capacidade é em geral expressa em ampères-horas (Ah). Uma bateria nova de 12 V, com uma capacidade de 800 mAh, é ligada a uma carga que consome uma corrente de 25 mA. (a) Quanto tempo a bateria leva para se descarregar? (b) Qual é a energia fornecida à carga durante o tempo necessário para descarregar a bateria?

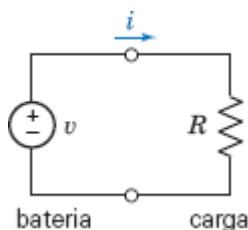



Figura 2.5-6

Seção 2.6 Voltímetros e Amperímetros

P 2.6-1 Para o circuito da Figura P 2.6-1:

(a) Qual é o valor da resistência R?

(b) Qual é a potência fornecida pela fonte de tensão?

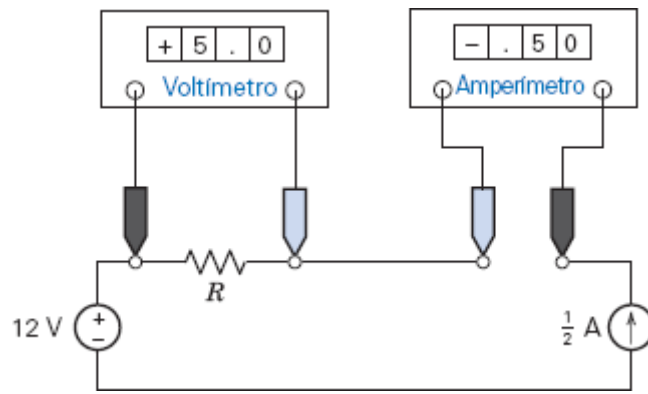



Figura P 2.6-1

P 2.6-2 A fonte de corrente da Figura P 2.6-2 fornece 40 W. Qual são as leituras dos medidores da Figura P 2.6-2?

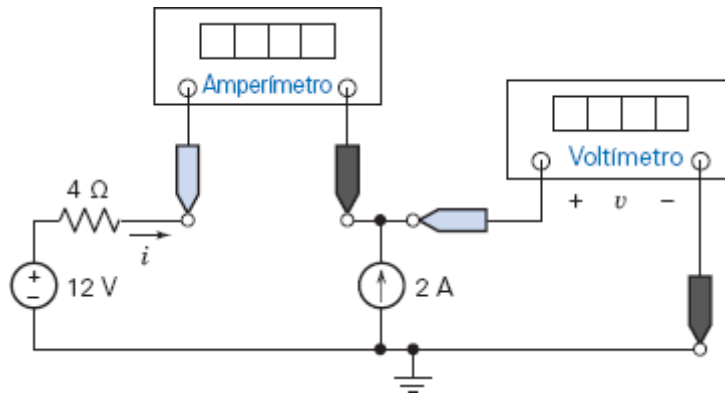



Figura P 2.6-2

P 2.6-3 Um voltímetro ideal é modelado por um circuito aberto. Um modelo mais realista de um voltímetro é uma resistência de valor elevado. A Figura P 2.6-3*a* mostra um circuito com um voltímetro sendo usado para medir a tensão v_m. Na Figura P 2.6-3*b*, o voltímetro foi substituído pelo modelo de um voltímetro ideal, um circuito aberto. Idealmente, não há corrente no resistor de 100 Ω e o voltímetro mede v_{mi} = 12 V, o valor ideal de v_m. Na Figura P 2.6-3*c*, o voltímetro é modelado pela resistência R_m. Nesse caso, a tensão medida pelo voltímetro é

$$v_m = \left(\frac{R_m}{R_m + 100}\right)12$$

Para $R_m \to \infty$, o voltímetro se torna um voltímetro ideal e $v_m \to v_{mi}$ = 12 V. Para $R_m < \infty$, o voltímetro não é ideal e $v_m < v_{mi}$. A diferença entre v_m e v_{mi} é um erro de medição causado pelo fato de que o voltímetro não é ideal.

(a) Expresse o erro de medição para R_m = 900 Ω como uma porcentagem de v_{mi}.

(b) Determine o menor valor de R_m para o qual o erro de medição é menor que 2 % de v_{mi}.

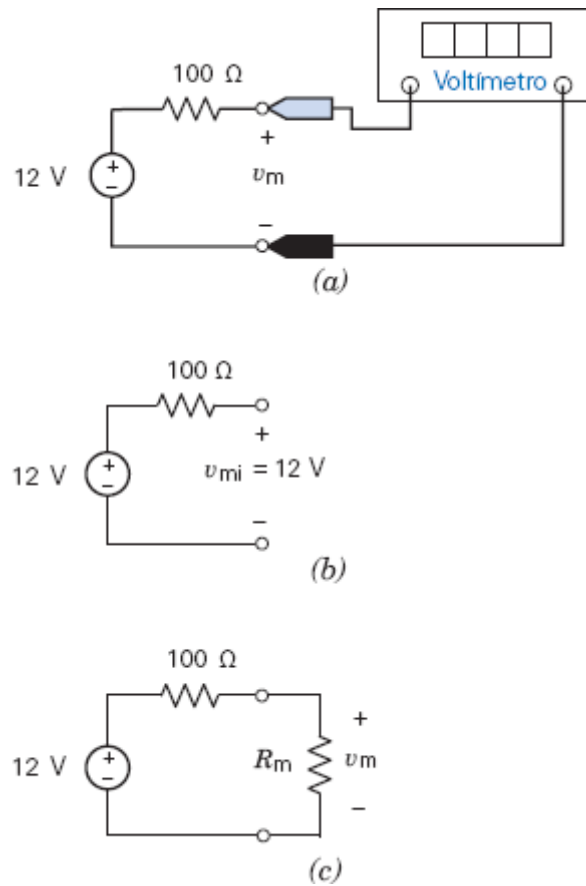



Figura P 2.6-3

P 2.6-4 Um amperímetro ideal é modelado por um curto-circuito. Um modelo mais realista de um amperímetro é uma resistência de pequeno valor. A Figura P 2.6-4*a* mostra um circuito com um amperímetro sendo usado para medir a corrente i_m. Na Figura P 2.6-4*b*, o amperímetro foi substituído pelo modelo de um amperímetro ideal, um curto-circuito. Idealmente, não há tensão no resistor de 1 kΩ e o amperímetro mede i_{mi} = 2 A, o valor ideal de i_m. Na Figura P 2.6-4*c*, o amperímetro é modelado pela resistência R_m. Nesse caso, a corrente medida pelo amperímetro é

$$i_m = \left(\frac{1000}{1000 + R_m} \right) 2$$

Para $R_m \rightarrow 0$, o amperímetro se torna um amperímetro ideal e $i_m \rightarrow i_{mi} = 2$ A. Para $R_m > 0$, o amperímetro não é ideal e $i_m < i_{mi}$. A diferença entre i_m e i_{mi} é um erro de medição causado pelo fato de que o amperímetro não é ideal.

(a) Expresse o erro de medição para $R_m = 10\ \Omega$ como uma porcentagem de i_{mi}.

(b) Determine o maior valor de R_m para o qual o erro de medição é menor que 5 % de i_m.

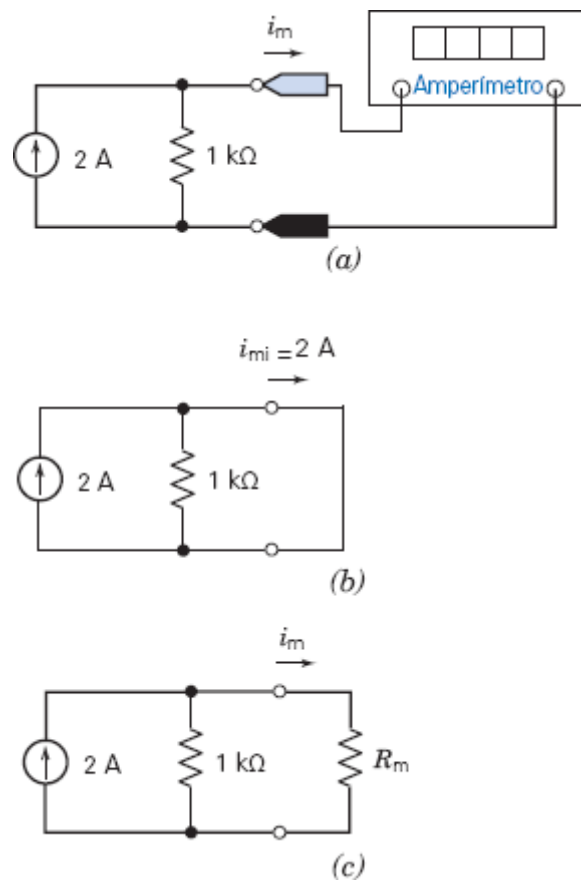



Figura P 2.6-4

P 2.6-5 O voltímetro da Figura P 2.6-5*a* mede a tensão entre os terminais de uma fonte de corrente. A Figura P 2.6-5*b* mostra o circuito depois que o voltímetro é removido; a tensão medida pelo voltímetro foi chamada de v_m. As tensões e correntes nos outros componentes também estão indicadas na Figura P 2.6-5*b*.

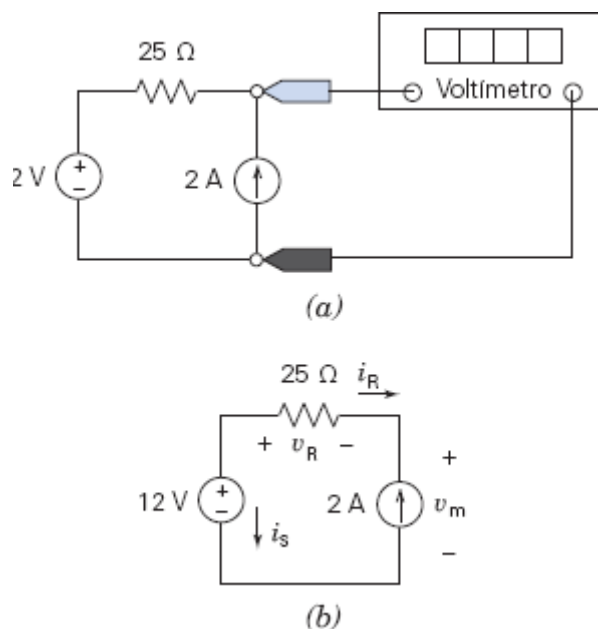



Figura P 2.6-5

Dado que

$$12 = v_R + v_m \quad \text{e} \quad -i_R = i_s = 2 \text{ A}$$

e

$$v_R = 25i_R$$

(a) Determine o valor da tensão medida pelo voltímetro.

(b) Determine a potência fornecida pelos componentes do circuito.

P 2.6-6 O amperímetro da Figura P 2.6-6*a* mede a corrente que atravessa uma fonte de tensão. A Figura P 2.6-6*b* mostra o circuito depois que o amperímetro foi removido; a corrente medida pelo amperímetro é chamada de i_m. As tensões e correntes nos outros componentes também estão indicadas na Figura P 2.6-6*b*.

Dado que

$$2 + i_m = i_R \quad \text{e} \quad v_R = v_s = 12 \text{ V}$$

e

$$v_R = 25i_R$$

(a) Determine o valor da corrente medida pelo amperímetro.

(b) Determine a potência fornecida pelos componentes do circuito.

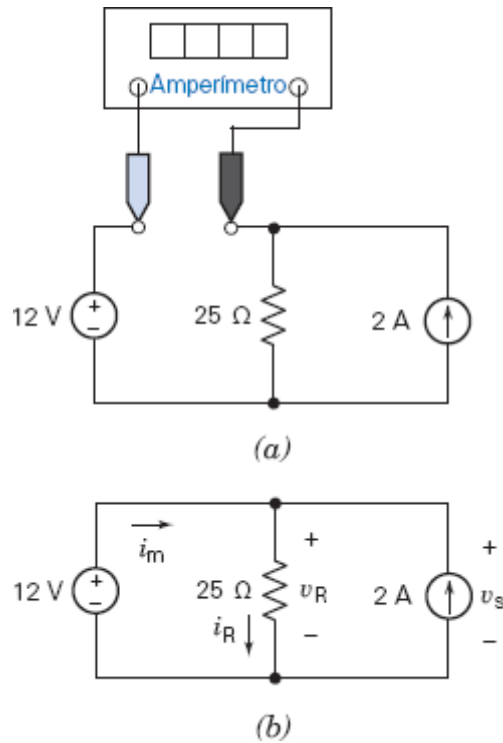



Figura P 2.6-6

Seção 2.7 Fontes Dependentes

P 2.7-1 O amperímetro do circuito da Figura P 2.7-1 indica que i_a = 2 A e o voltímetro indica que v_b = 8 V. Determine o valor de r, o ganho da FTCC.

Resposta: r = 4 V/A

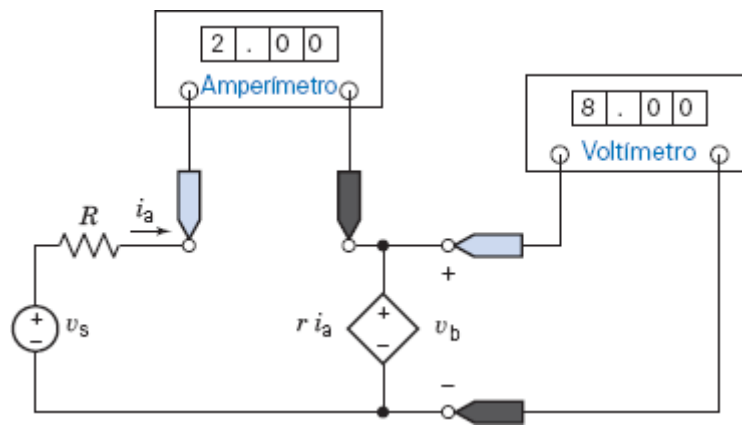



Figura P 2.7-1

P 2.7-2 O amperímetro do circuito da Figura P 2.7-2 indica que i_a = 2 A e o voltímetro indica que v_b = 8 V. Determine o valor de g, o ganho da FCCT.

Resposta: g = 0,25 A/V

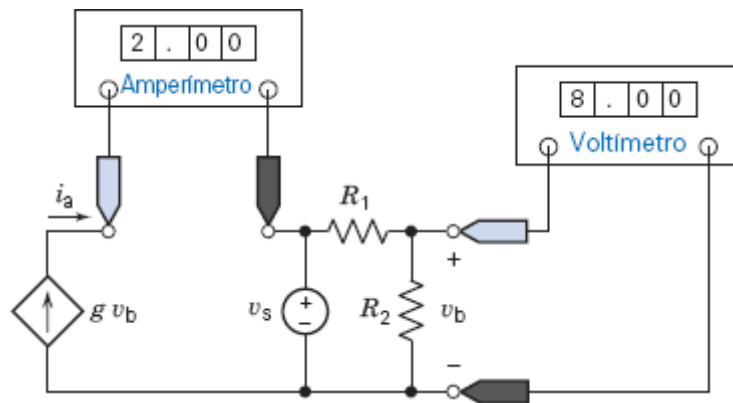



Figura P 2.7-2

P 2.7-3 Os amperímetros do circuito da Figura P 2.7-3 mostram que i_a = 32 A e i_b = 8 A. Determine o valor de d, o ganho da FCCC.

Resposta: d = 4 A/A

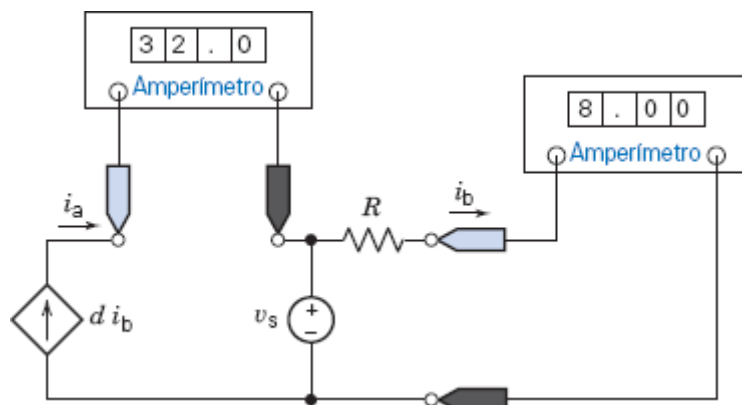



Figura P 2.7-3

P 2.7-4 Os voltímetros do circuito da Figura P 2.7-4 mostram que v_a = 2 V e v_b = 8 V. Determine o valor de b, o ganho da FTCT.

Resposta: b = 4 V/V

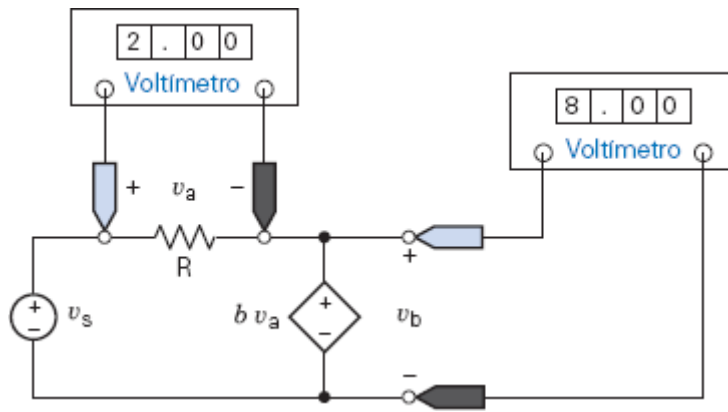



Figura P 2.7-4

P 2.7-5 Os valores da corrente e da tensão em todos os componentes do circuito da Figura P 2.7-5 estão indicados. Determine o valor da resistência, R, e do ganho da fonte dependente, A.

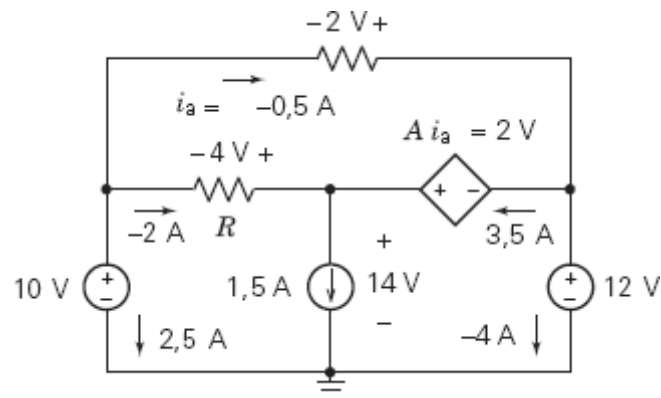



Figura P 2.7-5

P 2.7-6 Determine a potência fornecida pela FCCT da Figura P 2.7-6.

Resposta: 17,6 watts. (De acordo com as indicações dos voltímetros, a FCCT absorve –17,6 watts.)

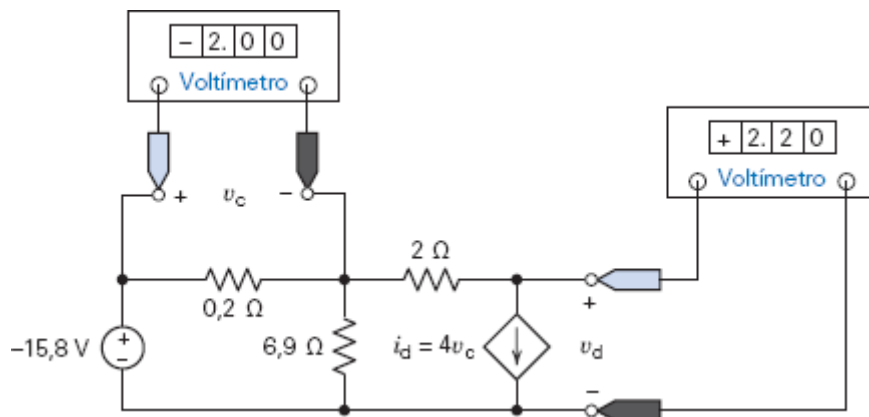



Figura P 2.7-6

P 2.7-7 O circuito da Figura 2.7-7 contém uma fonte dependente. Determine o valor do ganho k da fonte dependente.

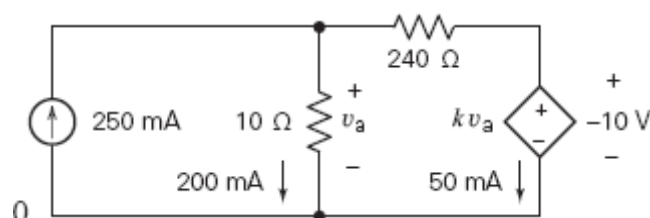



Figura P 2.7-7

P 2.7-8 O circuito da Figura P 2.7-8 contém uma fonte dependente. Determine o valor do ganho k da fonte dependente.

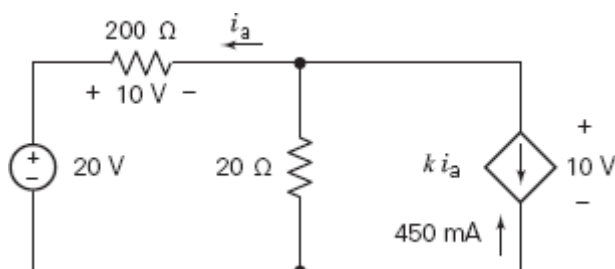



Figura P 2.7-8

P 2.7-9 O circuito da Figura P 2.7-9 contém uma fonte dependente. O ganho da fonte é

$$k = 25\frac{\text{V}}{\text{A}}$$

Determine o valor da tensão v_b.

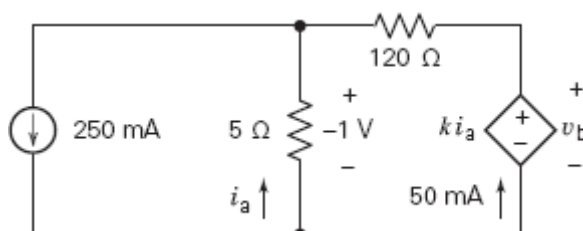



Figura P 2.7-9

P 2.7-10 O circuito da Figura P 2.7-10 contém uma fonte dependente. O ganho da fonte é

$$k = 90\frac{\text{mA}}{\text{V}} = 0{,}09\frac{\text{A}}{\text{V}}$$

Determine o valor da corrente i_b.

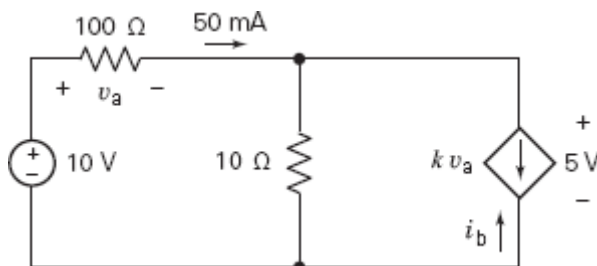



Figura P 2.7-10

Seção 2.8 Transdutores

P 2.8-1 No circuito com um potenciômetro da Figura 2.8-2, a corrente da fonte de corrente e a resistência do potenciômetro são 1,1 mA e 100 kΩ, respectivamente. Calcule o valor do ângulo θ para que a tensão medida seja 23 V.

P 2.8-2 Um sensor de temperatura AD590 tem uma constante $k = 1$ μA/K. A tensão aplicada ao sensor é $v =$ 20 V e a corrente medida, $i(t)$, indicada na Figura 2.8-3, é 4 μA $< i <$ 13 μA em condições de laboratório. Determine a faixa de temperaturas em que o sensor pode trabalhar.

Seção 2.9 Chaves

P 2.9-1 Determine a corrente i nos instantes $t = 1$ s e $t = 4$ s para o circuito da Figura P 2.9-1.

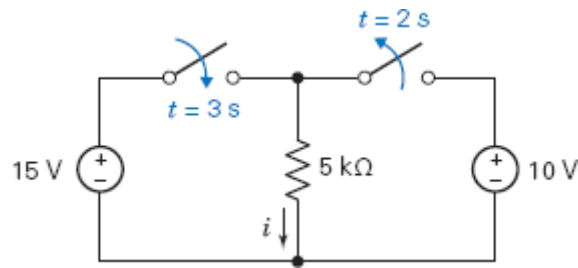



Figura P 2.9-1

P 2.9-2 Determine a tensão v nos instantes $t = 1$ s e $t = 4$ s para o circuito da Figura P 2.9-2.

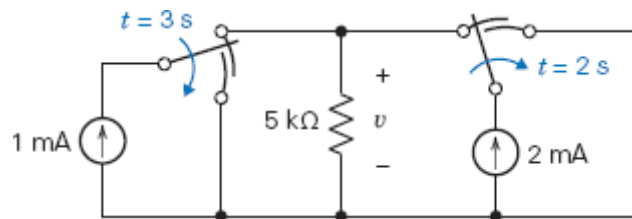



Figura P 2.9-2

P 2.9-3 Idealmente, uma chave aberta é modelada por um circuito aberto e uma chave fechada por um curto-circuito. Mais realisticamente, uma chave aberta é modelada por uma resistência de valor elevado e uma chave fechada é modelada por uma resistência de pequeno valor.

A Figura P 2.9-3*a* mostra um circuito com uma chave. Na Figura P 2.9-3*b*, a chave foi substituída por uma resistência. A tensão v da Figura P 2.9-3*b* é dada por

$$v = \left(\frac{100}{R_s + 100}\right)12$$

Determine o valor de v para os seguintes casos:

(a) A chave está fechada e $R_s = 0$ (um curto-circuito).

(b) A chave está fechada e $R_s = 5\ \Omega$.

(c) A chave está aberta e $R_s = \infty$ (um circuito aberto).

(d) A chave está aberta e $R_s = 10\ \text{k}\Omega$.

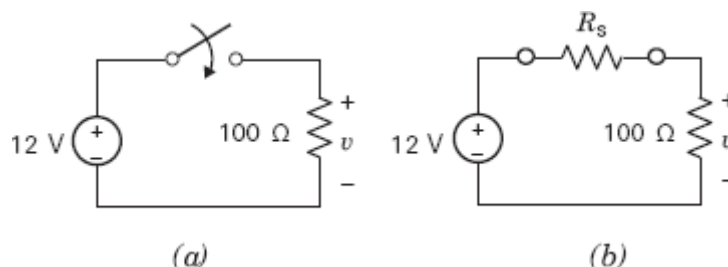



Figura P 2.9-3

Seção 2-10 Como Podemos Testar . . . ?

P 2.10-1 O circuito da Figura P 2.10-1 é usado para testar a FTCC. Seu colega de laboratório afirma que as medidas mostram que o ganho da FTCC é –20 V/A e não +20 V/A. Você concorda? Justifique sua resposta.

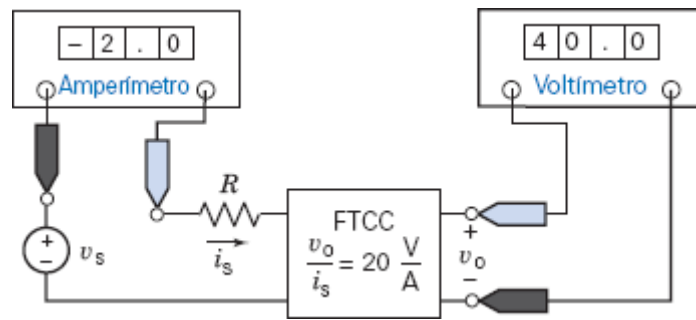



Figura P 2.10-1

P 2.10-2 O circuito da Figura P 2.10-2 é usado para medir a corrente no resistor. Uma vez conhecida a corrente, a resistência pode ser calculada através da equação $R = v_s/i$. O circuito é montado usando uma fonte de tensão com $v_s = 12$ V e um resistor de 25 Ω, 1/2 W. Quando você liga a fonte, sente um cheiro desagradável, sai fumaça do resistor e o amperímetro mostra que $i = 0$ A. O resistor deve estar defeituoso. Você dispõe de outros resistores de 25 Ω, 1/2 W. Vale a pena repetir o experimento com outro resistor? Justifique sua resposta.

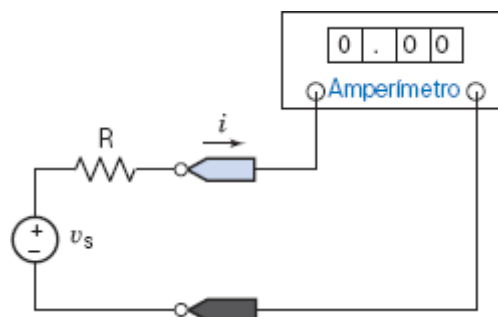



Figura P 2.10-2

Sugestão: Um resistor de 1/2 W é projetado para dissipar uma potência máxima de 1/2 W. Se a potência dissipada excede esse valor, o resistor pode queimar.

Problemas de Projeto

PP 2-1 Especifique a resistência R da Figura PP 2-1 para que as seguintes condições sejam satisfeitas:

1. $i > 40$ mA.
2. A potência absorvida pelo resistor não exceda 0,5 W.

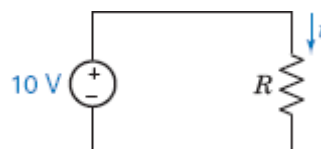



Figura PP 2-1

PP 2-2 Especifique a resistência R na Figura PP 2-2 para que as seguintes condições sejam satisfeitas:

1. $v > 40$ V.
2. A potência absorvida pelo resistor não exceda 15 W.

Figura PP 2-2

Sugestão: Não há garantia de que as especificações sempre possam ser satisfeitas.

PP 2-3 Os resistores comerciais possuem uma especificação da potência de trabalho. As potências mais comuns são 1/8 W, 1/4 W, 1/2 W e 1 W. Um resistor de 1/2 W é capaz de dissipar uma potência máxima de 1/2 W sem sofrer danos. Quanto maior a potência, mais caro e volumoso é o resistor. O ideal é especificar um resistor cuja potência não seja maior que a necessária para a aplicação que se tem em vista.

Considere o circuito da Figura PP 2-3. Os valores das resistências são

$$R_1 = 1000\ \Omega,\ R_2 = 2000\ \Omega \text{ e } R_3 = 4000\ \Omega$$

O valor da corrente da fonte é

$$i_s = 30 \text{ mA}$$

Especifique as potências de trabalho dos resistores.

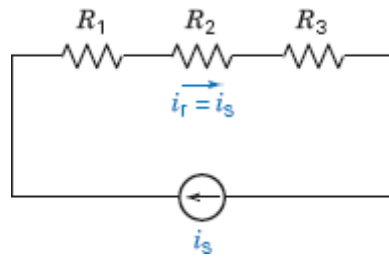



Figura PP 2-3

[1] Do inglês Single Pole, Single Throw. (N.T.)

[2] Do inglês Single Pole, Double Throw. (N.T.)

CAPÍTULO 3 Circuitos Resistivos

NESTE CAPÍTULO

3.1 *Introdução*

Neste capítulo vamos fazer o seguinte:

- Escrever equações usando das leis de Kirchhoff.

  Como era de se esperar, o comportamento de um circuito elétrico é determinado tanto pelos tipos de componentes que o circuito possui como pela forma como estão ligados. As equações constitutivas descrevem o comportamento individual dos componentes e as leis de Kirchhoff descrevem o comportamento coletivo dos componentes quando são ligados entre si para formar o circuito.
- Analisar circuitos simples usando apenas as leis de Kirchhoff e as equações constitutivas dos componentes do circuito.
- Analisar duas configurações muito comuns dos circuitos: resistores em série e resistores em paralelo.

  Vamos ver que resistores em série se comportam como um *divisor de tensão* e resistores em paralelo se comportam como um *divisor de corrente*. Além disso, resistores em série e resistores em paralelo servem como exemplos do conceito de *circuito equivalente*. A Figura 3.1-1 ilustra esse importante conceito. Na figura, um circuito foi dividido em duas partes, A e B. Quando B é substituído por um circuito equivalente, B_{eq}, as correntes e tensões nos componentes do circuito A permanecem as mesmas. É nesse sentido que dizemos que B_{eq} é equivalente a B. Vamos ver como obter um circuito equivalente quando a parte B contém apenas resistores em série ou resistores em paralelo.
- Determinar os circuitos equivalentes de fontes de tensão em série e fontes de corrente em paralelo.
- Determinar a resistência equivalente de um circuito resistivo.

Muitas vezes, os circuitos formados exclusivamente por resistores podem ser reduzidos a um único resistor equivalente substituindo repetidamente resistores em série e/ou em paralelo por resistores equivalentes.

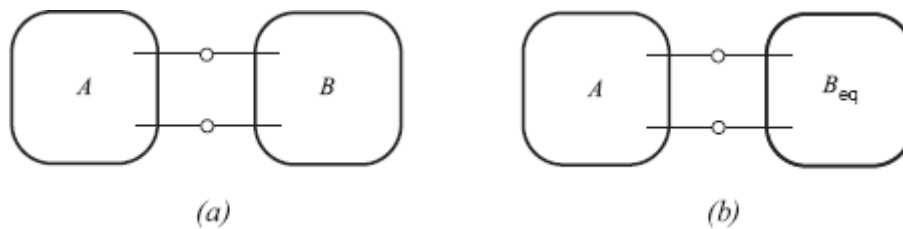



FIGURA 3.1-1 Quando o circuito *B* é substituído por um circuito equivalente B_{eq}, as correntes e tensões dos componentes do circuito *A* não são alteradas.

3.2 Leis de Kirchhoff

Um circuito elétrico é formado por componentes ligados entre si. Os pontos de ligação entre os componentes recebem o nome de nós. A Figura 3.2-1*a* mostra um circuito elétrico composto por seis componentes ligados entre si em quatro nós. É comum desenhar os circuitos elétricos usando linhas retas e posicionar os componentes na vertical ou na horizontal, como na Figura 3.2-1*b*.

O circuito foi desenhado novamente na Figura 3.2-1*c*, dessa vez chamando atenção para os nós. Observe que ao desenhar novamente o circuito usando linhas retas e componentes na horizontal e na vertical, mudamos a forma como os nós são representados. Na Figura 3.2-1*a*, os nós são representados por pontos. Nas Figuras 3.2-1*b* e 3.2-1*c*, os nós são representados por pontos e segmentos de reta.

O mesmo circuito pode ser representado de várias formas. Um diagrama de um circuito pode parecer muito diferente de outro diagrama do mesmo circuito. Como podemos saber que dois diagramas representam o mesmo circuito? Informalmente, dizemos que dois diagramas representam o mesmo circuito se os mesmos componentes estão ligados aos mesmos nós nos dois diagramas. Mais formalmente, dizemos que dois diagramas A e B representam o mesmo circuito se as condições adiante são satisfeitas.

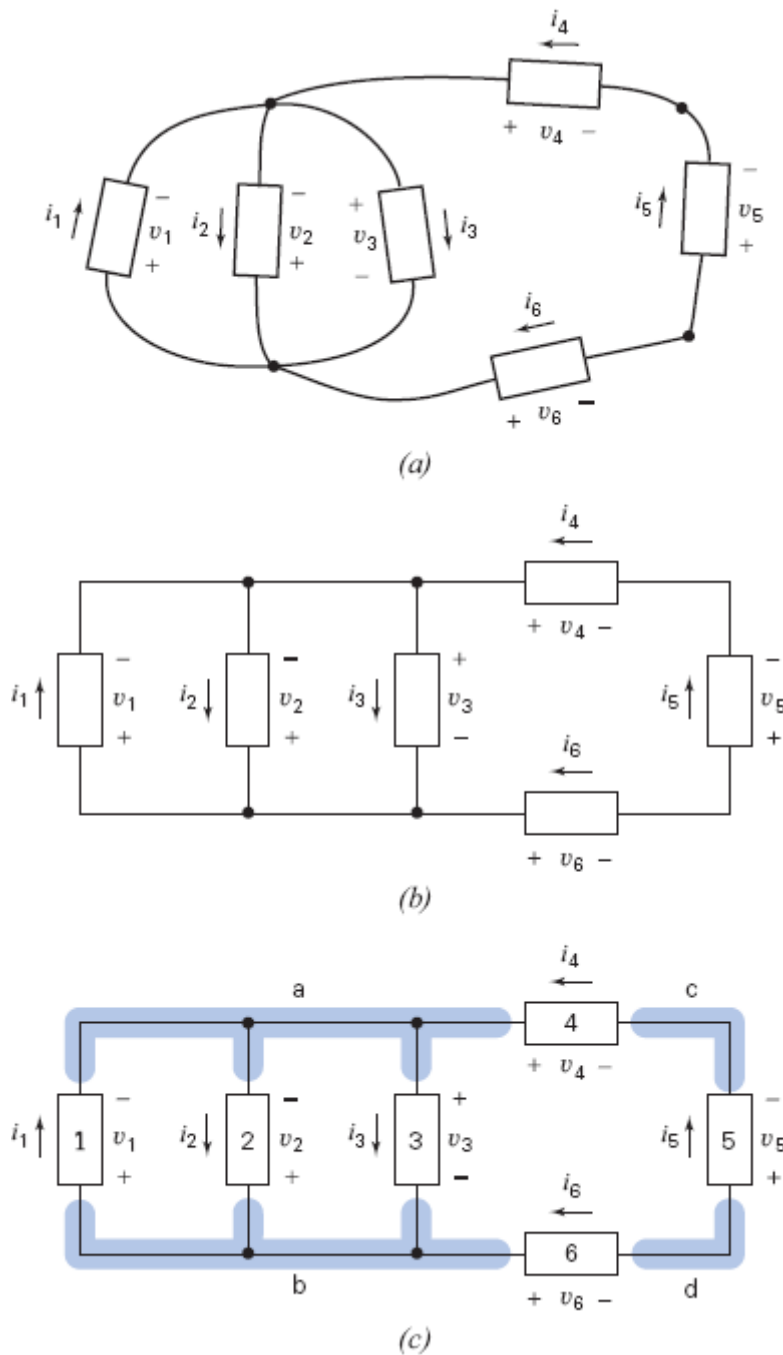



FIGURA 3.2-1 (*a*) Um circuito elétrico. (*b*) O mesmo circuito, desenhado usando linhas retas e componentes horizontais e verticais. (*c*) O mesmo circuito com os nós e componentes rotulados.

1. Existe uma correspondência biunívoca entre os nós do diagrama A e os nós do diagrama B. (Em uma correspondência biunívoca, a cada nó do diagrama A corresponde um, e apenas um, nó do diagrama B e vice-versa. A posição dos nós não é importante.)
2. Existe uma correspondência biunívoca entre os componentes do diagrama A e os componentes do diagrama B.
3. Os mesmos componentes estão ligados aos mesmos nós nos dois diagramas.

EXEMPLO 3.2-1 Diagramas Diferentes do Mesmo Circuito

A Figura 3.2-2 mostra os diagramas de quatro circuitos. Quais desses diagramas representam o circuito cujo diagrama aparece na Figura 3.2-1*c*?

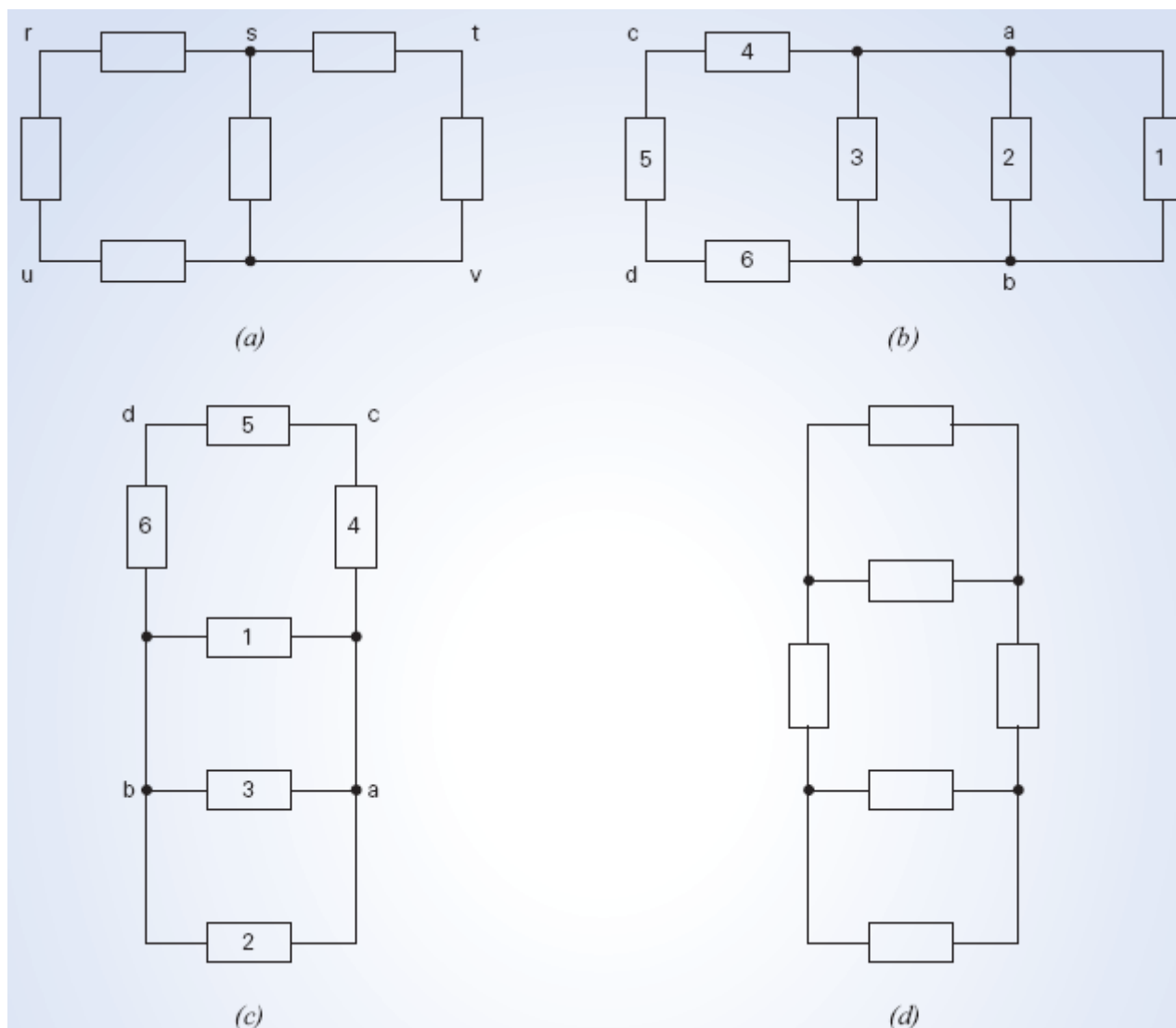



FIGURA 3.2-2 Diagramas de quatro circuitos.

Solução

O diagrama da Figura 3.2-2*a* possui cinco nós, que foram chamados de r, s, t, u e v. O diagrama da Figura 3.2-1*c* possui quatro nós. Como os dois diagramas possuem um número diferente de nós, não pode haver uma correspondência biunívoca entre os nós dos dois diagramas e, portanto, os diagramas representam circuitos diferentes.

O diagrama da Figura 3.2-2*b* possui quatro nós e seis componentes, o mesmo número de nós e de componentes do diagrama da Figura 3.2-1*c*. Os nós da Figura 3.2-2*b* foram rotulados da mesma forma que os nós correspondentes da Figura 3.2-2*c*. Por exemplo: o nó c da Figura 3.2-2*b* corresponde ao nó c da Figura 3.2-1*c*. Os componentes da Figura 3.2-2*b* também foram rotulados na mesma forma que os componentes correspondentes da Figura 3.2-1*c*. Por exemplo: o componente 5 da Figura 3.2-2*b* corresponde ao componente 5 da Figura 3.2-1*c*. Os componentes correspondentes estão ligados aos mesmos nós. Por exemplo: o componente 2 está ligado aos nós a e b tanto na Figura 3.2-2*b* como na Figura 3.2-1*c*. Em consequência, podemos dizer que os diagramas da Figura 3.2-2*b* e da Figura 3.2-1*c* representam o mesmo circuito.

O diagrama da Figura 3.2-2*c* possui quatro nós e seis componentes, o mesmo número de nós e de componentes do diagrama da Figura 3.2-1*c*. Os nós e componentes da Figura 3.2-2*c* foram rotulados da mesma forma que os nós e componentes da Figura 3.2-1*c*. Os componentes correspondentes estão ligados aos mesmos nós. Em consequência, podemos dizer que os diagramas da Figura 3.2-2*c* e da Figura 3.2-1*c* representam o mesmo circuito.

O diagrama da Figura 3.2-2*d* possui quatro nós e seis componentes, o mesmo número de nós e componentes do diagrama da Figura 3.2-1*c*. Entretanto, os nós e componentes da Figura 3.2-2*d* não podem ser rotulados de tal forma que componentes correspondentes na Figura 3.2-1*c* e na Figura 3.2-2*d* estejam ligados aos mesmos nós. (Por exemplo: na Figura 3.2-1*c*, três componentes estão ligados ao mesmo par de nós, a e b. Isso não acontece na Figura 3.2-2*d*.) Em consequência, podemos dizer que os diagramas da Figura 3.2-2*d* e da Figura 3.2-1*c* representam circuitos diferentes.

Em 1847, Gustav Robert Kirchhoff, um professor da Universidade de Berlim, formulou duas leis importantes que servem de fundamento para a análise de circuitos elétricos. Essas leis são conhecidas, em sua

homenagem, como *lei de Kirchhoff para correntes* (LKC) e *lei de Kirchhoff para tensões* (LKT). As leis de Kirchhoff são uma consequência da lei de conservação da carga e da lei de conservação da energia. A Figura 3.2-3 mostra um retrato de Kirchhoff.

De acordo com a lei Kirchhoff para correntes, a soma algébrica das correntes que entram em qualquer nó de um circuito é zero em qualquer instante de tempo.

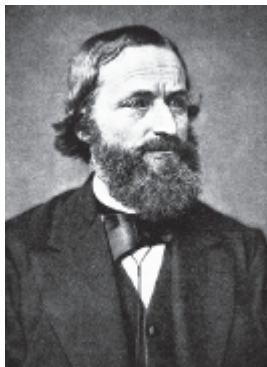



FIGURA 3.2-3 Gustav Robert Kirchhoff (1824–1887). Kirchhoff formulou duas leis em 1847 para as correntes e as tensões em um circuito elétrico.

Lei de Kirchhoff para correntes (LKC): A soma algébrica das correntes em um nó em qualquer instante é zero.

A expressão *soma algébrica* significa que devemos levar em conta o sentido das correntes ao somar as correntes dos componentes ligados a um mesmo nó. Uma forma de fazer isso é usar o sinal positivo se o sentido da corrente é para fora do nó e o sinal negativo se o sentido da corrente é para dentro do nó. Considere, por exemplo, o circuito da Figura 3.2-1*c*. Quatro componentes do circuito, os componentes 1, 2, 3 e 4, estão ligados ao nó a. De acordo com a lei de Kirchhoff para correntes, a soma algébrica das correntes nos componentes, i_1, i_2, i_3 e i_4, deve ser igual a zero. Como o sentido das correntes i_2 e i_3 é para fora do nó a, usamos o sinal positivo para i_2 e i_3. Como o sentido das correntes i_1 e i_4 é para dentro do nó, usamos o sinal negativo para i_1 e i_4. A equação da LKC para o nó a da Figura 3.2-1*c* é, portanto,

$$-i_1 + i_2 + i_3 - i_4 = 0 \tag{3.2-1}$$

Uma forma alternativa de obter a soma algébrica das correntes em um nó é igualar a soma das correntes que saem do nó à soma das correntes que entram no nó. Usando esse método, descobrimos que a equação da LKC para o nó a da Figura 3.2-1*c* é

$$i_2 + i_3 = i_1 + i_4 \tag{3.2-2}$$

É claro que as Eqs. 3.2-1 e 3.2-2 são equivalentes.

A aplicação da lei de Kirchhoff para correntes ao nó b da Figura 3.2-1*c* nos dá a seguinte equação:

$$i_1 = i_2 + i_3 + i_6$$

Antes de enunciar a lei de Kirchhoff para tensões, precisamos definir o que é malha. *Malha* é um caminho fechado em um circuito que não passa mais de uma vez por um nó intermediário. Por exemplo: começando pelo nó a da Figura 3.2-1*c*, podemos passar pelo componente 4 para chegar ao nó c, passar pelo componente 5 para chegar ao nó d, passar pelo componente 6 para chegar ao nó b e, finalmente, passar pelo componente 3 para chegar de volta ao nó a. Isso define um caminho fechado no qual não passamos pelos nós intermediários (b, c e d) mais de uma vez e, portanto, os componentes 3, 4, 5 e 6 formam uma malha. Os componentes 1, 4, 5 e 6 formam uma segunda malha. Os componentes 1 e 3 formam uma terceira malha. O

circuito da Figura 3.2-1*c* possui mais três malhas: a dos componentes 1 e 2, a dos componentes 2 e 3 e a dos componentes 2, 4, 5 e 6.

Agora podemos enunciar a lei de Kirchhoff para tensões.

Lei de Kirchhoff para tensões (LKT): A soma algébrica das tensões ao longo de uma malha em qualquer instante é zero.

A expressão *soma algébrica* significa que devemos levar em conta a polaridade das tensões ao somar as tensões dos componentes que formam uma malha. Um modo de fazer isso é percorrer a malha no sentido horário e observar as polaridades das tensões dos componentes. Usamos o sinal positivo para a tensão quando passamos pelo terminal positivo (+) do componente antes de passar pelo terminal negativo (–) e usamos o sinal negativo quando passamos pelo terminal negativo antes de passar pelo terminal positivo. Considere, por exemplo, o circuito da Figura 3.2-1*c*. Os componentes 3, 4, 5 e 6 formam uma das malhas do circuito. De acordo com a lei de Kirchhoff para tensões, a soma algébrica das tensões nos componentes, v_3, v_4, v_5 e v_6 deve ser zero. Percorrendo a malha no sentido horário, encontramos o terminal positivo de v_4 antes do terminal negativo, o terminal negativo de v_5 antes do terminal positivo, o terminal negativo de v_6 antes do terminal positivo e o terminal negativo de v_3 antes do terminal positivo. Assim, usamos o sinal negativo para v_3, v_5 e v_6 e o sinal positivo para v_4. A equação da LKT para essa malha é, portanto,

$$v_4 - v_5 - v_6 - v_3 = 0$$

A aplicação da lei de Kirchhoff para tensões à malha formada pelos componentes 1, 4, 5 e 6 nos dá a equação

$$v_4 - v_5 - v_6 + v_1 = 0$$

e a aplicação da mesma lei à malha formada pelos componentes 1 e 2 nos dá a equação

$$-v_2 + v_1 = 0$$

EXEMPLO 3.2-2 Leis de Kirchhoff

EXEMPLO INTERATIVO

Considere o circuito da Figura 3.2-4*a*. Determine a potência fornecida pelo componente *C* e a potência recebida pelo componente *D*.

Solução

A Figura 3.2-4*a* mostra o valor da corrente no componente *C*, mas não a tensão, *v*, entre os terminais do componente. Como a tensão e a corrente do componente *C* da Figura 3.2-4*a* estão de acordo com a convenção passiva, o produto da corrente pela tensão é igual à potência *recebida* pelo componente *C*. A Figura 3.2-4*a* mostra o valor da tensão entre os terminais do componente *D*, mas não a corrente, *i*, no componente. Como a tensão e a corrente no componente *D* da Figura 3.2-4*a* não estão de acordo com a convenção passiva, o produto da tensão pela corrente é igual à potência *fornecida* pelo componente *D*.

Para resolver o problema, precisamos determinar a tensão *v* entre os terminais do componente *C* e a corrente *i* no componente *D*. Vamos usar as leis de Kirchhoff para calcular os valores de *v* e *i*. Para começar, identificamos e rotulamos os nós do circuito, como mostra a Figura 3.2-4*b*.

Em seguida, aplicamos a lei de Kirchhoff para tensões (LKT) à malha formada pelos componentes *C*, *D* e *B* para obter

$$-v - (-4) - 6 = 0 \;\Rightarrow\; v = -2\text{ V}$$

O valor da corrente no componente *C* da Figura 3.2-4*b* é 7 A. Como a tensão e a corrente do componente *C* da Figura 3.2-4*b* estão de acordo com a convenção passiva,

$$p_C = v(7) = (-2)(7) = -14\text{ W}$$

é a potência *recebida* pelo componente *C*. Isso significa que o componente *C* *fornece* 14 W ao circuito.

Aplicando a lei de Kirchhoff para correntes (LKC) ao nó b, obtemos:

$$7 + (-10) + i = 0 \;\Rightarrow\; i = 3\text{ A}$$

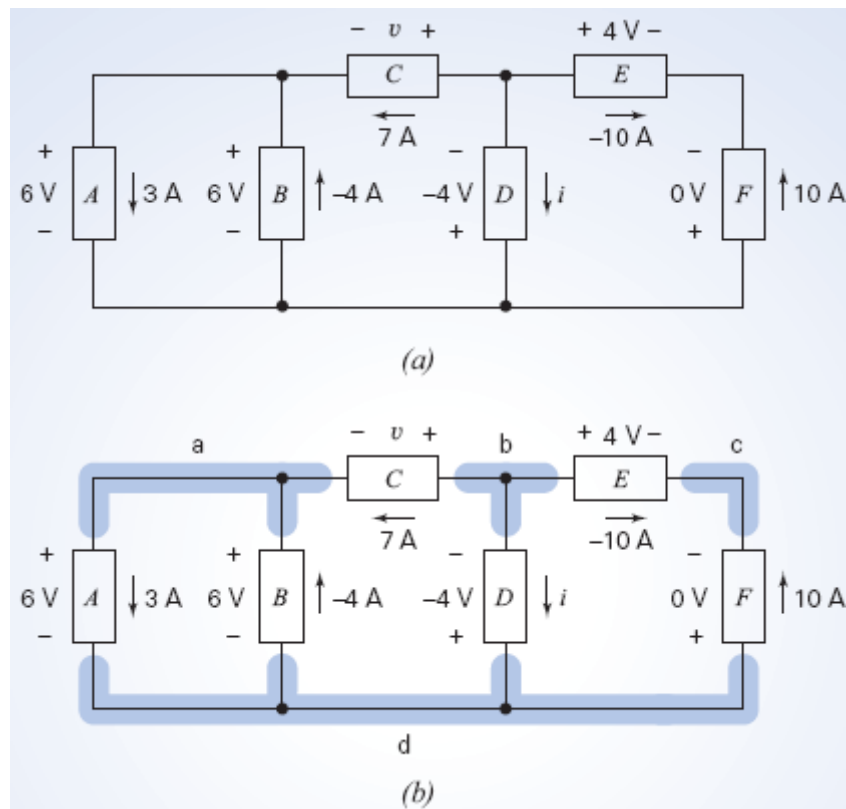



FIGURA 3.2-4 (*a*) O circuito do Exemplo 3.2-2; (*b*) o mesmo circuito desenhado de modo a chamar atenção para os nós.

O valor da tensão no componente *D* da Figura 3.2-4*b* é −4 V. Como a tensão e a corrente do componente *D* da Figura 3.2-4*b* não estão de acordo com a convenção passiva, a potência *fornecida* pelo componente *D* é dada por

$$p_D = (-4)i = (-4)(3) = -12\text{ W}$$

Isso significa que o componente *D* *recebe* 12 W do circuito.

EXEMPLO 3.2-3 Leis de Ohm e de Kirchhoff

Considere o circuito da Figura 3.2-5. Observe que a convenção passiva foi usada para atribuir sentidos de referência às tensões e correntes nos resistores, o que facilita a aplicação da lei de Ohm. Determine a tensão e a corrente nos resistores para $R_1 = 8\ \Omega$, $v_2 = -10$ V, $i_3 = 2$ A e $R_3 = 1\ \Omega$. Determine também o valor da resistência R_2.

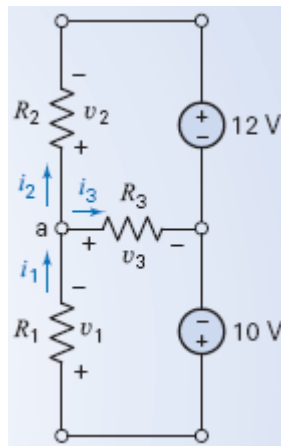



FIGURA 3.2-5 Circuito com duas fontes de tensão.

Solução

A soma das correntes que entram no nó a é

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0$$

Aplicando a lei de Ohm a R_3, obtemos:

$$v_3 = R_3 i_3 = 1(2) = 2\ \text{V}$$

Aplicando a lei de Kirchhoff para tensões à malha de baixo, formada por R_1, R_3 e a fonte de 10 V, temos:

$$-10 + v_1 + v_3 = 0$$

$$v_1 = 10 - v_3 = 8\ \text{V}$$

Aplicando a lei de Ohm ao resistor R_1, temos:

$$v_1 = R_1 i_1$$

$$i_1 = v_1/R_1 = 8/8 = 1\ \text{A}$$

Aplicando a lei de Kirchhoff ao nó a, obtemos:

$$i_2 = i_1 - i_3 = 1 - 2 = -1\ \text{A}$$

Podemos agora calcular o valor da resistência R_2:

$$v_2 = R_2 i_2$$

$$R_3 = v_2/i_2 = -10/-1 = 10\ \Omega$$

EXEMPLO 3.2-4 Leis de Ohm e de Kirchhoff

EXEMPLO INTERATIVO

Determine o valor da corrente, em ampères, medida pelo amperímetro da Figura 3.2-6*a*.

Solução

Um amperímetro ideal é equivalente a um curto-circuito. A corrente medida pelo amperímetro é a corrente no curto-circuito. A Figura 3.2-6*b* mostra o circuito depois que o amperímetro foi substituído por um curto-circuito.

O circuito foi redesenhado na Figura 3.2-7 para rotular os nós. O circuito é formado por uma fonte de tensão, uma fonte de corrente dependente, dois resistores e dois curtos-circuitos. Um dos curtos-circuitos é o componente de controle da FCCC e o outro é um modelo do amperímetro.

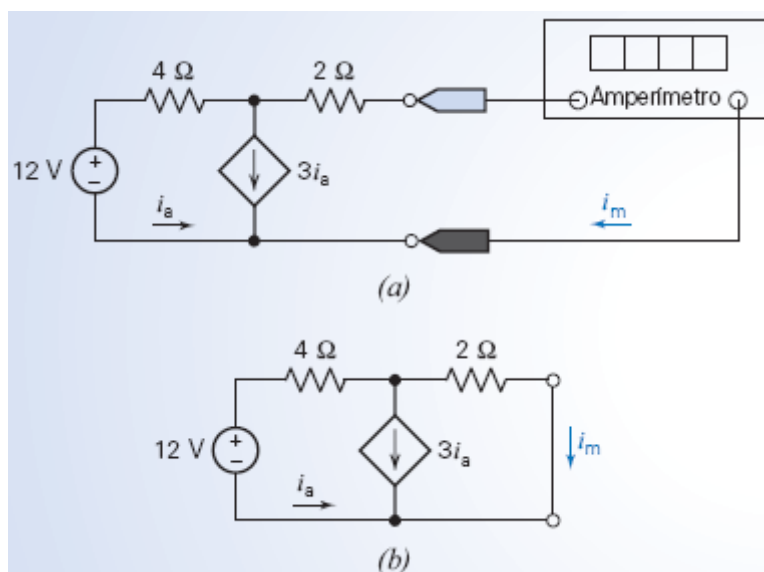



FIGURA 3.2-6 (*a*) Circuito com uma fonte dependente e um amperímetro. (*b*) O circuito equivalente depois que o amperímetro foi substituído por um curto-circuito.

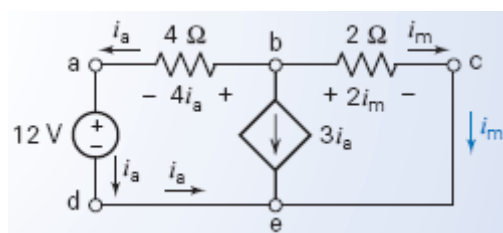



FIGURA 3.2-7 O circuito da Figura 3.2-6 depois de rotulados os nós e algumas correntes e tensões nos componentes.

Aplicando duas vezes a LKC, uma ao nó d e outra ao nó a, vemos que a corrente na fonte de tensão e a corrente no resistor de 4 Ω são iguais a i_a. Essas correntes estão rotuladas na Figura 3.2-7. Aplicando a LKC ao nó c, vemos que a corrente no resistor de 2 Ω é igual a i_m. Essa corrente está rotulada na Figura 3.2-7.

De acordo com a lei de Ohm, a tensão no resistor de 4 Ω é igual a $4i_a$ e a tensão no resistor de 2 Ω é igual a $2i_m$. As duas tensões estão rotuladas na Figura 3.2-7.

Aplicando a LKC ao nó b, temos:

$$-i_a - 3i_a - i_m = 0$$

Aplicando a LKT à malha a-b-c-e-d-a, obtemos:

$$0 = -4i_a + 2i_m - 12 = -4\left(-\frac{1}{4}i_m\right) + 2i_m - 12 = 3i_m - 12$$

Resolvendo a equação, obtemos, finalmente,

$$i_m = 4 \text{ A}$$

Exemplo 3.2-5 Leis de Ohm e de Kirchhoff

EXEMPLO INTERATIVO

Determine o valor da tensão, em volts, medida pelo voltímetro da Figura 3.2-8*a*.

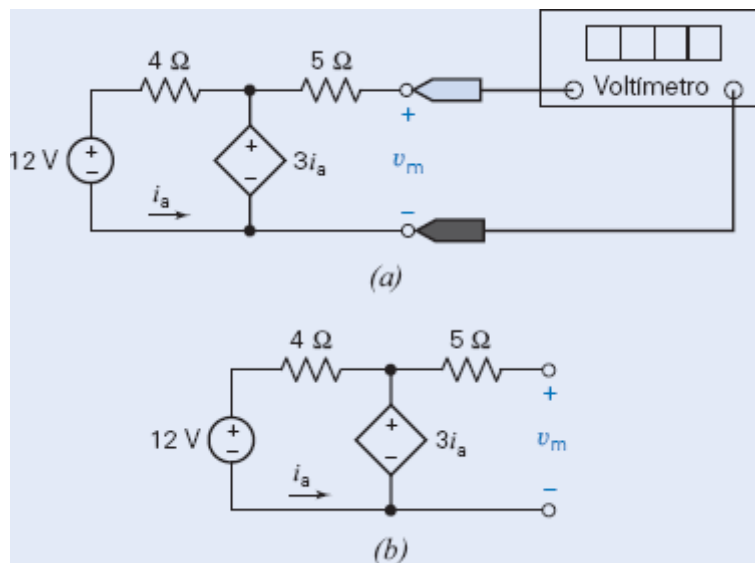



FIGURA 3.2-8 (*a*) Circuito com uma fonte dependente e um voltímetro. (*b*) O circuito equivalente depois que o voltímetro foi substituído por um circuito aberto.

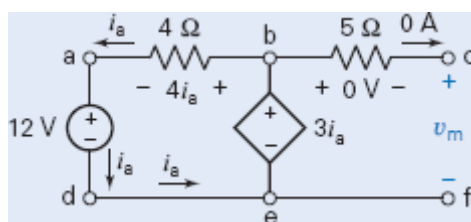



FIGURA 3.2-9 O circuito da Figura 3.2-8*b* depois que foram rotulados os nós e algumas correntes e tensões nos componentes.

Solução

Um voltímetro é equivalente a um circuito aberto. A tensão medida pelo voltímetro é a tensão no circuito aberto. A Figura 3.2-8*b* mostra o circuito depois que o voltímetro foi substituído por um circuito aberto.

O circuito foi redesenhado na Figura 3.2-9 para rotular os nós. Este circuito é formado por uma fonte de tensão, uma fonte de tensão dependente, dois resistores, um curto-circuito e um circuito aberto. O curto-circuito é o componente de controle da FTCC e o circuito aberto é um modelo do voltímetro.

Aplicando duas vezes a LKC, uma ao nó d e outra ao nó a, vemos que a corrente na fonte de tensão e a corrente no resistor de 4 Ω são iguais a i_a. Essas correntes estão rotuladas na Figura 3.2-9. Aplicando a LKC ao nó c, vemos que a corrente no resistor de 5 Ω é igual à corrente no circuito aberto, ou seja, zero. Essa corrente está rotulada na Figura 3.2-9. De acordo com a lei de Ohm, a tensão no resistor de 5 Ω é também igual a zero. Aplicando a LKT à malha b-c-f-e-b, obtemos $v_m = 3i_a$.

Aplicando a LKT à malha a-b-e-d-a, obtemos

$$-4i_a + 3i_a - 12 = 0$$

e, portanto,

$$i_a = -12 \text{ A}$$

Finalmente

$$v_m = 3i_a = 3(-12) = -36 \text{ V}$$

EXEMPLO 3.2-6 Leis de Kirchhoff com Correntes e Tensões que Variam com o Tempo

EXEMPLO INTERATIVO

O circuito da Figura 3.2-10 contém um componente chamado capacitor. Os capacitores serão estudados no Capítulo 7. Neste exemplo, a única coisa que precisamos saber a respeito do capacitor é a tensão do capacitor em função do tempo, que é um dado do problema.

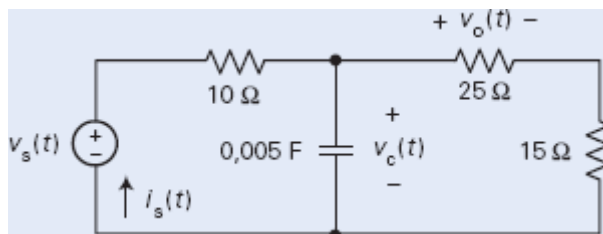



FIGURA 3.2-10 O circuito do Exemplo 3.2-6.

Neste exemplo, vamos calcular a tensão do resistor de 25 Ω, $v_o(t)$, e a corrente da fonte, $i_s(t)$, nos seguintes casos:

(a) A tensão da fonte é $v_s(t) = 50$ V e a tensão do capacitor é

$$v_c(t) = 40 - 40\,e^{-25t}\ \text{V}.$$

(b) A tensão da fonte é $v_s(t) = 10\cos(8t)$ V e a tensão do capacitor é

$$v_c(t) = 7{,}62\cos(8t - 17{,}7°)\ \text{V}.$$

Note que $v_s(t)$ e $v_c(t)$ variam com o tempo.

Solução

A Figura 3.2-11 mostra o circuito da Figura 3.2-10 depois de rotulados os nós e a corrente e a tensão em cada componente. As polaridades das tensões e os sentidos das correntes foram escolhidos de acordo com a convenção passiva.

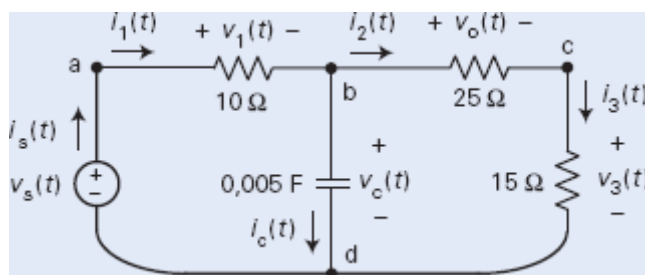



FIGURA 3.2-11 O circuito da Figura 3.2-10 depois de rotulados os nós e a corrente e a tensão em cada componente.

Vamos ver que informações podemos obter usando a lei de Ohm e as leis de Kirchhoff. Aplicando a lei de Ohm aos resistores, obtemos

$$v_1(t) = 10i_1(t),\ \ v_o(t) = 25i_2(t) \text{ e } v_3(t) = 15i_3(t) \tag{3.2-3}$$

Aplicando a LKC aos nós a e c, obtemos

$$i_s(t) = i_1(t) \ \text{ e } \ i_2(t) = i_3(t) \tag{3.2-4}$$

Aplicando a LKT à malha formada pela fonte de tensão, o resistor de 10 Ω e o capacitor, obtemos

$$v_s(t) = v_1(t) + v_c(t) \tag{3.2-5}$$

Aplicando a LKT à malha formada pelo capacitor, o resistor de 25 Ω e o resistor de 15 Ω, obtemos

$$v_c(t) = v_o(t) + v_3(t) \tag{3.2-6}$$

De acordo com as equações anteriores,

$$i_s(t) = i_1(t) = \frac{v_1(t)}{10} = \frac{v_s(t) - v_c(t)}{10} \tag{3.2-7}$$

Como $i_2(t) = i_3(t)$, temos:

$$v_c(t) = v_o(t) + v_3(t) = 25i_2(t) + 15i_3(t) = 40i_2(t) \tag{3.2-8}$$

Combinando as Eq. 3.2-8 e 3.2-3, obtemos

$$v_o(t) = 25i_2(t) = 25\frac{v_c(t)}{40} = \frac{5}{8}v_c(t) \tag{3.2-9}$$

Resumindo

$$v_o(t) = \frac{5}{8}v_c(t) \quad \text{e} \quad i_s(t) = \frac{v_s(t) - v_c(t)}{10} \tag{3.2-10}$$

Essas equações serão usadas para resolver os itens (a) e (b) do exemplo.

No item (a)

$$v_o(t) = \frac{5}{8}(40 - 40\,e^{-25t}) = 25(1 - e^{-25t})\text{ V}$$

e

$$i_s(t) = \frac{50 - (40 - 40\,e^{-25t})}{10} = 1 + 4\,e^{-25t}\text{A}$$

No item (b)

$$v_o(t) = \left(\frac{5}{8}\right)7{,}62\cos(8t - 17{,}7°) = 4{,}76\cos(8t - 17{,}7°)\text{ V}$$

e

$$i_s(t) = \frac{10\cos(8t) - 7{,}62\cos(8t - 17{,}7°)}{10}\text{A} \tag{3.2-11}$$

A expressão de $i_s(t)$ pode ser simplificada com o auxílio de identidades trigonométricas, mas o processo envolve vários passos. No Capítulo 10, usamos a aritmética dos números complexos para simplificar expressões como a da Eq. 3.2-11. O resultado é

$$i_s(t) = 0{,}349\cos(8t + 40°)\text{ A}$$

EXERCÍCIO 3.2-1 Determine os valores de i_3, i_4, i_6, v_2, v_4 e v_6 na Figura E 3.2-1.

Resposta: $i_3 = -3$ A, $i_4 = 3$ A, $i_6 = 4$ A, $v_2 = -3$V, $v_4 = -6$ V e $v_6 = 6$ V

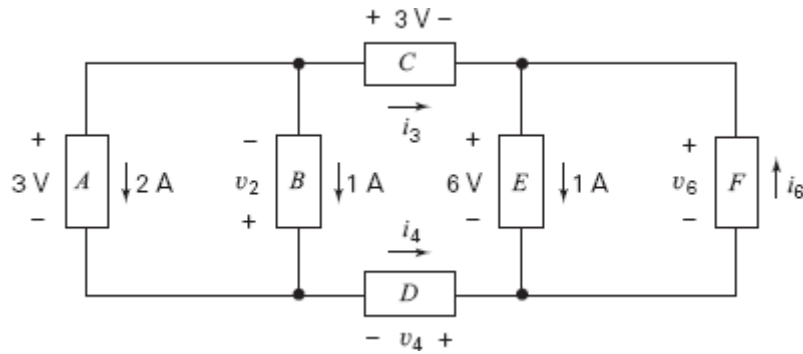



FIGURA E 3.2-1

3.3 *Resistores em Série e Divisão de Tensão*

Considere um circuito com uma única malha, como o da Figura 3.3-1. Para facilitar o uso da lei de Ohm, usaremos a convenção passiva para escolher os sentidos de referência das tensões e correntes nos resistores.

Dizemos que os resistores da Figura 3.3-1 estão ligados *em série*, já que todos os componentes são percorridos pela mesma corrente. Para verificar se dois componentes estão ligados em série, observamos se estão ligados a um mesmo nó ao qual não está ligado mais nenhum componente. Note, por exemplo, que os resistores R_1 e R_2 estão ligados ao nó b e nenhum outro componente do circuito está ligado a esse nó. Isso significa que $i_1 = i_2$, ou seja, que os dois resistores são percorridos pela mesma corrente. Um raciocínio semelhante revela que R_2 e R_3 também estão ligados em série. Observando que R_2 está ligado em série tanto com R_1 como com R_3, concluímos que os três resistores estão ligados em série. A ordem de resistores ligados em série não é importante. Por exemplo: as tensões e correntes dos três resistores da Figura 3.3-1 não mudam se as posições de R_2 e R_3 forem invertidas.

Aplicando a LKC a todos os nós do circuito da Figura 3.3-1, obtemos:

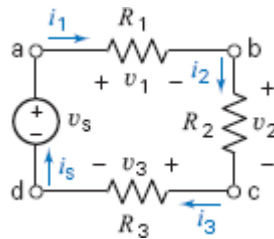



FIGURA 3.3-1 Circuito de uma malha com uma fonte de tensão v_s.

$$\text{a: } i_s = i_1$$
$$\text{b: } i_1 = i_2$$
$$\text{c: } i_2 = i_3$$
$$\text{d: } i_3 = i_s$$

o que nos dá,

$$i_s = i_1 = i_2 = i_3$$

Para determinar i_1, aplicamos a LKT à única malha do circuito para obter

$$v_1 + v_2 + v_3 - v_s = 0$$

em que, por exemplo, v_1 é a tensão no resistor R_1. Aplicando a lei de Ohm aos resistores, obtemos:

$$R_1 i_1 + R_2 i_2 + R_3 i_3 - v_s = 0 \quad \Rightarrow \quad R_1 i_1 + R_2 i_1 + R_2 i_1 = v_s$$

Explicitando i_1, obtemos:

$$i_1 = \frac{v_s}{R_1 + R_2 + R_3}$$

A tensão no resistor R_n, v_n, é dada por

$$v_n = i_1 R_n = \frac{v_s R_n}{R_1 + R_2 + R_3}$$

A tensão no resistor R_2, por exemplo, é

$$v_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_3} v_s$$

Assim, a tensão em um resistor ligado em série a outros resistores e a uma fonte de tensão é igual à razão entre a resistência do resistor e a resistência total. Este circuito demonstra o princípio da *divisão de tensão* e o circuito é chamado de *divisor de tensão*.

No caso geral, podemos representar o princípio da divisão de tensão através da equação

$$v_n = \frac{R_n}{R_1 + R_2 + \ldots + R_N} v_s$$

em que v_n é a tensão no enésimo resistor dos N resistores que estão ligados em série.

Resistores em série podem ser substituídos por um resistor equivalente. Na Figura 3.3-2, por exemplo, os resistores em série R_1, R_2 e R_3 da Figura 3.3-2*a* são substituídos pelo resistor equivalente R_s da Figura 3.3-2*b*. Dizemos que R_s é equivalente aos resistores em série R_1, R_2 e R_3 se a substituição de R_1, R_2 e R_3 por R_s não muda a corrente nem a tensão em todos os outros componentes do circuito. Neste caso, existe apenas outro componente no circuito, a fonte de tensão. Devemos escolher o valor da resistência R_s de tal forma que a substituição de R_1, R_2 e R_3 por R_s não mude a corrente da fonte de tensão. Na Figura 3.3-2*a*, temos:

$$i_s = \frac{v_s}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Na Figura 3.3-2*b*, temos:

$$i_s = \frac{v_s}{R_s}$$

Como a corrente na fonte de tensão deve ser a mesma nos dois circuitos, temos:

$$R_s = R_1 + R_2 + R_3$$

(*a*) (*b*)

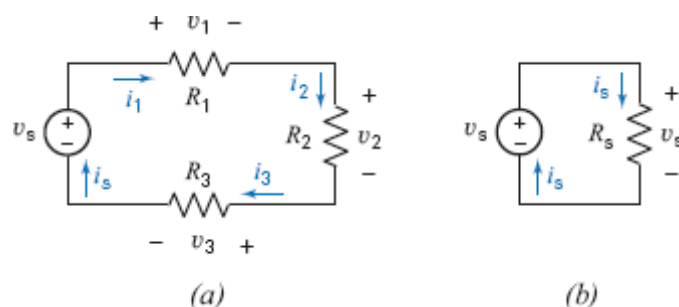



FIGURA 3.3-2

No caso geral, a ligação em série de N resistores de resistências R_1, R_2, . . ., R_N é equivalente a um único resistor de resistência

$$R_s = R_1 + R_2 + \dots + R_N$$

A substituição de resistores em série por um resistor equivalente não muda a corrente nem a tensão nos outros componentes do circuito.

Vamos agora calcular a potência absorvida pelos resistores em série da Figura 3.3-2*a*:

$$p = i_s^2 R_1 + i_s^2 R_2 + i_s^3 R_3$$

Colocando i_s^2 em evidência, obtemos:

$$p = i_s^2 (R_1 + R_2 + R_3) = i_s^2 R_s$$

que é igual à potência absorvida pelo resistor equivalente da Figura 3.3-2*b*. Concluímos que a potência absorvida por resistores em série é igual à potência absorvida pelo resistor equivalente.

EXEMPLO 3.3-1 Divisores de Tensão

Considere os dois divisores de tensão da Fig. 3.3-3. Use o método da divisão de tensão para determinar o valor da tensão v_2, da Figura 3.3-3*a* e o valor da tensão v_b da Figura 3.3-3*b*.

Solução

O circuito da Figura 3.3-3*a* é um circuito de uma malha, como o circuito da Figura 3.3-1. Os resistores de100 Ω,400 Ω e 300 Ω estão ligados em série. A corrente da malha é dada por

$$i = \frac{12}{100 + 400 + 300} = 0{,}015 \text{ A} = 15 \text{ mA}$$

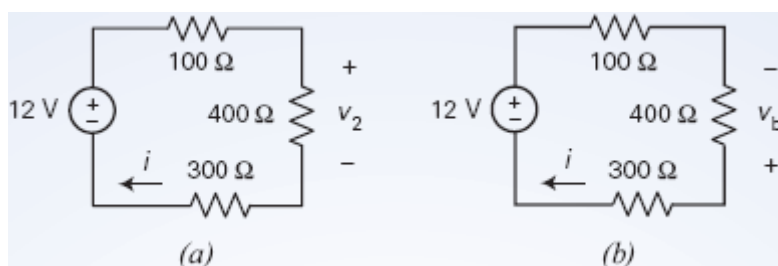



FIGURA 3.3-3 Dois circuitos divisores de tensão.

Podemos calcular o valor de v_2 usando o método da divisão de tensão:

$$v_2 = \frac{400}{100 + 400 + 300}(12) = 6 \text{ V}$$

Note que

$$6 = v_2 = 400(i) = 400(0{,}015)$$

Considere agora o circuito da Figura 3.3-3*b*. Trata-se de um circuito de uma malha, como o circuito da Figura 3.3-3*a*. Mais uma vez, a corrente da malha é dada por

$$i = \frac{12}{100 + 400 + 300} = 0{,}015 \text{ A} = 15 \text{ mA}$$

Note que a tensão v_b da Figura 3.3-3*b* é medida no mesmo lugar que a tensão v_2 da Figura 3.3-3*a*, mas ***com a polaridade oposta***. Assim,

$$v_2 = -v_b$$

e, portanto,

$$v_b = \frac{400}{100 + 400 + 300}(12) = -6 \text{ V}$$

(Note que a tensão v_2 da Figura 3.3-3*a* tem a mesma polaridade que a tensão v_2 da Figura 3.3-2*a*, mas a tensão v_b da Figura 3.3-3*b* tem a polaridade oposta.)

Para verificar se a resposta está correta, notando que a corrente *i* e a tensão v_b na Figura 3.3-3*b* *não* estão de acordo com a convenção passiva, escrevemos

$$-6 = v_b = -400(i) = -400(0{,}015)$$

Quando trabalhamos com divisores de tensão, devemos tomar muito cuidado com a polaridade das tensões.

EXEMPLO 3.3-2 Resistores em Série

Determine a corrente medida pelo amperímetro no circuito da Figura 3.3-4*a* e mostre que a potência absorvida pelos dois resistores é igual à potência fornecida pela fonte.

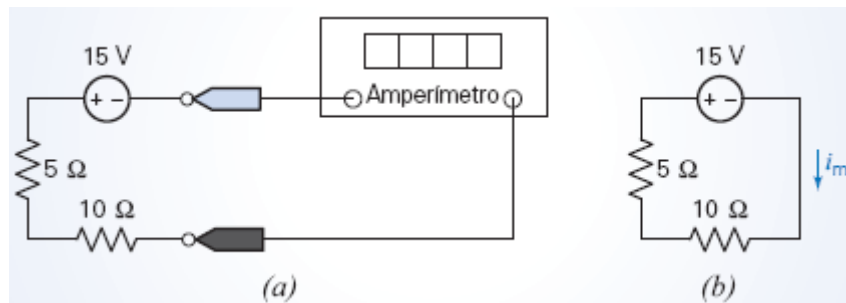



FIGURA 3.3-4 (*a*) Circuito com resistores em série. (*b*) O mesmo circuito depois que o amperímetro ideal foi substituído por um curto-circuito e o dístico i_m foi introduzido para indicar a corrente medida pelo amperímetro.

Solução

A Figura 3.3-4*b* mostra o circuito depois que o amperímetro ideal foi substituído por um curto-circuito e o dístico i_m foi introduzido para indicar a corrente medida pelo amperímetro. Aplicando a LKT, obtemos:

$$15 + 5i_m + 10i_m = 0$$

A corrente medida pelo amperímetro é

$$i_m = -\frac{15}{5 + 10} = -1 \text{ A}$$

(Por que i_m é negativa? Por que não podemos simplesmente dividir a tensão da fonte pela resistência equivalente? Lembre-se de que, para podermos aplicar a lei de Ohm, a tensão e a corrente precisam estar de acordo com a convenção passiva. Como neste caso a corrente calculada dividindo a tensão da fonte pela resistência equivalente não tem o mesmo sentido de referência que i_m, devemos usar o sinal negativo.)

A potência total absorvida pelos dois resistores é

$$p_R = 5i_m^2 + 10i_m^2 = 15(1^2) = 15 \text{ W}$$

A potência fornecida pela fonte é

$$p_s = -v_s i_m = -15(-1) = 15 \text{ W}$$

Assim, a potência fornecida pela fonte é igual à potência total absorvida pelos resistores ligados em série.

EXEMPLO 3.3-3 Projeto de um Divisor de Tensão

A entrada do divisor de tensão da Figura 3.3-5 é a tensão v_s da fonte de tensão. A saída é a tensão v_o medida pelo voltímetro. Projete o divisor de tensão, ou seja, especifique valores para os resistores R_1 e R_2 tais que as duas especificações a seguir sejam atendidas.

Especificação 1: As tensões de entrada e saída devem obedecer à relação $v_o = 0{,}8v_s$.

Especificação 2: A fonte de tensão não deve fornecer uma potência maior que 1 mW quando a entrada do divisor de tensão for $v_s = 20$ V.

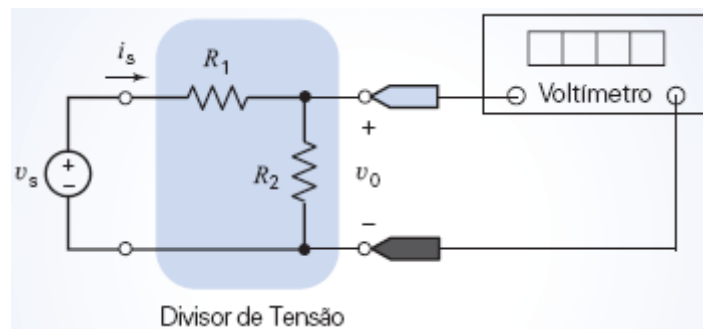



FIGURA 3.3-5 Divisor de tensão.

Solução

Vamos examinar cada especificação para verificar o que nos diz a respeito do valor dos resistores.

Especificação 1: A relação entre as tensões de entrada e de saída do divisor de tensão é dada por

$$v_o = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_s$$

Assim, de acordo com a especificação 1,

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} = 0{,}8 \quad \Rightarrow \quad R_2 = 4R_1$$

Especificação 2: A potência fornecida pela fonte de tensão é dada por

$$p_s = i_s v_s = \left(\frac{v_s}{R_1 + R_2}\right) v_s = \frac{v_s^2}{R_1 + R_2}$$

Assim, de acordo com a especificação 2,

$$0{,}001 \geq \frac{20^2}{R_1 + R_2} \quad \Rightarrow \quad R_1 + R_2 \geq 400 \times 10^3 = 400 \text{ k}\Omega$$

Combinando os dois resultados, obtemos

$$5R_1 \geq 400\ \text{k}\Omega$$

Assim, existem várias soluções possíveis. Uma das soluções é

$$R_1 = 100\ \text{k}\Omega \text{ e } R_2 = 400\ \text{k}\Omega$$

EXERCÍCIO 3.3-1 Determine a tensão medida pelo voltímetro do circuito da Figura E 3.3-1*a*.

Sugestão: A Figura E 3.3-1*b* mostra o circuito depois que o voltímetro ideal foi substituído por um circuito aberto e o dístico v_m foi introduzido para indicar a tensão medida pelo voltímetro.

Resposta: $v_m = 2$ V

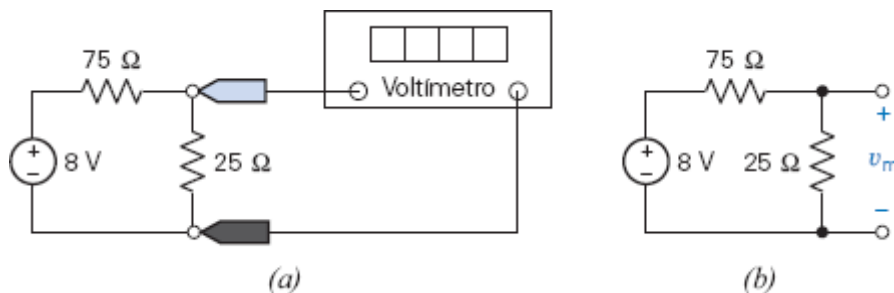



FIGURA E 3.3-1 (*a*) Divisor de tensão. (*b*) Divisor de tensão depois que o voltímetro ideal foi substituído por um circuito aberto e o dístico v_m foi introduzido para indicar a tensão medida pelo voltímetro.

EXERCÍCIO 3.3-2 Determine a tensão medida pelo voltímetro do circuito da Figura E 3.3-2*a*.

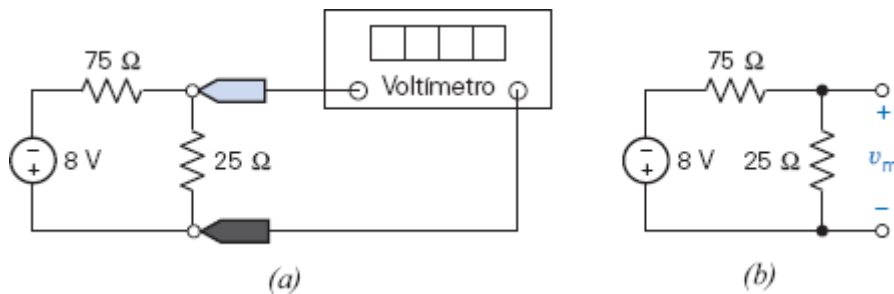



FIGURA E 3.3-2 (*a*) Divisor de tensão. (*b*) Divisor de tensão depois que o voltímetro ideal foi substituído por um circuito aberto e o dístico v_m foi introduzido para indicar a tensão medida pelo voltímetro.

Sugestão: A Figura E 3.3-2*b* mostra o circuito depois que o voltímetro ideal foi substituído por um circuito aberto e o dístico v_m foi introduzido para indicar a tensão medida pelo voltímetro.

Resposta: $v_m = -2$ V

3.4 Resistores em Paralelo e Divisão de Corrente

Dizemos que dois ou mais componentes de um circuito, resistores, por exemplo, estão ligados *em paralelo* quando estão submetidos à mesma tensão. Os resistores da Figura 3.4-1 estão ligados em paralelo. Note, por exemplo, que os resistores R_1 e R_2 estão ligados aos mesmos nós, a e b. Em consequência, $v_1 = v_2$ e os dois resistores estão submetidos à mesma tensão. Um raciocínio semelhante revela que R_2 e R_3 também estão ligados em paralelo. Observando que R_2 está ligado em paralelo tanto com R_1 como com R_3, concluímos que os três resistores estão

ligados em paralelo. A ordem de resistores ligados em paralelo não é importante. Por exemplo: as tensões e correntes nos três resistores da Figura 3.4-1 não mudam se as posições de R_2 e R_3 forem invertidas.

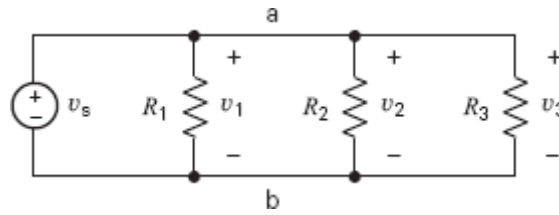



FIGURA 3.4-1 Circuito com resistores em paralelo.

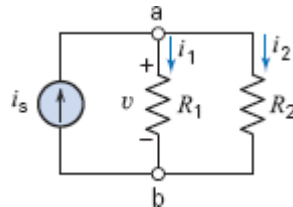



FIGURA 3.4-2 Circuito paralelo com uma fonte de corrente.

Para que dois componentes estejam em paralelo, é preciso que estejam submetidos à mesma tensão. Para verificar se dois componentes estão ligados em paralelo, observamos se estão ligados ao mesmo par de nós.

Considere o circuito com dois resistores e uma fonte de corrente que aparece na Figura 3.4-2. Observe que os dois resistores estão ligados aos terminais a e b e que a tensão *v* é a mesma nos dois componentes. Para facilitar a aplicação da lei de Ohm, usamos a convenção passiva para atribuir sentidos às tensões e correntes nos resistores. Aplicando a LKC ao nó a (ou ao nó b), obtemos:

$$i_s - i_1 - i_2 = 0$$

ou

$$i_s = i_1 + i_2$$

De acordo com a lei de Ohm,

$$i_1 = \frac{v}{R_1} \quad \text{e} \quad i_2 = \frac{v}{R_2}$$

e, portanto,

$$i_s = \frac{v}{R_1} + \frac{v}{R_2} \tag{3.4-1}$$

Como vimos, a condutância G é o recíproco da resistência R. Podemos, portanto, escrever a Eq. 3.4-1 na forma

$$i_s = G_1 v + G_2 v = (G_1 + G_2)v \tag{3.4-2}$$

Assim, o circuito equivalente deste circuito paralelo possui uma condutância G_p, como mostra a Figura 3.4-3, em que

FIGURA 3.4-3 Circuito equivalente de um circuito paralelo.

$$G_p = G_1 + G_2$$

A resistência equivalente do circuito pode ser obtida a partir da equação

$$G_p = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Como $G_p = 1/R_p$, temos:

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

ou

$$R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \qquad (3.4\text{-}3)$$

Observe que a condutância total G_p aumenta quando novos componentes em paralelo são acrescentados e que a resistência R_p diminui quando isso acontece.

O circuito da Figura 3.4-2 é chamado de *divisor de corrente*, já que divide a corrente da fonte. Observe que

$$i_1 = G_1 v \qquad (3.4\text{-}4)$$

Além disso, como $i_s = (G_1 + G_2)v$, obtemos, explicitando v,

$$v = \frac{i_s}{G_1 + G_2} \qquad (3.4\text{-}5)$$

Substituindo v na Eq. 3.4-4 pelo seu valor, dado pela Eq. 3.4-5, obtemos:

$$i_1 = \frac{G_1 i_s}{G_1 + G_2} \qquad (3.4\text{-}6)$$

e, analogamente,

$$i_2 = \frac{G_2 i_s}{G_1 + G_2}$$

Observe que podemos usar as relações $G_2 = 1/R_2$ e $G_1 = 1/R_1$ para obter a corrente i_2 em função das duas resistências:

$$i_2 = \frac{R_1 i_s}{R_1 + R_2}$$

A corrente da fonte se divide entre as condutâncias G_1 e G_2 proporcionalmente aos valores das condutâncias.

Vamos agora considerar o caso mais geral da divisão de corrente por um conjunto de *N* condutâncias em paralelo, como na Figura 3.4-4. De acordo com a LKC, temos:

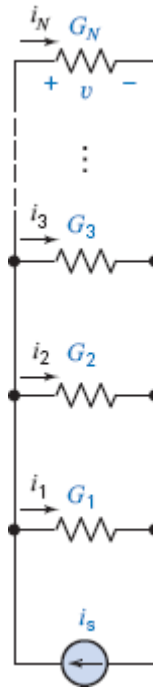



FIGURA 3.4-4 Conjunto de *N* condutâncias em paralelo com uma fonte de corrente i_s.

$$i_s = i_1 + i_2 + i_3 + ... + i_N \tag{3.4-7}$$

em que

$$i_n = G_n v \tag{3.4-8}$$

para $n = 1, . . ., N$. Podemos escrever a Eq. 3.4-7 na forma

$$i_s = (G_1 + G_2 + G_3 + ... + G_N)v \tag{3.4-9}$$

e, portanto,

$$i_s = v\sum_{n=1}^{N} G_n \tag{3.4-10}$$

Como $i_n = G_n v$, podemos obter v a partir da Eq. 3.4-10 e substituir na Eq. 3.4-8, o que nos dá

$$i_n = \frac{G_n i_s}{\sum_{n=1}^{N} G_n} \tag{3.4-11}$$

Como o circuito equivalente, Figura 3.4-3, tem uma condutância equivalente G_p tal que

$$G_p = \sum_{n=1}^{N} G_n \tag{3.4-12}$$

Temos:

$$i_n = \frac{G_n i_s}{G_p} \tag{3.4-13}$$

que é a equação básica do divisor de corrente com *N* condutâncias. Naturalmente, a Eq. 3.4-12 pode ser escrita na forma

$$\frac{1}{R_p} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{R_n} \tag{3.4-14}$$

Exemplo 3.4-1 Resistores em Paralelo

Para o circuito da Figura 3.4-5, determine (a) a corrente em cada ramo, (b) o circuito equivalente e (c) a tensão v. Os resistores são

$$R_1 = \frac{1}{2}\,\Omega, \quad R_2 = \frac{1}{4}\,\Omega, \quad R_3 = \frac{1}{8}\,\Omega$$

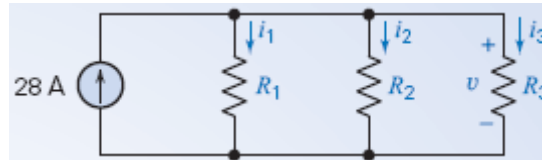



FIGURA 3.4-5 Circuito paralelo do Exemplo 3.4-1.

Solução

O divisor de corrente obedece à equação

$$i_n = \frac{G_n i_s}{G_p}$$

e, portanto, é mais interessante desenhar o circuito equivalente, como na Figura 3.4-6, usando a condutância equivalente G_p. Temos:

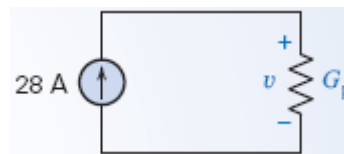



FIGURA 3.4-6 Circuito equivalente do circuito paralelo da Figura 3.4-5.

$$G_p = \sum_{n=1}^{N} G_n = G_1 + G_2 + G_3 = 2 + 4 + 8 = 14 \text{ S}$$

Lembrando que a unidade de condutância é o siemens (S). Nesse caso,

$$i_1 = \frac{G_1 i_s}{G_p} = \frac{2}{14}(28) = 4 \text{ A}$$

Analogamente,

$$i_2 = \frac{G_2 i_s}{G_p} = \frac{4(28)}{14} = 8 \text{ A}$$

e

$$i_3 = \frac{G_3 i_s}{G_p} = 16 \text{ A}$$

Como $i_n = G_n v$, temos, finalmente,

$$v = \frac{i_1}{G_1} = \frac{4}{2} = 2 \text{ V}$$

EXEMPLO 3.4-2 Resistores em Paralelo

EXEMPLO INTERATIVO

Determine a tensão medida pelo voltímetro no circuito da Figura 3.4-7*a* e mostre que a potência absorvida pelos dois resistores é igual à potência fornecida pela fonte.

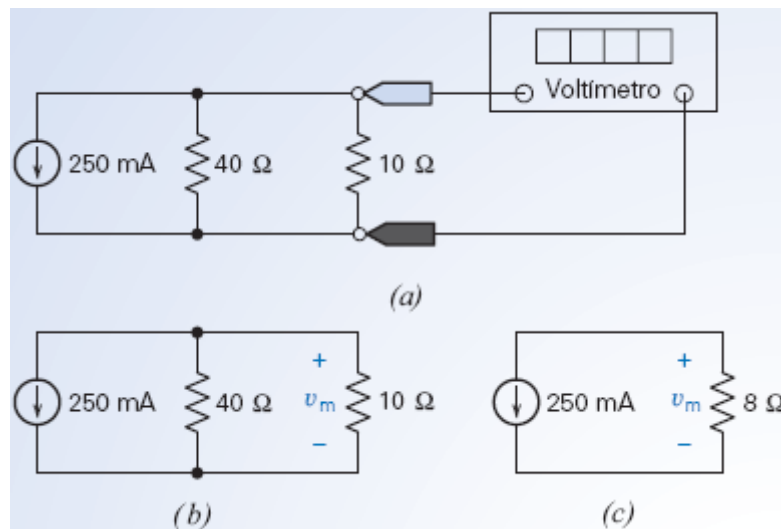



FIGURA 3.4-7 (*a*) Circuito com resistores em paralelo. (*b*) O circuito depois que o voltímetro ideal foi substituído por um circuito aberto e o dístico v_m foi introduzido um dístico para indicar a tensão medida pelo voltímetro. (*c*) O mesmo circuito depois que os resistores em paralelo foram substituídos por uma resistência equivalente.

Solução

A Figura 3.4-7*b* mostra o circuito depois que o voltímetro ideal foi substituído por um circuito aberto e o dístico v_m foi introduzido para indicar a tensão medida pelo voltímetro. Os dois resistores estão ligados em paralelo e podem ser substituídos por um resistor equivalente. A resistência do resistor equivalente é dada por

$$\frac{40 \cdot 10}{40 + 10} = 8 \ \Omega$$

A Figura 3.4-7*c* mostra o circuito depois que os resistores em paralelo foram substituídos pelo resistor equivalente. A corrente no resistor equivalente é 250 mA, no sentido de baixo para cima. Essa corrente e a tensão v_m não estão de acordo com a convenção passiva. A corrente no resistor equivalente também pode ser expressa como –250 mA, no sentido de cima para baixo. Nesse caso, a corrente e a tensão v_m estão de acordo com a convenção passiva e a lei de Ohm nos dá

$$v_m = 8(-0{,}25) = -2 \text{ V}$$

A tensão v_m na Figura 3.4-7*b* é igual à tensão v_m na Figura 3.4-7*c*. Isso é uma consequência da equivalência entre o resistor de 8 Ω e a combinação em paralelo dos resistores de 40 Ω e 10 Ω. Observando a Figura 3.4-7*b*, vemos que a potência absorvida pelos resistores é

$$p_R = \frac{v_m^2}{40} + \frac{v_m^2}{10} = \frac{2^2}{40} + \frac{2^2}{10} = 0,1 + 0,4 = 0,5 \text{ W}$$

Como a tensão v_m e a corrente da fonte de corrente estão de acordo com a convenção passiva, a potência absorvida pela fonte de corrente é

$$p_s = v_m (0,25) = (-2)(0,25) = -0,5 \text{ W}$$

o que significa que a fonte fornece 0,5 W.

Os resultados mostram, portanto, que a potência absorvida pelos dois resistores é igual à potência fornecida pela fonte.

EXEMPLO 3.4-3 Projeto de um Divisor de Corrente

A entrada do divisor de corrente da Figura 3.4-8 é a corrente i_s da fonte de corrente. A saída é a corrente i_o medida pelo amperímetro. Especifique valores das resistências R_1 e R_2 tais que as seguintes especificações sejam satisfeitas:

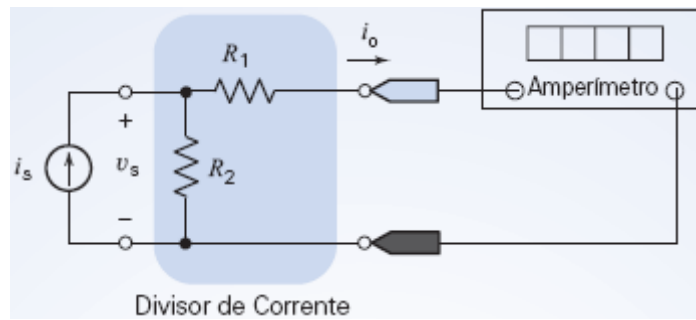



FIGURA 3.4-8 Um circuito divisor de corrente.

Especificação 1: A relação entre as correntes de entrada e de saída deve ser $i_o = 0,8 i_s$.

Especificação 2: A fonte de corrente não deve fornecer uma potência maior que 10 mW quando a entrada do divisor de corrente for $i_s = 2$ mA.

Solução

Vamos examinar cada especificação para verificar o que nos diz a respeito dos valores dos resistores.

Especificação 1: A relação entre as correntes de entrada e de saída do divisor de corrente é dada por

$$i_0 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i_s$$

Assim, de acordo com a especificação 1,

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} = 0,8 \quad \Rightarrow \quad R_2 = 4R_1$$

Especificação 2: A potência fornecida pela fonte de corrente é dada por

$$p_s = i_s v_s = i_s \left(i_s \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right) \right) = i_s^2 \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right)$$

Assim, de acordo com a especificação 2,

$$0,01 \geq (0,002)^2 \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right) \quad \Rightarrow \quad \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \leq 2500$$

Combinando os dois resultados, obtemos

$$\frac{R_1(4R_2)}{R_1+4R_2} \le 2500 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{5}R_1 \le 2500 \quad \Rightarrow \quad R_1 \le 3125\ \Omega$$

Existem várias soluções possíveis. Uma das soluções é

$$R_1 = 3\ \text{k}\Omega \quad \text{e} \quad R_2 = 12\ \text{k}\Omega$$

EXERCÍCIO 3.4-1 A Figura E 3.4-1*a* mostra uma rede de resistores em paralelo do tipo usado em placas de circuito impresso. O invólucro tem apenas 2 cm × 0,7 cm e todos os resistores são de 1 kΩ. Supondo que o circuito esteja ligado de tal forma que apenas quatro resistores sejam usados, como na Figura E 3.4-1*b*, determine a resistência equivalente R_p do circuito e a corrente i em cada resistor se a corrente da fonte é i_s = 1 mA.

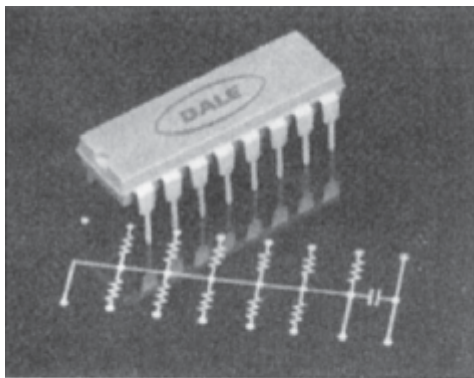
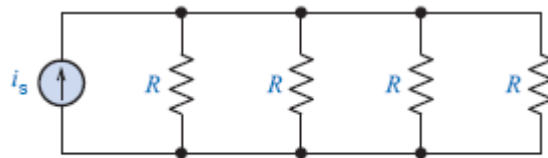



FIGURA E 3.4-1 (*a*) Rede de resistores em paralelo. (*b*) Circuito utilizando quatro resistores de valor R = 1 kΩ cada um.

Resposta: R_p = 250 Ω e i = 0,25 mA

EXERCÍCIO 3.4-2 Determine a corrente medida pelo amperímetro da Figura E 3.4-2*a*.

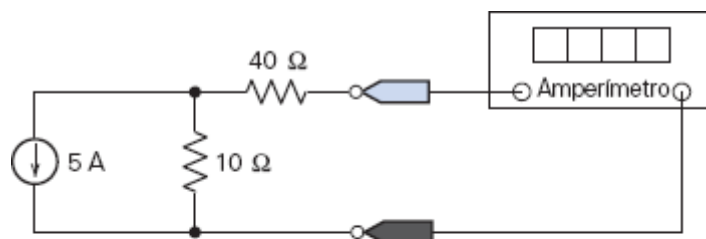
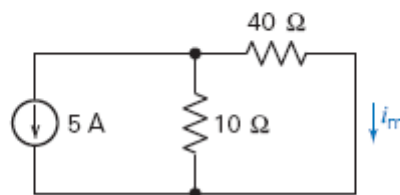



FIGURA E 3.4-2 (*a*) Divisor de corrente. (*b*) Divisor de corrente depois que o amperímetro ideal foi substituído por um curto-circuito e o dístico i_m foi introduzido para indicar a corrente medida pelo amperímetro.

Resposta: i_m = –1 A

3.5 Fontes de Tensão em Série e Fontes de Corrente em Paralelo

Fontes de tensão ligadas em série são equivalentes a uma única fonte de tensão. A tensão da fonte de tensão equivalente é igual à soma das tensões das fontes de tensão ligadas em série.

Considere o circuito da Figura 3.5-1*a*. Observe que as correntes das duas fontes de tensão são iguais. Assim, podemos definir a corrente i_s como

$$i_s = i_a = i_b \tag{3.5-1}$$

A tensão v_s pode ser definida como

$$v_s = v_a + v_b \tag{3.5-2}$$

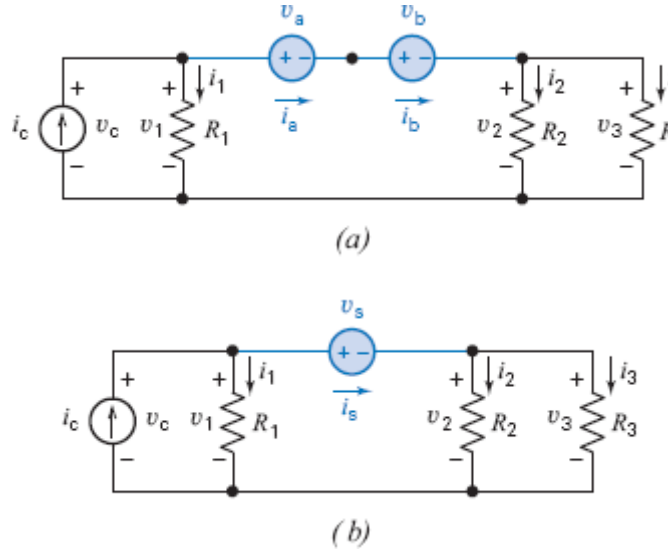



FIGURA 3.5-1 (*a*) Circuito com fontes de tensão ligadas em série; (*b*) um circuito equivalente.

Usando a LKC, a LKT e lei de Ohm, podemos representar o circuito da Figura 3.5-1*a* pelas equações

$$i_c = \frac{v_1}{R_1} + i_s \tag{3.5-3}$$

$$i_s = \frac{v_2}{R_2} + i_3 \tag{3.5-4}$$

$$v_c = v_1 \tag{3.5-5}$$

$$v_1 = v_s + v_2 \tag{3.5-6}$$

$$v_2 = i_3 R_3 \tag{3.5-7}$$

em que $i_s = i_a = i_b$ e $v_s = v_a + v_b$. As mesmas equações são obtidas aplicando a LKC, a LKT e a lei de Ohm ao circuito da Figura 3.5-1*b*. Se $i_s = i_a = i_b$ e $v_s = v_a + v_b$, os circuitos das Figuras 3.5-1*a* e 3.5-1*b* são equivalentes, já que ambos são representados pelas mesmas equações.

Suponha, por exemplo, que $i_c = 4$ A, $R_1 = 2\ \Omega$, $R_2 = 6\ \Omega$, $R_3 = 3\ \Omega$, $v_a = 1$ V e $v_b = 3$ V. Nesse caso, as equações que descrevem o circuito da Figura 3.5-1*a* se tornam

$$4 = \frac{v_1}{2} + i_s \tag{3.5-8}$$

$$i_s = \frac{v_2}{6} + i_3 \tag{3.5-9}$$

$$v_c = v_1 \quad (3.5\text{-}10)$$

$$v_1 = 4 + v_2 \quad (3.5\text{-}11)$$

$$v_2 = 3i_3 \quad (3.5\text{-}12)$$

A solução deste sistema de equações é v_1 = 6 V, i_s = 1 A, i_3 = 0,66 A, v_2 = 2 V e v_c = 6 V. As Eqs. 3.5-8 a 3.5-12 também descrevem o circuito da Figura 3.5-1*b*. Assim, v_1 = 6 V, i_s = 1 A, i_3 = 0,66 A, v_2 = 2 V e v_c = 6 V nos dois circuitos. Substituir fontes de tensão em série por uma única fonte de tensão equivalente não muda a tensão e a corrente nos outros componentes do circuito.

A Figura 3.5-2*a* mostra um circuito com fontes de corrente em paralelo. O circuito da Figura 3.5-2*b* é obtido substituindo as fontes de corrente em paralelo por uma única fonte de corrente equivalente. A corrente da fonte de corrente equivalente é igual à soma das correntes das fontes de corrente em paralelo.

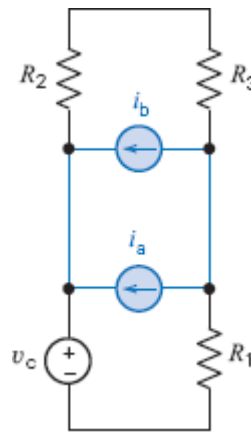
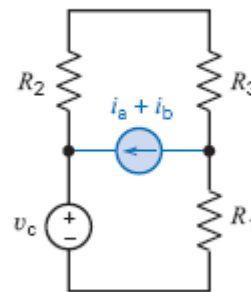



FIGURA 3.5-2 (*a*) Circuito com fontes de corrente em paralelo; (*b*) um circuito equivalente.

Tabela 3.5-1 Fontes de Tensão e de Corrente em Série e em Paralelo

CIRCUITO	CIRCUITO EQUIVALENTE	CIRCUITO	CIRCUITO EQUIVALENTE
v_a v_b	$v_a + v_b$	i_a i_b	$i_a + i_b$
v_a v_b	$v_a - v_b$	i_a i_b	$i_a - i_b$
i_a i_b	Impossível	v_a v_b	Impossível

Não podemos ligar fontes de corrente independentes em série, já que componentes em série devem ter mesma corrente. Analogamente, fontes de tensão independentes não podem ser ligadas em paralelo, já que componentes em paralelo devem estar submetidos à mesma tensão.

A Tabela 3.5-1 mostra as ligações em série e em paralelo de fontes de tensão e de corrente.

EXEMPLO 3.5-1 Fontes em Série e em Paralelo

As Figuras 3.5-3*a* e 3.5-3*c* mostram dois circuitos semelhantes. Ambos contêm fontes de tensão em série e fontes de corrente em paralelo. Em cada circuito, substitua as fontes de tensão por uma fonte de tensão equivalente e as fontes de corrente por uma fonte de corrente equivalente.

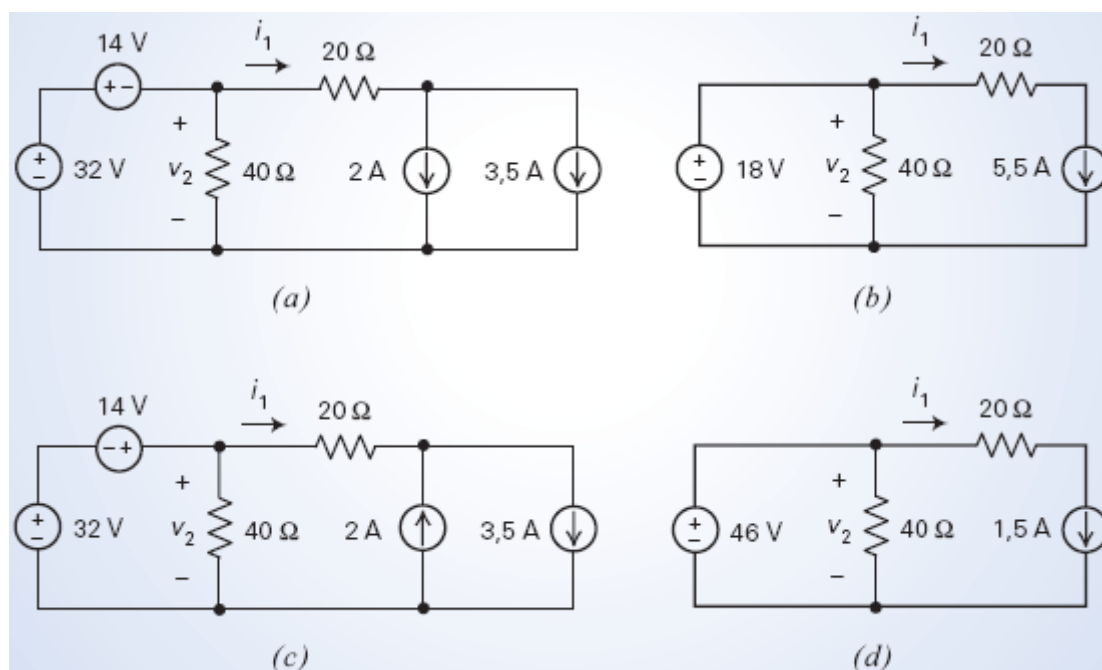



FIGURA 3.5-3 Os circuitos do Exemplo 3.5-1.

Solução

Vamos considerar primeiro o circuito da Figura 3.5-3*a*. Aplicando a LKT à malha da esquerda, obtemos:

$$14 + v_2 - 32 = 0 \;\Rightarrow\; v_2 - 18 = 0$$

Aplicando a LKC ao nó do terminal direito do resistor de 20 Ω, obtemos:

$$i_2 = 2 + 3{,}5 \;\Rightarrow\; i_1 = 5{,}5$$

Essas equações mostram que podemos substituir as fontes de tensão em série por uma única fonte de tensão de 18 V e as fontes de corrente em paralelo por uma única fonte de corrente de 5,5 A. A Figura 3.5-3*b* mostra o resultado.

Note que

$$v_2 - 18 = 0$$

é a equação que resulta da aplicação da LKT à malha da esquerda da Figura 3.5-3*b* e que

$$i_1 = 5{,}5$$

é a equação que resulta da aplicação da LKC ao nó do terminal direito do resistor de 20 Ω da Figura 3.5-3*b*.

Agora vamos considerar o circuito da Figura 3.5-3*c*. Aplicando a LKT à malha da esquerda, obtemos:

$$-14 + v_2 - 32 = 0 \;\Rightarrow\; v_2 - 46 = 0$$

Aplicando a LKC ao nó do terminal direito do resistor de 20 Ω, obtemos:

$$i_1 = 2 = 3{,}5 \;\Rightarrow\; i_1 = 1{,}5$$

Essas equações mostram que podemos substituir as fontes de tensão em série por uma única fonte de 46 V e as fontes de corrente em paralelo por uma única fonte de 1,5 A. A Figura 3.5-3*d* mostra o resultado.

Note que

$$v_2 - 46 = 0$$

é a equação que resulta da aplicação da LKT à malha da esquerda da Figura 3.5-3*d* e que

$$i_1 = 1{,}5$$

é a equação que resulta da aplicação da LKC ao nó do terminal direito do resistor de 20 Ω da Figura 3.5-3*d*.

3.6 *Análise de Circuitos*

Nesta seção vamos considerar a análise de um circuito por substituição de um conjunto de resistores por um resistor equivalente, o que torna o circuito mais fácil de analisar.

Considere o circuito da Figura 3.6-1. Observe que existem três resistores em série e três resistores em paralelo. Como estamos interessados em determinar a tensão de saída v_o, queremos reduzir o circuito ao circuito equivalente que aparece na Figura 3.6-2.

A resistência equivalente dos três resistores em série é

$$R_s = R_1 + R_2 + R_3$$

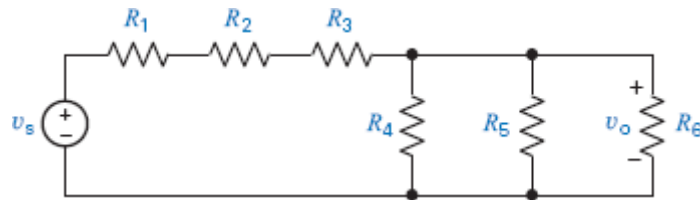



FIGURA 3.6-1 Circuito com um conjunto de resistores em série e um conjunto de resistores em paralelo.

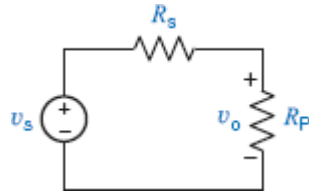



FIGURA 3.6-2 Circuito equivalente do circuito da Figura 3.6-1.

e a resistência equivalente dos três resistores em paralelo é

$$R_p = \frac{1}{G_p}$$

em que

$$G_p = G_4 + G_5 + G_6$$

Aplicando o princípio do divisor de tensão ao circuito da Figura 3.6-2, obtemos:

$$v_o = \frac{R_p}{R_s + R_p} v_s$$

A substituição dos resistores em série pelo resistor equivalente R_s não muda a corrente e a tensão nos outros componentes do circuito. Em particular, a tensão v_o não muda. Além disso, a tensão v_o no resistor equivalente R_p é igual a tensão nos resistores em paralelo. Assim, a tensão v_o no circuito da Figura 3.6-2 é igual à tensão v_o no circuito da Figura 3.6-1. Podemos analisar o circuito simples da Figura 3.6-2 para determinar o valor da tensão v_o e sabemos que a tensão v_o no circuito mais complicado da Figura 3.6-1 tem o mesmo valor.

É sempre possível determinar a resistência equivalente de uma parte de um circuito constituída apenas por resistores e substituir essa parte do circuito pela resistência equivalente. Considere, por exemplo, o circuito da Figura 3.6-3. O circuito resistivo da Figura 3.6-3*a* é equivalente ao resistor da Figura 3.6-3*b*. Vamos chamar a resistência equivalente de R_{eq}. Dizemos que R_{eq} é "a resistência equivalente olhando o circuito da Figura 3.6-3 do ponto de vista dos terminais a-b". A Figura 3.6-3*c* mostra uma notação usada para indicar a resistência equivalente. Resistência equivalente é um conceito importante, que é usado em várias situações e recebe vários nomes, dependendo do contexto. "Resistência de entrada", "resistência de saída", "resistência de Thévenin" e "resistência de Norton" são alguns dos nomes usados para indicar uma resistência equivalente.

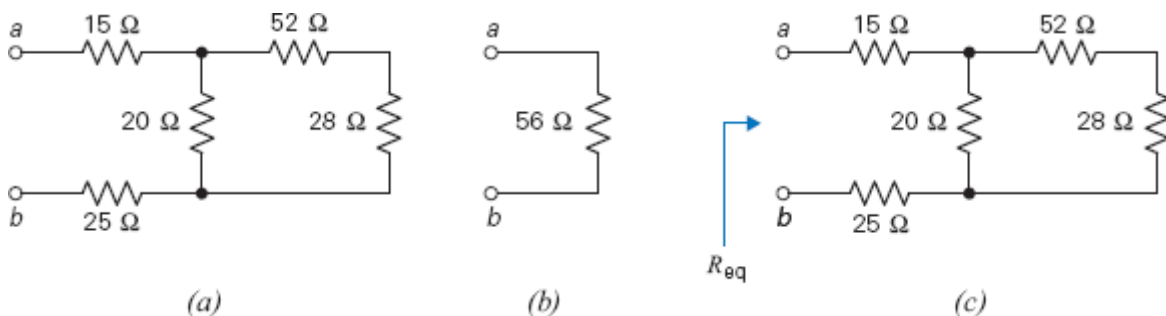



FIGURA 3.6-3 O circuito resistivo mostrado em (*a*) é equivalente ao resistor mostrado em (*b*). A notação usada para indicar a resistência equivalente é mostrada em (*c*).

EXEMPLO 3.6-1 Resistores em Série e em Paralelo

Determine o valor da corrente *i* no circuito da Figura 3.6-4.

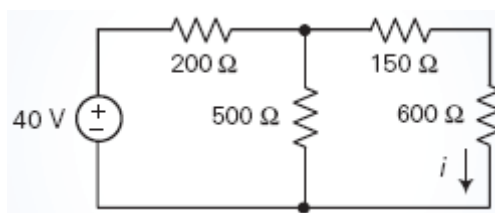



FIGURA 3.6-4 O circuito do Exemplo 3.6-1.

Solução

Os resistores de 150 Ω e 600 Ω estão ligados em série. Esses resistores em série são equivalentes a um único resistor. A resistência do resistor equivalente é dada por

$$R_s = 150 + 600 = 750\ \Omega$$

A Figura 3.6-5*a* mostra o circuito com os resistores em série substituídos por um resistor equivalente. Note que a corrente no resistor equivalente foi chamada de *i* porque é igual à corrente nos resistores em série.

Os resistores de 500 Ω e 750 Ω da Figura 3.6-5*a* estão ligados em paralelo. Esses resistores em paralelo são equivalentes a um único resistor. A resistência do resistor equivalente é dada por

$$R_p = \frac{500(750)}{500 + 750} = 300\ \Omega$$

A Figura 3.6-5*b* mostra o circuito com os resistores em paralelo substituídos por um resistor equivalente. Note que não existe um componente do novo circuito ao qual possa ser associada a corrente *i*.

Os resistores de 200 Ω e 300 Ω da Figura 3.6-5*b* estão ligados em série. A tensão do resistor de 300 Ω pode ser calculada usando o método da divisão de tensão:

$$v_2 = \frac{300}{200 + 300}(40) = 24\ \text{V}$$

A corrente no circuito da Figura 3.6-5*b* é

$$i_1 = \frac{40}{200 + 300} = 0{,}08\ \text{A} = 80\ \text{mA}$$

A Figura 3.6-5*c* mostra o circuito original. Como a substituição dos resistores de 500 Ω e 700 Ω por um resistor equivalente não afeta a corrente no resistor de 200 Ω, a corrente no resistor de 200 Ω no circuito da Figura 3.6-5*c* é a mesma corrente i_1 da Figura 3.6-5*b*. Além disso, a tensão dos resistores de 500 Ω e 700 Ω da Figura 3.6-5*c* é igual à tensão do resistor de 300 Ω da Figura 3.6-5*b*. Assim, a tensão dos resistores de 500 Ω e 700 Ω da Figura 3.6-5*c* é a mesma tensão v_2 do resistor de 300 Ω da Figura 3.6-5*b*.

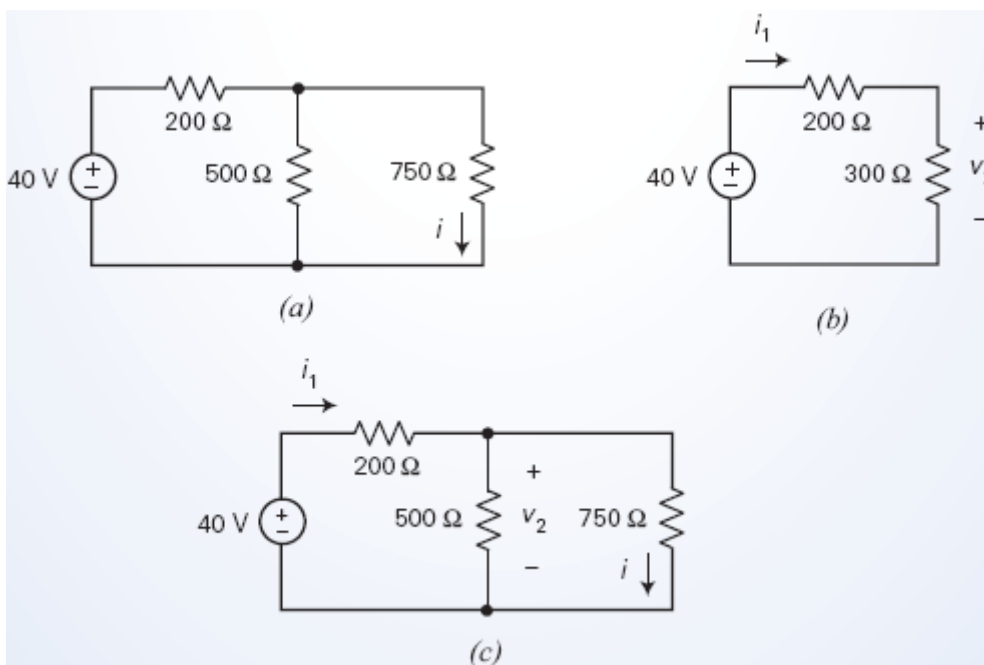



FIGURA 3.6-5 Análise do circuito da Figura 3.6-4 usando resistências equivalentes.

A corrente i da Figura 3.6-5*c* pode ser calculada a partir da corrente i_1 usando o método da divisão de tensão:

$$i = \frac{500}{500+750} i_1 = (0{,}4)(80) = 32 \text{ mA}$$

A corrente i também pode ser calculada a partir da tensão v_2, usando a lei de Ohm:

$$i = \frac{v_2}{750} = \frac{24}{750} = 32 \text{ mA}$$

(Como já observamos, a corrente das Figuras 3.6-5*a* e 3.6-5*c* tem o mesmo valor que a corrente i da Figura 3.6-5.)

EXEMPLO 3.6-2 Resistência Equivalente

EXEMPLO INTERATIVO

O circuito da Figura 3.6-6*a* contém um ohmímetro, um instrumento usado para medir resistências. O ohmímetro mede a resistência equivalente de qualquer circuito resistivo ligado aos seus terminais. Determine a resistência medida pelo ohmímetro da Figura 3.6-6*a*.

Solução

Começamos pela esquerda. Como o resistor de 30 Ω está em paralelo com o resistor de 60 Ω, a resistência equivalente dos dois resistores é

$$\frac{60 \cdot 30}{60+30} = 20\ \Omega$$

Na Figura 3.6-6*b*, a combinação em paralelo dos resistores de 30 Ω e 60 Ω foi substituída pelo resistor equivalente de 20 Ω. Agora os dois resistores de 20 Ω estão em série. A resistência equivalente é

$$20 + 20 = 40\ \Omega$$

Na Figura 3.6-6*c*, a combinação em série dos dois resistores de 20 Ω foi substituída pelo resistor equivalente de 40 Ω. Agora o resistor de 40 Ω está em paralelo com o resistor de 10 Ω. A resistência equivalente é

$$\frac{40 \cdot 10}{40+10} = 8\ \Omega$$

Na Figura 3.6-6*d*, a combinação em paralelo dos resistores de 40 Ω e 10 Ω foi substituída pelo resistor equivalente de 8 Ω. Assim, o ohmímetro mede uma resistência de 8 Ω.

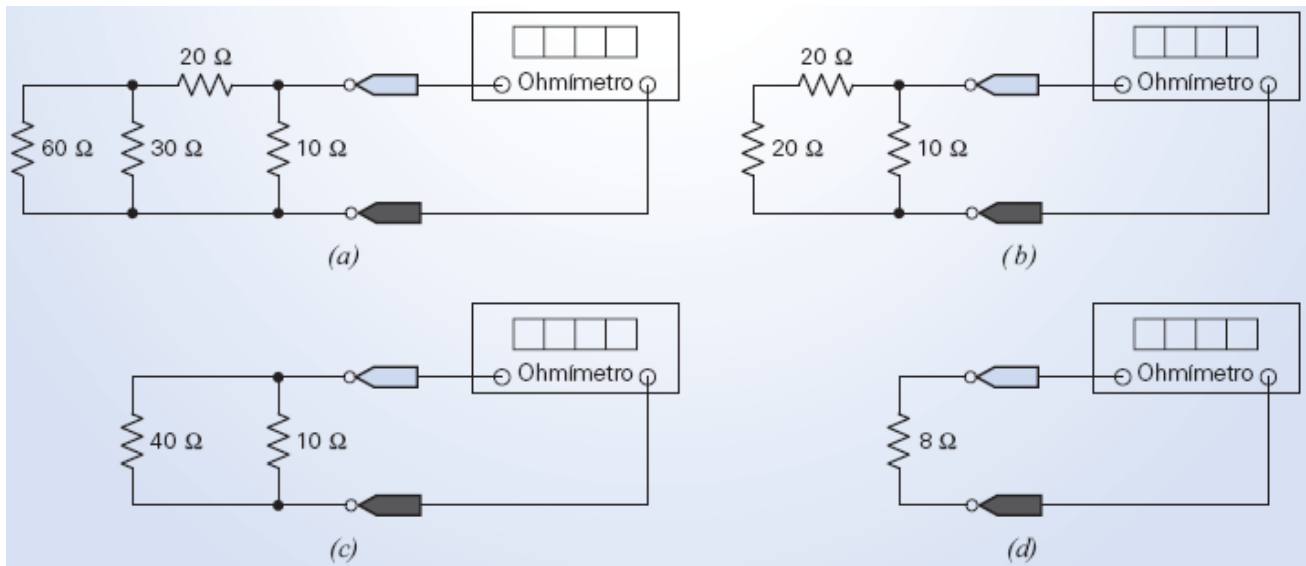



FIGURA 3.6-6

EXEMPLO 3.6-3 Análise de um Circuito Usando Resistências Equivalentes

Determine o valor de i_3, v_4, i_5 e v_6 no circuito da Figura 3.6-7.

Solução

O circuito da Figura 3.6-8 foi obtido a partir do circuito da Figura 3.6-7 substituindo combinações em série e em paralelo de resistências por resistências equivalentes. Podemos usar o circuito equivalente para resolver o problema em três etapas:

1. Determinamos o valor das resistências R_1, R_2 e R_3 na Figura 3.6-8 que torna o circuito da Figura 3.6-8 equivalente ao circuito da Figura 3.6-7.
2. Determinamos os valores de v_1, v_2 e i no circuito da Figura 3.6-8.
3. Como os circuitos são equivalentes, os valores de v_1, v_2 e i no circuito da Figura 3.6-7 são iguais aos valores de v_1, v_2 e i no circuito da Figura 3.6-8. Assim, podemos usar os princípios de divisão de tensão e de corrente para determinar os valores de i_3, v_4, i_5 e v_6 no circuito da Figura 3.6-7 a partir dos valores conhecidos de v_1, v_2 e i.

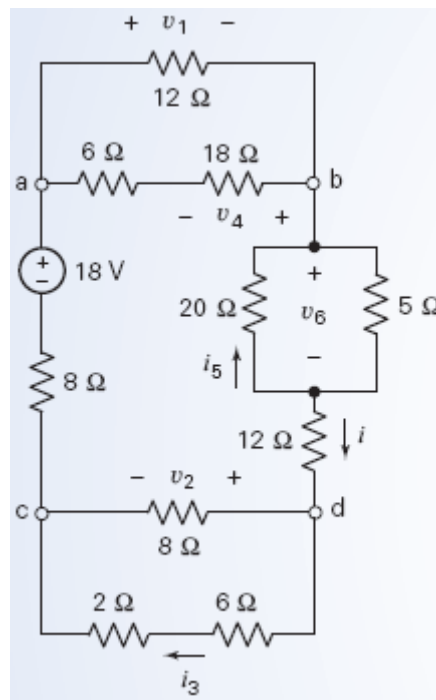



FIGURA 3.6-7 Circuito do Exemplo 3.6-3.

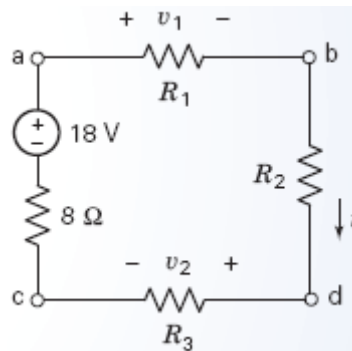



FIGURA 3.6-8 Circuito equivalente ao circuito da Figura 3.6-7.

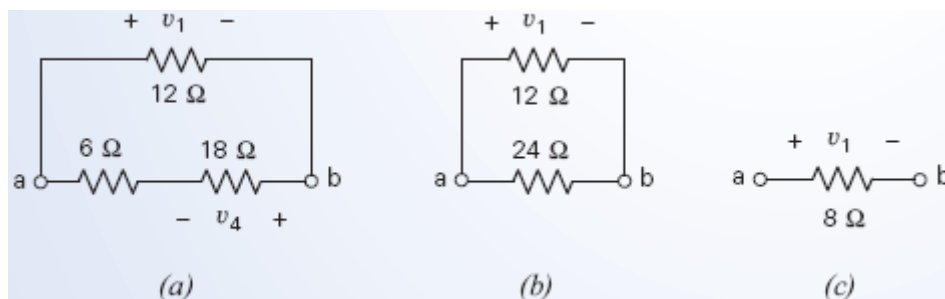



FIGURA 3.6-9

1º passo: A Figura 3.6-9*a* mostra os três resistores situados na parte superior do circuito da Figura 3.6-7. Vemos que o resistor de 6 Ω está ligado em série com o resistor de 18 Ω. Na Figura 3.6-9*b*, os resistores em série foram substituídos pelo resistor equivalente de 24 Ω. Agora, o resistor de 24 Ω está ligado em paralelo com o resistor de 12 Ω. Substituir resistores em série por um resistor equivalente não muda as tensões e correntes dos outros componentes do circuito. Em particular, v_1, a tensão no resistor de 12 Ω, não muda quando os resistores em série são substituídos pelo resistor equivalente. Por outro lado, a tensão v_4 não está presente no circuito da Figura 3.6-9*b*.

Na Figura 3.6-9*c*, os resistores em paralelo foram substituídos pelo resistor equivalente de 8 Ω. A tensão no resistor equivalente é igual à tensão nos resistores em paralelo, v_1. Resumindo, a resistência R_1 na Figura 3.6-8 é dada por

$$R_1 = 12 \,||\, (6 + 18) = 8\ \Omega$$

Da mesma forma, as resistências R_2 e R_3 da Figura 3.6-8 são dadas por

$$R_2 = 12 + (20 \| 5) = 16\ \Omega$$
$$R_3 = 8 \| (2+6) = 4\ \Omega$$

2º passo: Aplicando a LKT ao circuito da Figura 3.6-8, obtemos

$$R_1 i + R_2 i + R_3 i + 8i - 18 = 0 \quad \Rightarrow \quad i = \frac{18}{R_1 + R_2 + R_3 + 8} = \frac{18}{8+16+4+8} = 0,5\ \text{A}$$

Em seguida, a lei de Ohm nos dá

$$v_1 R_1 i = 8(0,5) = 4\ \text{V} \quad \text{e} \quad v_2 R_3 i = 4(0,5) = 2\ \text{V}$$

3º passo: Os valores de v_1, v_2 e i no circuito da Figura 3.6-7 são iguais aos valores de v_1, v_2 e i no circuito da Figura 3.6-8. Voltando nossa atenção para a Figura 3.6-7 e prestando atenção nas direções de referência, podemos determinar os valores de i_3, v_4, i_5 e v_6 usando divisão de tensão, divisão de corrente e a lei de Ohm:

$$i_3 = \frac{8}{8+(2+6)} i = \frac{1}{2}(0,5) = 0,25\ \text{A}$$
$$v_4 = -\frac{18}{6+18} v_1 = -\frac{3}{4}(4) = -3\ \text{V}$$
$$i_5 = -\frac{5}{20+5} i = -\left(\frac{1}{5}\right)(0,5) = -0,1\ \text{A}$$
$$v_6 = (20 \| 5) i = 4(0,5) = 2\ \text{V}$$

EXERCÍCIO 3.6-1 Determine a resistência medida pelo ohmímetro no circuito da Figura E 3.6-1.

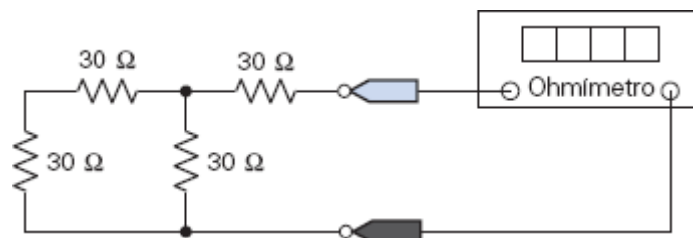



FIGURA E 3.6-1

Resposta: *Resposta:* $\dfrac{(30+30)\cdot 30}{(30+30)+30} + 30 = 50\ \Omega$

3.7 Análise de Circuitos Resistivos Usando o Programa MATLAB

Podemos analisar circuitos simples escrevendo e resolvendo sistemas de equações obtidos a partir das leis de Kirchhoff e das equações constitutivas dos componentes. No exemplo a seguir, o programa MATLAB é usado para resolver um sistema de equações que descreve um circuito elétrico típico.

EXEMPLO 3.7-1 Análise de um Circuito Usando o Programa MATLAB

Determine o valor das tensões e correntes nos resistores do circuito da Figura 3.7-1.

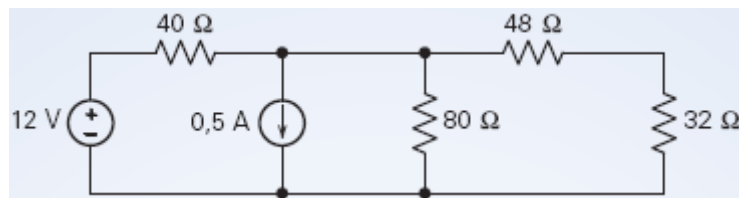



FIGURA 3.7-1 O circuito do Exemplo 3.7-1.

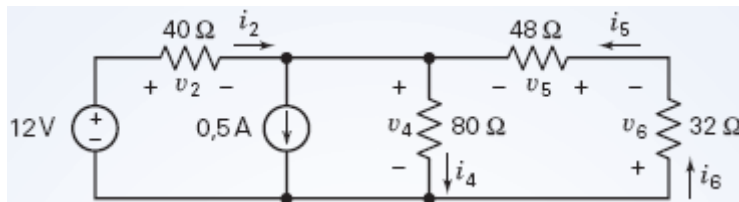



FIGURA 3.7-2 O circuito do Exemplo 3.7-2 com as tensões e correntes nos resistores assinaladas.

Solução

Para começar, assinalamos as tensões e correntes nos resistores. Para facilitar a aplicação da lei de Ohm, vamos escolher o sentido das correntes e das tensões de acordo com a convenção passiva. (Para isso, escolhemos arbitrariamente o sentido de uma das variáveis, a corrente ou a tensão no resistor, e escolhemos o sentido da outra variável para que esteja de acordo com a convenção passiva.) A Figura 3.7-2 mostra o circuito com as tensões e correntes assinaladas.

O passo seguinte consiste em aplicar as leis de Kirchhoff. Aplicando a LKC ao nó ao qual estão ligados os resistores de 40 Ω, 48 Ω e 80 Ω e a fonte de corrente, temos:

$$i_2 + i_5 = 0,5 + i_4 \tag{3.7-1}$$

Aplicando a LKC ao nó ao qual estão ligados os resistores de 48 Ω e 32 Ω, temos:

$$i_5 = i_6 \tag{3.7-2}$$

Aplicando a LKT à malha formada pela fonte de tensão e os resistores de 40 Ω e 80 Ω, temos:

$$12 = v_2 + v_4 \tag{3.7-3}$$

Aplicando a LKT à malha formada pelos resistores de 48 Ω, 32 Ω e 80 Ω, temos:

$$v_4 + v_5 + v_6 = 0 \tag{3.7-4}$$

Aplicando a lei de Ohm aos resistores, temos:

$$v_2 = 40\, i_2,\ \ v_4 = 80\, i_4,\ \ v_5 = 48\, i_5,\ \ v_6 = 32\, i_6 \tag{3.7-5}$$

Podemos usar as equações da lei de Ohm para eliminar as variáveis que representam as tensões nos resistores. Com isso, a Eq. 3.7-3 se torna

$$12 = 40\, i_2 + 80\, i_4 \tag{3.7-6}$$

e a Eq. 3.7-4 se torna

$$80\, i_4 + 48\, i_5 + 32\, i_6 = 0 \tag{3.7-7}$$

Podemos usar a Eq. 3.7-2 para eliminar i_6 da Eq. 3.7-6 da seguinte forma:

$$80\, i_4 + 48\, i_5 + 32\, i_5 = 0 \quad \Rightarrow \quad 80\, i_4 + 80\, i_5 = 0 \quad \Rightarrow \quad i_4 = -i_5 \qquad (3.7\text{-}8)$$

Podemos usar a Eq. 3.7-8 para eliminar i_5 da Eq. 3.7-1:

$$i_2 - i_4 = 0{,}5 + i_4 \quad \Rightarrow \quad i_2 = 0{,}5 + 2\, i_4 \qquad (3.7\text{-}9)$$

Podemos usar a Eq. 3.7-9 para eliminar i_4 da Eq. 3.7-6. Explicitando i_2 na equação resultante, obtemos:

$$12 = 40\, i_2 + 80\left(\frac{i_2 - 0{,}5}{2}\right) = 80\, i_2 - 20 \quad \Rightarrow \quad i_2 = \frac{12 + 20}{80} = 0{,}4 \text{ A} \qquad (3.7\text{-}10)$$

Agora, podemos calcular as outras tensões e correntes nos resistores:

$$\begin{gathered} i_4 = \frac{i_2 - 0{,}5}{2} = \frac{0{,}4 - 0{,}5}{2} = -0{,}05 \text{ A}, \\ i_6 - i_5 = -i_4 = 0{,}05 \text{ A}, \\ v_2 = 40\, i_2 = 40(0{,}4) = 16 \text{ V}, \\ v_4 = 80\, i_4 = 80(-0{,}05) = -4 \text{ V}, \\ v_5 = 48\, i_5 = 48(0{,}05) = 2{,}4 \text{ V}, \\ v_6 = 32\, i_6 = 32(0{,}05) = 1{,}6 \text{ V}. \end{gathered}$$

e

Solução 1 Usando o MATLAB

Os cálculos anteriores mostraram que o circuito pode ser representado pelas seguintes equações:

$$12 = 80\, i_2 - 20, \;\; i_4 = \frac{i_2 - 0{,}5}{2}, \;\; i_6 = i_5 = -i_4, \;\; v_2 = 40\, i_2, \;\; v_4 = 80\, i_4, \;\; v_5 = 48\, i_5 \text{ e } v_6 = 32\, i_6$$

Essas equações podem ser resolvidas consecutivamente usando o MATLAB, como mostra a Figura 3.7-3.

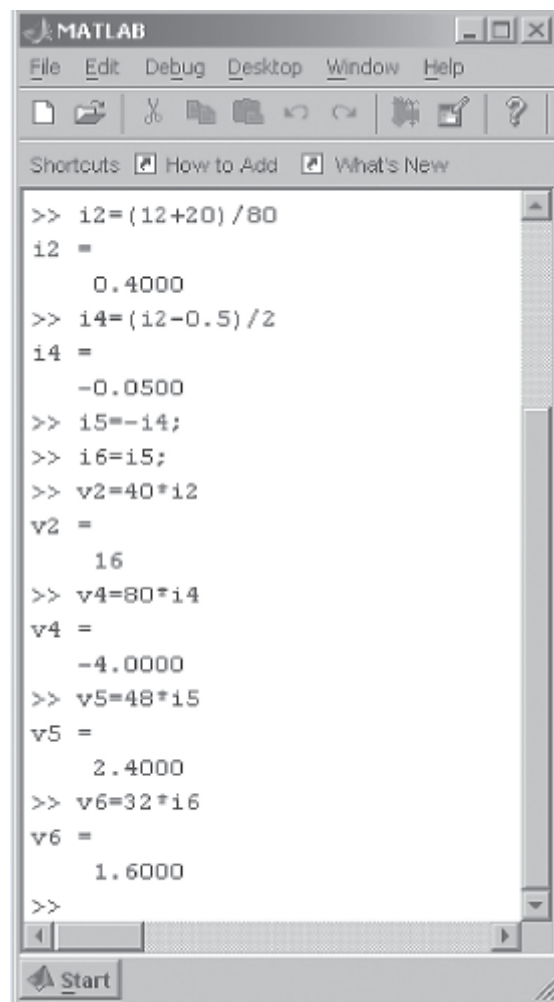
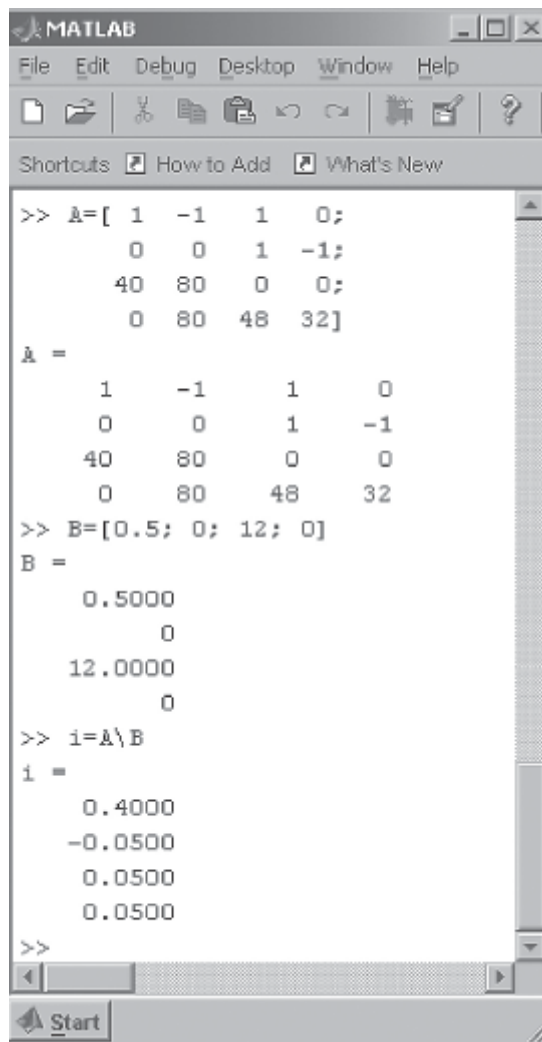



FIGURA 3.7-3 Equações consecutivas.

FIGURA 3.7-4 Sistema de equações.

Solução 2 Usando o MATLAB

Podemos encontrar a solução mais depressa resolvendo um sistema de equações.

Aplicando as leis de Kirchhoff e usando a lei de Ohm para eliminar as variáveis que representam tensões nos resistores, chegamos às Eqs. 3.7-1, 2, 6 e 7:

$$i_2 + i_5 = 0{,}5 + i_4, i_5 - i_6, 40\, i_2 + 80\, i_4,$$

e

$$80\, i_4 + 48\, i_5 + 32\, i_6 = 0$$

Esse sistema de quatro equações com quatro incógnitas, i_2, i_4, i_5 e i_6, pode ser escrito como uma única equação matricial,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 40 & 80 & 0 & 0 \\ 0 & 80 & 48 & 32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_2 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0 \\ 12 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (3.7\text{-}11)$$

pode ser escrita na forma

$$Ai = B \qquad (3.7\text{-}12)$$

em que

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 40 & 80 & 0 & 0\\ 0 & 80 & 48 & 32\end{bmatrix},\ i=\begin{bmatrix}i_2\\ i_4\\ i_5\\ i_6\end{bmatrix}\ \text{e}\ B=\begin{bmatrix}0{,}5\\ 0\\ 12\\ 0\end{bmatrix}$$

Essa equação matricial pode ser resolvida usando o MATLAB, como mostra a Figura 3.7-4. Depois de entrar com as matrizes A e B, o comando

```
i = A\B
```

faz o MATLAB calcular o vetor coluna *i* resolvendo a Eq. 3.7-12.

Um circuito formado por *n* componentes possui *n* correntes e *n* tensões. O sistema de equações que representa o circuito pode ter até 2*n* incógnitas. Esse número pode ser reduzido através de uma escolha adequada das correntes e tensões. Suponha, por exemplo, que dois componentes do circuito estejam ligados em série. Nesse caso, podemos escolher o sentido de referência da corrente para que as correntes sejam iguais nos dois componentes e usar a mesma variável para representar as duas correntes. A Tabela 3.7-1 mostra algumas diretrizes que podem ser usadas para escolher as variáveis do sistema de equações que descreve um circuito de modo a reduzir o número de incógnitas ao mínimo indispensável.

Tabela 3.7-1 Diretrizes para Escolher as Variáveis de um Circuito

TIPO DE COMPONENTE	DIRETRIZ
Resistores	Escolha a polaridade da tensão e o sentido da corrente de cada resistor de acordo com a convenção passiva. Use a lei de Ohm para eliminar a variável corrente ou a variável tensão.
Componentes em série	Escolha o sentido da corrente de componentes em série para que as correntes sejam iguais. Use uma única variável para representar a corrente de todos os elementos em série.
Componentes em paralelo	Escolha a polaridade da tensão de componentes em paralelo para que as tensões sejam iguais. Use uma única variável para representar a tensão de todos os componentes em paralelo.
Voltímetro ideal	Substitua os voltímetros (ideais) por circuitos abertos. Iguale a tensão entre os terminais do circuito aberto à tensão medida pelo voltímetro.
Amperímetro ideal	Substitua os amperímetros (ideais) por curtos-circuitos. Iguale a corrente no curto-circuito à corrente medida pelo amperímetro.

3.8 *Como Podemos Testar . . . ?*

Os engenheiros são frequentemente encarregados de verificar se a solução de um problema está correta. As soluções de problemas de projeto, por exemplo, devem ser verificadas para confirmar que todas as especificações estão sendo atendidas. Além disso, os resultados obtidos com o auxílio de computadores devem ser revistos para evitar possíveis erros na digitação dos dados e as afirmações dos vendedores a respeito dos seus produtos devem ser confirmadas.

Os estudantes de engenharia muitas vezes também precisam verificar se os resultados que obtiveram estão corretos. Às vezes falta muito pouco tempo para terminar um exame e é importante poder identificar rapidamente as questões que precisam ser refeitas.

O exemplo a seguir ilustra algumas técnicas que podem ser usadas para verificar se as soluções de problemas do tipo discutido neste capítulo estão corretas.

Exemplo 3.8-1 Como Podemos Testar Valores de Tensão e Corrente?

O circuito da Figura 3.8-1*a* foi analisando escrevendo e resolvendo um sistema de equações:

$$12 = v_2 + 4i_3,\ \ i_4 = \frac{v_2}{5} + i_3,\ \ v_5 = 4i_3 \text{ e } \frac{v_5}{2} = i_4 + 5i_4$$

O programa de computador Mathcad (*Mathcad User's Guide*, 1991) foi usado para resolver as equações, como mostra a Figura 3.8-1*b*. Os resultados encontrados foram os seguintes:

$$v_2 = -60 \text{ V}, i_3 = 18 \text{ A}, i_4 = 6 \text{ A e } v_5 = 72 \text{ V}.$$

Como podemos testar se essas correntes e tensões estão corretas?

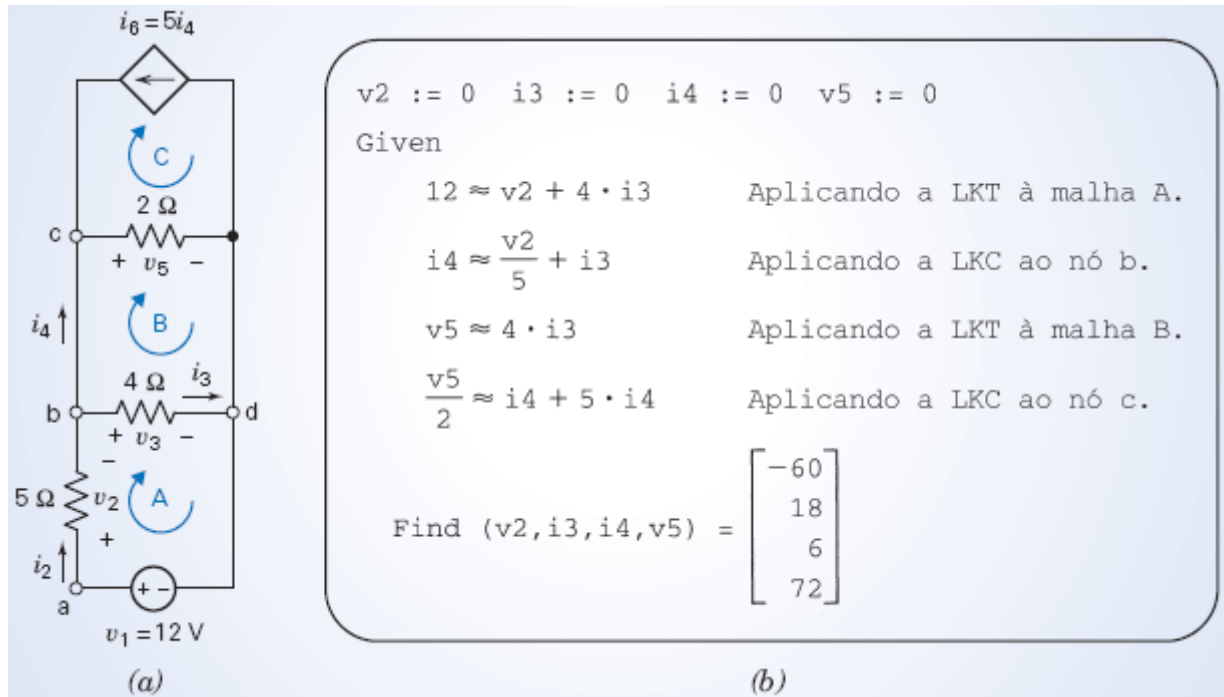



FIGURA 3.8-1 (*a*) Circuito a ser analisado e (*b*) análise do circuito usando o Mathcad.

Solução

A corrente i_2 pode ser calculada a partir de v_2, i_3, i_4 e v_5 de várias formas diferentes. Em primeiro lugar, de acordo com a lei de Ohm, temos:

$$i_2 = \frac{v_2}{5} = \frac{-60}{5} = -12 \text{ A}$$

Em seguida, aplicando a LKC ao nó *b*, obtemos:

$$i_2 = i_3 + i_4 = 18 + 6 = 24 \text{ A}$$

Como i_2 não pode ao mesmo tempo ser −12 e 24 A, os valores calculados para v_2, i_3, i_4 e v_5 não podem estar corretos. Verificando as equações usadas para calcular v_2, i_3, i_4 e v_5, encontramos um erro de sinal na equação da LKC correspondente ao nó b. A equação deveria ser

$$i_4 = \frac{v_2}{5} - i_3$$

Depois de fazer a correção, obtemos novos valores para v_2, i_3, i_4 e v_5:

$$v_s = 7{,}5 \text{ V}, i_3 = 1{,}125 \text{ A}, i_4 = 0{,}375 \text{ A}, v_5 = 4{,}5 \text{ V}$$

e, portanto,

$$i_2 = \frac{v_2}{5} = \frac{7,5}{5} = 1,5 \text{ A}$$

e

$$i_2 = i_3 + i_4 = 1,125 + 0,375 = 1,5 \text{ A}$$

o que mostra que os cálculos estão corretos.

Como teste adicional, vamos considerar o valor de v_3. Em primeiro lugar, de acordo com a lei de Ohm, temos:

$$v_3 = 4i_3 = 4(1,125) = 4,5 \text{ V}$$

Em seguida, aplicando a LKT à malha formada pela fonte de tensão e os resistores de 4 Ω e 5 Ω, obtemos:

$$v_3 = 12 - v_2 = 12 - 7,5 = 4,5 \text{ V}$$

Por fim, aplicando a LKT à malha formada pelos resistores de 2 Ω e 4 Ω, obtemos:

$$v_3 = v_5 = 4,5 \text{ V}$$

Como os três resultados são iguais, isso indica que

$$v_s = 7,5 \text{ V}, i_3 = 1,125 \text{ A}, i_4 = 0,375 \text{ A}, v_5 = 4,5 \text{ V}$$

são os valores corretos.

3.9 EXEMPLO DE PROJETO Fonte de Tensão Ajustável

Necessita-se de um circuito que forneça uma tensão ajustável. As especificações do circuito são as seguintes:

1. Deve ser possível ajustar a tensão para qualquer valor entre −5 V e +5 V. Não deve ser possível obter acidentalmente uma tensão fora desse intervalo.
2. A corrente na carga é tão pequena que pode ser desprezada.
3. O circuito deve consumir a menor potência possível.

Os componentes disponíveis são os seguintes:

1. Potenciômetros com valores de resistência de 10 kΩ, 20 kΩ e 50 kΩ.
2. Um grande sortimento de resistores com tolerância de 2% e valores entre 10 Ω e 1 MΩ (veja o Apêndice D).
3. Duas fontes de alimentação (fontes de tensão), uma de +12 V e outra de −12 V, ambas com uma corrente máxima de 100 mA.

Descreva a Situação e as Hipóteses

A Figura 3.9-1 mostra a situação. A tensão v é a tensão ajustável. O circuito que usa a saída do circuito que está sendo projetado muitas vezes é chamado de carga. Neste caso, como a corrente na carga é desprezível, $i = 0$.

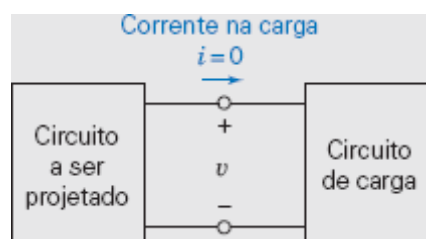



FIGURA 3.9-1 O circuito a ser projetado fornece uma tensão ajustável, v, ao circuito de carga.

Estabeleça a Meta

Projetar, usando os componentes disponíveis, um circuito que forneça uma tensão ajustável cujo valor esteja no intervalo

$$-5\text{V} \le v \le +5\text{V}$$

Formule um Plano

As seguintes observações são pertinentes:

1. Para ajustar a tensão, pode-se usar um potenciômetro.
2. Para obter valores positivos e negativos da tensão, será necessário usar as duas fontes.
3. Os terminais do potenciômetro não podem ser ligados diretamente às fontes de alimentação porque o valor absoluto da tensão de saída não pode ultrapassar 5 V e as fontes são de +12 V e −12 V.

Essas observações sugerem o uso de um circuito como o da Figura 3.9-2*a*. O circuito da Figura 3.9-2*b* foi obtido usando um modelo para o potenciômetro e levando em conta o fato de que a corrente na carga é zero.

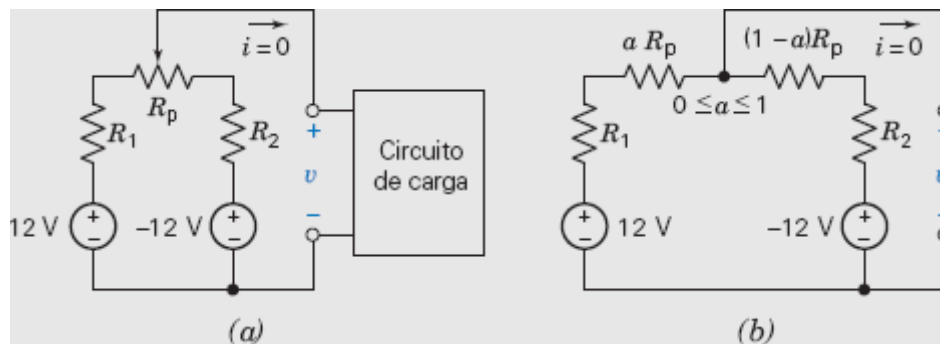



FIGURA 3.9-2 (a) Um possível circuito para produzir a tensão variável, *v*; (b) circuito equivalente.

Para completar o projeto, é preciso especificar os valores de R_1, R_2 e R_p. Em seguida, os resultados devem ser verificados e correções devem ser introduzidas, caso seja necessário.

1. A tensão *v* pode ser ajustada para qualquer valor na faixa de −5 V a +5 V?
2. As correntes nas fontes são menores que 100 mA? Essa condição deve ser satisfeita para que as fontes de alimentação possam ser modeladas como fontes de tensão ideais.
3. É possível reduzir a potência absorvida por R_1, R_2 e R_p?

Execute o Plano

Como parece natural que R_1 e R_2 tenham o mesmo valor, vamos fazer $R_1 = R_2 = R$. Nesse caso, o circuito da Figura 3.9-2*b* pode ser representado como na Figura 3.9-3.

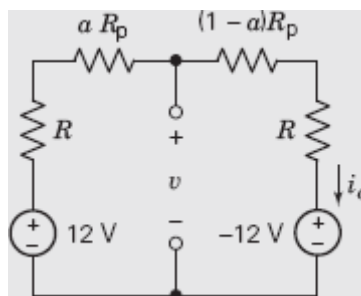



FIGURA 3.9-3 O circuito da Figura 3.9-2*b* depois de fazer $R_1 = R_2 = R$.

Aplicando a LKT à malha externa, temos

$$-12 + Ri_a + aR_p i_a + (1 - a)R_p i_a + Ri_a - 12 = 0$$

o que nos dá

$$i_a = \frac{24}{2R + R_p}$$

Aplicando a LKT à malha da esquerda, obtemos

$$v = 12 - (R + aR_p)i_a$$

Substituindo i_a por seu valor, temos:

$$v = 12 - \frac{24(R + aR_p)}{2R + R_p}$$

Como para $a = 0$ devemos ter $v = 5$ V,

$$5 = 12 - \frac{24R}{2R + R_p}$$

Explicitando R, obtemos:

$$R = 0{,}7\,R_p$$

Suponha que o potenciômetro escolhido seja o de $R_p = 20$ kΩ, o valor intermediário. Nesse caso,

$$R = 14\text{ k}\Omega$$

Verifique se a Solução Proposta Está Correta

Como verificação, note que, para $a = 1$,

$$v = 12 - \left(\frac{14.000 + 20.000}{28.000 + 20.000}\right)24 = -5$$

como era desejado. A especificação de que

$$-5\text{ V} \le v \le 5\text{ V}$$

foi atendida. A potência absorvida pelas três resistências é

$$p = i_a^2(2R + R_p) = \frac{24^2}{2R + R_p}$$

$$p = 12\text{ mW}$$

Note que a potência pode ser reduzida escolhendo o maior valor possível para R_p, que, neste caso, é 50 kΩ. Para mudar R_p para 50 kΩ, precisamos mudar também o valor de R:

$$R = 0{,}7 \times R_p = 35\text{ k}\Omega$$

Como

$$-5\text{ V} = 12 - \left(\frac{35.000 + 50.000}{70.000 + 50.000}\right)24 \le v \le 12 - \left(\frac{35.000}{70.000 + 50.000}\right)24 = 5\text{ V}$$

a especificação de que

$$-5\ \text{V} \le v \le 5\ \text{V}$$

continua a ser satisfeita. A potência absorvida pelas três resistências é agora

$$p = \frac{24^2}{50.000 + 70.000} = 5\ \text{mW}$$

Finalmente, a corrente nas fontes de alimentação é

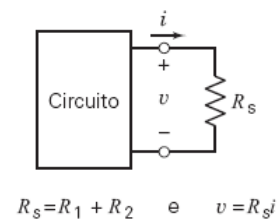
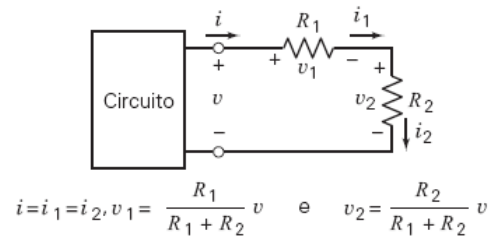
$$i_a = \frac{24}{50.000 + 70.000} = 0{,}2\ \text{mA}$$

que é muito menor que a corrente máxima de 100 mA que as duas fontes são capazes de suportar. O projeto está completo.

3.10 RESUMO

- De acordo com a lei de Kirchhoff para correntes (LKC), a soma algébrica das correntes que entram em um nó é zero. De acordo com a lei de Kirchhoff para tensões (LKT), a soma algébrica das tensões ao longo de um percurso fechado (malha) é zero.
- Circuitos elétricos simples podem ser analisados usando apenas as leis de Kirchhoff e as equações constitutivas dos componentes do circuito.
- Resistores em série se comportam como um *divisor de tensão* e resistores em paralelo se comportam como um *divisor de corrente*. As equações correspondentes aparecem nas primeiras duas linhas da Tabela 3.10-1.
- Dois ou mais resistores em série podem ser substituídos por um único *resistor equivalente*. Dois ou mais resistores em paralelo também podem ser substituídos por um único *resistor equivalente*. As equações correspondentes aparecem nas primeiras duas linhas da Tabela 3.10-1.
- Duas ou mais fontes de tensão em série podem ser substituídas por uma única *fonte de tensão equivalente*. Duas ou mais fontes de corrente em paralelo podem ser substituídas por uma única *fonte de corrente equivalente*. As equações correspondentes aparecem nas duas últimas linhas da Tabela 3.10-1.
- Muitas vezes, circuitos formados exclusivamente por resistores podem ser reduzidos a um único resistor equivalente substituindo repetidamente resistores em série e/ou em paralelo por resistores equivalentes.

Tabela 3.10-1 Circuitos Equivalentes de Componentes em Série e em Paralelo

Resistores em série

$i = i_1 = i_2, \; v_1 = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} v$ e $v_2 = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} v$

$R_s = R_1 + R_2$ e $v = R_s i$

Resistores em paralelo

$v = v_1 = v_2, \; i_1 = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} i$ e $i_2 = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} i$

$R_p = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ e $v = R_p i$

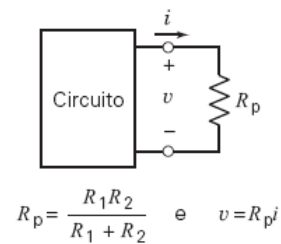
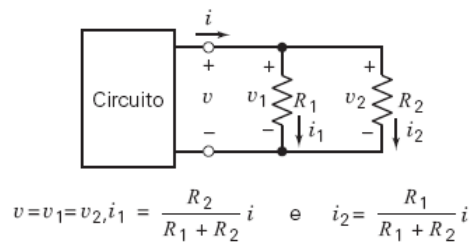
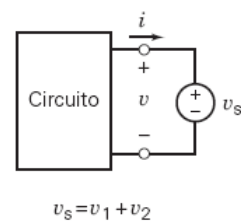
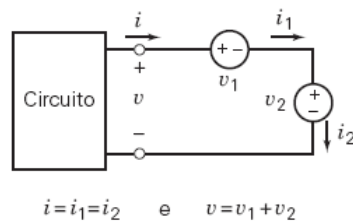
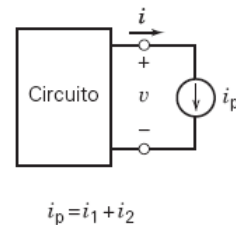
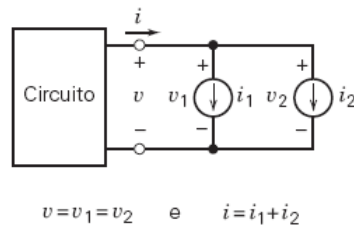
Fontes de tensão em série

$i = i_1 = i_2$ e $v = v_1 + v_2$

$v_s = v_1 + v_2$

Fontes de corrente em paralelo

$v = v_1 = v_2$ e $i = i_1 + i_2$

$i_p = i_1 + i_2$

PROBLEMAS

Seção 3.2 Leis de Kirchhoff

P 3.2-1 Considere o circuito da Figura P 3.2-1. Determine o valor da potência fornecida pelo ramo B e da potência fornecida pelo ramo F.

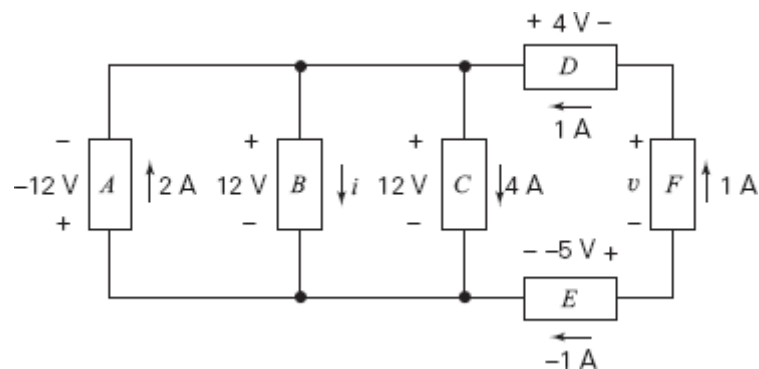



Figura P 3.2-1

P 3.2-2 Determine o valor de i_2, i_4, v_2, v_3 e v_6 na Figura P 3.2-2.

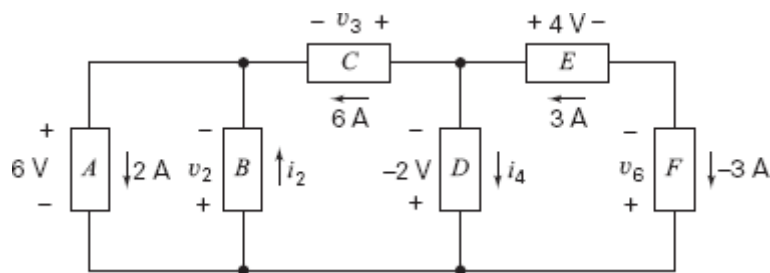



Figura P 3.2-2

P 3.2-3 Considere o circuito da Figura P 3.2-3.

(a) Suponha que $R_1 = 8\ \Omega$ e $R_2 = 4\ \Omega$. Determine a corrente i e a tensão v.

(b) Em vez disso, suponha que $i = 2{,}25$ A e $v = 42$ V. Determine as resistências R_1 e R_2.

(c) Em vez disso, suponha que a fonte de tensão forneça uma potência de 24 W e que a fonte de corrente forneça uma potência de 9 W. Determine a corrente i, a tensão v e as resistências R_1 e R_2.

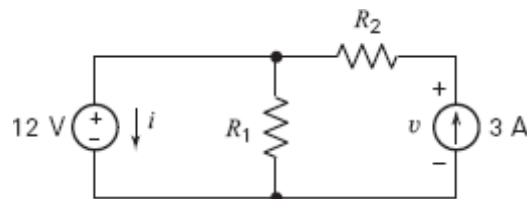



Figura P 3.2-3

P 3.2-4 Determine as potências absorvidas pelos resistores do circuito da Figura P 3.2-4.

Resposta: O resistor de 4 Ω absorve 100 W, o resistor de 6 Ω absorve 24 W e o resistor de 8 Ω absorve 72 W.

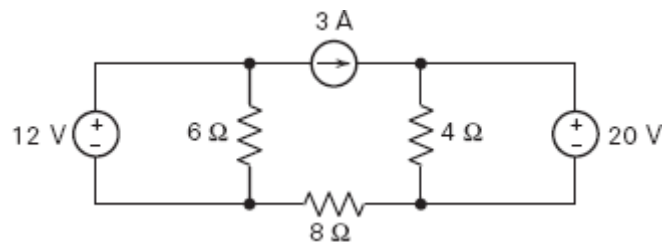



Figura P 3.2-4

P 3.2-5 Determine as potências absorvidas pelos resistores do circuito da Figura P 3.2-5.

Resposta: O resistor de 4 Ω absorve 16 W, o resistor de 6 Ω absorve 24 W e o resistor de 8 Ω absorve 8 W.

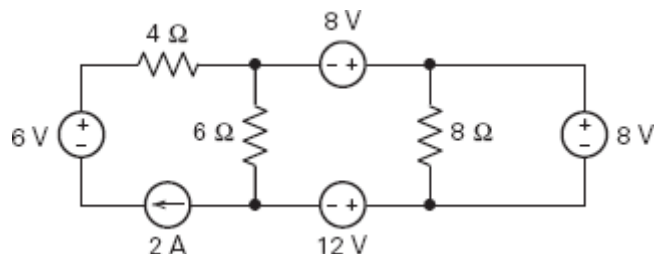



Figura P 3.2-5

P 3.2-6 Determine as potências fornecidas pelas fontes de tensão do circuito da Figura P 3.2-6.

Resposta: A fonte de tensão de 2 V fornece 2 mW e a fonte de tensão de 3 V fornece –6 mW.

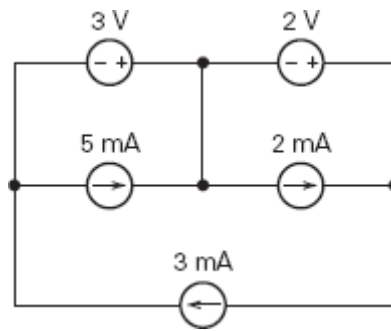



Figura P 3.2-6

P 3.2-7 Qual é o valor da resistência R da Figura P 3.2-7?

Sugestão: Suponha que se trata de um amperímetro ideal. Um amperímetro ideal é equivalente a um curto-circuito.

Resposta: $R = 4\ \Omega$

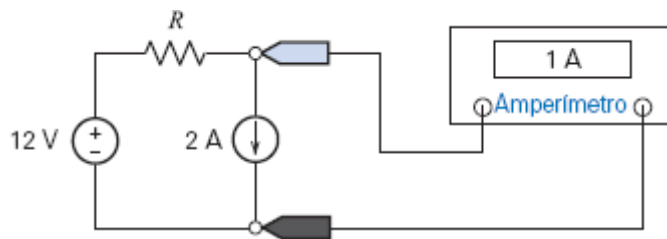



Figura P 3.2-7

P 3.2-8 O voltímetro da Figura P 3.2-8 indica que o valor da tensão entre os terminais da fonte de corrente é 56 V. Qual é o valor da resistência R?

Sugestão: Suponha que se trata de um voltímetro ideal. Um voltímetro ideal é equivalente a um circuito aberto.

Resposta: $R = 10\ \Omega$

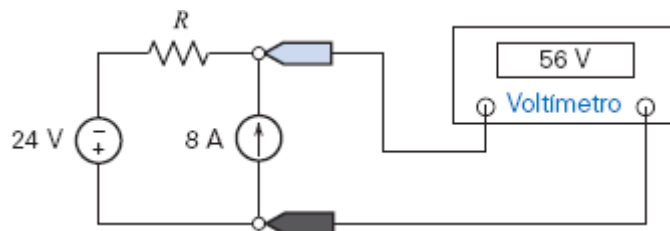



Figura P 3.2-8

P 3.2-9 Determine o valor das resistências R_1 e R_2 da Figura P 3.2-9.

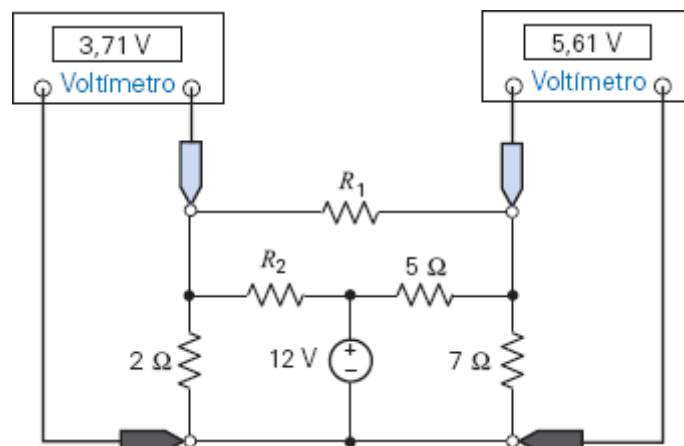



Figura P 3.2-9

P 3.2-10 O circuito da Figura P 3.2-10 é formado por cinco fontes de tensão e quatro fontes de corrente. Expresse as potências fornecidas pelas fontes em termos das tensões das fontes de tensão e das correntes das fontes de corrente.

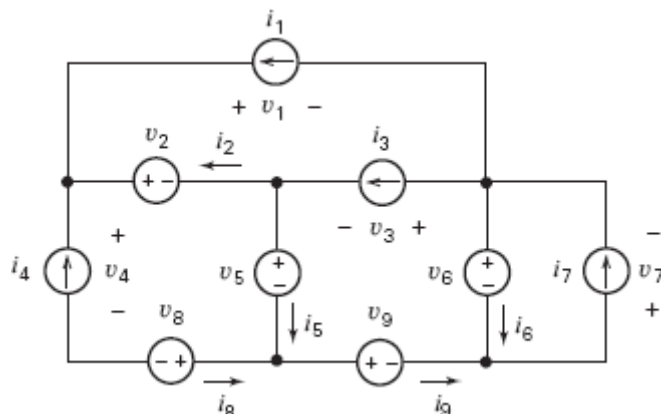



Figura P 3.2-10

P 3.2-11 Determine as potências recebidas pelos resistores do circuito da Figura P 3.2-11.

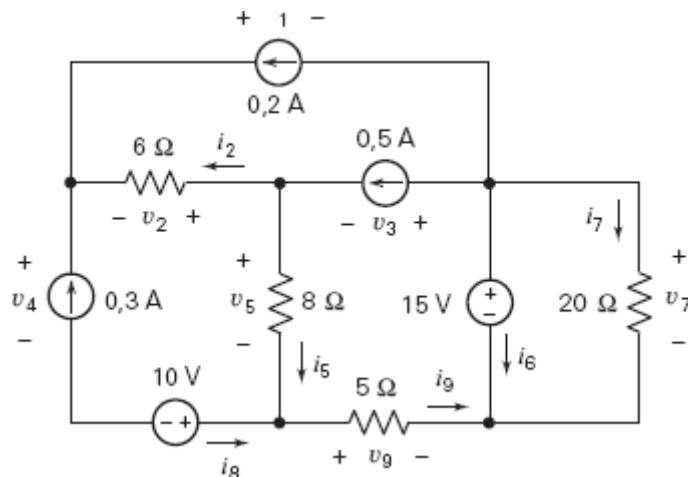



Figura P 3.2-11

P 3.2-12 Determine a tensão e a corrente nos componentes do circuito da Figura P 3.2-12.

Sugestão: Será necessário escolher o sentido de referência das tensões e correntes nos componentes. Existe mais de um modo de fazer isso e a resposta vai depender dos sentidos escolhidos.

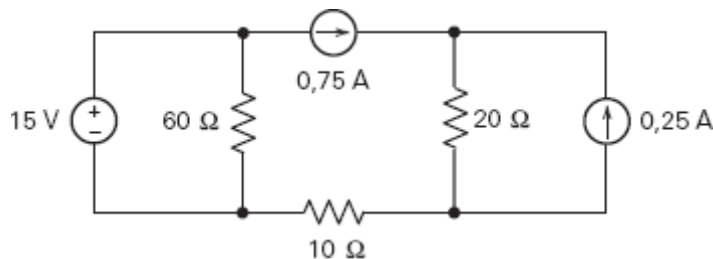



Figura P 3.2-12

P 3.2-13 Determine o valor da corrente medida pelo amperímetro da Figura P 3.2-13.

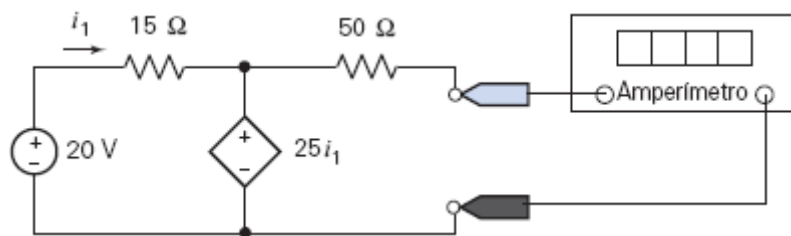



Figura P 3.2-13

P 3.2-14 Determine o valor da tensão medida pelo voltímetro da Figura P 3.2-14.

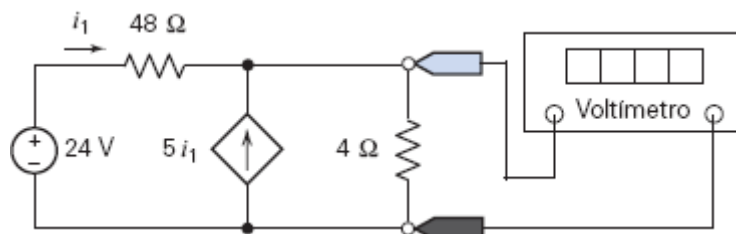



Figura P 3.2-14

P 3.2-15 Determine o valor da tensão medida pelo voltímetro da Figura P 3.2-15.

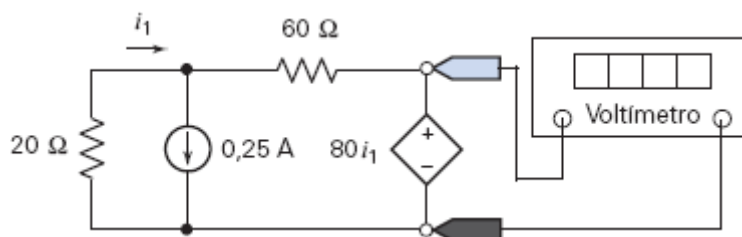



Figura P 3.2-15

P 3.2-16 A fonte de tensão da Figura P 3.2-16 fornece uma potência de 3,6 W. A fonte de corrente fornece 4,8 W. Determine o valor das resistências R_1 e R_2.

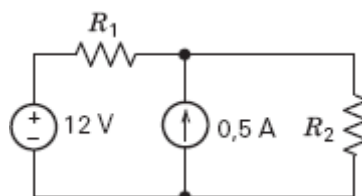



Figura P 3.2-16

P 3.2-17 Determine o valor da corrente i no circuito da Figura P 3.2-17.

Resposta: $i = 4$ A

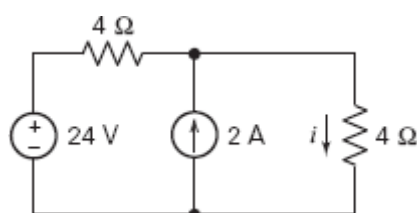



Figura P 3.2-17

P 3.2-18 Determine o valor da corrente i_m no circuito da Figura P 3.2-18*a*.

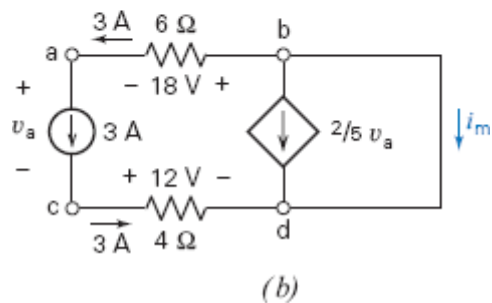
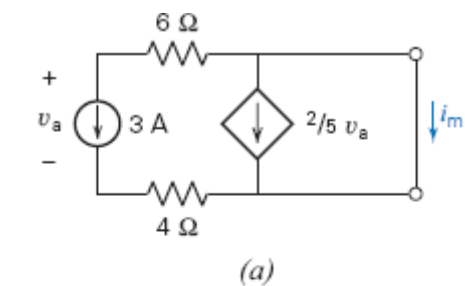



Figura 3.2-18 (*a*) Circuito com uma FCCT. (*b*) O circuito depois de rotular os nós e algumas correntes e tensões nos componentes.

Sugestão: Aplique a LKT à malha a-b-d-c-a da Figura P 3.2-18*b* para determinar v_a. Em seguida, aplique a LKC ao nó b para determinar i_m.

Resposta: $i_m = 9$ A

P 3.2-19 Determine o valor da tensão v_6 no circuito da Figura P 3.2-19.

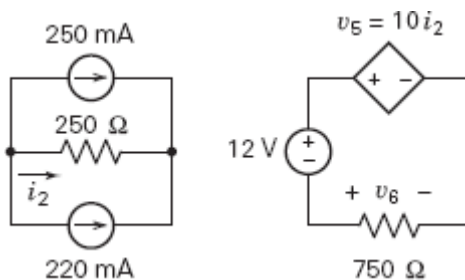



Figura P 3.2-19

P 3.2-20 Determine o valor da tensão v_6 no circuito da Figura P 3.2-20.

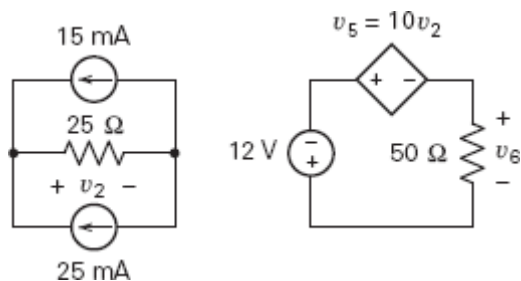



Figura P 3.2-20

P 3.2-21 Determine o valor da tensão v_5 no circuito da Figura P 3.2-21.

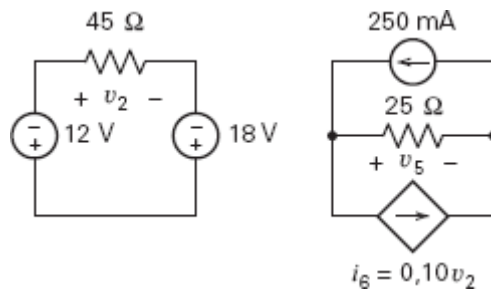



Figura P 3.2-21

P 3.2-22 Determine o valor da tensão v_5 no circuito da Figura P 3.2-22.

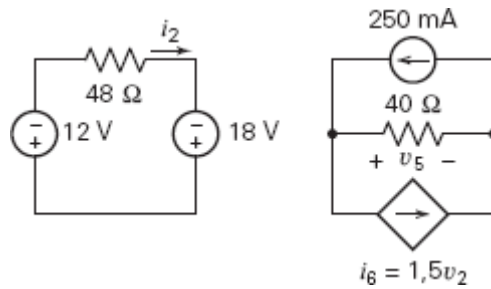



Figura P 3.2-22

P 3.2-23 Determine o valor da tensão v_6 no circuito da Figura P 3.2-23.

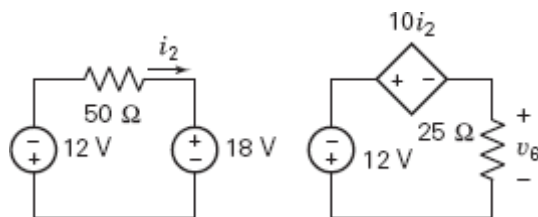



Figura P 3.2-23

P 3.2-24 Determine o valor da tensão v_5 no circuito da Figura P 3.2-24.

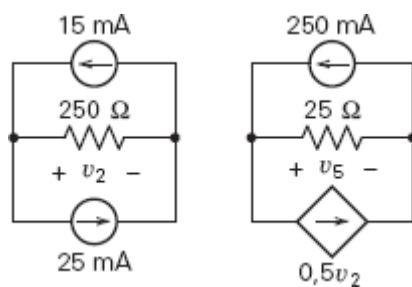



Figura P 3.2-24

P 3.2-25 A fonte de tensão do circuito da Figura P 3.2-25 fornece uma potência de 2 W. O valor da tensão no resistor de 25 Ω é $v_2 = 4$ V. Determine o valor da resistência R_1 e do ganho G da FCCC.

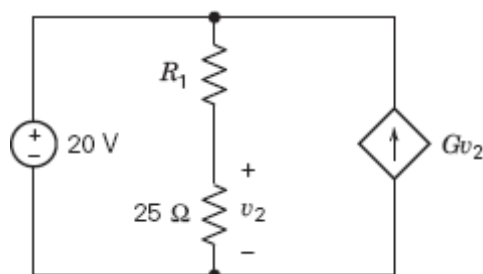



Figura P 3.2-25

P 3.2-26 No circuito da Figura P 3.2-26, determine o valor

(a) da corrente i_a no resistor de 20 Ω;

(b) da tensão v_b no resistor de 10 Ω;

(c) da corrente i_c na fonte de tensão independente.

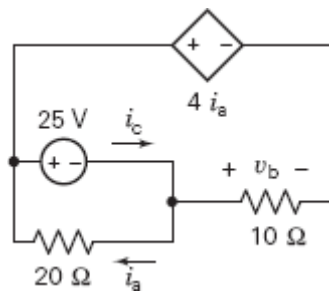



Figura P 3.2-26

P 3.2-27 No circuito da Figura P 3.2-27, determine o valor

(a) das resistências;

(b) das potências fornecidas pelas fontes;

(c) das potências recebidas pelos resistores.

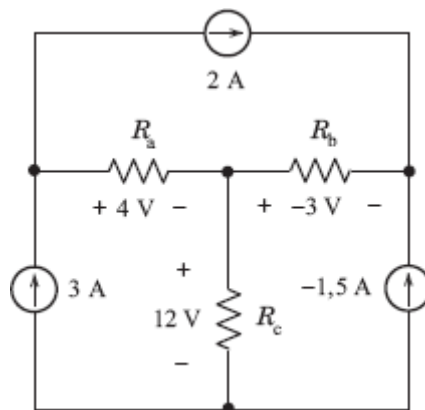



Figura P 3.2-27

P 3.2-28 No circuito da Figura P 3.2-28:

(a) Determine o valor das potências fornecidas pelas fontes.

(b) Determine o valor das potências recebidas pelos resistores.

(c) A potência é conservada?

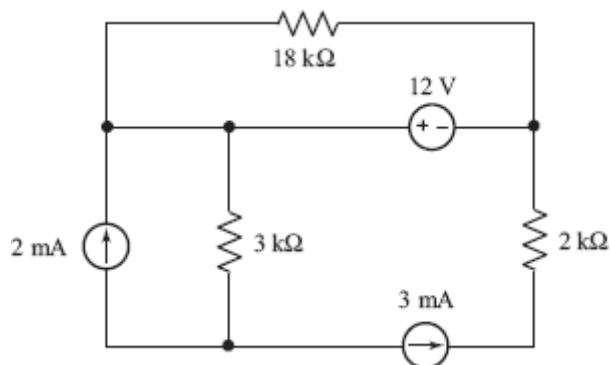



Figura P 3.2-28

P 3.2-29 A tensão do capacitor da Figura P 3.2-29 é $v(t) = 24 - 10e^{-25t}$ V para $t \geq 0$. Determine a corrente $i(t)$ da fonte de tensão para $t > 0$.

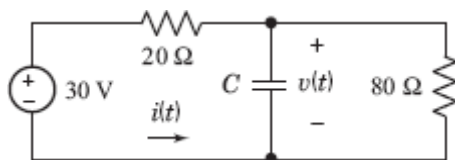



Figura P 3.2-29

P 3.2-30 A corrente no indutor da Figura P 3.2-30 é $i(t) = 8 - 6e^{-25t}$ A para $t \geq 0$. Determine a tensão $v(t)$ do resistor de 80 Ω para $t > 0$.

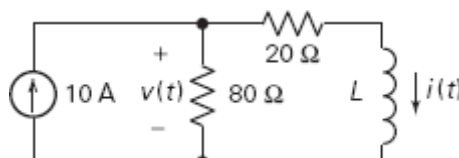



Figura P 3.2-30

Seção 3.3 Resistores em Série e Divisão de Tensão

P 3.3-1 Use o método da divisão de tensão para determinar as tensões v_1, v_2, v_3 e v_4 no circuito da Figura P 3.3-1.

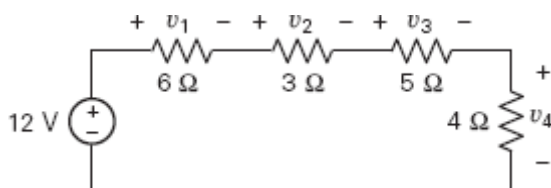



Figura P 3.3-1

P 3.3-2 Considere os circuitos da Figura P 3.3-2.

(a) Determine o valor da resistência R na Figura P 3.3-2*b* que torna o circuito da Figura P 3.3-2*b* equivalente ao circuito da Figura P 3.3-2*a*.

(b) Determine a corrente i na Figura P 3.3-2*b* se R tiver o valor calculado no item (a). Nesse caso, como os circuitos são equivalentes, a corrente i na Figura P 3.32*a* é igual à corrente i na Figura P 3.3-2*b*.

(c) Determine a potência fornecida pela fonte de tensão.

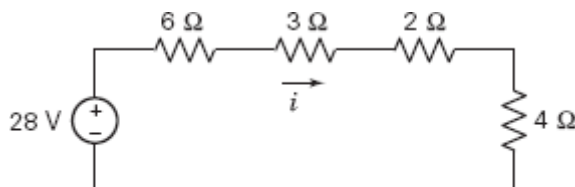
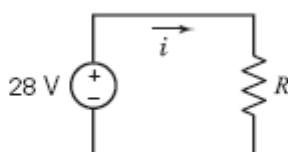



Figura P 3.3-2

P 3.3-3 O voltímetro ideal do circuito da Figura P 3.3-3 foi usado para medir a tensão v.

(a) Suponha que $R_2 = 50\ \Omega$ e determine o valor de R_1.

(b) Em vez disso, suponha que $R_1 = 50\ \Omega$ e determine o valor de R_2.

(c) Em vez disso, suponha que a fonte de tensão fornece uma potência de 1,2 W e determine o valor de R_1 e R_2.

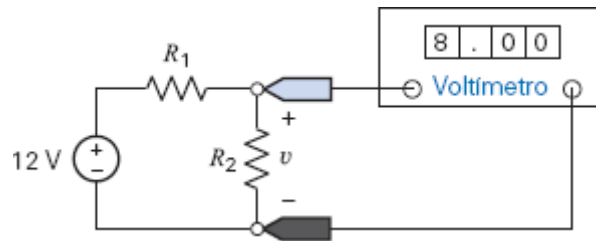



Figura P 3.3-3

P 3.3-4 Determine a tensão v no circuito da Figura P 3.3-4.

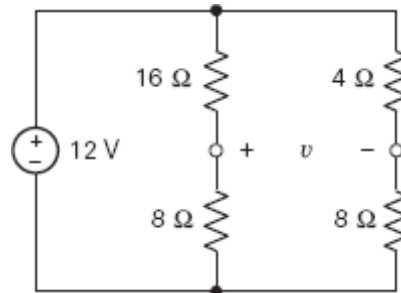



Figura P 3.3-4

P 3.3-5 O modelo de um cabo e um resistor de carga ligados a uma fonte aparece na Figura P 3.3-5. Determine qual deve ser a resistência do cabo, R, para que a tensão de saída, v_o, permaneça entre 9 V e 13 V se a tensão da fonte, v_s, variar entre 20 V e 28 V. A resistência do cabo só pode assumir valores inteiros no intervalo $20 < R < 100\ \Omega$.

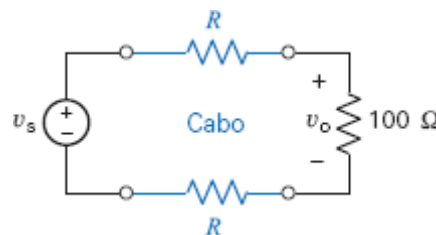



Figura P 3.3-5 Circuito com um cabo.

P 3.3-6 A entrada do circuito da Figura P 3.3-6 é a tensão v_a da fonte de tensão. A saída do circuito é a tensão medida pelo voltímetro, v_b. O circuito produz uma saída proporcional à entrada, ou seja,

$$v_b = k\, v_a$$

em que k é uma constante de proporcionalidade.

(a) Determine o valor da saída, v_b, para $R = 180\ \Omega$ e $v_a = 18$ V.

(b) Determine o valor da potência fornecida pela fonte de tensão para $R = 180\ \Omega$ e $v_a = 18$ V.

(c) Determine o valor da resistência R para que a saída seja $v_b = 2$ V quando a entrada é $v_a = 18$ V.

(d) Determine o valor da resistência R para que $v_b = 0{,}2 v_a$ (ou seja, para que o valor da constante de proporcionalidade seja $k = 0{,}2$).

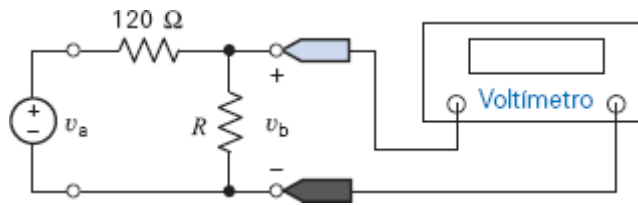



Figura P 3.3-6

P 3.3-7 Determine o valor da tensão v no circuito da Figura P 3.3-7.

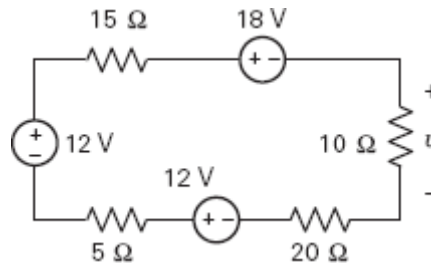



Figura P 3.3-7

P 3.3-8 Determine a potência fornecida pela fonte dependente no circuito da Figura P 3.3-8.

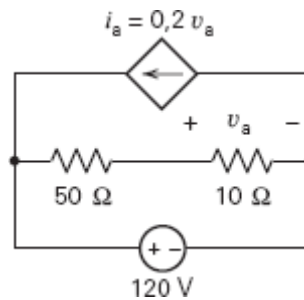



Figura P 3.3-8

P 3.3-9 Um potenciômetro pode ser usado como transdutor para converter a posição angular de um ponteiro em uma grandeza elétrica. A Figura P 3.3-9 ilustra a situação. A Figura P 3.3-9*a* mostra um potenciômetro de resistência R_p ligado a uma fonte de tensão. O potenciômetro possui três terminais, um em cada extremidade e um ligado a um contato deslizante chamado cursor. Um voltímetro é usado para medir a tensão entre o cursor e uma das extremidades do potenciômetro.

A Figura P 3.3-9*b* mostra o circuito depois que o potenciômetro é substituído por um modelo do potenciômetro que utiliza dois resistores. O parâmetro a depende do ângulo θ de rotação do eixo do potenciômetro: $a = \theta/360$, em que θ está em graus. Além disso, na Figura P 3.3-9*b*, o voltímetro foi substituído por um circuito aberto e a tensão v_m medida pelo voltímetro foi indicada. A entrada do circuito é o ângulo θ e a saída é a tensão v_m.

(a) Mostre que a saída é proporcional à entrada.

(b) Suponha que $R_p = 1$ kΩ e $v_s = 24$ V. Expresse a saída em função da entrada. Qual é o valor da saída para $\theta = 45^o$? Quando é o ângulo se $v_m = 10$ V?

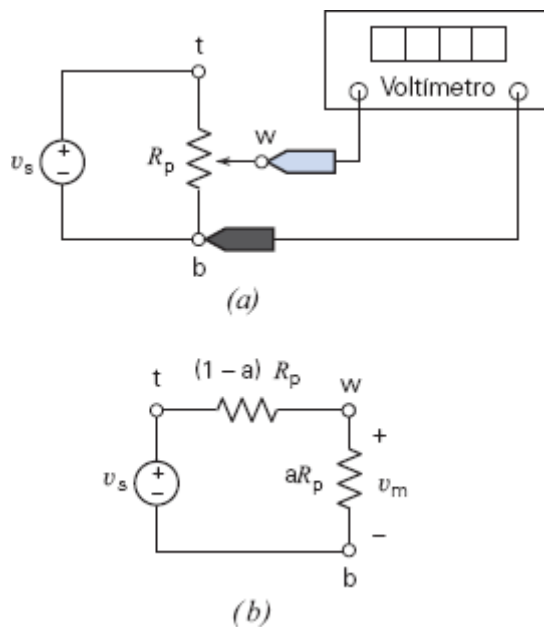



Figura P 3.3-9

P 3.3-10 Determine o valor da tensão medida pelo voltímetro da Figura P 3.3-10.

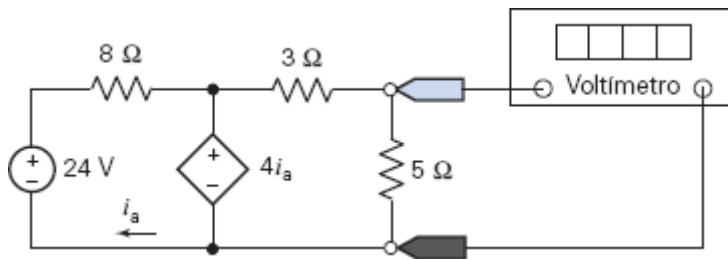



Figura P 3.3-10

P 3.3-11 Determine a tensão v_3 e a corrente i no circuito da Figura P 3.3-11 e mostre que a potência fornecida aos três resistores é igual à potência fornecida pela fonte.

Resposta: $v_3 = 3$ V, $i = 1$A

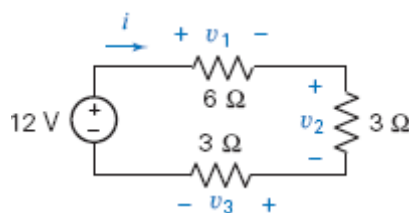



Figura P 3.3-11

P 3.3-12 Considere o divisor de tensão da Figura P 3.3-12 com $R_1 = 8\ \Omega$. Deseja-se que a potência de saída absorvida por R_1 seja 4,5 W. Determine a tensão v_o e a tensão da fonte, v_s.

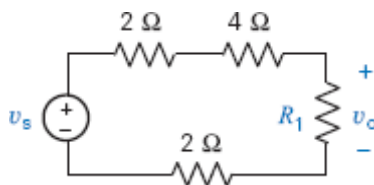



Figura P 3.3-12

P 3.3-13 Considere o circuito divisor de tensão da Figura P 3.3-13. O resistor R representa um sensor de temperatura. A resistência R, em Ω, está relacionada à temperatura T, em ºC, através da equação

$$R = 50\frac{1}{2}T$$

(a) Determine as tensões do medidor, v_m, correspondentes às temperaturas de 0 ºC, 75 ºC e 100 ºC.

(b) Determine as temperaturas T correspondentes às tensões de 8 V, 10 V e 15 V.

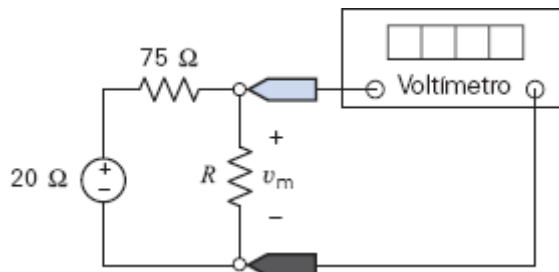



Figura P 3.3-13

P 3.3-14 No circuito da Figura P 3.3-14, determine

(a) o valor da resistência R para que v_o = 17,07 V;

(b) o valor da tensão v_o para R = 14 Ω;

(c) a potência fornecida pela fonte de tensão se v_o = 14,22 V.

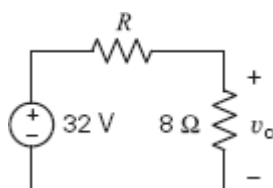



Figura P 3.3-14

P 3.3-15 A Figura P 3.3-15 mostra quatro circuitos do mesmo tipo. Determine o valor das tensões v_1, v_2, v_3 e v_4.

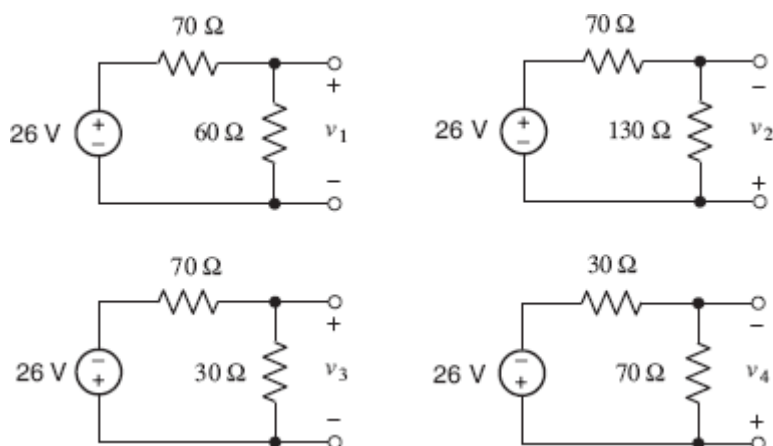



Figura P 3.3-15

P 3.3-16 A Figura P 3.3-16 mostra quatro circuitos do mesmo tipo. Determine o valor das tensões v_1, v_2, v_3 e v_4.

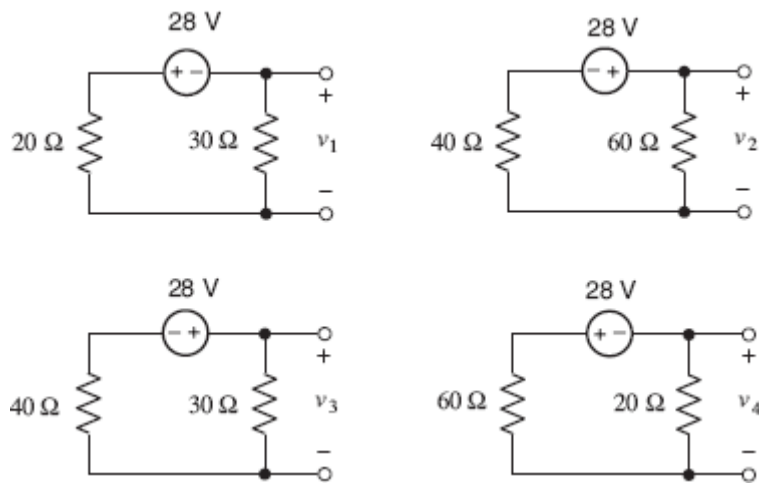



Figura P 3.3-16

P 3.3-17 A entrada do circuito da Figura P 3.3-17 é a tensão da fonte

$$v_s(t) = 12 \cos (377\, t) \text{ mV}$$

A saída é a tensão $v_o(t)$. Determine $v_o(t)$.

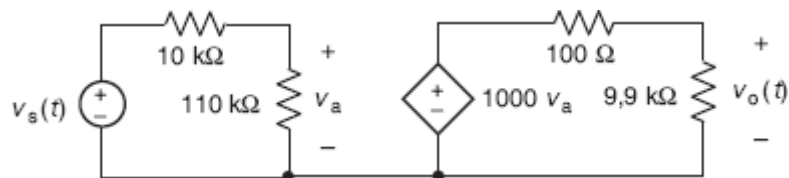



Figura P 3.3-17

Seção 3.4 Resistores em Paralelo e Divisão de Corrente

P 3.4-1 Use o método da divisão de tensão para determinar as correntes i_1, i_2, i_3 e i_4 no circuito da Figura P 3.4-1.

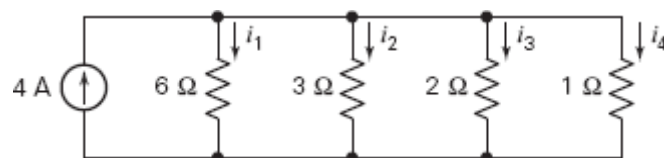



Figura P 3.4-1

P 3.4-2 No circuito da Figura P 3.4-2, determine

(a) o valor da resistência R na Figura P 3.4-2*b* que torna o circuito da Figura 3.4-2*b* equivalente ao circuito da Figura P 3.4-2*a*;

(b) a tensão v na Figura P 3.4-2*b* se R tiver o valor calculado no item (a). Nesse caso, como os circuitos são equivalentes, a tensão v na Figura P 3.4-2*a* é igual à tensão v na Figura P 3.4-2*b*;

(c) a potência fornecida pela fonte de corrente.

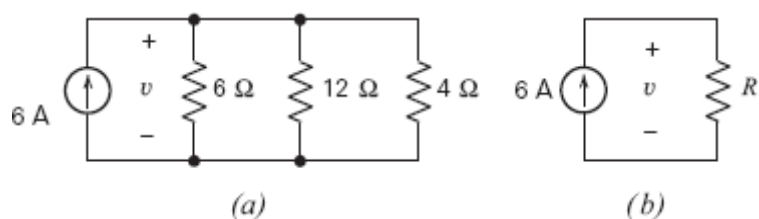



Figura P 3.4-2

P 3.4-3 O voltímetro ideal do circuito da Figura P 3.4-3 é usado para medir a tensão v.

(a) Suponha que $R_2 = 6\ \Omega$. Determine o valor de R_1 e da corrente i.

(b) Em vez disso, suponha que $R_1 = 6\ \Omega$. Determine o valor de R_2 e da corrente i.

(c) Em vez disso, escolha R_1 e R_2 para que as potências absorvidas pelos resistores sejam minimizadas.

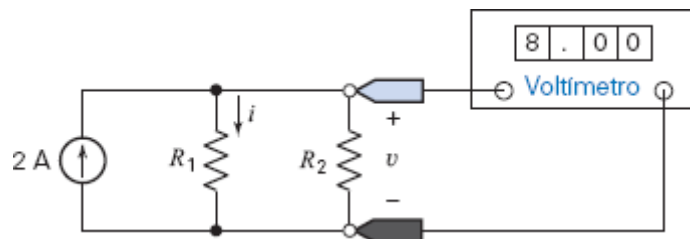



Figura P 3.4-3

P 3.4-4 Determine a corrente i no circuito da Figura P 3.4-4.

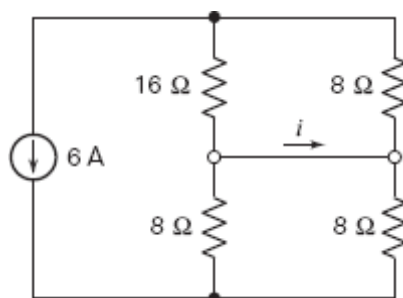



Figura P 3.4-4

P 3.4-5 Considere o circuito da Figura P 3.4-5 para $4\ \Omega \leq R_1 \leq 6\ \Omega$ e $R_2 = 10\ \Omega$. Escolha o valor da corrente da fonte de corrente, i_s, para que v_o permaneça entre 9 V e 13 V.

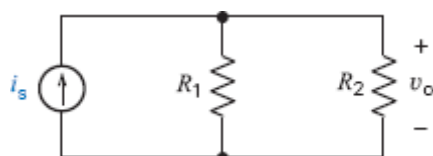



Figura P 3.4-5

P 3.4-6 A Figura P 3.4-6 mostra um amplificador transistorizado. Os valores de R_1 e R_2 devem ser escolhidos. As resistências R_1 e R_2 são usadas para polarizar o transistor, ou seja, para colocar o transistor na região de operação desejada. Neste problema, R_1 e R_2 devem ter valores tais que $v_b = 5$ V. Esperamos que o valor de i_b seja aproximadamente 10 μA. Para $i_1 \leq 10 i_b$, é razoável desprezar a corrente i_b, ou seja, supor que $i_b = 0$. Nesse caso, R_1 e R_2 formam um divisor de tensão.

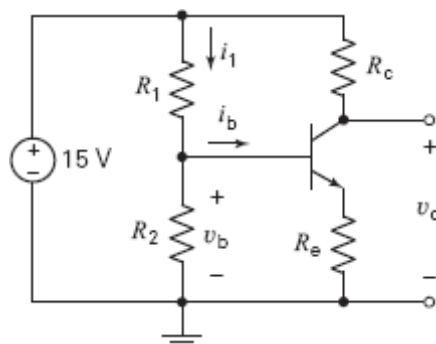



Figura P 3.4-6

(a) Escolha valores de R_1 e R_2 tais que $v_b = 5$ V e a potência total absorvida por R_1 e R_2 não ultrapasse 5 mW.

(b) O uso de um transistor de baixa qualidade pode fazer com que i_b seja maior que o esperado. Usando os valores de R_1 e R_2 escolhidos no item (a), determine qual será o valor de v_b se $i_b = 15\ \mu$A.

P 3.4-7 Determine o valor da corrente i no circuito da Figura P 3.4-7.

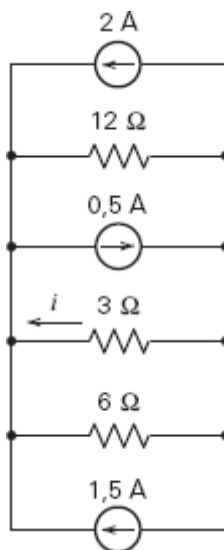



Figura P 3.4-7

P 3.4-8 Determine o valor da tensão v no circuito da Figura P 3.4-8.

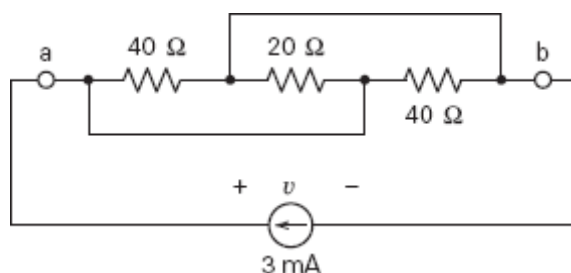



Figura P 3.4-8

P 3.4-9 Determine a potência fornecida pela fonte dependente da Figura P 3.4-9.

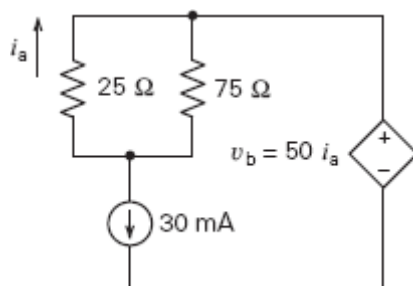



Figura P 3.4-9

P 3.4-10 Determine o valor das resistências R_1 e R_2 no circuito da Figura P 3.4-10.

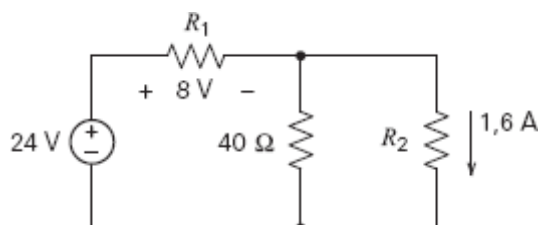



Figura P 3.4-10

P 3.4-11 Determine o valor das resistências R_1 e R_2 no circuito da Figura P 3.4-11.

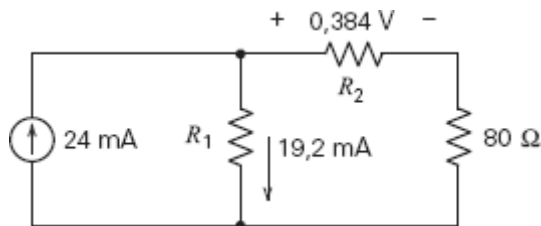



Figura P 3.4-11

P 3.4-12 Determine o valor da corrente medida pelo amperímetro da Figura P 3.4-12.

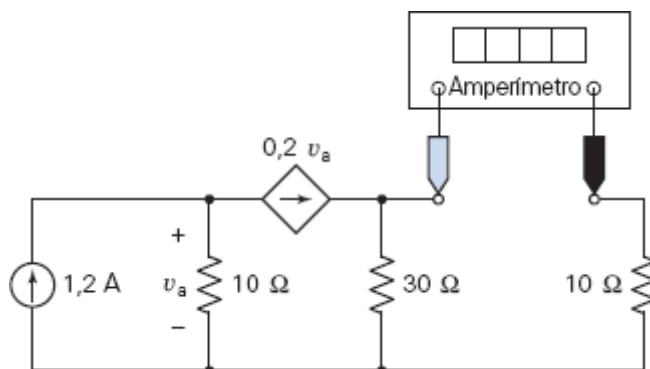



Figura P 3.4-12

P 3.4-13 Considere a combinação de resistores da Figura P 3.4-13 e seja R_p a resistência equivalente.

(a) Suponha que $20\ \Omega \leq R \leq 320\ \Omega$. Determine a faixa de valores correspondentes de R_p.

(b) Em vez disso, suponha que $R = 0$ (um curto-circuito). Determine o valor de R_p.

(c) Em vez disso, suponha que $R = \infty$ (um circuito aberto). Determine o valor de R_p.

(d) Em vez disso, suponha que a resistência equivalente é $R_p = 40\ \Omega$. Determine o valor de R.

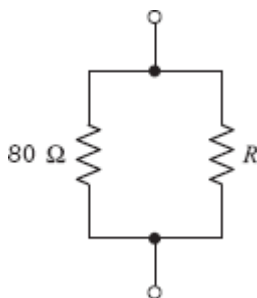



Figura P 3.4-13 .

P 3.4-14 Considere a combinação de resistores da Figura P 3.4-14 e seja R_p a resistência equivalente.

(a) Suponha que $40\ \Omega \leq R \leq 400\ \Omega$. Determine a faixa de valores correspondentes de R_p.

(b) Em vez disso, suponha que $R = 0$ (um curto-circuito). Determine o valor de R_p.

(c) Em vez disso, suponha que $R = \infty$ (um circuito aberto). Determine o valor de R_p.

(d) Em vez disso, suponha que a resistência equivalente é $R_p = 80\ \Omega$. Determine o valor de R.

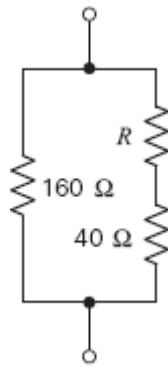



Figura P 3.4-14

P 3.4-15 Considere a combinação de resistores da Figura P 3.4-15 e seja R_p a resistência equivalente.

(a) Suponha que $50\ \Omega \leq R \leq 800\ \Omega$. Determine a faixa de valores correspondentes de R_p.

(b) Em vez disso, suponha que $R = 0$ (um curto-circuito). Determine o valor de R_p.

(c) Em vez disso, suponha que $R = \infty$ (um circuito aberto). Determine o valor de R_p.

(d) Em vez disso, suponha que a resistência equivalente é $R_p = 150\ \Omega$. Determine o valor de R.

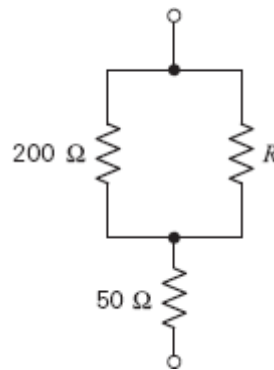



Figura P 3.4-15

P 3.4-16 A entrada do circuito da Figura P 3.4-16 é a corrente da fonte, i_s. A saída é a corrente medida pelo amperímetro, i_o. A fonte está ligada ao amperímetro por um divisor de corrente. São realizadas as seguintes observações:

(a) Quando a entrada é $i_s = 5$ A, a saída é $i_o = 2$ A.

(b) Quando $i_s = 2$ A, a fonte fornece 48 W.

Determine o valor das resistências R_1 e R_2.

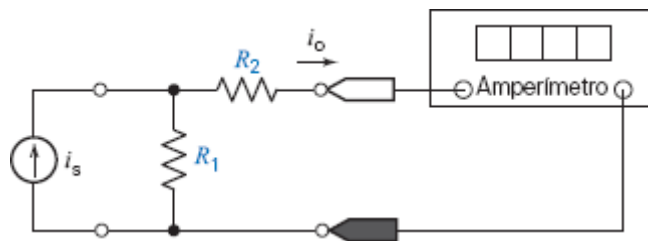



Figura P 3.4-16

P 3.4-17 A Figura P 3.4-17 mostra quatro circuitos do mesmo tipo. Determine o valor das correntes i_1, i_2, i_3 e i_4.

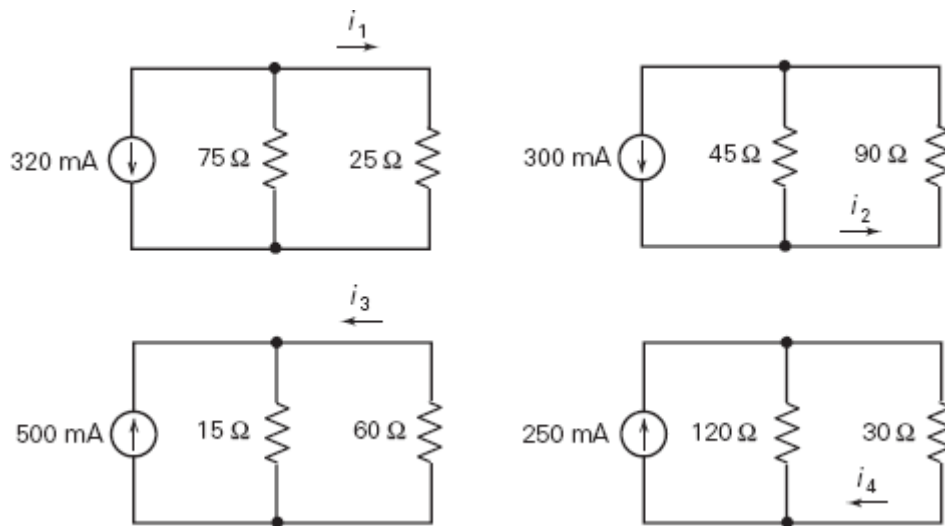



Figura P 3.4-17

P 3.4-18 A Figura P 3.4-18 mostra quatro circuitos do mesmo tipo. Determine o valor das correntes i_1, i_2, i_3 e i_4.

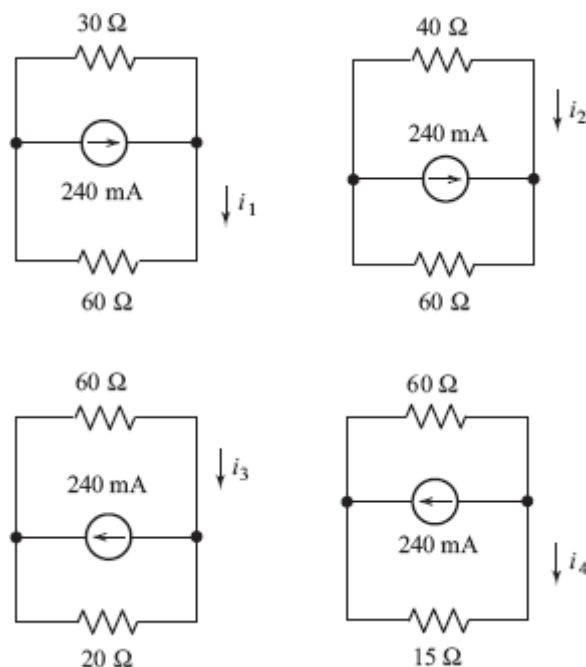



Figura P 3.4-18

P 3.4-19 A entrada do circuito da Figura P 3.4-19 é a corrente I_s da fonte. A saída é a corrente i_o. A saída do circuito é proporcional à entrada, de acordo com a relação

$$i_o = k\, I_s$$

em que k é uma constante.

Determine o valor de k.

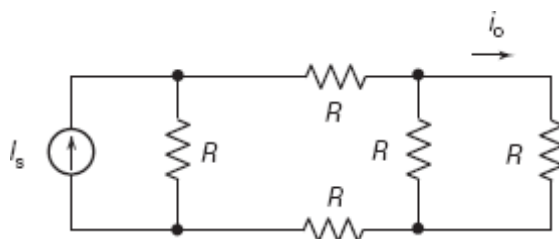



Figura P 3.4-19

P 3.4-20 A entrada do circuito da Figura P 3.4-20 é a tensão V_s da fonte. A saída é a tensão v_o. A saída do circuito é proporcional à entrada, de acordo com a relação

$$v_o = k\,V_s$$

Determine o valor de k.

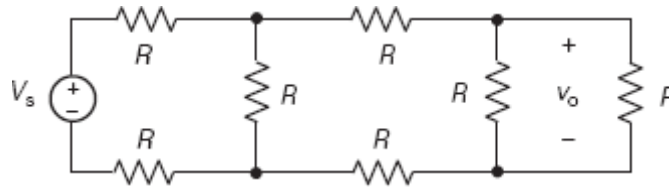



Figura P 3.4-20

Seção 3.5 Fontes de Tensão em Série e Fontes de Corrente em Paralelo

P 3.5-1 Determine as potências fornecidas pelas fontes do circuito da Figura P 3.5-1.

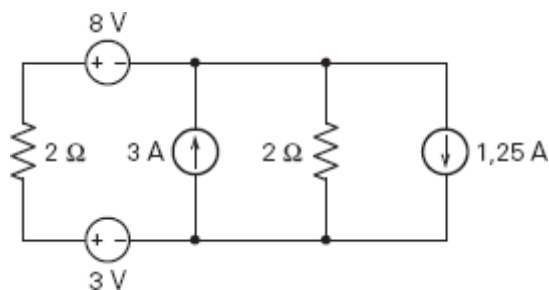



Figura P 3.5-1

P 3.5-2 Determine as potências fornecidas pelas fontes do circuito da Figura P 3.5-2.

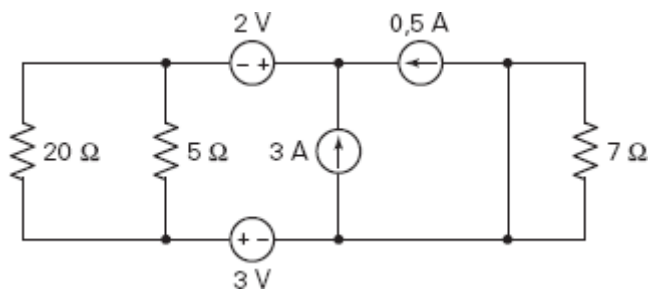



Figura P 3.5-2

P 4.5-3 Determine as potências recebidas pelos resistores do circuito da Figura P 3.5-3.

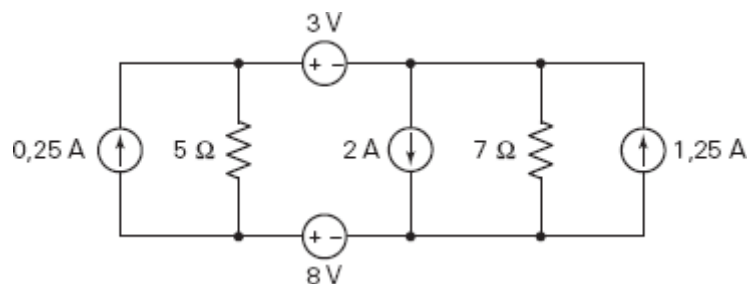



Figura P 3.5-3

Seção 3.6 Análise de Circuitos

P 3.6-1 O circuito da Figura P 3.6-1*a* foi dividido em duas partes. Na Figura P 3.6-1*b*, a parte da direita foi substituída por um circuito equivalente. A parte esquerda do circuito não foi modificada.

(a) Determine o valor da resistência R na Figura P 3.6-1*b* para que o circuito da Figura P 3.6-1*b* seja equivalente ao circuito da Figura P 3.6-1*a*.

(b) Determine a corrente i e a tensão v da Figura P 3.6-1*b* para o valor de R determinado no item (a). Graças à equivalência, a corrente i e a tensão v da Figura P 3.6-1*a* são iguais à corrente i e à tensão v da Figura P 3.6-1*b*.

(c) Determine a corrente i_2 da Figura P 3.6-1*a* usando o método da divisão de corrente.

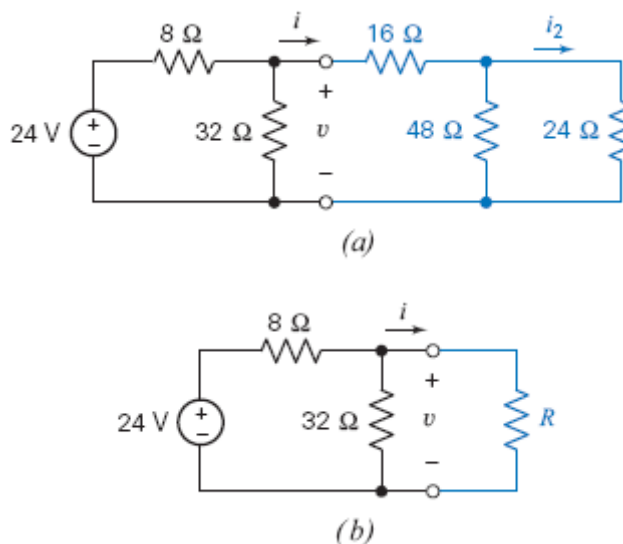



Figura P 3.6-1

P 3.6-2 O circuito da Figura P 3.6-2*a* foi dividido em três partes. Na Figura P 3.6-2*b*, a parte da direita foi substituída por um circuito equivalente. O resto do circuito não foi modificado. O circuito está simplificado ainda mais na Figura P 3.6-2*c*. Agora a parte central e a parte da direita foram substituídas por uma única resistência equivalente. A parte da esquerda não foi modificada.

(a) Determine o valor da resistência R na Figura P 3.6-2*b* para que o circuito da Figura P 3.6-2*b* seja equivalente ao circuito da Figura P 3.6-2*a*.

(b) Determine o valor da resistência R_2 na Figura P 3.6-2*c* para que o circuito da Figura P 3.6-2*c* seja equivalente ao circuito da Figura P 3.6-2*b*.

(c) Determine a corrente i_1 e a tensão v_1 da Figura P 3.6-2*c*. Graças à equivalência, a corrente i_1 e a tensão v_1 da Figura P 3.6-2*b* são iguais à corrente i_1 e à tensão v_1 na Figura P 3.6-2*c*.

Sugestão: $24 = 6(i_1 - 2) + i_1 R_2$

(d) Determine a corrente i_2 e a tensão v_2 da Figura P 3.6-2*b*. Graças à equivalência, a corrente i_2 e a tensão v_2 da Figura P 3.6-2*a* são iguais à corrente i_2 e à tensão v_2 da Figura P 3.6-2*b*.

Sugestão: Use o método da divisão de corrente para calcular i_2 a partir de i_1.

(e) Determine a potência absorvida pela resistência de 3 Ω situada na extremidade direita do circuito da Figura P 3.6-2*a*.

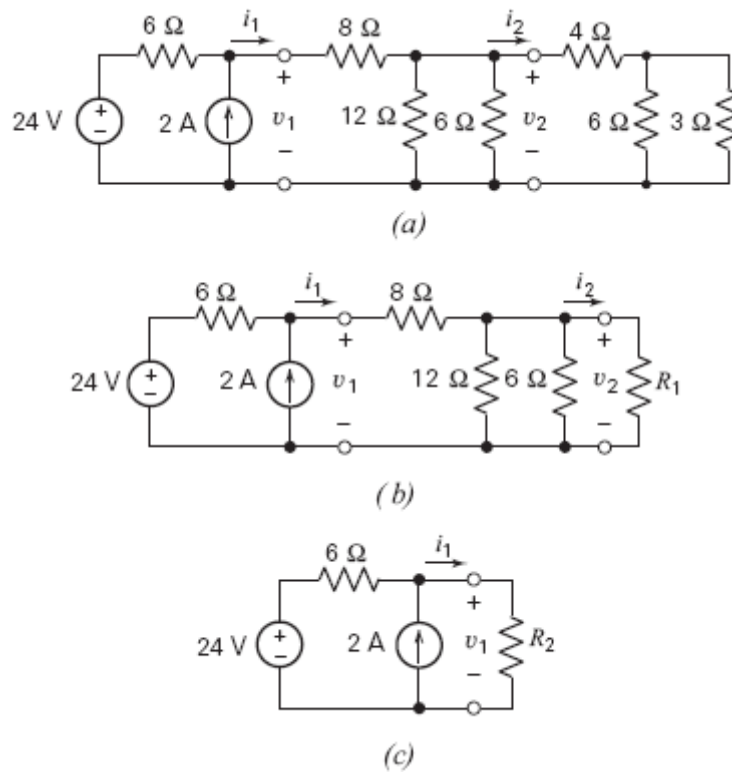



Figura P 3.6-2

P 3.6-3 Determine o valor de i no circuito da Figura P 3.6-3 usando as reduções necessárias e o método da divisão de corrente.

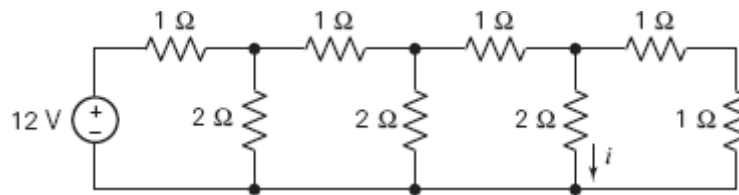



Figura P 3.6-3

P 3.6-4

(a) Determine o valor de R_1 e R_2 na Figura P 3.6-4*b* para que o circuito da Figura P 3.6-4*b* seja equivalente ao circuito da Figura P 3.6-4*a*.

(b) Analise o circuito da Figura P 3.6-4*b* para determinar o valor das correntes i_a e i_b.

(c) Como os circuitos são equivalentes, as correntes i_a e i_b da Figura P 3.6-4*b* são iguais às correntes i_a e i_b da Figura P 3.6-4*a*. Use este fato para determinar o valor da tensão v_1 e da corrente i_2 da Figura P 3.6-4*a*.

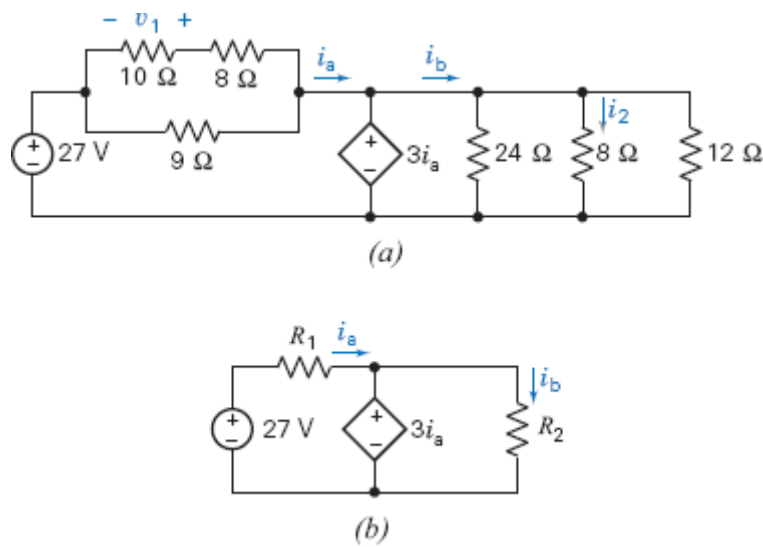



Figura P 3.6-4

P 3.6-5 O voltímetro do circuito da Figura P 3.6-5 mostra que a tensão no resistor de 30 Ω é 6 volts. Determine o valor da resistência R_1.

Sugestão: Use duas vezes o método da divisão de tensão.

Resposta: $R_1 = 40\ \Omega$

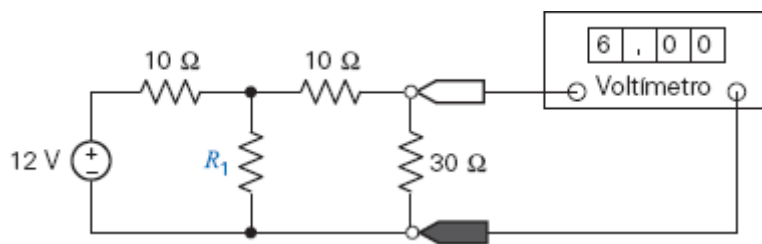



Figura P 3.6-5

P 3.6-6 Determine as tensões v_a e v_c e as correntes i_b e i_d no circuito da Figura P 3.6-6.

Resposta: $v_a = -2$ V, $v_c = 6$ V, $i_b = -16$ mA e $i_d = 2$ mA.

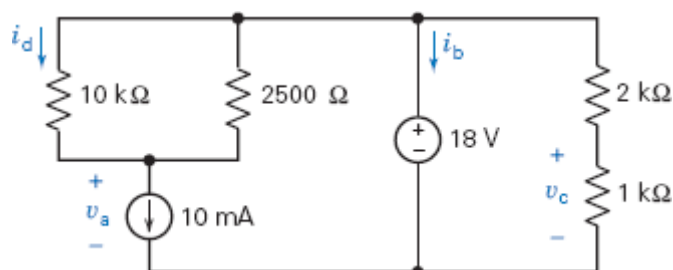



Figura P 3.6-6

P 3.6-7 Determine o valor da resistência R na Figura P 3.6-7.

Resposta: $R = 28$ kΩ.

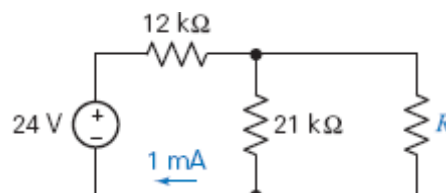



Figura P 3.6-7

P 3.6-8 A maioria das pessoas já experimentou os efeitos de um leve choque elétrico. Os efeitos de um choque forte são muito sérios e podem ser fatais. O choque acontece quando o corpo de uma pessoa é atravessado por uma corrente elétrica. Uma pessoa pode ser modelada por um circuito resistivo. Considere o circuito da Figura P 3.6-8. Determine a tensão a que é submetido o coração e a corrente que atravessa o coração de uma pessoa que segura um dos terminais de uma fonte de tensão enquanto o outro terminal está ligado ao piso. O coração é representado por R_c. O piso tem uma resistência R_p e a pessoa está descalça. Esse tipo de acidente pode ocorrer em uma piscina ou em um cais. A resistência R_s da parte superior do corpo e a resistência R_i da parte inferior do corpo variam de pessoa para pessoa.

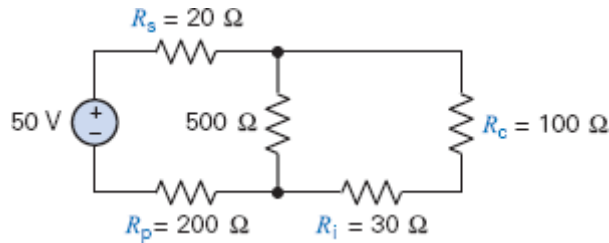



Figura P 3.6-8

P 3.6-9 Determine o valor da corrente i na Figura P 3.6-9.

Resposta: i = 0,5 mA.

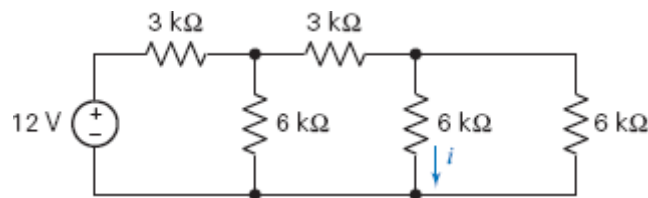



Figura P 3.6-9

P 3.6-10 Determine o valor de i_a, i_b e v_c na Figura P 3.6-10.

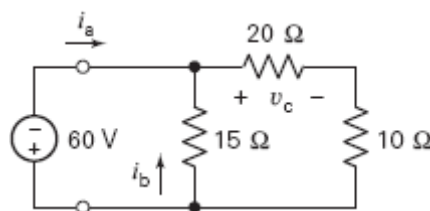



Figura 3.6-10

P 3.6-11 Determine o valor de i e $R_{eq\ a\text{-}b}$ na Figura P 3.6-11 sabendo que v_{ab} = 40 V.

Resposta: $R_{eq\ a\text{-}b}$ = 8 Ω e i = 5/6 A

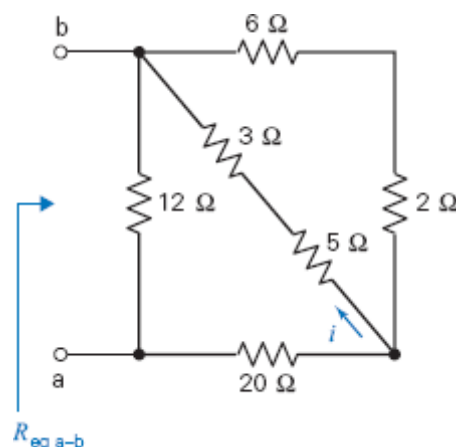



Figura P 3.6-11

P 3.6-12 O ohmímetro da Figura P 3.6-12 é usado para medir a resistência equivalente, R_{eq}, do circuito resistivo. O valor da resistência equivalente R_{eq} depende do valor da resistência R.

(a) Determine o valor da resistência equivalente R_{eq} para $R = 9\ \Omega$.

(b) Determine o valor da resistência R para que a resistência equivalente seja $R_{eq} = 12\ \Omega$.

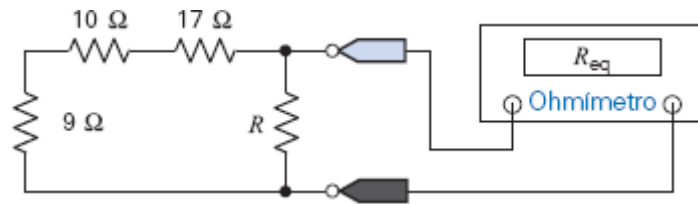



Figura P 3.6-12

P 3.6-13 Determine o valor de R_{eq} nos terminais a-b da Figura P 3.6-13. Determine também o valor de i, i_1 e i_2.

Resposta: $R_{eq} = 8\ \Omega$, $i = 5$ A, $i_1 = 5/3$ A, $i_2 = 5/2$ A

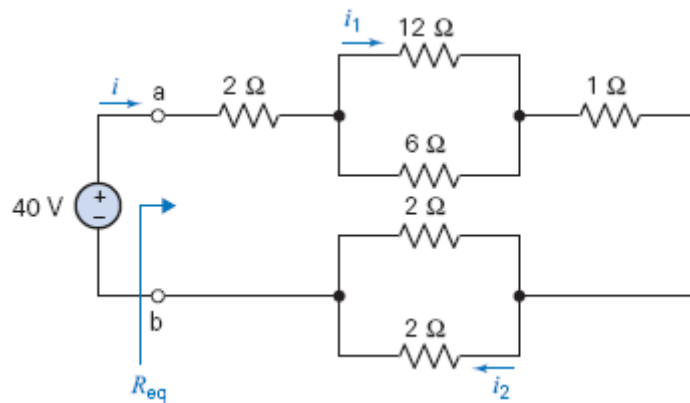



Figura P 3.6-13

P 3.6-14 Os valores de todas as resistências do circuito da Figura P 3.6-14 são múltiplos de R. Determine o valor de R.

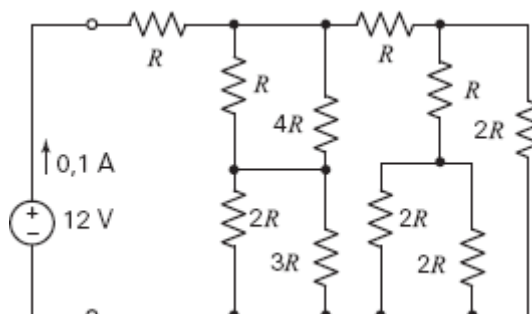



Figura 3.6-14

P 3.6-15 O circuito da Figura P 3.6-15 contém sete resistores, todos de resistência R. A entrada do circuito é a tensão v_s da fonte de tensão. O circuito tem duas saídas, v_a e v_b. Expresse os valores das tensões de saída em função do valor da tensão de entrada.

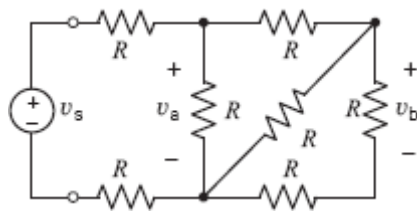



Figura P 3.6-15

P 3.6-16 O circuito da Figura P 3.6-16 contém três resistores de 10 Ω, 1/4 W. (Isso significa que a potência máxima que o resistor pode dissipar sem ser danificado é 1/4 W.) Determine para que faixa de valores da tensão v_s nenhum dos resistores dissipa uma potência maior que 1/4 W.

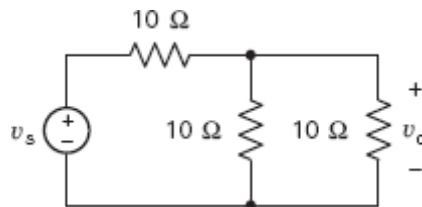



Figura P 3.6-16

P 3.6-17 Os quatro resistores da Figura P 3.6-17 representam extensômetros. Extensômetros são transdutores que medem a deformação produzida quando um resistor é tracionado ou comprimido. Os extensômetros são usados para medir força, deformação ou pressão. Os quatro extensômetros da Figura P 3.6-17 possuem, cada um, uma resistência nominal (sem deformação) de 200 Ω e podem dissipar no máximo 0,5 mW sem serem danificados. Determine para que faixa de valores da tensão v_s da fonte nenhum extensômetro dissipa mais de 0,5 mW.

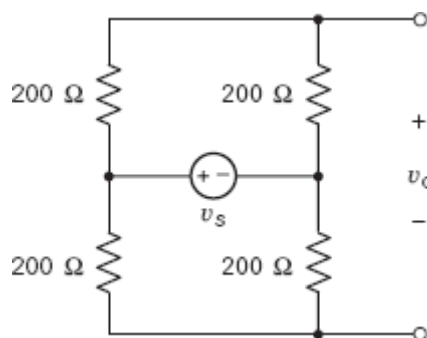



Figura P 3.6-17

P 3.6-18 O circuito da Figura P 3.6-18*b* foi obtido a partir do circuito da Figura P 3.6-18*a* substituindo combinações de resistências em série e em paralelo por resistências equivalentes.

(a) Determine o valor das resistências R_1, R_2 e R_3 da Figura P 3.6-18*b* para que o circuito da Figura P 3.6-18*b* seja equivalente ao circuito da Figura P 3.6-18*a*.

(b) Determine o valor de v_1, v_2 e i da Figura P 3.6-18*b*.

(c) Como os circuitos são equivalentes, o valor de v_1, v_2 e i na Figura P 3.6-18*a* é igual ao valor de v_1, v_2 e i na Figura P 3.6-19*b*. Determine o valor de v_4, i_5, i_6 e v_7 na Figura P 3.6-18*a*.

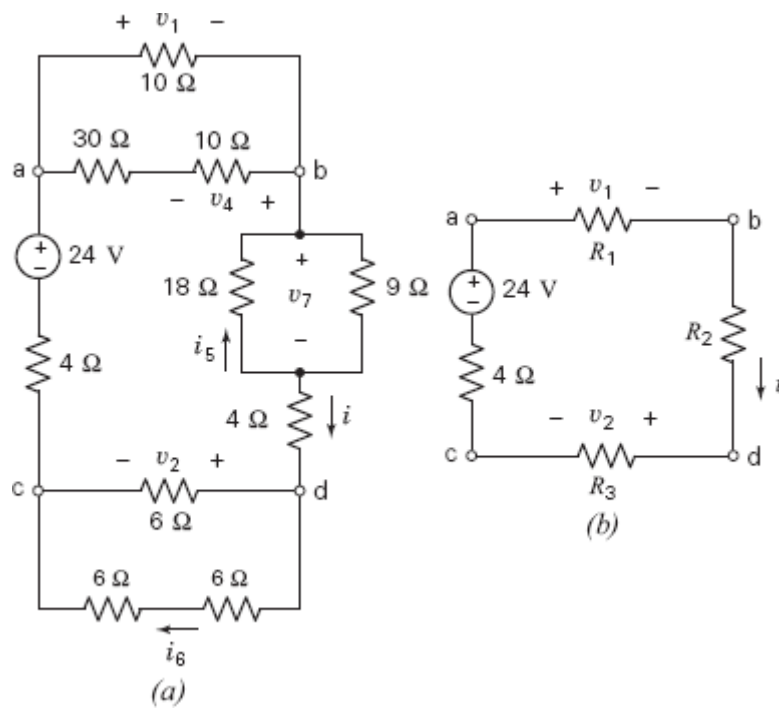



Figura P 3.6-18

P 3.6-19 Determine o valor de v_1, v_2, i_3, v_4, v_5 e i_6 na Figura P 3.6-19.

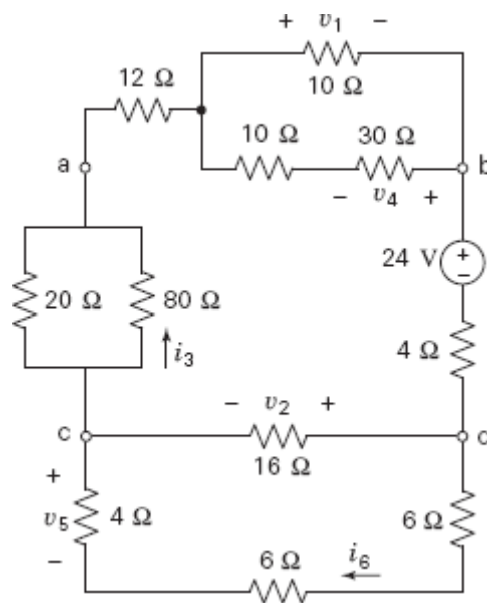



Figura P 3.6-19

P 3.6-20 Determine o valor de i, v e R_{eq} no circuito da Figura P 3.6-20, dado que v_{ab} = 18 V.

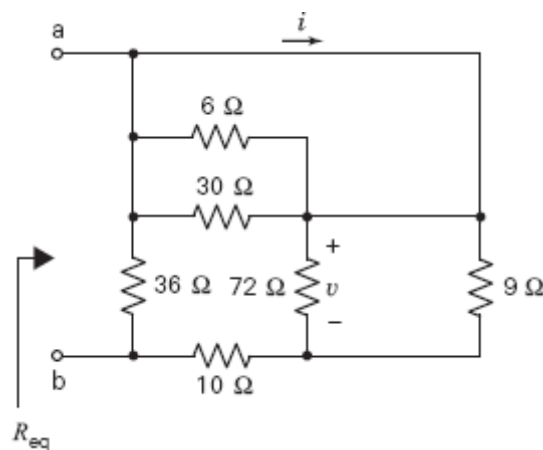



Figura P 3.6-20

P 3.6-21 Determine o valor da resistência R no circuito da Figura P 3.6-21, dado que $R_{eq} = 9\ \Omega$.

Resposta: $R = 15\ \Omega$.

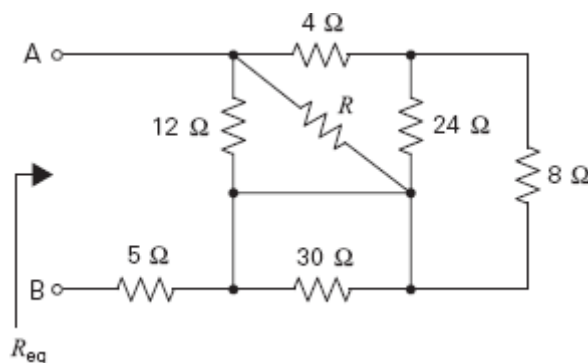



Figura P 3.6-21

P 3.6-22 Determine o valor da resistência R no circuito da Figura P 3.6-22, dado que $R_{eq} = 40\ \Omega$.

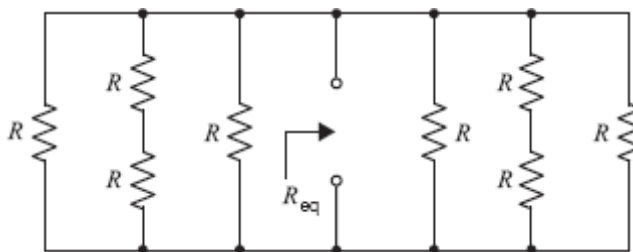



Figura P 3.6-22

P 3.6-23 Determine o valor de r, o ganho da FTCC, e o valor de g, o ganho da FCCT, no circuito da Figura P 3.6-23.

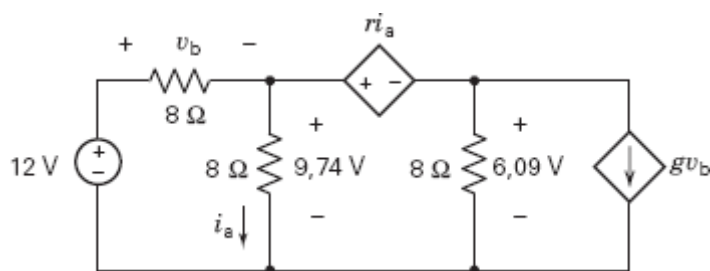



Figura P 3.6-23

P 3.6-24 A entrada do circuito da Figura P 3.6-24 é a tensão v_s da fonte e a saída é a tensão v_o medida pelo voltímetro. Mostre que a saída do circuito é proporcional à entrada e determine o valor da constante de proporcionalidade.

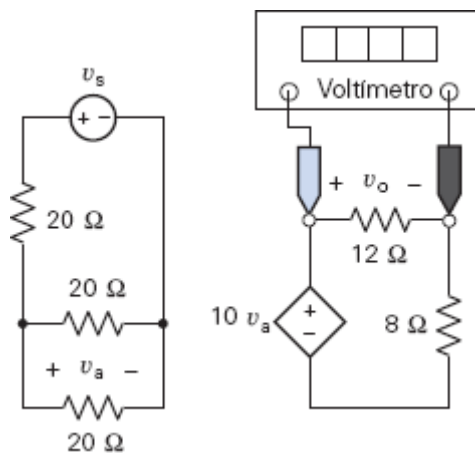



Figura P 3.6-24

P 3.6.25 A entrada do circuito da Figura P 3.6-25 é a tensão v_s da fonte de tensão e a saída é a corrente i_o medida pelo amperímetro. Mostre que a saída do circuito é proporcional à entrada e determine o valor da constante de proporcionalidade.

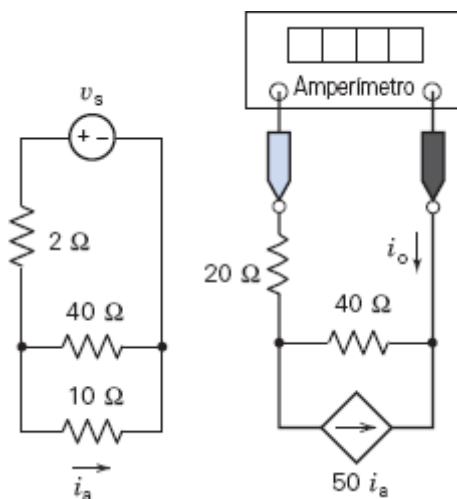



Figura P 3.6-25

P 3.6-26 Determine a tensão medida pelo voltímetro da Figura P 3.6-26.

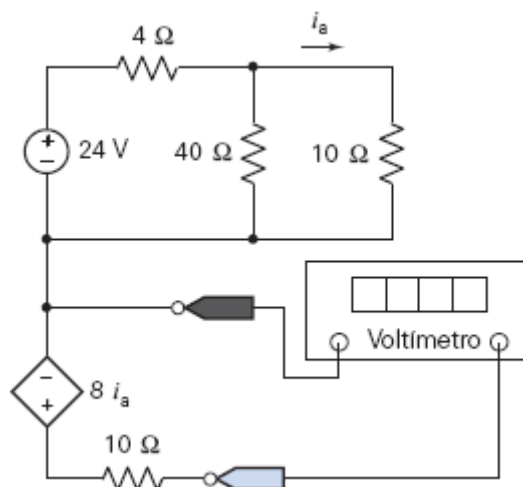



Figura P 3.6-26

P 3.6-27 Determine a corrente medida pelo amperímetro da Figura P 3.6-28.

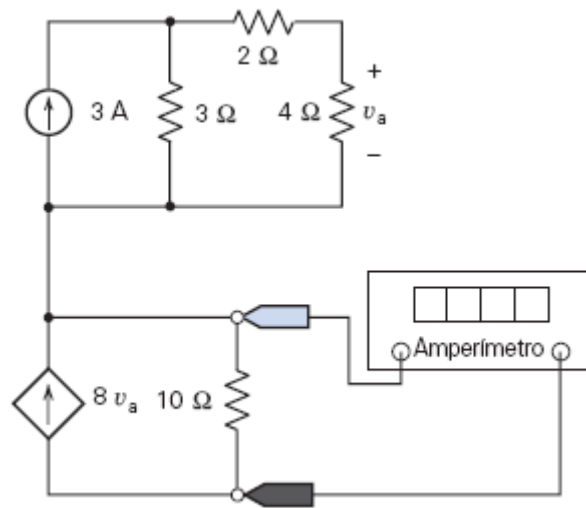



Figura 3.6-27

P 3.6-28 Determine o valor da resistência R para que a tensão medida pelo voltímetro da Figura P 3.6-28 seja 6 V.

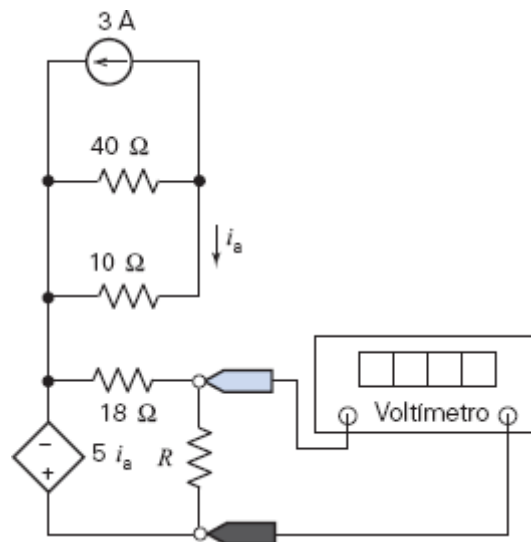



Figura P 3.6-28

P 3.6-29 A entrada do circuito da Figura P 3.6-29 é a tensão v_s da fonte de tensão e a saída é a corrente i_m medida pelo amperímetro.

(a) Suponha que $v_s = 15$ V. Determine o valor da resistência R para que o valor da corrente medida pelo amperímetro seja $i_m = 12$ A.

(b) Suponha que $v_s = 15$ V e $R = 80\ \Omega$. Determine o valor da corrente medida pelo amperímetro.

(c) Suponha que $R = 24\ \Omega$. Determine o valor da tensão de entrada, v_s, para que o valor da corrente medida pelo amperímetro seja $i_m = 3$ A.

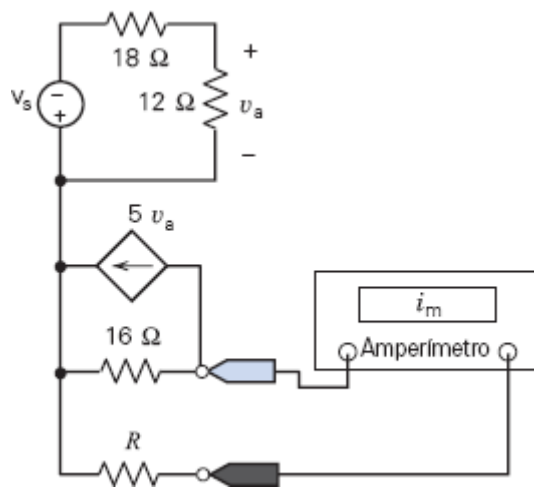



Figura P 3.6-29

P 3.6-30 O ohmímetro da Figura P 3.6-30 é usado para medir a resistência equivalente do circuito resistivo ligado às pontas de prova do medidor.

(a) Determine o valor da resistência R para que a resistência equivalente seja $R_{eq} = 12\ \Omega$.

(b) Determine o valor da resistência equivalente para $R = 14\ \Omega$.

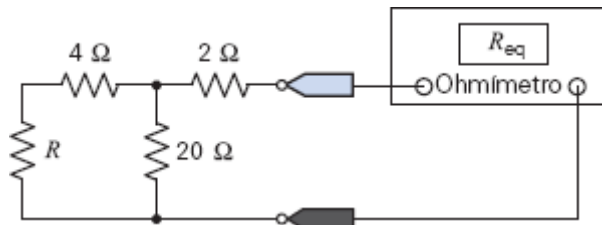



Figura P 3.6-30

P 3.6-31 O voltímetro da Figura P 3.6-31 é usado para medir a tensão entre os terminais da fonte de corrente.

(a) Determine o valor da tensão medida pelo voltímetro.

(b) Determine as potências fornecidas pelos componentes do circuito.

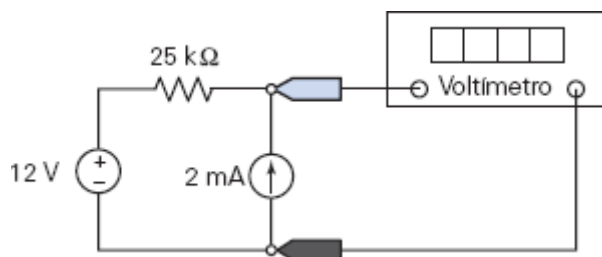



Figura P 3.6-31

P 3.6-32 Determine o valor da resistência medida pelo ohmímetro da Figura P 3.6-32.

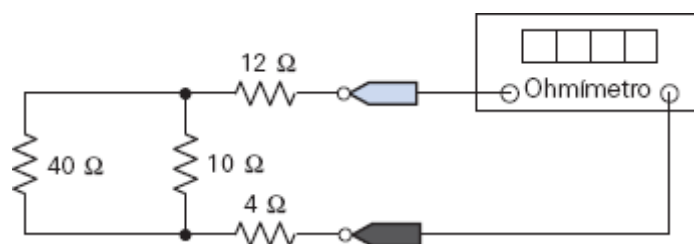



Figura P 3.6-32

P 3.6-33 Determine o valor da resistência medida pelo ohmímetro da Figura P 3.6-33.

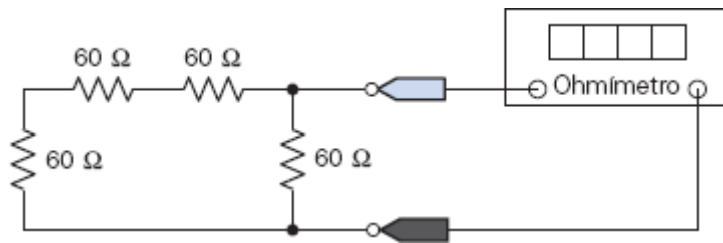



Figura P 3.6-33

P 3.6-34 Considere o circuito da Figura P 3.6-34. Dados os valores das seguintes correntes e tensões:

$$i_1 = 0{,}625 \text{ A},\ v_2 = -25 \text{ V},\ i_3 = -1{,}25 \text{ A e } v_4 = -18{,}75 \text{ V}$$

determine o valor de R_1, R_2, R_3 e R_4.

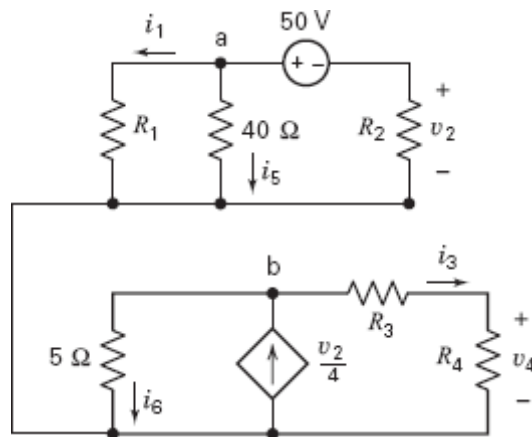



Figura P 3.6-34

P 3.6-35 Considere os circuitos da Figura P 3.6-35. O circuito equivalente pode ser obtido a partir do circuito original substituindo combinações de resistores em série e em paralelo por resistores equivalentes. O valor da corrente no circuito equivalente é $i_s = 0{,}8$ A. Determine o valor de R_1, R_2, R_5, v_2 e i_3.

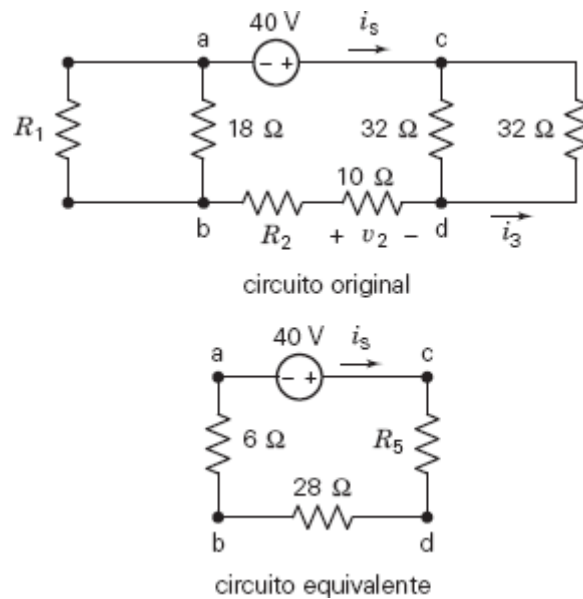



Figura P 3.6-35

P 3.6-36 Considere o circuito da Figura P 3.6-36. Dado que

$$v_2 = \frac{2}{3}v_s,\ i_3 = \frac{1}{5}i_1 \text{ e } v_4 = \frac{3}{8}v_2$$

determine o valor de R_1, R_2 e R_4.

Sugestão: Interprete $v_2 = \frac{2}{3}v_s$, $i_3 = \frac{1}{5}i_1$ e $v_4 = \frac{3}{8}v_2$ como divisões de tensão e de corrente.

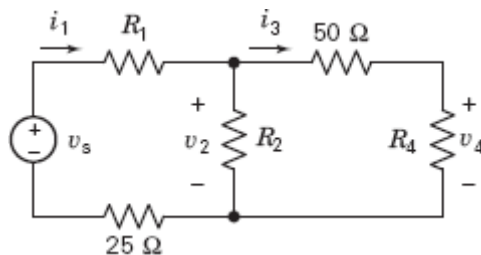



Figura P 3.6-36

P 3.6-37 Considere o circuito da Figura P 3.7-37. Dado que

$$i_2 = \frac{2}{5}i_s,\ v_3 = \frac{2}{3}v_1 \text{ e } i_4 = \frac{4}{5}i_2$$

determine o valor de R_1, R_2 e R_3.

Sugestão: Interprete $i_2 = \frac{2}{5}i_s$, $v_3 = \frac{2}{3}v_1$ e $i_4 = \frac{4}{5}i_2$ como divisões de tensão e de corrente.

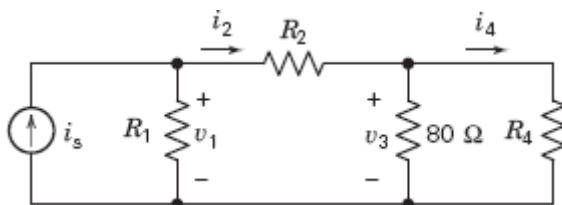



Figura P 3.6-37

P 3.6-38 Considere o circuito da Figura P 3.6-38.

(a) Suponha que $i_3 = \frac{1}{3}i_1$. Qual é o valor da resistência R?

(b) Em vez disso, suponha que v_2 = 4,8 V. Qual é o valor da resistência equivalente dos resistores em paralelo?

(c) Em vez disso, suponha que R = 20 Ω. Qual é o valor da corrente no resistor de 40 Ω?

Sugestão: Interprete $i_3 = \frac{1}{3}i_1$ como uma divisão de corrente.

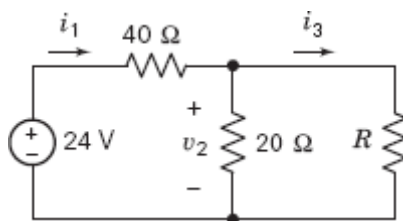



Figura 3.6-38

P 3.6-39 Considere o circuito da Figura P 3.6-39.

(a) Suponha que $v_3 = \frac{1}{4}v_1$. Qual é o valor da resistência R?

(b) Em vez disso, suponha que i_2 = 1,2 A. Qual é o valor da resistência R?

(c) Em vez disso, suponha que R = 70 Ω. Qual é a tensão no resistor de 20 Ω?

(d) Em vez disso, suponha que R = 30 Ω. Qual é a corrente no resistor de 30 Ω?

Sugestão: Interprete $v_3 = \frac{1}{4}v_1$ como uma divisão de tensão.

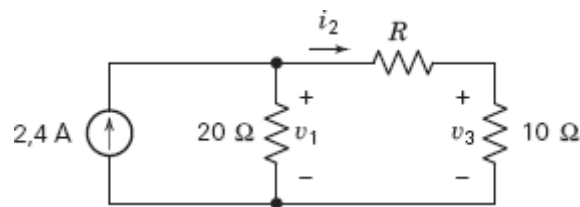



Figura P 3.6-39

P 3.6-40 Considere o circuito da Figura P 3.6-40. Dado que a tensão da fonte de tensão dependente é $v_a = 8$ V, determine o valor de R_1 e v_o.

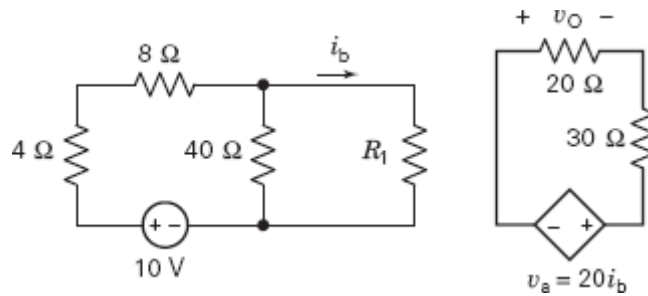



Figura P 3.6-40

P 3.6-41 Considere o circuito da Figura P 3.6-41. Dado que a corrente da fonte de corrente dependente é i_a = 2 A, determine o valor de R_1 e i_o.

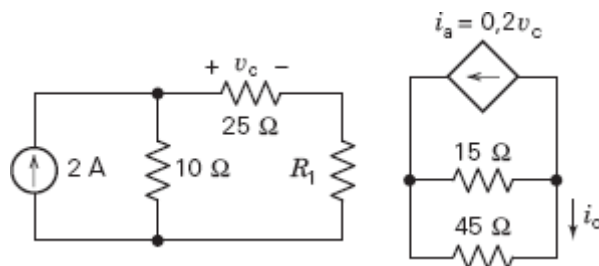



Figura P 3.6-41

P 3.6-42 Determine o valor de i_a, i_b, i_2 e v_1 no circuito da Figura P 3.6-42.

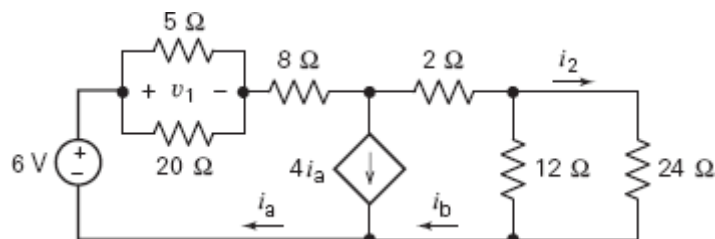



Figura P 3.6-42

P 3.6-43 Determine o valor da resistência R e da corrente i_a no circuito da Figura P 3.6-43.

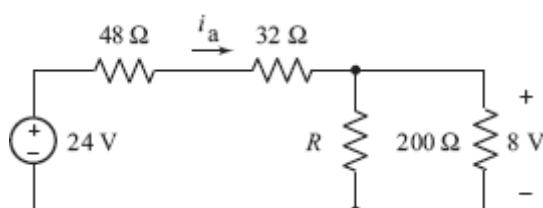



Figura P 3.6-43

P 3.6-44 A entrada do circuito da Figura P 3.6-44 é a tensão da fonte de tensão, 32 V. A saída é a corrente i_o no resistor de 10 Ω. Determine o valor da resistência R_1 e do ganho G da fonte dependente para que o valor da tensão da resistência de 12 Ω seja v_a = 10,38 V e o valor da corrente de saída seja i_o = 0,4151 A.

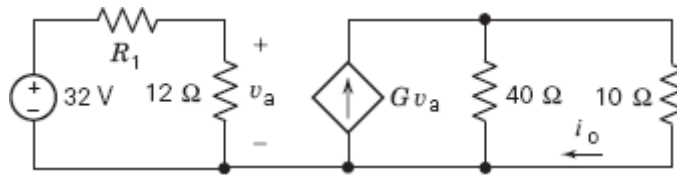



Figura P 3.6-44

P 3.6-45 O circuito equivalente da Figura P 3.6-45 é obtido a partir do circuito original substituindo combinações de resistores em série e em paralelo por resistores equivalentes. Os valores das correntes do circuito equivalente são i_a = 3,5 A e i_b = –1,5 A. Determine o valor das tensões v_1 e v_2 do circuito original.

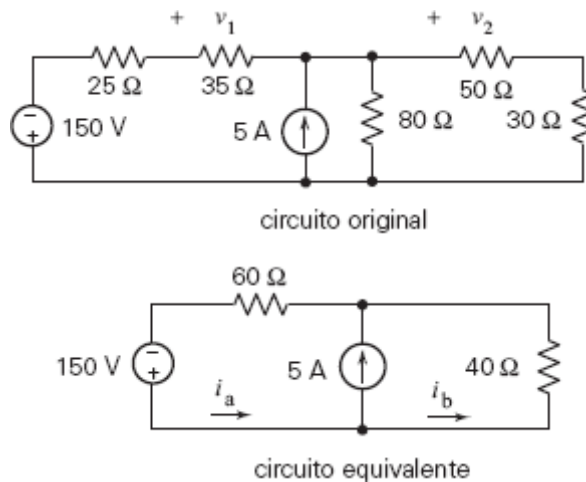



Figura P 3.6-45

P 3.6-46 A Figura P 3.6-46 mostra três circuitos do mesmo tipo, nos quais uma fonte de 12 V está ligada a um subcircuito formado por três resistores. Determine o valor das correntes i_1, i_2 e i_3 e observe que, enquanto a tensão da fonte é a mesma nos três circuitos, a corrente da fonte depende do subcircuito ao qual está ligada.

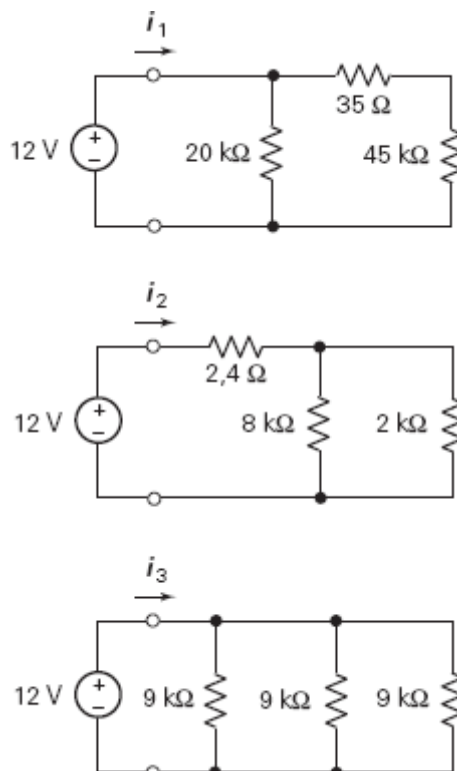



Figura P 3.6-46

P 3.6-47 Determine o valor das tensões v_1 e v_2 e da corrente i_3 no circuito da Figura P 3.6-47.

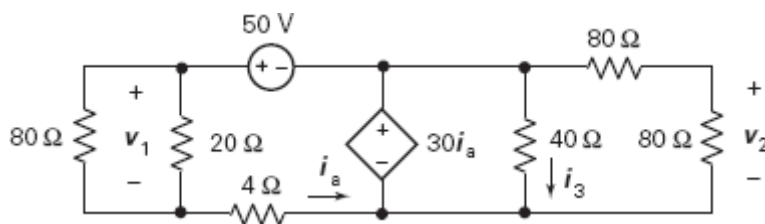



Figura P 3.6-47

Seção 3.7 Análise de Circuitos Resistivos Usando o Programa MATLAB

P 3.7-1 Determine as potências fornecidas pelas fontes do circuito da Figura P 3.7-1.

Sugestão: Use as diretrizes apresentadas na Seção 3.7 para escolher as variáveis do circuito. Use o MATLAB para resolver as equações que representam o circuito.

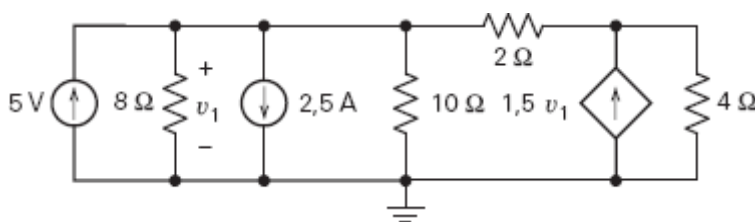



Figura P 3.7-1

P 3.7-2 Determine as potências fornecidas pelas fontes do circuito da Figura P 3.7-2.

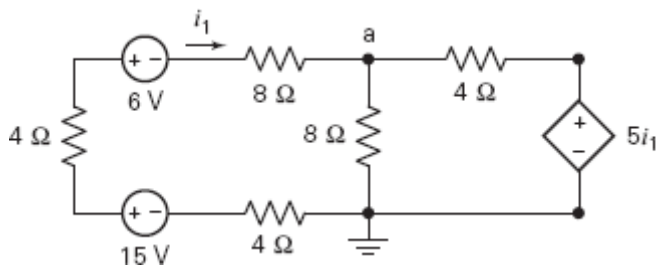



Figura P 3.7-2

P 3.7-3 Determine as potências fornecidas pelas fontes do circuito da Figura P 3.7-3.

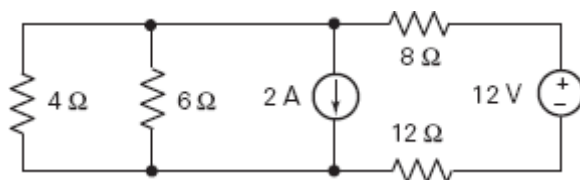



Figura P 3.7-3

P 3.7-4 Determine as potências fornecidas pelas fontes do circuito da Figura P 3.7-4.

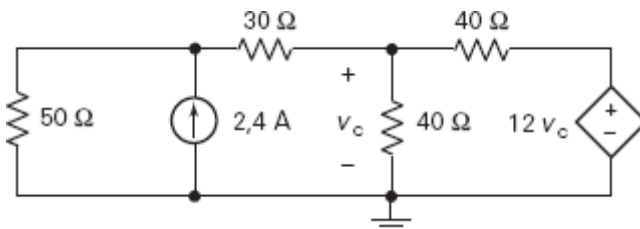



Figura P 3.7-4

Seção 3.8 Como Podemos Testar . . . ?

P 3.8-1 Um programa de computador usado para analisar o circuito da Figura P 3.8-1 fornece os seguintes valores: $i_1 = -0{,}833$ A, $i_2 = -0{,}333$ A, $i_3 = -1{,}167$ A e $v = -2{,}0$ V. Esses valores estão corretos?

Sugestão: Verifique se a LKC é satisfeita no nó central e se a LKT é satisfeita na malha externa, formada pelos dois resistores de 6 Ω e a fonte de tensão.

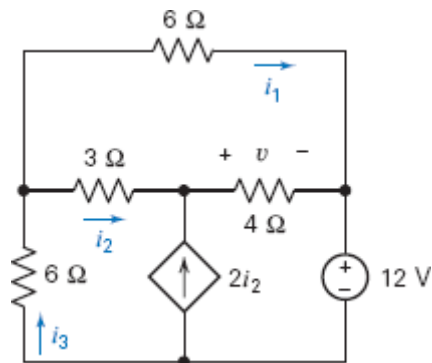



Figura P 3.8-1

P 3.8-2 O circuito da Figura P 3.8-2 faz parte de um dever de casa. De acordo com a resposta fornecida pelo professor, o valor da corrente i é 1,25 A. Verifique se a resposta está correta usando o método da divisão de tensão.

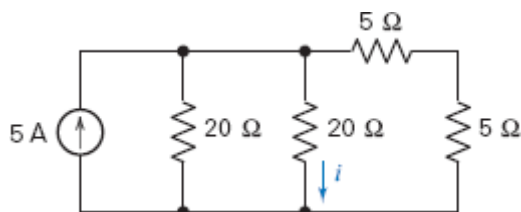



Figura P 3.8-2

P 3.8-3 O circuito da Figura P 3.8-3 foi montado em um laboratório e o valor medido da tensão v_o foi 6,25 V. Verifique se a medida está correta usando o método da divisão de tensão.

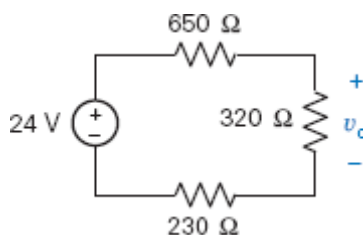



Figura P 3.8-3

P 3.8-4 O circuito da Figura P 3.8-4 representa o sistema elétrico de um automóvel. O manual diz que $i_F = 9$ A, $i_B = -9$ A e $i_A = 19{,}1$ A. Verifique se essas indicações estão corretas.

Sugestão: Verifique se a LKC é satisfeita em todos os nós e se a LKT é satisfeita em todas as malhas.

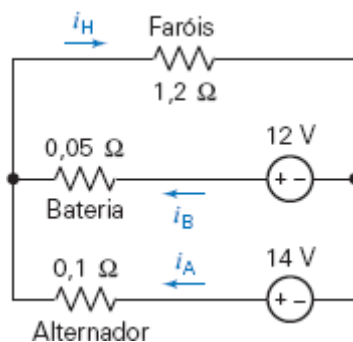



Figura P 3.8-4 Modelo do sistema elétrico de um automóvel.

P 3.8-5 De acordo com uma análise em computador do circuito da Figura P 3.8-5, $i_a = -0{,}5$ mA e $i_b = -2$ mA. A análise foi executada corretamente?

Sugestão: Verifique se as equações da LKT são satisfeitas para as três malhas com $i_a = -0{,}5$ mA e $i_b = -2$ mA.

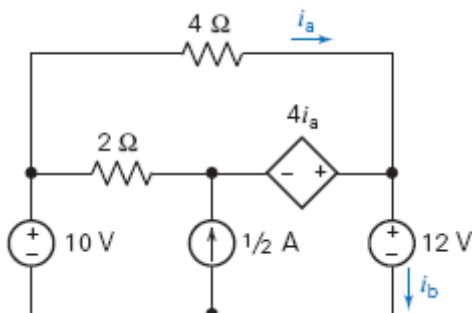



Figura P 3.8-5

P 3.8-6 De acordo com uma análise em computador do circuito da Figura P 3.8-6, $i_a = 0{,}5$ mA e $i_b = 4{,}5$ mA. A análise foi executada corretamente?

Sugestão: Primeiro, verifique se as equações da LKC são satisfeitas para os cinco nós com $i_a = 0{,}5$ mA e $i_b = 4{,}5$ mA. Em seguida, verifique se a equação da LKT é satisfeita para a malha inferior esquerda (a-e-d-a). (As equações da LKT para as outras malhas são inúteis porque envolvem uma tensão desconhecida.)

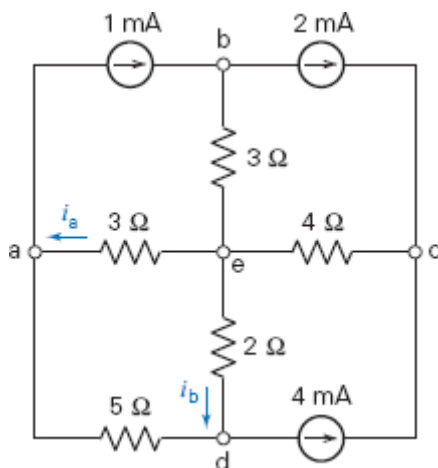



Figura P 3.8-6

P 3.8-7 Verifique se as tensões e correntes nos componentes do circuito da Figura P 3.8-7 satisfazem as leis de Kirchhoff, da seguinte forma:

(a) Verifique se as correntes dadas satisfazem as equações da LKC para os nós a, b e c.

(b) Verifique se as tensões dadas satisfazem as equações da LKT para as malhas a-b-d-c-a e a-b-c-d-a.

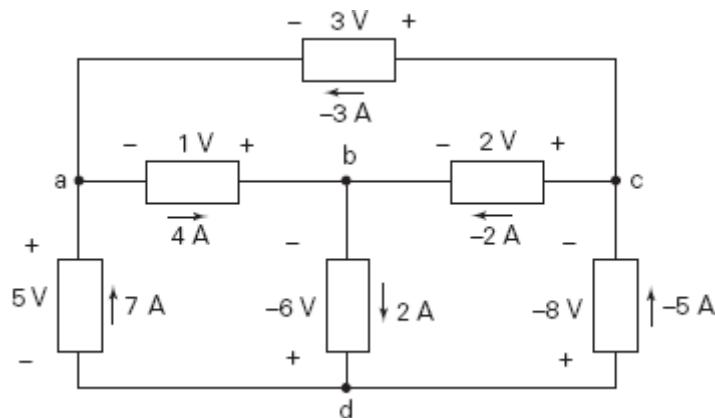
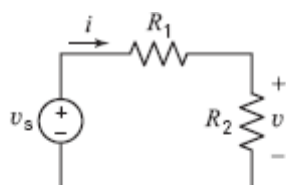



Figura P 3.8-7

P 3.8-8 A Figura P 3.8-8 mostra um circuito e uma tabela com valores da corrente i e da tensão v para diferentes valores da resistência R_2.

(a) Use os dados das linhas 1 e 2 da tabela para determinar o valor de v_s e R_1.

(b) Use os resultados do item (a) para verificar se os dados da tabela estão todos corretos.

(c) Complete as lacunas da tabela.

R_2, Ω	i, A	v, V
0	2,4	0
10	1,2	12
20	0,8	16
30	?	18
40	0,48	?

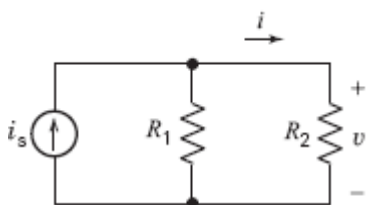
(b)

Figura P 3.8-8

P 3.8-9 A Figura P 3.8-9 mostra um circuito e uma tabela com valores da corrente i e da tensão v para diferentes valores da resistência R_2.

(a) Use os dados das linhas 1 e 2 da tabela para determinar o valor de i_s e R_1.

(b) Use os resultados do item (a) para verificar se os dados da tabela estão todos corretos.

(c) Complete as lacunas da tabela.

R_2, Ω	i, A	v, V
10	4/3	40/3
20	6/7	120/7
40	1/2	20
80	?	?

(b)

Figura P 3.8-9

Problemas de Projeto

PP 3-1 O circuito da Figura PP 3-1 usa um potenciômetro para produzir uma tensão variável. A tensão v_m varia quando de acordo com a posição angular de um botão ligado ao cursor do potenciômetro. Especifique as resistências R_1 e R_2 para que os três requisitos seguintes sejam satisfeitos:

1. A tensão v_m varie de 8 V a 12 V quando o cursor for deslocado de uma extremidade a outra do potenciômetro.
2. A fonte de tensão forneça menos de 0,5 W de potência.
3. As resistências R_1, R_2 e R_P dissipem menos de 0,25 W cada uma.

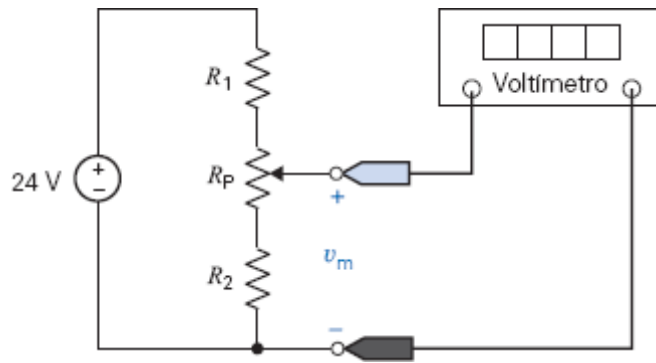



Figura PP 3-1

PP 3-2 A resistência R_L do circuito da Figura PP 3-2 é a resistência equivalente de um transdutor de pressão. A resistência tem o valor de 200 Ω ± 5 %, ou seja, 190 Ω ≤ R_L ≤ 210 Ω. A fonte de tensão é uma fonte de 12 V ± 1 % capaz de fornecer 5 W de potência. Projete o circuito, usando resistores de 5 % e 1/8 de watt para R_1 e R_2, de tal modo que a tensão aplicada a R_L seja

$$v_o = 4 \text{ V} \pm 10\%$$

(Um resistor de 100 Ω, 5 % e 1/8 de watt tem uma resistência entre 95 Ω e 105 Ω e é capaz de dissipar continuamente uma potência de 1/8 W sem ser danificado.)

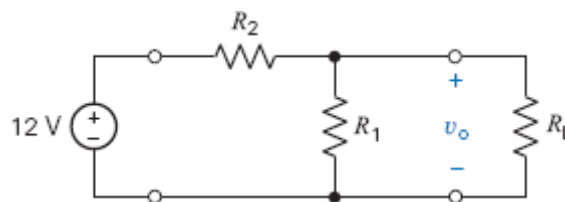



Figura PP 3-2

PP 3-3 A Figura PP 3-3*a* mostra um sistema de som formado por um toca-discos, um amplificador e um alto-falante; o circuito usado para modelar o sistema aparece na Figura PP 3-3*b*. Determine a resistência R para que a tensão v no alto-falante seja 16 V. Determine a potência fornecida ao alto-falante.

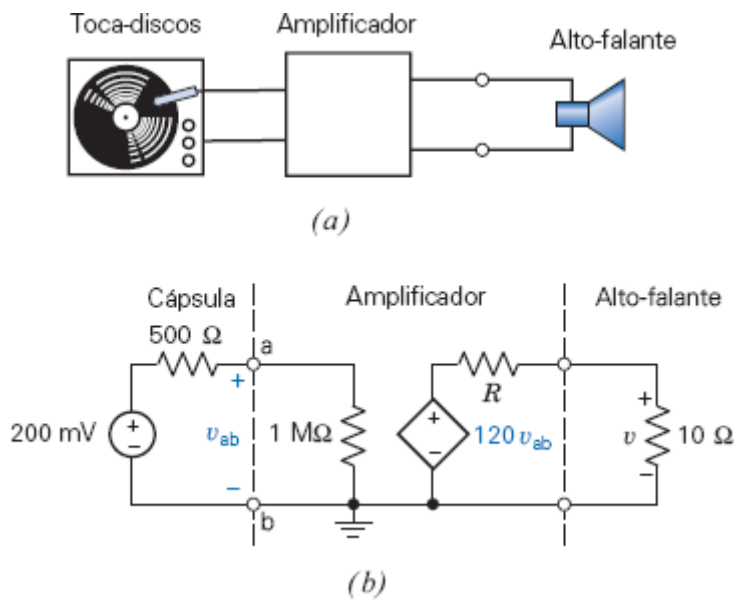



Figura PP 3-3 Circuito de um sistema de som.

PP 3-4 Deseja-se enfeitar uma árvore em um parque municipal com um cordão de lâmpadas de Natal alimentadas por uma bateria de 6 V. A bateria é capaz de fornecer uma corrente de 9 A durante o período de funcionamento, que é de 4 horas por noite. Projete um circuito com lâmpadas em paralelo (use o máximo possível de lâmpadas) sabendo que a resistência de cada lâmpada é 12 Ω.

PP 3-5 A entrada do circuito da Figura PP 3-5 é a tensão v_s da fonte de tensão e a saída é a tensão v_o. A saída está relacionada à entrada através da equação

$$v_o = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_s = g v_s$$

A saída do divisor de tensão é proporcional à entrada. A constante de proporcionalidade, g, é chamada de ganho do divisor de tensão e é dada por

$$g = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

A potência fornecida pela fonte de tensão é

$$p = v_s i_s = v_s \left(\frac{v_s}{R_1 + R_2} \right) = \frac{v_s^2}{R_1 + R_2} = \frac{v_s^2}{R_{in}}$$

é chamada de resistência de entrada do divisor de tensão.

(a) Projete um divisor de tensão com um ganho $g = 0{,}65$.

(b) Projete um divisor de tensão com um ganho $g = 0{,}65$ e uma resistência de entrada $R_{in} = 2500$ Ω.

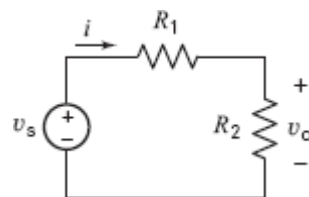



Figura PP 3-5

PP 3-6 A entrada do circuito da Figura PP 3-6 é a corrente i_s da fonte de corrente; a saída é a corrente i_o. A saída está relacionada à entrada através da equação

$$i_o = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i_s = g i_s$$

A saída do divisor de corrente é proporcional à entrada. A constante de proporcionalidade, g, é chamada de ganho do divisor de corrente e é dada por

$$g = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

A potência fornecida pela fonte de corrente é dada por

$$p = v_s i_s = \left[i_s \left(\frac{v_s}{R_1 + R_2} \right) \right] i_s = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i_s^2 = R_{in} i_s^2$$

em que

$$R_{in} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

é chamada de resistência de entrada do divisor de corrente.

(a) Projete um divisor de corrente com um ganho $g = 0,65$.

(b) Projete um divisor de corrente com um ganho $g = 0,65$ e uma resistência de entrada $R_{in} = 10.000\ \Omega$.

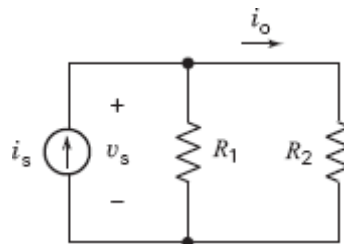



Figura PP 3-6

PP 3-7 Projete o circuito da Figura PP 3-7 para que a saída seja $v_o = 8,5$ V quando a entrada é $v_s = 12$ V. O circuito não deve consumir mais de 1 mW da fonte de tensão.

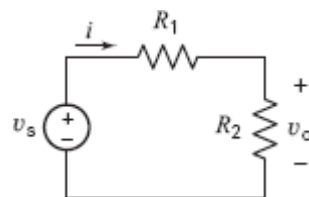



Figura PP 3-7

PP 3-8 Projete o circuito da Figura PP 3-8 para que a saída seja $i_o = 1,8$ mA quando a entrada é $i_s = 5$ mA. O circuito não deve consumir mais de 1 mW da fonte de corrente.

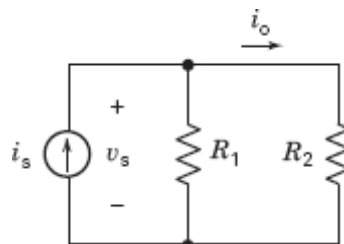



Figura PP 3-8

PP 3-9 O termistor é um resistor cuja resistência depende da temperatura. A resistência R_T de um termistor é dada pela equação

$$R_T = R_0\, e^{\beta(1/T - 1/To)}$$

onde R_0, β e T_0 são constantes e T é a temperatura em kelvins. Por exemplo: se, para um certo termistor, $R_0 = 620\ \Omega$, $\beta = 3300$ K e $T_0 = 293$ K, a resistência do termistor para a temperatura $T = 70$ ºC = 343 K é

$$R_T = 620\, e^{3330(1/342 - 1/293)} = 121{,}68\ \Omega$$

Na Figura PP 3-9, esse termistor faz parte de um circuito divisor de tensão. Especifique o valor do resistor R para que a tensão v_T do termistor seja 4 V quando a temperatura é 100 ºC.

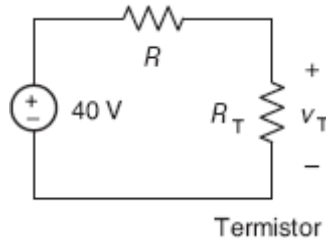



Figura PP 3-9

PP 3-10 O circuito da Figura PP 3-10 é formado por uma fonte de tensão, um resistor e um termistor cujos parâmetros são $R_0 = 620\ \Omega$, $\beta = 3330$ K e $T_0 = 293$ K (veja o problema PP 3-9.) Projete o circuito (ou seja, especifique os valores de V_S e R) para que a tensão do termistor seja $v_T = 4$ V para $T = 100$ ºC e $v_T = 20$ V para $T = 0$ ºC.

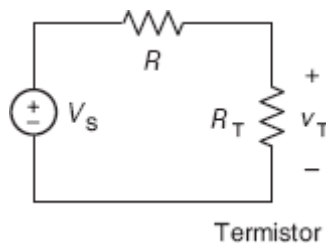



Figura PP 3-10

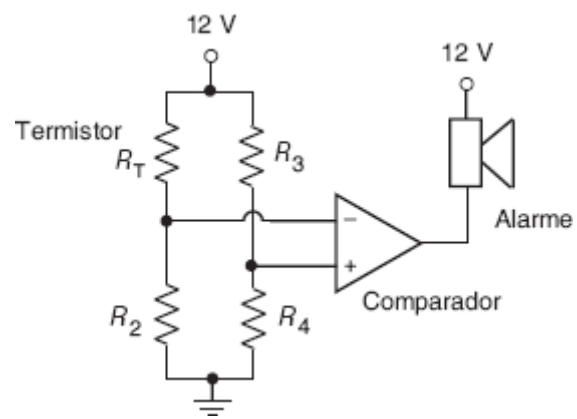
PP 3-11 O circuito da Figura PP 3-11 foi projetado para ajudar os produtores de laranja a proteger as plantações da geada, fazendo soar um alarme quando a temperatura cai abaixo de 0 ºC. O circuito contém um termistor cujos parâmetros são $R_0 = 620\ \Omega$, $\beta = 3330$ K e $T_0 = 293$ K (veja o problema PP 3-9.)

O alarme é acionado quando a tensão na entrada – do comparador é menor que a tensão na entrada +. Aplicando duas vezes o princípio da divisão de tensão, é possível demonstrar que isso acontece para

$$\frac{R_2}{R_T + R_2} < \frac{R_4}{R_3 + R_4}$$

Determine os valores de R_2, R_3 e R_4 para os quais o alarme é acionado quando a temperatura é menor que 0 ºC.

Figura PP 3-11

CAPÍTULO 4 Métodos de Análise de Circuitos Resistivos

NESTE CAPÍTULO

4.1 *Introdução*

Para analisar um circuito elétrico, podemos escrever e resolver um sistema de equações que relaciona as correntes e tensões em todos os componentes do circuito aos valores desses componentes. Algumas dessas equações são obtidas aplicando ao circuito as leis de Kirchhoff para tensões e para correntes; outras são obtidas aplicando equações constitutivas, como a lei de Ohm, a componentes isolados. Os valores das tensões e correntes nos componentes, que são as incógnitas, são obtidos resolvendo o sistema de equações.

Esse método funciona bem no caso de circuitos simples, mas o sistema de equações se torna muito grande mesmo para circuitos de tamanho moderado. Um circuito com apenas 6 componentes possui 6 correntes e 6 tensões diferentes, o que leva a um sistema de 12 equações com 12 incógnitas. Neste capítulo, vamos discutir dois métodos que podem ser usados para obter sistemas de equações mais simples:

- O método das tensões de nó
- O método das correntes de malha

O método das tensões de nó utiliza um novo tipo de variável chamado tensão de nó. As *equações das tensões de nó* ou, simplesmente, *equações de nó*, são equações que, tomadas em conjunto, descrevem totalmente um circuito elétrico. As incógnitas das equações de nó são as tensões de nó. Depois de resolvido o sistema de equações de nó, os valores das correntes e tensões dos componentes podem ser determinados a partir dos valores das tensões de nó.

É mais fácil escrever as equações das tensões de nó para alguns circuitos que para outros. Começando pelo caso mais fácil, vamos aprender a escrever as equações de nó em circuitos formados por

- Resistores e fontes de corrente independentes
- Resistores e fontes de corrente e de tensão independentes
- Resistores e fontes de corrente e de tensão independentes e dependentes

O método das correntes de malha utiliza um novo tipo de variável chamado corrente de malha. As *equações das correntes de malha* ou, simplesmente, *equações de malha*, são equações que, tomadas em conjunto, descrevem totalmente um circuito elétrico. As incógnitas das equações de malha são as correntes de malha. Depois de resolvido o sistema de equações de malha, os valores das correntes e tensões dos componentes podem ser determinados a partir dos valores das correntes de malha.

É mais fácil escrever as equações das correntes de malha para alguns circuitos que para outros. Começando pelo caso mais fácil, vamos aprender a escrever as equações de malha em circuitos formados por

- Resistores e fontes de corrente independentes
- Resistores e fontes de corrente e de tensão independentes
- Resistores e fontes de corrente e de tensão independentes e dependentes

4.2 Método das Tensões de Nó com Fontes de Corrente Independentes

Considere o circuito da Figura 4.2-1*a*. O circuito contém quatro componentes: três resistores e uma fonte de corrente. Os *nós* de um circuito são os lugares em que os elementos são ligados entre si. O circuito da Figura 4.21*a* possui três nós. É costume representar os componentes na horizontal ou na vertical e ligá-los por retas horizontais ou verticais que representam os fios; os nós são representados como pontos ou como retas horizontais ou verticais. A Figura 4.2-1*b* mostra o mesmo circuito, desenhado com os nós representados como pontos e não como retas. Na Figura 4.2-1*b*, os nós são chamados de nó a, nó b e nó c.

Para analisar um circuito com n nós usando a LKC, são necessárias n – 1 equações. Uma forma de obter essas equações é aplicar a LKC a todos os nós do circuito, exceto um. O nó ao qual a LKC não é aplicada é chamado de nó de referência. Qualquer nó do circuito pode ser escolhido como nó de referência. (Quando o circuito contém uma fonte de alimentação aterrada, o nó da fonte de alimentação ligado à terra costuma ser escolhido como nó de referência.) Normalmente, o nó de referência é desenhado na parte inferior do circuito. Na Figura 4.2-1*b*, o nó c foi escolhido como nó de referência e marcado com o símbolo usado para assinalar o nó de referência.

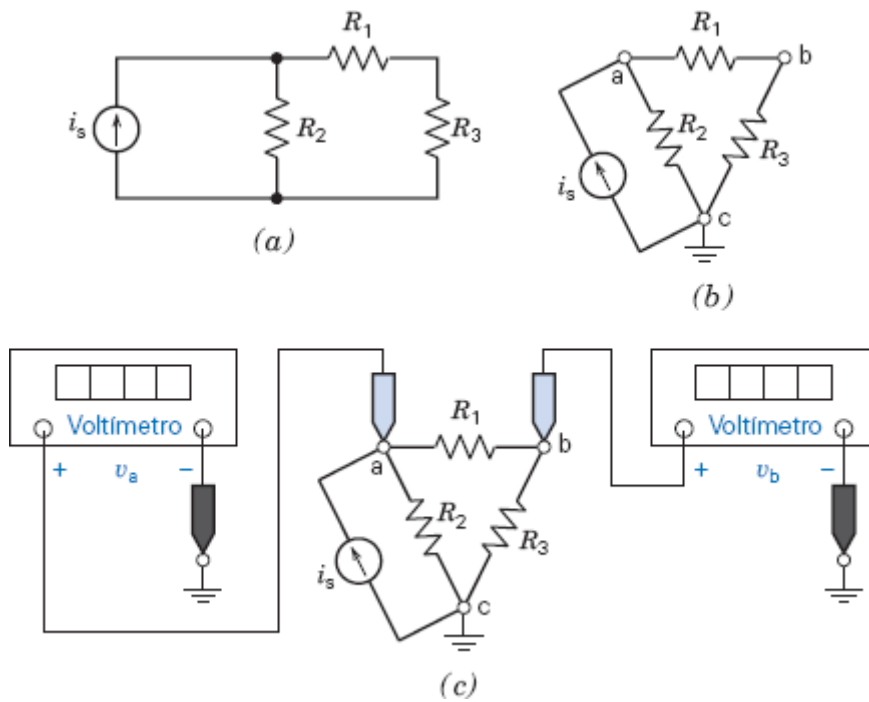



FIGURA 4.2-1 (*a*) Circuito com três nós. (*b*) O circuito depois que os nós foram rotulados e um nó de referência foi escolhido e assinalado. (*c*) Uso de voltímetros para medir as tensões de nó.

A tensão em um nó qualquer do circuito em relação ao nó de referência é chamada de tensão de nó. Na Figura 4.2-1*b* existem duas tensões de nó: a tensão do nó a em relação ao nó de referência (nó c) e a tensão do nó b, também em relação ao nó de referência. Na Figura 4.2-1*c* foram introduzidos voltímetros para medir as tensões de nó. Para medir a tensão de nó do nó a, ligamos a ponta de prova vermelha do voltímetro ao nó a e a ponta de prova preta ao nó de referência (nó c). Para medir a tensão de nó do nó b, ligamos a ponta de prova vermelha do voltímetro ao nó b e ligamos a ponta de prova preta ao nó de referência.

As tensões de nó da Figura 4.2-1*c* podem ser representadas como v_{ac} e v_{bc}, mas é costume ignorar o índice c e chamar as tensões de v_a e v_b. Observe que a tensão de nó no nó de referência é $v_{cc} = v_c = 0$ V, já que, se um voltímetro for usado para medir a tensão de nó do nó de referência, as duas pontas de prova do voltímetro estarão ligadas ao mesmo ponto.

Um dos métodos padronizados para analisar circuitos elétricos é escrever e resolver um sistema de equações conhecidas como equações de nó. As variáveis desconhecidas das equações de nó são as tensões de nó do circuito. Os valores das tensões de nó podem ser obtidos resolvendo as equações de nó.

Para escrever um sistema de equações de nó, fazemos duas coisas:

1. Expressamos as correntes nos componentes em função das tensões de nó.
2. Aplicamos a lei de Kirchhoff para correntes (LKC) a todos os nós do circuito, exceto o nó de referência.

Considere o problema de expressar as correntes nos componentes em função das tensões de nó. Embora nosso objetivo seja expressar as *correntes* nos componentes em função das tensões de nó, começamos por expressar as *tensões* nos componentes em função das tensões de nó. A Figura 4.2-2 mostra como isso é feito. Os voltímetros da Figura 4.2-2 medem as tensões de nó v_1 e v_2 nos nós do componente. A tensão do componente foi chamada de v_a. Aplicando a lei de Kirchhoff para tensões à malha da Figura 4.2-2, temos:

$$v_a = v_1 - v_2$$

Essa equação expressa a tensão do componente, v_a, em função das tensões de nó, v_1 e v_2. (Existe uma forma simples de chegar a essa equação. Observe a polaridade de referência da tensão do componente, v_a. A tensão do componente é igual à tensão de nó do nó situado no lado + da polaridade de referência menos a tensão de nó do nó situado no lado – da tensão de referência.)

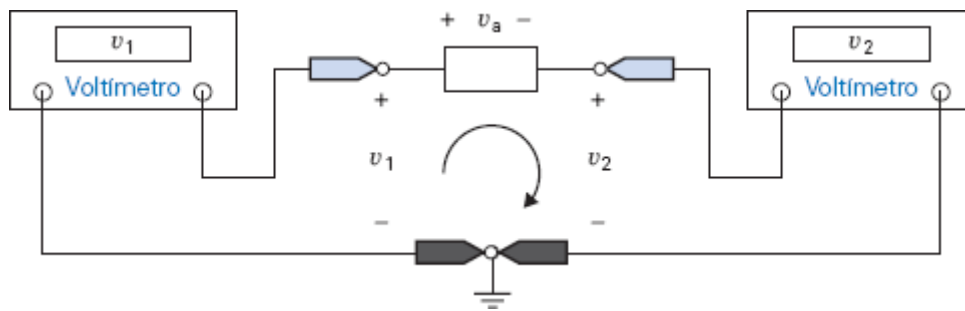



FIGURA 4.2-2 Tensões de nó, v_1 e v_2, e tensão do componente, v_a, para um componente de um circuito.

Considere agora a Figura 4.2-3. Na Figura 4.2-3*a*, usamos o que aprendemos para expressar a tensão de um componente do circuito em função das tensões de nó. O componente da Figura 4.2-3*a* pode ser de qualquer tipo: um resistor, uma fonte de corrente, uma fonte de tensão dependente, etc. Nas Figuras 4.2-3*b* e 4.2-3*c*, consideramos tipos específicos de componentes. Na Figura 4.2-3*b*, o componente é uma fonte de tensão. A tensão do componente foi representada duas vezes, uma vez como a tensão da fonte de tensão, V_s, e outra vez como uma função das tensões de nó, $v_1 - v_2$. Observando que as polaridades de referência de V_s e $v_1 - v_2$ são iguais (ambas com o + do lado esquerdo), podemos escrever

$$V_s = v_1 - v_2$$

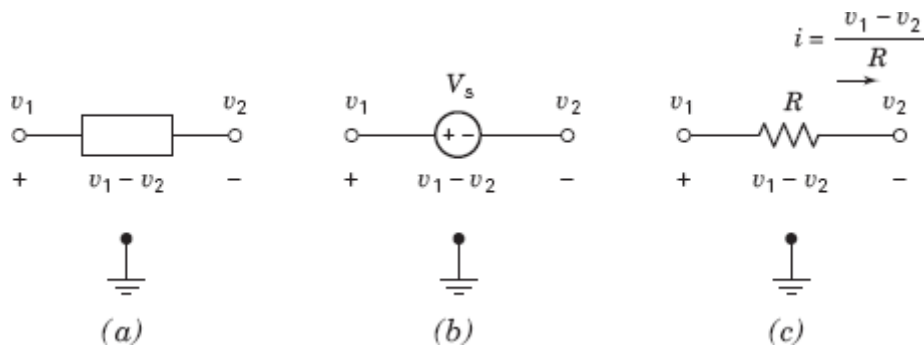



FIGURA 4.2-3 Tensões de nó, v_1 e v_2, e tensão do componente, $v_1 - v_2$, (*a*) para um componente genérico; (*b*) para uma fonte de tensão; (*c*) para um resistor.

Este é um resultado importante. Sempre que temos uma fonte de tensão ligada entre dois nós de um circuito, podemos expressar a tensão da fonte de tensão, V_s, em função das tensões de nó v_1 e v_2.

Frequentemente, o valor da tensão da fonte de tensão é conhecido. Suponhamos, por exemplo, que V_s = 12 V. Nesse caso,

$$12 = v_1 - v_2$$

Essa equação relaciona os valores de duas tensões de nó, v_1 e v_2.

Considere a seguir a Figura 4.2-3*c*. Nessa figura, o componente é um resistor. Vamos usar a lei de Ohm para expressar a corrente no resistor, *i*, em função das tensões de nó. Em primeiro lugar, expressamos a tensão do resistor, v_R, em função das tensões de nó: $v_R = v_1 - v_2$. Observando que a tensão no resistor,$v_1 - v_2$, e a corrente, *i*, estão de acordo com a convenção passiva, usamos a lei de Ohm para escrever

$$i = \frac{v_1 - v_2}{R}$$

Frequentemente, o valor da resistência é conhecido. Suponhamos, por exemplo, que R = 8 Ω. Nesse caso, a equação se torna

$$i = \frac{v_1 - v_2}{8}$$

Essa equação expressa a corrente no resistor, i, em função das tensões de nó v_1 e v_2.

Vamos agora escrever as equações de nó para o circuito da Figura 4.2-4*a*. A entrada do circuito é a corrente da fonte de corrente, i_s. Para escrever as equações de nó, vamos primeiro expressar as correntes dos resistores em função das tensões de nó e depois aplicar a lei de Kirchhoff para correntes aos nós a e b. As tensões dos resistores estão expressas em função das tensões de nó na Figura 4.2-4*b* e as correntes dos resistores estão expressas em função das tensões de nó na Figura 4.2-4*c*.

As equações de nó que representam o circuito da Figura 4.2-4 são obtidas aplicando a lei de Kirchhoff para correntes aos nós a e b. Aplicando a LKC ao nó a, temos:

$$i_s = \frac{v_a}{R_2} + \frac{v_a - v_b}{R_1} \qquad (4.2\text{-}1)$$

A equação da LKC aplicada ao nó b nos dá

$$\frac{v_a - v_b}{R_1} = \frac{v_b}{R_3} \qquad (4.2\text{-}2)$$

Para $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = R_3 = 0{,}5\ \Omega$ e $i_s = 4$ A, as Eqs. 4.2-1 e 4.2-2 podem ser escritas na forma

$$4 = \frac{v_a - v_b}{1} + \frac{v_a}{0{,}5} \qquad (4.2\text{-}3)$$

$$\frac{v_a - v_b}{1} = \frac{v_b}{0{,}5} \qquad (4.2\text{-}4)$$

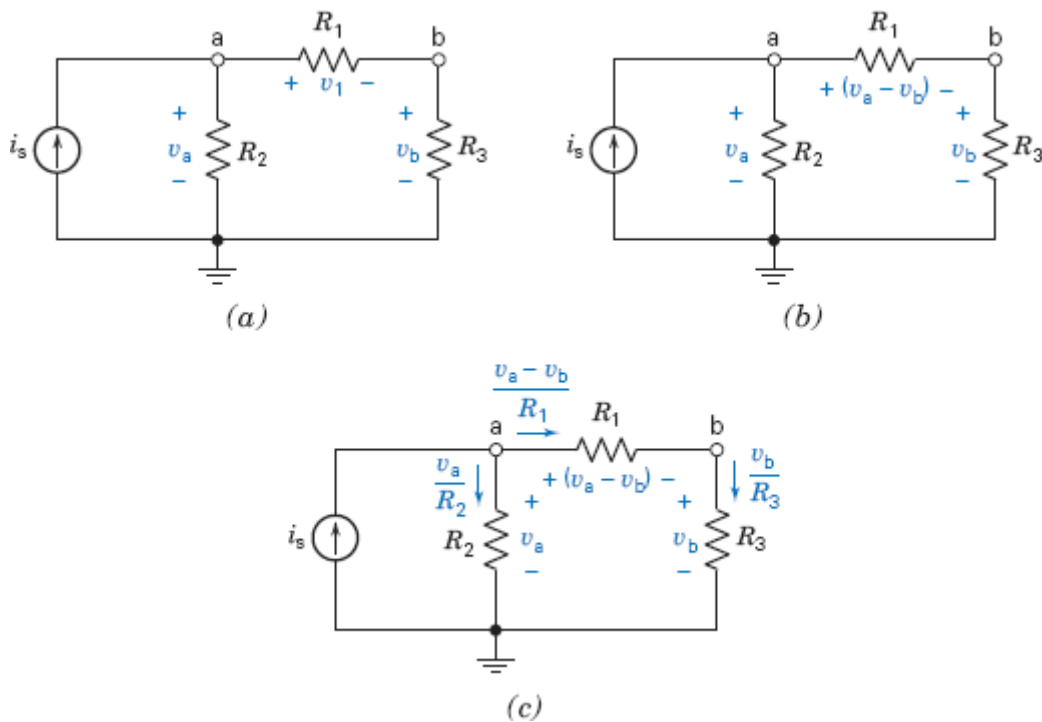



FIGURA 4.2-4 (*a*) Circuito com três resistores. (*b*) As tensões dos resistores expressas em função das tensões de nó. (*c*) As correntes dos resistores expressas em função das tensões de nó.

Explicitando v_b na Eq. 4.2-4, temos:

$$v_b = \frac{v_a}{3} \qquad (4.2\text{-}5)$$

Substituindo a Eq. 4.2-5 na Eq. 4.2-3, obtemos:

$$4 = v_a - \frac{v_a}{3} + 2v_a = \frac{8}{3}v_a \qquad (4.2\text{-}6)$$

Explicitando v_a na Eq. 4.2-6, temos:

$$v_a = \frac{3}{2}\ \text{V}$$

Finalmente, a Eq. 4.2-5 nos dá

$$v_b = \frac{1}{2}\ \text{V}$$

Assim, as tensões de nó do circuito são

$$v_a = \frac{3}{2}\ \text{V e } v_b = \frac{1}{2}\ \text{V}$$

EXEMPLO 4.2-1 Equações de Nó

Determine o valor da resistência R no circuito da Figura 4.2-5*a*.

Solução

Seja v_a a tensão de nó do nó a e v_b a tensão de nó do nó b. O voltímetro da Figura 4.2-5 mede o valor da tensão de nó do nó b, v_b. Na Figura 4.2-5*b*, as correntes dos resistores são expressas em função das tensões de nó. Aplicando a LKC ao nó a, obtemos:

$$4 + \frac{v_a}{10} + \frac{v_a - v_b}{5} = 0$$

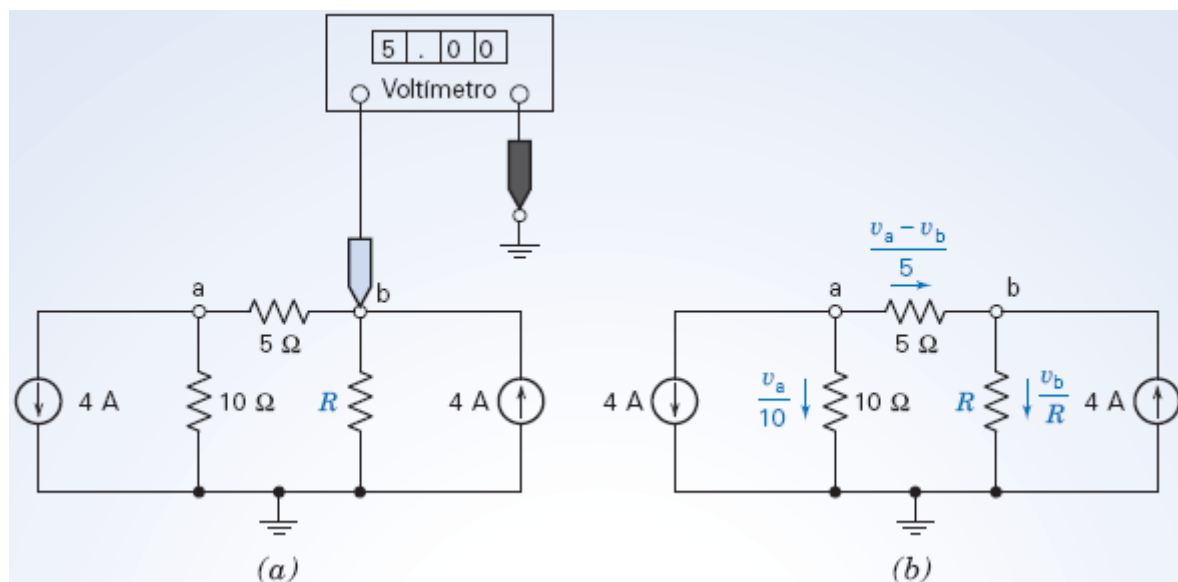



FIGURA 4.2-5 (*a*) Circuito do Exemplo 4.2-1. (*b*) Circuito com as correntes dos resistores expressas em função das tensões de nó.

Fazendo $v_b = 5$ V, temos:

$$4 + \frac{v_a}{10} + \frac{v_a - 5}{5} = 0$$

Explicitando v_a, obtemos:

$$v_a = -10 \text{ V}$$

Em seguida, aplicamos a LKC ao nó b para obter

$$-\left(\frac{v_a - v_b}{5}\right) + \frac{v_b}{R} - 4 = 0$$

Fazendo $v_a = -10$ V e $v_b = 5$ V, temos:

$$-\left(\frac{-10-5}{5}\right) + \frac{5}{R} - 4 = 0$$

Finalmente, explicitando R, obtemos:

$$R = 5\ \Omega$$

EXEMPLO 4.2-2 Equações de Nó

Escreva as equações de nó do circuito da Figura 4.2-6.

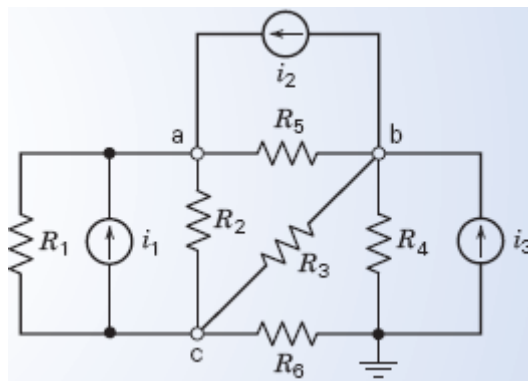



FIGURA 4.2-6 Circuito do Exemplo 4.2-2.

Solução

Seja v_a a tensão de nó do nó a, v_b a tensão de nó do nó b e v_c a tensão de nó do nó c. Aplicando a LKC ao nó a, obtemos

$$-\left(\frac{v_a - v_c}{R_1}\right) + i_1 - \left(\frac{v_a - v_c}{R_2}\right) + i_2 - \left(\frac{v_a - v_b}{R_5}\right) = 0$$

Separando os termos da equação que envolvem v_a dos termos que envolvem v_b e dos termos que envolvem v_c, obtemos:

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5}\right) v_a - \left(\frac{1}{R_5}\right) v_b - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) v_c = i_1 + i_2$$

Existe um padrão nas equações de nó de circuitos que contêm apenas resistores e fontes de corrente. Na equação de nó do nó a, o coeficiente de v_a é a soma dos recíprocos das resistências dos resistores ligados ao nó a. O coeficiente de v_b é o negativo da soma dos recíprocos das resistências dos resistores ligados entre o nó b e o nó a. O coeficiente de v_c é o negativo da soma dos recíprocos das resistências dos resistores ligados entre o nó c e o nó a. O lado direito da equação é a soma algébrica das correntes das fontes de corrente ligadas ao nó a.

Aplicando a LKC ao nó b, obtemos:

$$-i_2+\left(\frac{v_a-v_b}{R_5}\right)-\left(\frac{v_b-v_c}{R_3}\right)-\left(\frac{v_b}{R_4}\right)+i_3=0$$

Separando os termos da equação que envolvem v_a dos termos que envolvem v_b e dos termos que envolvem v_c, temos:

$$-\left(\frac{1}{R_5}\right)v_a+\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}\right)v_b-\left(\frac{1}{R_3}\right)v_c=i_3-i_2$$

Como era de se esperar, essa equação de nó está de acordo com o padrão para as equações de nó de circuitos que contêm apenas resistores e fontes de corrente. Na equação de nó do nó b, o coeficiente de v_b é a soma dos recíprocos das resistências dos resistores ligados ao nó b. O coeficiente de v_a é o negativo da soma dos recíprocos das resistências dos resistores ligados entre o nó a e o nó b. O coeficiente de v_c é o negativo da soma dos recíprocos das resistências dos resistores ligados entre o nó c e o nó b. O lado direito da equação é a soma algébrica das correntes das fontes de corrente ligadas ao nó b.

Finalmente, usamos o padrão das equações de nó em circuitos que contêm apenas resistores e fontes de corrente para obter a equação de nó do nó c:

$$-\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)v_a-\left(\frac{1}{R_3}\right)v_b+\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_6}\right)v_c=-i_1$$

EXEMPLO 4.2-3 Equações de Nó

Determine as tensões de nó do circuito da Figura 4.2-6 para $i_1 = 1$ A, $i_2 = 2$ A, $i_3 = 3$ A, $R_1 = 5\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$, $R_3 = 10\ \Omega$, $R_4 = 4\ \Omega$, $R_5 = 5\ \Omega$ e $R_6 = 2\ \Omega$.

Solução

As equações de nó são

$$\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)v_a-\left(\frac{1}{5}\right)v_b+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\right)v_c=1+2$$
$$-\left(\frac{1}{5}\right)v_a+\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\right)v_b-\left(\frac{1}{10}\right)v_c=-2+3$$
$$-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\right)v_a-\left(\frac{1}{10}\right)v_b+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{2}+\frac{1}{10}+\frac{1}{2}\right)v_c=-1$$

$$\begin{aligned}0,9v_a-0,2v_b-0,7v_c&=3\\-0,2v_a+0,55v_b-0,1v_c&=1\\-0,7v_a-0,1v_b+1,3v_c&=-1\end{aligned}$$

Quando escritas em forma matricial, as equações de nó se tornam

$$A\,v=b$$

em que

$$A=\begin{bmatrix}0,9 & -0,2 & -0,7\\-0,2 & 0,55 & -0,1\\-0,7 & 0,1 & 1,3\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}3\\1\\-1\end{bmatrix}\text{ e } v=\begin{bmatrix}v_a\\v_b\\v_c\end{bmatrix}$$

Essa equação matricial pode ser resolvida usando o MATLAB (Figura 4.2-7).

$$v = \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,1579 \\ 5,0526 \\ 3,4737 \end{bmatrix}$$

As tensões de nó são, portanto, $v_a = 7,1579$ V, $v_b = 5,0526$ V e $v_c = 3,4737$ V

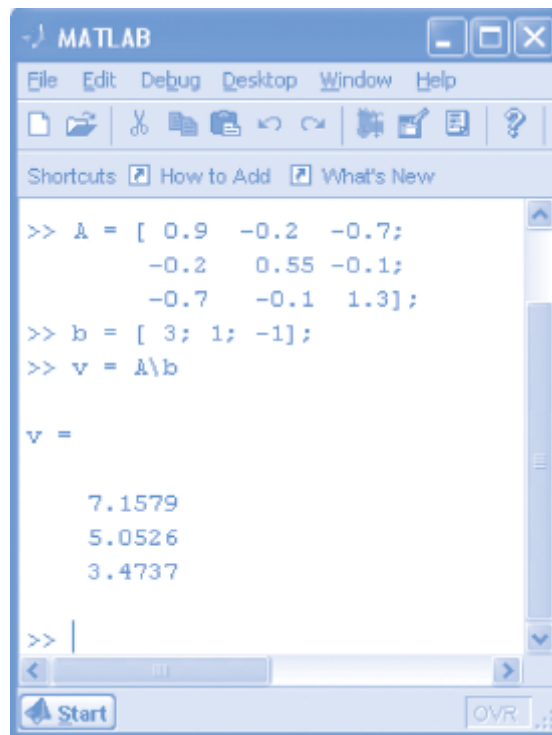



FIGURA 4.2-7 Uso do MATLAB para resolver o sistema de equações de nó do Exemplo 4.2-3.

EXERCÍCIO 4.2-1 Determine as tensões de nó v_a e v_b no circuito da Figura E 4.2-1.

Resposta: $v_a = 3$ V e $v_b = 11$ V

EXERCÍCIO 4.2-2 Determine as tensões de nó v_a e v_b no circuito da Figura E 4.2-2.

Resposta: $v_a = -4/3$ V e $v_b = 4$ V

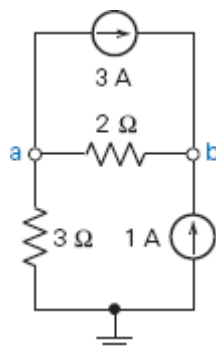



FIGURA E 4.2-1

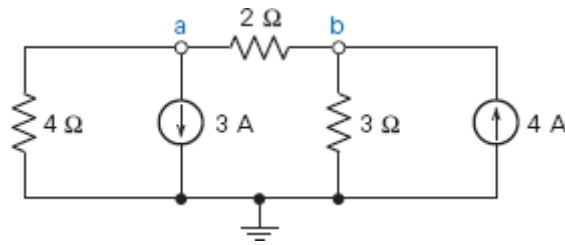



FIGURA E 4.2-2

4.3 Método das Tensões de Nó com Fontes de Corrente e de Tensão Independentes

Na seção anterior, determinamos as tensões de nó em circuitos que possuíam apenas fontes de corrente independentes. Nesta seção, vamos estudar circuitos com fontes de corrente e de tensão independentes.

Em primeiro lugar, vamos considerar um circuito com uma fonte de tensão entre a terra e um dos outros nós. Como a escolha do nó de referência é arbitrária, é fácil chegar a essa configuração.

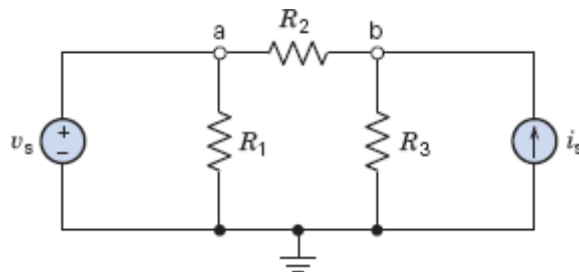



FIGURA 4.3-1 Circuito com uma fonte de tensão independente e uma fonte de corrente independente.

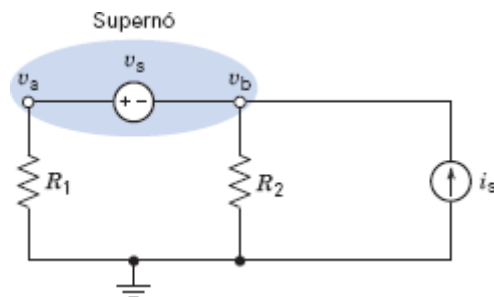



FIGURA 4.3-2 Circuito com um supernó que inclui v_a e v_b.

Um circuito desse tipo aparece na Figura 4.3-1. Notamos imediatamente que a fonte está ligada entre o nó a e a terra e que, portanto,

$$v_a = v_s$$

Assim, v_a é conhecida e apenas precisamos determinar o valor de v_b. Aplicamos a LKC ao nó b para obter

$$i_s = \frac{v_b}{R_3} + \frac{v_b - v_a}{R_2}$$

Como $v_a = v_s$, temos:

$$i_s = \frac{v_b}{R_3} + \frac{v_b - v_s}{R_2}$$

Explicitando a tensão de nó desconhecida v_b, obtemos:

$$v_b = \frac{R_2R_3i_s + R_3v_s}{R_2 + R_3}$$

Vamos agora considerar o circuito da Figura 4.3-2, no qual nenhum dos terminais da fonte de tensão está ligado à terra. Como a tensão da fonte é conhecida, usamos a LKT para obter

$$v_a - v_b = v_s$$

$$v_a - v_s = v_b$$

Para levar em conta o fato de que a tensão da fonte é conhecida, consideramos o nó a e o nó b como parte de um nó maior, representado pela região sombreada da Figura 4.3-2. Precisamos de um nó maior porque as tensões v_a e v_b estão relacionadas diretamente. O nó maior recebe o nome de *supernó* ou *nó generalizado*. De acordo com a LKC, a soma algébrica das correntes que entram em um supernó é zero. Isso significa que podemos aplicar a LKC a um supernó da mesma forma como aplicamos a LKC a um nó comum.

Um **supernó** é formado por dois nós ligados por uma fonte de tensão independente ou dependente.

Podemos, portanto, escrever a equação da LKC do supernó na forma

$$\frac{v_a}{R_1} + \frac{v_b}{R_2} = i_s$$

Como $v_a = v_s + v_b$, temos:

$$\frac{v_s + v_b}{R_1} + \frac{v_b}{R_2} = i_s$$

Explicitando a tensão de nó desconhecida v_b, obtemos:

$$v_b = \frac{R_1R_2i_s - R_2v_s}{R_1 + R_2}$$

EXEMPLO 4.3-1 Equações de Nó

Determine as tensões de nó v_1 e v_2 no circuito da Figura 4.3-3*a*.

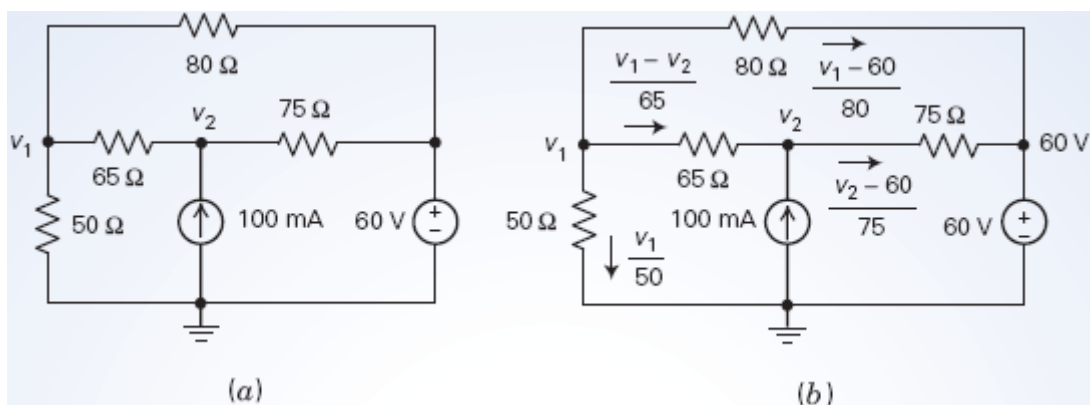



FIGURA 4.3-3 Circuito do Exemplo 4.3-1.

Solução

Depois de expressar as correntes dos resistores em função das tensões de nó, como mostra a Figura 4.3-3*b*, aplicamos a LKC ao nó 1, o que nos dá

$$\frac{v_1}{50}+\frac{v_1-v_2}{65}+\frac{v_1-60}{80}=0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{50}+\frac{1}{65}+\frac{1}{80}\right)v_1-\left(\frac{1}{65}\right)v_2=\frac{60}{80}$$

Aplicando a LKC ao nó 2, obtemos

$$0,1=\frac{v_2-v_1}{65}+\frac{v_2-60}{75}= \quad \Rightarrow -\left(\frac{1}{65}\right)v_1+\left(\frac{1}{65}+\frac{1}{75}\right)v_2=0,1+\frac{60}{75}$$

Escrevendo esse sistema de equações na forma de uma equação matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{50}+\frac{1}{65}+\frac{1}{80} & -\frac{1}{65} \\ -\frac{1}{65} & \frac{1}{65}+\frac{1}{75} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{60}{80} \\ 0,1+\frac{60}{75} \end{bmatrix}$$

Cuja solução é

$$v_1 = 31{,}081 \text{ V e } v_2 = 47{,}990 \text{ V}$$

Exemplo 4.3-2 Supernó

Determine os valores das tensões de nó v_a e v_b no circuito da Figura 4.3-4.

Solução

Podemos escrever a primeira equação de nó considerando a fonte de tensão. A tensão da fonte de tensão está relacionada às tensões de nó através da equação

$$v_b - v_a = 12 \quad \Rightarrow \quad v_b = v_a + 12$$

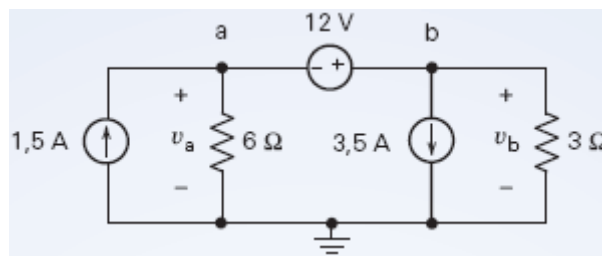



FIGURA 4.3-4 Circuito do Exemplo 4.3-2.

Para escrever a segunda equação de nó, devemos decidir o que fazer com a corrente da fonte de tensão. (Observe que não há uma forma simples de expressar a corrente da fonte de tensão em termos das tensões de nó.) Neste exemplo são ilustrados dois métodos para escrever a segunda equação de nó.

Método 1: Atribuímos um símbolo à corrente da fonte de tensão. Aplicamos a LKC aos dois nós da fonte de tensão. Eliminamos a corrente da fonte de tensão das equações obtidas.

A Figura 4.3-5 mostra o circuito depois que foi atribuído o símbolo *i* à corrente da fonte de tensão. A equação da LKC para o nó a é

$$1,5+i=\frac{v_a}{6}$$

A equação da LKC para o nó b é

$$i+3,5+\frac{v_b}{3}=0$$

Combinando as duas equações, obtemos

$$1,5-\left(3,5+\frac{v_b}{3}\right)=\frac{v_a}{6} \quad \Rightarrow \quad -2,0=\frac{v_a}{6}+\frac{v_b}{3}$$

Método 2: Aplicamos a LKC ao supernó associado à fonte de tensão. Como mostra a Figura 4.3-6, o supernó separa a fonte de tensão e seus dois nós do resto do circuito. (Neste pequeno circuito, o resto do circuito é apenas o nó de referência.)

Aplicamos a LKC ao supernó para obter

$$1,5=\frac{v_a}{6}+3,5+\frac{v_b}{3} \quad \Rightarrow \quad -2,0=\frac{v_a}{6}+\frac{v_b}{3}$$

Trata-se da mesma equação que foi obtida usando o método 1. A aplicação da LKC ao supernó é um artifício para fazer três coisas de uma só vez:

1. Rotular a corrente da fonte de tensão como *i*
2. Aplicar a LKC aos dois nós da fonte de tensão
3. Eliminar *i* das equações da LKC

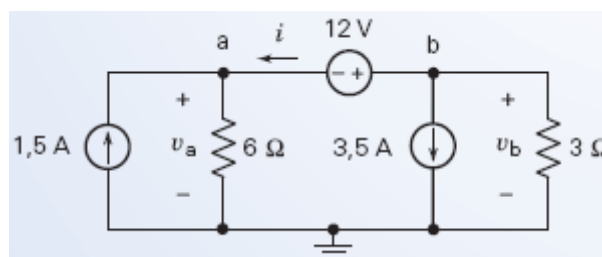



FIGURA 4.3-5 Uso do Método 1 no Exemplo 4.3-2.

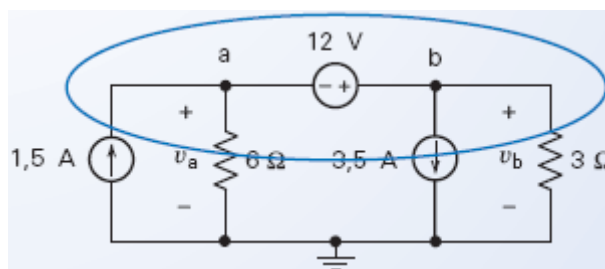



FIGURA 4.3-6 Uso do Método 2 no Exemplo 4.3-2.

Resumindo, as equações de nó são

$$v_b - v_a = 12$$

e

$$\frac{v_a}{6}+\frac{v_b}{3}=-2,0$$

Resolvendo as equações de nó, obtemos

$$v_a = -12 \text{ V e } v_b = 0 \text{ V}$$

(O fato de que v_b é 0 V pode parecer estranho, mas é fácil verificar que se esses valores estão corretos substituindo-os nas equações de nó.)

EXEMPLO 4.3-3 Equações de Nó em um Circuito que Contém Fontes de Tensão

Determine as tensões de nó no circuito da Figura 4.3-7.

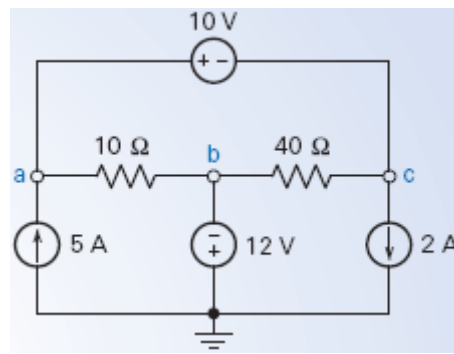



FIGURA 4.3-7 Circuito do Exemplo 4.3-3.

Solução

Vamos calcular as tensões de nó do circuito escrevendo uma equação da LKC para o supernó associado à fonte de tensão de 10 V. Em primeiro lugar, observe que

$$v_b = -12\text{ V}$$

e que

$$v_a = v_c + 10$$

Escrevendo uma equação da LKC para o supernó, obtemos:

$$\frac{v_a - v_b}{10} + 2 + \frac{v_c - v_b}{40} = 5$$

ou

$$4\,v_a + v_c - 5\,v_b = 120$$

Usando as relações $v_a = v_c + 10$ e $v_b = -12$ para eliminar v_a e v_b, temos:

$$4(v_c + 10) + v_c - 5(-12) = 120$$

Explicitando v_c na equação, obtemos:

$$v_c = 4\text{ V}$$

EXERCÍCIO 4.3-1 Determine as tensões de nó do circuito da Figura E 4.3-1.

Sugestão: Aplique a LKC ao supernó associado à fonte de tensão de 10 V.

Resposta: ***Resposta:*** $2 + \frac{v_b + 10}{20} + \frac{v_b}{30} = 5 \quad \Rightarrow \quad v_b = 30\text{ V} \quad \text{e} \quad v_a = 40\text{ V}$

EXERCÍCIO 4.3-2 Determine as tensões v_a e v_b no circuito da Figura E 4.3-2.

Resposta: ***Resposta:*** $\frac{(v_b + 8) - (-12)}{10} + \frac{v_b}{40} = 3 \quad \Rightarrow \quad v_b = 8\text{ V} \quad \text{e} \quad v_a = 16\text{ V}$

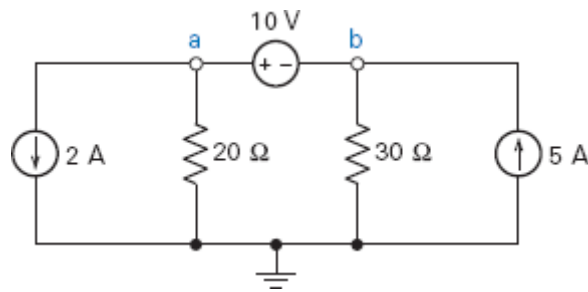



FIGURA E 4.3-1

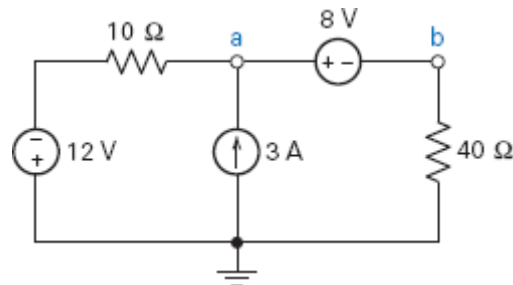



FIGURA E 4.3-2

4.4 Método das Tensões de Nó com Fontes Dependentes

Quando um circuito contém uma fonte dependente, a primeira coisa a fazer é expressar a corrente ou tensão de controle da fonte dependente em função das tensões de nó.

Depois disso, a corrente ou tensão controlada pode ser expressa em função das tensões de nó e as equações de nó podem ser obtidas usando as técnicas descritas nas duas seções anteriores.

EXEMPLO 4.4-1 Equações de Nó em um Circuito com uma Fonte Dependente

Determine as tensões de nó do circuito da Figura 4.4-1.

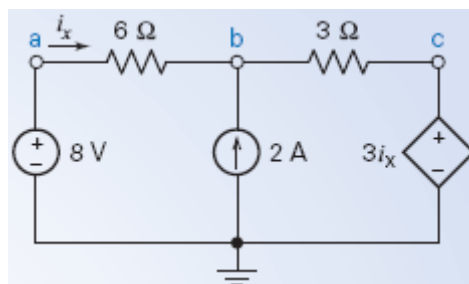



FIGURA 4.4-1 Circuito com uma FTCC.

Solução

A corrente de controle da fonte dependente é i_x. Nossa primeira tarefa é expressar essa corrente em função das tensões de nó:

$$i_x = \frac{v_a - v_b}{6}$$

O valor da tensão de nó do nó a é dado pela tensão da fonte de 8 V:

$$v_a = 8\text{ V}$$

O que nos dá

$$i_x = \frac{8 - v_b}{6}$$

Como a tensão de nó do nó c é igual à tensão da fonte dependente,

$$v_c = 3i_x = 3\left(\frac{8 - v_b}{6}\right) = 4 - \frac{v_b}{2} \qquad (4.4\text{-}1)$$

Aplicando a LKC ao nó b, obtemos:

$$\frac{8 - v_b}{6} + 2 = \frac{v_b - v_c}{3} \qquad (4.4\text{-}2)$$

Usando a Eq. 4.4-1 para eliminar v_c da Eq. 4.4-2, obtemos:

$$\frac{8 - v_b}{6} + 2 = \frac{v_b - \left(4 - \frac{v_b}{2}\right)}{3} = \frac{v_b}{2} - \frac{4}{3}$$

Explicitando v_b, temos:

$$v_b = 7\text{ V}$$

e, portanto,

$$v_c = 4 - \frac{v_b}{2} = \frac{1}{2}\text{ V}$$

EXEMPLO 4.4-2 Equações de Nó em um Circuito com uma Fonte Dependente

Determine as tensões de nó do circuito da Figura 4.4-2.

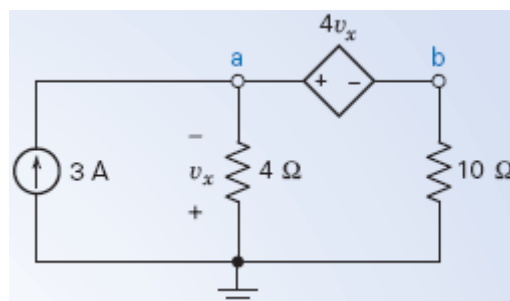



FIGURA 4.4-2 Circuito com uma FTCT.

Solução

A tensão de controle da fonte dependente é v_x. Nossa primeira tarefa é expressar essa tensão em função das tensões de nó:

$$v_x = -v_a$$

A diferença entre as tensões de nó dos nós a e b é igual à tensão da fonte dependente:

$$v_a - v_b = 4\,v_x = 4(-\,v_a) = -\,4\,v_a$$

Simplificando esta equação, obtemos:

$$v_b = 5\,v_a \tag{4.4-3}$$

Aplicando a LKC ao supernó associado à fonte de tensão dependente, temos:

$$3 = \frac{v_a}{4} + \frac{v_b}{10} \tag{4.4-4}$$

Usando a Eq. 4.4-3 para eliminar v_b da Eq. 4.4-4, obtemos:

$$3 = \frac{v_a}{4} + \frac{5v_a}{10} = \frac{3}{4}v_a$$

Explicitando v_a, temos:

$$v_a = 4\text{ V}$$

e

$$v_b = 5\,v_a = 20\text{ V}$$

EXEMPLO 4.4-3 Equações de Nó em um Circuito com uma Fonte Dependente

Determine as tensões de nó do circuito da Figura 4.4-3.

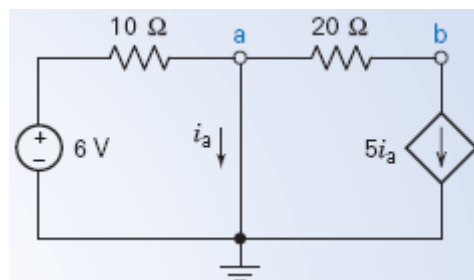



FIGURA 4.4-3 Circuito com uma FCCC.

Solução

A corrente de controle da fonte dependente é i_a. Nossa primeira tarefa é expressar essa corrente em função das tensões de nó. Aplicando a LKC ao nó a, obtemos:

$$\frac{6 - v_a}{10} = i_a + \frac{v_a - v_b}{20}$$

Como o nó a está ligado ao nó de referência por um curto-circuito, $v_a = 0$. Substituindo este valor de v_a na equação acima e simplificando, obtemos:

$$i_a = \frac{12 + v_b}{20} \tag{4.4-5}$$

Aplicando a LKC ao nó b, temos:

$$\frac{0 - v_b}{20} = 5\,i_a \qquad (4.4\text{-}6)$$

Usando a Eq. 4.4-5 para eliminar i_a da Eq. 4.4-6, obtemos:

$$\frac{0 - v_b}{20} = 5\left(\frac{12 + v_b}{20}\right)$$

Explicitando v_b, temos:

$$v_b = -10\text{ V}$$

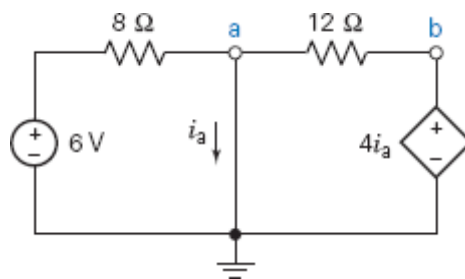



FIGURA E 4.4-1 Circuito com uma FTCC.

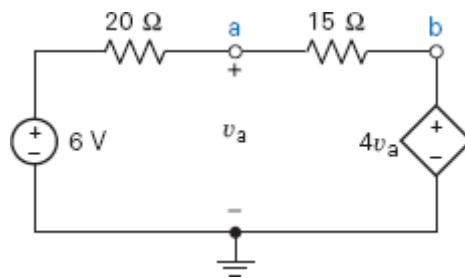



FIGURA E 4.4-2 Circuito com uma FTCT.

EXERCÍCIO 4.4-1 Determine a tensão de nó v_b no circuito da Figura E 4.4-1.

Sugestão: Aplique a LKC ao nó a para expressar i_a em função das tensões de nó. Substitua o resultado em $v_b = 4i_a$ e explicite v_b.

Resposta: $-\frac{6}{8} + \frac{v_b}{4} - \frac{v_b}{12} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_b = 4{,}5\text{ V}$

EXERCÍCIO 4.4-2 Determine as tensões de nó do circuito da Figura E 4.4-2.

Sugestão: Como a tensão de controle da fonte dependente é uma tensão de nó, já está expressa em função das tensões de nó. Assim, basta aplicar a LKC ao nó a.

Resposta: $\frac{v_a - 6}{20} + \frac{v_a - 4v_a}{15} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_a = -2\text{ V}$

4.5 *Método das Correntes de Malha com Fontes de Tensão Independentes*

Nesta seção e nas seções seguintes, vamos discutir a análise de circuitos usando a lei de Kirchhoff para tensões aplicada a uma malha. *Malha* é qualquer percurso em um circuito elétrico que começa em um nó e termina no mesmo nó sem passar duas vezes por um nó intermediário.

Malha simples é um caso especial de malha.

Malha simples é uma malha que não contém outra malha no interior.

O método das correntes de malha só se aplica a circuitos planares. Circuito planar é um circuito que pode ser desenhado em um plano sem que dois fios de ligação se cruzem. Um exemplo de circuito não planar aparece na Figura 4.5-1, em que o cruzamento assinalado não pode ser removido desenhando o circuito de outra forma. Nos circuitos planares, as malhas simples parecem janelas. O circuito da Figura 4.5-2 possui quatro malhas simples, M_1, M_2, M_3 e M_4. A malha 2 contém os componentes R_3, R_4 e R_5. Observe que o resistor R_3 é comum à malha 1 e à malha 2.

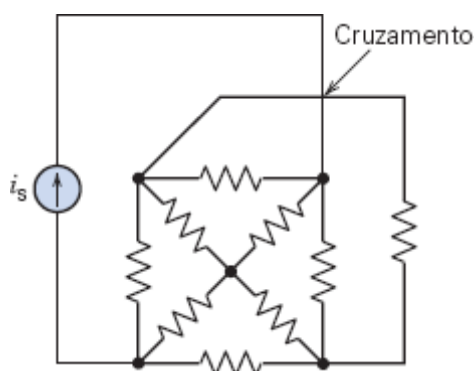



FIGURA 4.5-1 Circuito não planar com um cruzamento.

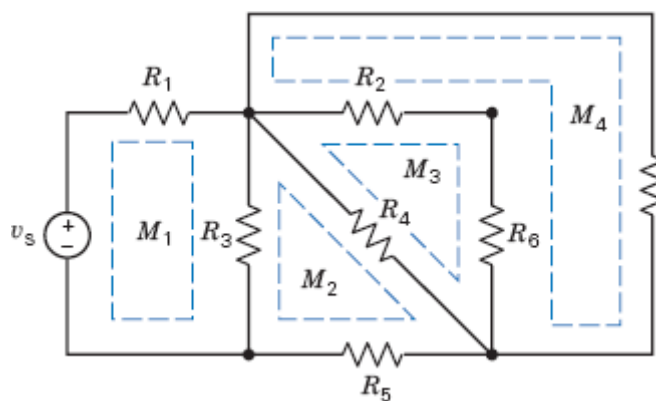



FIGURA 4.5-2 Circuito com quatro malhas simples. As malhas simples estão assinaladas por linhas tracejadas.

Definimos uma corrente de malha como a corrente que circula nos componentes que pertencem à malha. A Figura 4.5-3*a* mostra um circuito com duas malhas simples no qual as correntes de malha foram chamadas de i_1 e i_2. Vamos usar a convenção de que as correntes de malha circulam no sentido horário, como na Figura 4.5-3*a*. Na Figura 4.5-3*b*, amperímetros foram introduzidos nas duas malhas simples para medir as correntes de malha.

Um método alternativo ao método das tensões de nó, discutido nas Seções 4.2 a 4.4, consiste em escrever e resolver um sistema de equações conhecidas como equações de malha. As variáveis desconhecidas das equações de malha são as correntes de malha do circuito. Determinamos o valor das correntes de malha resolvendo as equações de malha.

Para escrever um sistema de equações de malha, fazemos duas coisas:

1. Expressamos as tensões dos componentes em função das correntes de malha.

2. Aplicamos a lei de Kirchhoff para tensões (LKT) a todas as malhas simples do circuito.

Considere o problema de expressar as tensões dos componentes em função das correntes de malha. Embora nosso objetivo seja expressar as *tensões* nos componentes em função das correntes de malha, começamos por expressar as *correntes* nos componentes em função das correntes de malha. A Figura 4.5-3*b* mostra como isso pode ser feito. Os amperímetros da Figura 4.5-3*b* medem as correntes de malha i_1 e i_2. Os componentes C e E pertencem à malha da direita, mas não pertencem à malha da esquerda. Aplicando a lei de Kirchhoff para correntes ao nó c e depois ao nó f, vemos que a corrente nos componentes C e E é igual à corrente de malha da malha da direita, i_2, como mostra a Figura 4.5-3*b*. Da mesma forma, os componentes A e D pertencem apenas à malha da esquerda. As correntes nos componentes A e D são iguais à corrente da malha da malha da esquerda, i_1, como mostra a Figura 4.5-3*b*.

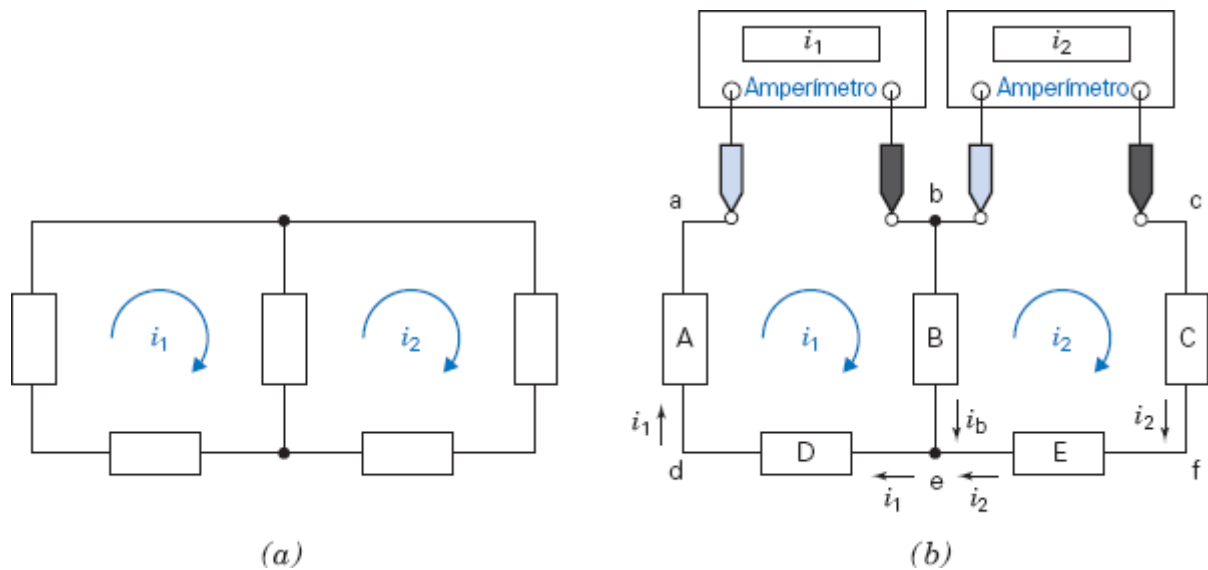



FIGURA 4.5-3 (*a*) Circuito com duas malhas simples. (*b*) Uso de amperímetros para medir as correntes de malha.

O componente B pertence às duas malhas. A corrente do componente B foi chamada de i_b. Aplicando a lei de Kirchhoff para correntes ao nó b da Figura 4.5-3*b*, obtemos:

$$i_b = i_1 - i_2$$

Essa equação expressa a corrente no componente, i_b, em função das correntes de malha i_1 e i_2.

A Figura 4.5-4*a* mostra um componente que pertence a duas malhas. A corrente do componente está expressa em função das correntes de malha das duas malhas. O componente da Figura 4.5-4*a* pode ser de qualquer tipo: um resistor, uma fonte de corrente, uma fonte de tensão dependente, etc. Nas Figuras 4.5-4*b* e 4.5-4*c*, consideramos tipos específicos de componentes. Na Figura 4.5-4*b*, o componente é uma fonte de corrente. A corrente do componente foi representada duas vezes, uma como uma fonte de corrente de 3 A e outra como uma função das correntes de malha, $i_1 - i_2$. Observando que os sentidos de referência da corrente de 3 A e da corrente $i_1 - i_2$ são diferentes (a primeira é de baixo para cima e a segunda é de cima para baixo), escrevemos:

$$-3 = i_1 - i_2$$

Esta equação relaciona os valores de duas correntes de malha.

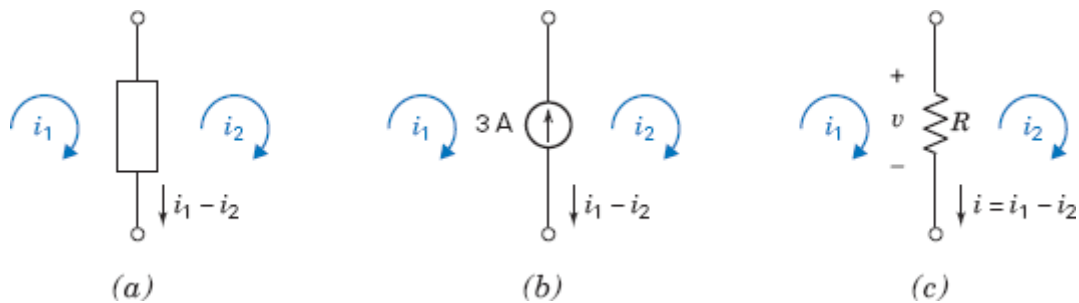



FIGURA 4.5-4 Correntes de malha, i_1 e i_2, e corrente no componente, $i_1 - i_2$, (a) para um componente genérico, (b) para uma fonte de corrente e (c) para um resistor.

Considere a seguir a Figura 4.5-4*c*. Nesse caso, o componente é um resistor. Vamos usar a lei de Ohm para expressar a tensão do resistor, v, em função das correntes de malha. Em primeiro lugar, expressamos a corrente no resistor, i_R, em função das correntes de malha: $i_R = i_1 - i_2$. Observando que a corrente no resistor, $i_1 - i_2$, e a tensão v estão de acordo com a convenção passiva, usamos a lei de Ohm para escrever

$$v = R(i_1 - i_2)$$

Frequentemente, o valor da resistência é conhecido. Supondo, por exemplo, que $R = 8\ \Omega$, a equação se torna

$$v = 8(i_1 - i_2)$$

Essa equação expressa a tensão no resistor, v, em função das correntes de malha i_1 e i_2.

Vamos agora escrever equações de malha para representar o circuito da Figura 4.5-5*a*. A entrada do circuito é a tensão da fonte de tensão, v_s. Para escrever as equações de malha, primeiro expressamos as tensões nos resistores em função das correntes de malha e depois aplicamos às malhas a lei de Kirchhoff para tensões. As correntes nos resistores estão expressas em função das correntes de malha na Figura 4.5-5*b* e as tensões nos resistores estão expressas em função das correntes de malha na Figura 4.5-5*c*.

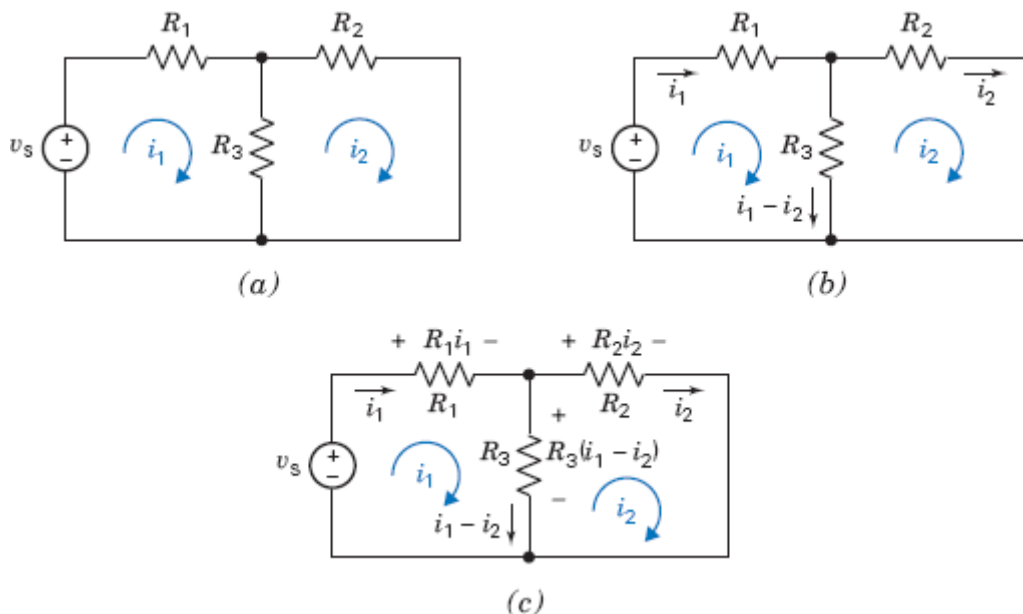



FIGURA 4.5-5 (*a*) Um circuito. (*b*) As correntes nos resistores expressas em função das correntes de malha. (*c*) As tensões nos resistores expressas em função das correntes de malha.

Podemos usar a lei de Kirchhoff para tensões ao longo de cada malha. Para obter a soma algébrica das tensões ao longo de uma malha, vamos adotar a convenção descrita a seguir. Percorremos a malha no sentido horário. Quando encontramos o sinal + da tensão de um componente antes do sinal –, somamos a tensão; quando encontramos o sinal – antes do sinal +, subtraímos a tensão. Assim, para o circuito da Figura 4.5-5*c*, temos:

$$\text{malha 1: } -v_s + R_1 i_1 + R_3(i_1 - i_2) = 0 \quad (4.5\text{-}1)$$

$$\text{malha 2: } -R_3(i_1 - i_2) + R_2 i_2 = 0 \quad (4.5\text{-}2)$$

Observe que a tensão em R_3 na malha 1 foi calculada usando a lei de Ohm:

$$v = R_3 i_a = R_3(i_1 - i_2)$$

em que i_a é a corrente que atravessa R_3 no sentido de cima para baixo.

As Equações 4.5-1 e 4.5-2 permitem determinar as correntes de malha i_1 e i_2. Reescrevendo as duas equações, obtemos:

$$i_1(R_1 + R_3) - i_2 R_3 = v_s$$

e

$$-i_1 R_3 + i_2(R_3 + R_2) = 0$$

Se $R_1 = R_2 = R_3 = 1\ \Omega$, temos:

$$2i_1 - i_2 = v_s$$

e

$$-i_1 + 2i_2 = 0$$

Multiplicando a primeira equação por 2 e somando membro a membro à segunda equação, obtemos $3i_1 = 2v_s$, o que nos dá

$$i_1 = \frac{2v_s}{3} \quad \text{e} \quad i_2 = \frac{v_s}{3}$$

Assim, obtivemos um sistema de duas equações com duas incógnitas que pudemos resolver facilmente para determinar as correntes de malha. No caso geral, se o circuito possui *N* malhas simples e escrevemos *N* equações de malha em termos de *N* correntes de malha, essas equações constituem um sistema de *N* equações com *N* incógnitas. Como as *N* equações são independentes, é sempre possível resolver o sistema para obter o valor das *N* correntes de malha.

No caso de um circuito que contém apenas fontes de tensão independentes e resistores, as equações de malha podem ser escritas de uma forma padronizada. Considere um circuito com três malhas simples, como o da Figura 4.5-6. Vamos atribuir o sentido horário a todas as correntes de malha. Usando a LKT, obtemos três equações de malha:

$$\begin{aligned}
&\text{malha 1: } -v_s + R_1 i_1 + R_4(i_1 - i_2) = 0 \\
&\text{malha 2: } R_2 i_2 + R_5(i_2 - i_3) + R_4(i_2 - i_1) = 0 \\
&\text{malha 3: } R_5(i_3 - i_2) + R_3 i_3 + v_g = 0
\end{aligned}$$

Essas três equações de malha podem ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
&\text{malha 1: } (R_1 + R_4)i_1 - R_4 i_2 = v_s \\
&\text{malha 2: } -R_4 i_1 + R_5 + (R_4 + R_2 + R_5)i_2 - R_5 i_3 = 0 \\
&\text{malha 3: } -R_5 i_2 + (R_3 + R_5)i_3 = -v_g
\end{aligned}$$

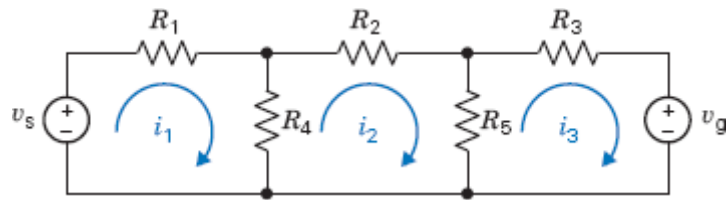



FIGURA 4.5-6 Circuito com três correntes de malha e duas fontes de tensão.

Observe que o coeficiente da corrente de malha i_1 da primeira malha é a soma das resistências da malha 1 e que o coeficiente da corrente de malha i_2 é o negativo da resistência comum às malhas 1 e 2. No caso geral, a equação para a enésima malha de um circuito apenas com resistores e fontes de tensão independentes tem a seguinte forma:

$$-\sum_{q=1}^{O} R_k i_q + \sum_{j=1}^{P} R_j i_n = -\sum_{n=1}^{N} v_{sn} \qquad (4.5\text{-}3)$$

No caso da malha n, portanto, multiplicamos i_n pela soma das resistências R_j ao longo da malha e subtraímos a soma dos produtos das resistências em comum com outras malhas, R_k, pelas correntes dessas malhas, i_q, para todas as Q malhas vizinhas. Finalmente, as fontes de tensão independentes presentes na malha aparecem do lado direito da equação como o negativo das fontes de tensão encontradas quando percorremos a malha no sentido da corrente. Lembre-se de que este resultado foi obtido supondo que todas as correntes de malha têm o sentido horário.

Quando é expressa em forma matricial, a Eq. 4.5-3 se reduz a

$$\mathbf{R}\,\mathbf{i} = \mathbf{v}_s \qquad (4.5\text{-}4)$$

em que **R** é uma matriz simétrica na qual os elementos da diagonal são a soma das resistências de cada malha e os elementos fora da diagonal são o negativo da soma das resistências comuns a duas malhas. A matriz **i** é uma matriz coluna formada pelas correntes de malha:

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_N \end{bmatrix}$$

A matriz $\mathbf{v}_s$ é uma matriz coluna da forma

$$\mathbf{v}_s = \begin{bmatrix} v_{s1} \\ v_{s2} \\ \vdots \\ v_{sN} \end{bmatrix}$$

em que v_{sj} é a soma algébrica das tensões das fontes de tensão existentes na malha j, com o sinal apropriado atribuído a cada fonte.

Para o circuito da Figura 4.5-6 e a matriz da Eq. 4.5-4, temos:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} (R_1 + R_2) & -R_4 & 0 \\ -R_4 & (R_2 + R_4 + R_5) & -R_5 \\ 0 & -R_5 & (R_3 + R_5) \end{bmatrix}$$

Observe que **R** é uma matriz simétrica, como era de se esperar.

EXERCÍCIO 4.5-1 Determine o valor da tensão medida pelo voltímetro da Figura E 4.5-1.

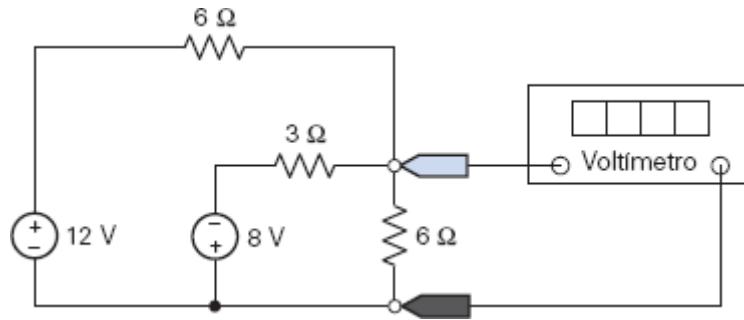



FIGURA E 4.5-1

Resposta: –1 V

4.6 Método das Correntes de Malha com Fontes de Corrente e de Tensão Independentes

Até agora, consideramos apenas circuitos com fontes de tensão independentes para ser analisadas pelo método das correntes de malha. Se o circuito possui uma fonte de corrente independente, como na Figura 4.6-1, sabemos de antemão que a segunda corrente de malha é o negativo da corrente da fonte de corrente. Assim, podemos escrever

$$i_2 = -i_s$$

e precisamos calcular apenas a primeira corrente de malha, i_1. Aplicando a LKT à primeira malha, obtemos:

$$(R_1 + R_2)i_1 - R_2 i_2 = v_s$$

Como $i_2 = -i_s$, temos:

$$i_1 = \frac{v_s - R_2 i_s}{R_1 + R_2} \qquad (4.6\text{-}1)$$

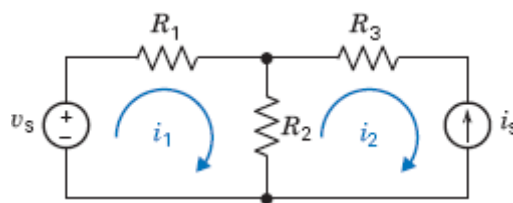



FIGURA 4.6-1 Circuito com uma fonte de tensão independente e uma fonte de corrente independente.

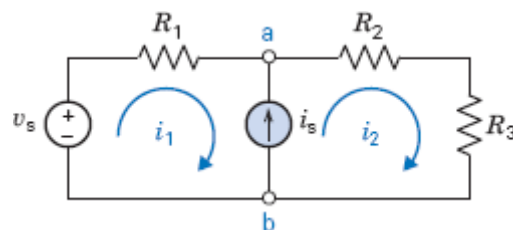



FIGURA 4.6-2 Circuito com uma fonte de corrente independente comum a duas malhas.

em que i_s e v_s são os valores conhecidos da corrente da fonte de corrente e da tensão da fonte de tensão.

No caso de um circuito como da Figura 4.6-2, no qual existe uma fonte de corrente comum a duas malhas, com uma tensão desconhecida v_{ab} entre os terminais, sabemos de antemão que

$$i_2 - i_1 = i_s \quad (4.6\text{-}2)$$

aplicando a LKC ao nó a. As duas equações de malha são

$$\text{malha 1: } R_1 i_1 + v_{ab} = v_s \quad (4.6\text{-}3)$$

$$\text{malha 2: } (R_2 + R_3)i_2 - v_{ab} = 0 \quad (4.6\text{-}4)$$

Somando membro a membro as Eqs. 4.6-3 e 4.6-4, eliminamos v_{ab}, obtendo

$$R_i i_2 + (R_2 + R_3)i_2 = v_s$$

Como $i_2 = i_s + i_1$, temos:

$$R_i i_1 + (R_2 + R_3)(i_s + i_1) = v_s$$

ou

$$i_1 = \frac{v_s - (R_2 + R_3)i_s}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (4.6\text{-}5)$$

Assim, levamos em conta a existência de fontes de corrente independentes estabelecendo uma relação entre as correntes de malha e a corrente da fonte independente. Se a fonte de corrente influencia *apenas uma* corrente de malha, escrevemos a equação que relaciona essa corrente de malha à corrente da fonte de corrente e escrevemos as equações da LKT para as outras malhas. Se a fonte de corrente influencia duas correntes de malha, escrevemos as equações da LKT para as duas malhas, supondo que existe uma tensão desconhecida v_{ab} entre os terminais da fonte de corrente. Em seguida, somamos as duas equações para obter uma equação independente de v_{ab}.

EXEMPLO 4.6-1 Equações de Malha

Considere o circuito da Figura 4.6-3, em que $R_1 = R_2 = 1\ \Omega$ e $R_3 = 2\ \Omega$. Determine as três correntes de malha.

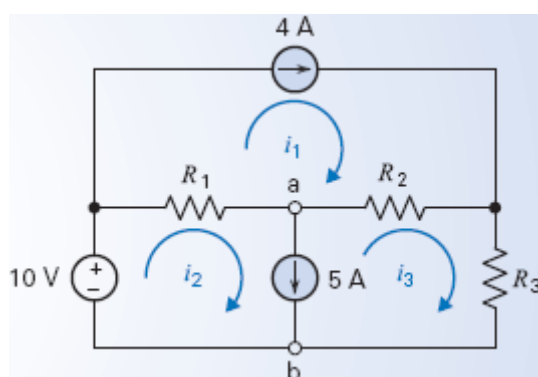



FIGURA 4.6-3 Circuito com duas fontes de corrente independentes.

Solução

Como a fonte de 4 A está apenas na malha 1, sabemos que

$$i_1 = 4$$

No caso da fonte de 5 A, temos:

$$i_2 - i_3 = 5 \quad (4.6\text{-}6)$$

Aplicando a LKT às malhas 2 e 3, obtemos:

$$\text{malha 2: } R_1(i_2 - i_1) + v_{ab} = 10 \qquad (4.6\text{-}7)$$

$$\text{malha 3: } R_2(i_3 - i_1) + R_3 i_3 - v_{ab} = 0 \qquad (4.6\text{-}8)$$

Fazendo $i_1 = 4$ e somando membro a membro as Eqs. 4.6-7 e 4.6-8, obtemos:

$$R_1(i_2 - 4) + R_2(i_3 - 4) + R_3 i_3 = 10 \qquad (4.6\text{-}9)$$

De acordo com a Eq. 4.6-6, $i_2 = 5 + i_3$. Substituindo na Eq. 4.6-9, temos:

$$R_1(5 + i_3 - 4) + R_2(i_3 - 4) + R_3 i_3 = 10$$

Usando os valores dos resistores, obtemos

$$i_3 = \frac{13}{4}\ \text{A} \quad \text{e} \quad i_2 = 5 + i_3 = \frac{33}{4}\ \text{A}$$

Outra técnica usada para analisar um circuito pelo método das correntes de malha quando uma fonte de corrente é comum a duas malhas envolve o conceito de supermalha. *Supermalha* é uma malha criada a partir de duas malhas que possuem uma fonte de corrente em comum, como mostra a Figura 4.6-4.

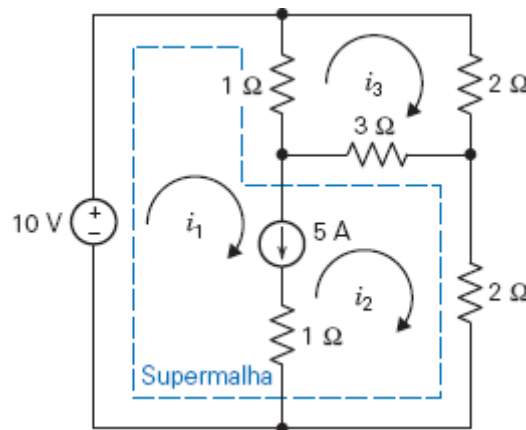



FIGURA 4.6-4 Circuito com uma supermalha que inclui a malha 1 e a malha 2. A supermalha está indicada pela linha tracejada.

Uma **supermalha** é formada por duas malhas que possuem em comum uma fonte de corrente independente ou dependente.

Considere, por exemplo, o circuito da Figura 4.6-4. A fonte de corrente de 5 A é comum à malha 1 e à malha 2. A supermalha é formada pela malha 1 e a malha 2. Aplicando a LKT à supermalha, indicada pelas retas tracejadas, obtemos:

$$-10 + 1(i_1 - i_3) + 3(i_2 - i_3) + 2i_2 = 0$$

No caso da malha 3, temos:

$$1(i_3 - i_1) + 2i_3 + 3(i_3 - i_2) = 0$$

Finalmente, a equação que relaciona a corrente da fonte de tensão às correntes de malha é

$$i_1 - i_2 = 5$$

Assim, as três equações podem ser reduzidas a

supermalha:	$1i_1 + 5i_2 - 4i_3 = 10$
malha 3:	$-1i_1 - 3i_2 + 6i_3 = 0$
corrente da fonte:	$1i_1 - 1i_2 = 5$

Resolvendo este sistema de equações, obtemos $i_2 = 2{,}5$ A, $i_1 = 7{,}5$ A e $i_3 = 2{,}5$ A.

EXEMPLO 4.6-2 Supermalhas

Determine o valor das correntes de malha i_1 e i_2 no circuito da Figura 4.6-5.

Solução

Podemos escrever a primeira equação de malha considerando a fonte de corrente. A corrente da fonte de corrente está relacionada às correntes de malha através da seguinte equação:

$$i_1 - i_2 = 1{,}5 \;\Rightarrow\; i_1 = i_2 + 1{,}5$$

Para escrever a segunda equação de malha, devemos decidir o que fazer com a tensão da fonte de corrente. (Observe que não há uma forma simples de expressar a tensão da fonte de corrente em termos das correntes de malha.) Neste exemplo são ilustrados dois métodos para escrever a segunda equação de malha.

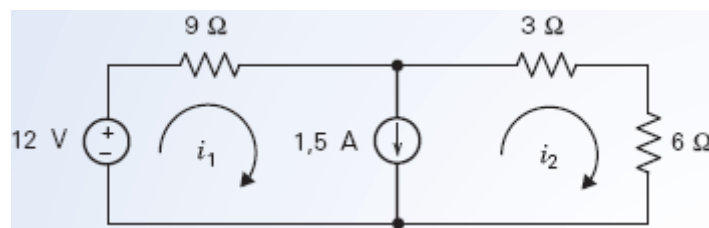



FIGURA 4.6-5 Circuito do Exemplo 4.6-2.

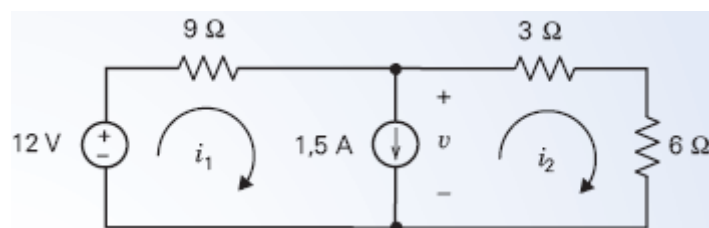



FIGURA 4.6-6 Método 1 do Exemplo 4.6-2.

Método 1: Atribuímos um símbolo à tensão da fonte de corrente. Aplicamos a LKT às duas malhas. Eliminamos a tensão da fonte de corrente das equações obtidas.

A Figura 4.6-6 mostra o circuito depois que foi atribuído um símbolo à tensão da fonte de corrente. A equação da LKT para a malha 1 é

$$9i_1 + v - 12 = 0$$

A equação da LKT para a malha 2 é

$$3i_2 + 6i_2 - v = 0$$

Combinando as duas equações, obtemos

$$9i_1 + (3i_2 + 6i_2) - 12 = 0 \;\Rightarrow\; 9i_1 + 9i_2 = 12$$

Método 2: Aplicamos a LKT a uma supermalha que, como mostra a Figura 4.6-7, contém no interior a fonte de corrente. Aplicamos a LKT à supermalha para obter

$$9i_1 + 3i_2 + 6i_2 - 12 = 0 \;\Rightarrow\; 9i_1 + 9i_2 = 12$$

Trata-se da mesma equação que foi obtida usando o método 1. Aplicar a LKT à supermalha é um artifício para fazer três coisas:

1. Rotular a corrente da fonte de tensão como v.
2. Aplicar a LKT às duas malhas que contêm a fonte de corrente.
3. Eliminar v das equações da LKT.

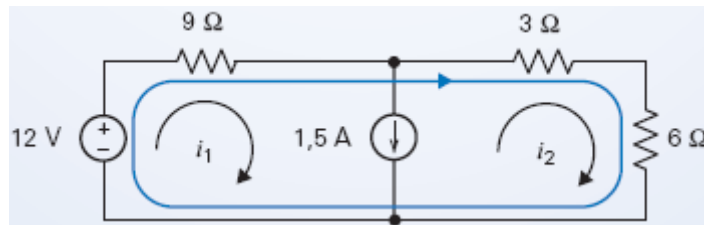



FIGURA 4.6-7 Método 2 do Exemplo 4.6-2.

Resumindo, as equações de malha são

$$i_1 = i_2 + 1{,}5$$

e

$$9i_1 = 9i_2 = 12$$

Resolvendo as equações de nó, obtemos

$$i_1 + 1{,}4167 \text{ A e } i_2 = -83{,}3 \text{ mA}$$

EXERCÍCIO 4.6-1 Determine o valor da tensão medida pelo voltímetro da Figura E 4.6-1.

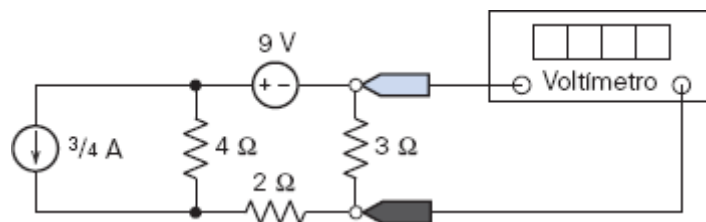



FIGURA E 4.6-1

Sugestão: Escreva e resolva uma equação de malha para determinar a corrente no resistor de 3 Ω.

Resposta: – 4 V.

EXERCÍCIO 4.6-2 Determine o valor da corrente medida pelo amperímetro da Figura E 4.6-2.

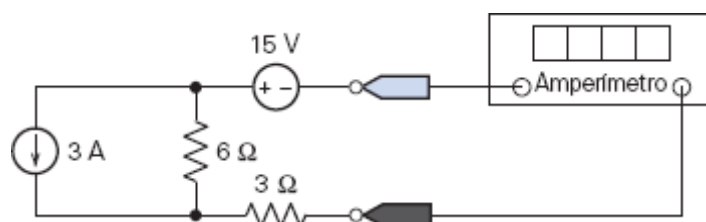



FIGURA E 4.6-2

Sugestão: Escreva e resolva uma equação de malha.

Resposta: – 3,67 A.

4.7 *Método das Correntes de Malha com Fontes Dependentes*

Quando um circuito contém uma fonte dependente, a corrente ou tensão de controle da fonte dependente deve ser expressa em função das correntes de malha.

Depois disso, a corrente ou tensão controlada pode ser expressa em função das correntes de malha e as equações de malha podem ser obtidas usando as técnicas descritas nas duas seções anteriores.

EXEMPLO 4.7-2 Equações de Malha e Fontes Dependentes

EXEMPLO INTERATIVO

Determine o valor da tensão medida pelo voltímetro no circuito da Figura 4.7-1*a*.

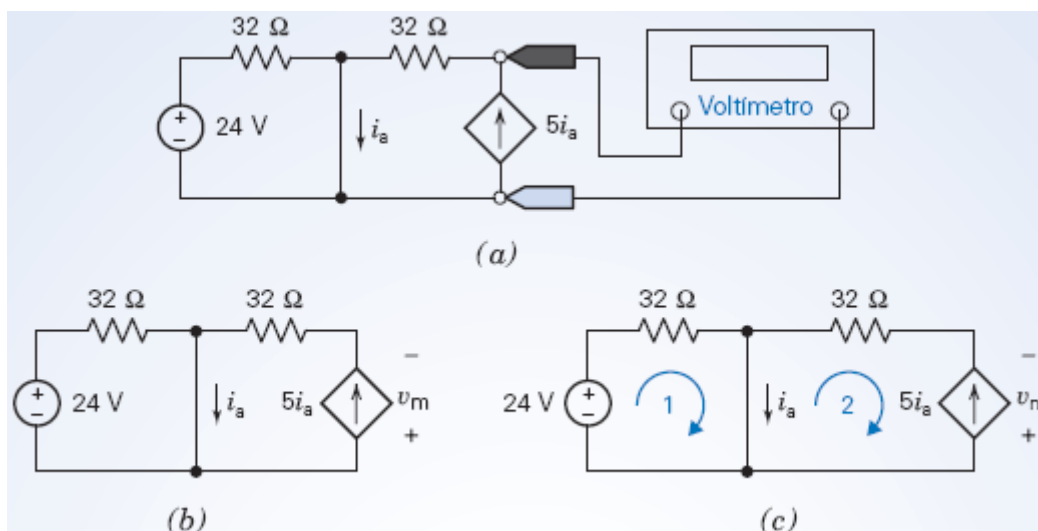



FIGURA 4.7-1 (*a*) O circuito do Exemplo 4.7-1. (*b*) O mesmo circuito com o voltímetro substituído por um circuito aberto. (*c*) O mesmo circuito com as malhas rotuladas.

Solução

A Figura 4.7-1*b* mostra o circuito depois que o voltímetro foi substituído por um circuito aberto equivalente e o símbolo v_m foi introduzido para representar a tensão medida pelo voltímetro. A Figura 4.7-1*c* mostra o circuito depois que as malhas foram rotuladas. Vamos chamar de i_1 e i_2 as correntes de malha das malhas 1 e 2, respectivamente.

A corrente de controle da fonte dependente, i_a, é a corrente em um curto-circuito. Esse curto-circuito é comum às malhas 1 e 2 e pode ser expresso em termos das correntes de malha através da equação

$$i_a = i_1 - i_2$$

A fonte dependente pertence exclusivamente à malha 2. Como o sentido de referência da fonte de corrente dependente não está de acordo com o sentido de referência de i_2, temos:

$$5i_a = -i_2$$

Explicitando i_2, obtemos:

$$i_2 = -5i_a = -5(i_1 - i_2)$$

Assim,

$$-4i_2 = -5i_1 \quad \Rightarrow \quad i_2 = \frac{5}{4}i_1$$

Aplicando a LKT à malha 1, obtemos

$$32i_1 - 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad i_1 = \frac{3}{4}\text{A}$$

Em consequência, o valor de i_2 é

$$i_2 = \frac{5}{4}\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{15}{16}\text{A}$$

Aplicando a LKT à malha 2, obtemos

$$32i_2 - v_m = 0 \;\Rightarrow\; v_m = 32i_2$$

Finalmente,

$$v_m = 32\left(\frac{15}{16}\right) = 30\ \text{V}$$

EXEMPLO 4.7-1 Equações de Malha e Fontes Dependentes

EXEMPLO INTERATIVO

Considere o circuito da Figura 4.7-2*a*. Determine o valor do ganho *A* da FTCC.

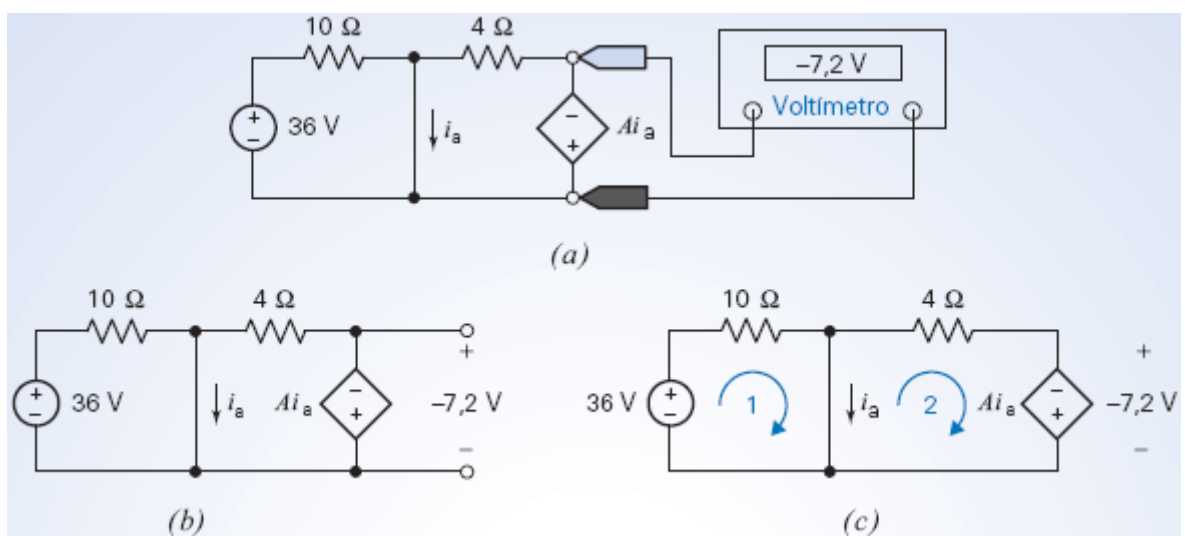



FIGURA 4.7-2 (*a*) O circuito do Exemplo 4.7-2. (*b*) O mesmo circuito com o voltímetro substituído por um circuito aberto. (*c*) O mesmo circuito com as malhas rotuladas.

Solução

A Figura 4.7-2*b* mostra o circuito depois que o voltímetro foi substituído por um circuito aberto equivalente e foi introduzido um símbolo, v_m, para indicar a tensão medida pelo voltímetro. A Figura 4.7-2*c* mostra o circuito depois que as malhas foram numeradas. Vamos chamar de i_1 e i_2 as correntes de malha nas malhas 1 e 2, respectivamente.

A tensão entre os terminais da fonte dependente pode ser representada de duas formas: Ai_a, com o + do sentido de referência na parte inferior, e –7,2 V, com o + na parte superior. Assim,

$$Ai_a = -(-7{,}2) = 7{,}2 \text{ V}$$

A corrente de controle da fonte dependente, i_a, é a corrente em um curto-circuito comum às malhas 1 e 2. Essa corrente pode ser expressa em termos das correntes de malha como

$$i_a = i_1 - i_2$$

Aplicando a LKT à malha 1, obtemos

$$10i_1 - 36 = 0 \;\Rightarrow\; i_1 = 3{,}6 \text{ A}$$

Aplicando a LKT à malha 2, obtemos

$$4i_2 + (-7{,}2) = 0 \;\Rightarrow\; i_2 = 1{,}8 \text{ A}$$

Finalmente,

$$A = \frac{Ai_a}{i_a} = \frac{Ai_a}{i_1 - i_2} = \frac{7{,}2}{3{,}6 - 1{,}8} = 4 \text{ V/A}$$

4.8 *Comparação dos Métodos das Tensões de Nó e das Correntes de Malha*

A análise de um circuito complexo pode ser realizada usando o método das tensões de nó ou o método das correntes de malha. A vantagem de usar esses métodos está na forma sistemática como pode ser obtido o sistema de equações que descreve o circuito.

Em alguns casos, um dos métodos é claramente melhor que o outro. Por exemplo: se o circuito contém apenas fontes de tensão, quase sempre é mais fácil usar o método das correntes de malha. Se o circuito contém apenas fontes de corrente, quase sempre é mais fácil usar o método das tensões de nó.

EXEMPLO 4.8-1 Equações de Malha

EXEMPLO INTERATIVO

Determine o valor da resistência *R* no circuito da Figura 4.8-1.

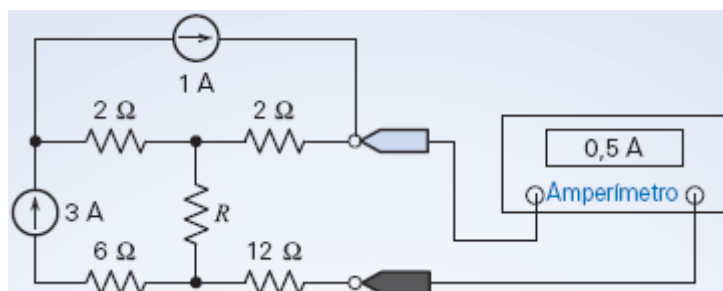



FIGURA 4.8-1 Circuito do Exemplo 4.8-1.

Solução

A Figura 4.8-2*a* mostra o circuito da Figura 4.8-1 depois que o amperímetro foi substituído por um curto-circuito equivalente e foi indicada a corrente medida pelo amperímetro. O circuito pode ser analisado usando o método das equações de malha ou o método das tensões de nó. Para escolher o método a ser usado, contamos o número de nós e o número de malhas. O circuito possui cinco nós. Escolhendo um nó de referência e aplicando a LKC aos outros quatro nós, obtemos um sistema de quatro equações de nó. O circuito possui três malhas. Aplicando a LKT a essas três malhas, obtemos um sistema de três equações de malha. Assim, usando o método das equações de malha em vez do método das tensões de nó para analisar o circuito, podemos trabalhar com um número menor de equações. Além disso, observe que duas das três correntes de malha podem ser determinadas diretamente a partir das correntes das fontes de corrente. Isso mostra que o problema pode ser resolvido com mais facilidade usando o método das correntes de malha. Vamos analisar o circuito escrevendo e resolvendo as equações de malha.

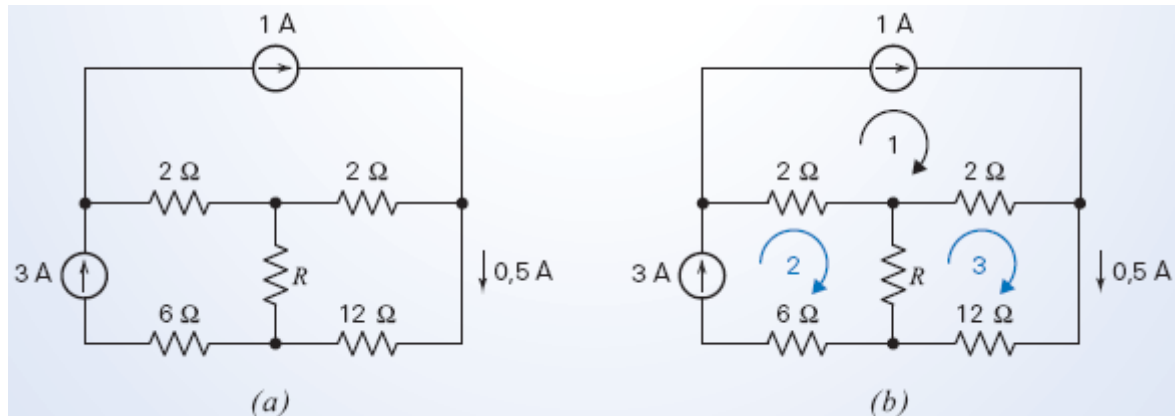



FIGURA 4.8-2 (*a*) O circuito da Figura 4.8-1 com o amperímetro substituído por um curto-circuito. (*b*) O mesmo circuito com as malhas rotuladas.

A Figura 4.8-2*b* mostra o circuito depois que as malhas foram numeradas. Sejam i_1, i_2 e i_3 as correntes de malha nas malhas 1, 2 e 3, respectivamente. Como a corrente de malha i_1 é igual à corrente na fonte de corrente de 1 A, temos:

$$i_1 = 1\text{ A}$$

Como a corrente i_2 é igual à corrente da fonte de corrente de 3 A, temos:

$$i_2 = 3\text{ A}$$

Como a corrente i3 é igual à corrente no curto-circuito que substituiu o amperímetro, temos:

$$i_3 = 0{,}5\text{ A}$$

Aplicando a LKT à malha 3, obtemos:

$$2(i_3 - i_1) + 12(i_3) + R(i_3 - i_2) = 0$$

Substituindo os valores das correntes de malha, obtemos:

$$2(0{,}5 - 1) + 12(0{,}5) + R(0{,}5 - 3) = 0 \;\Rightarrow\; R = 2\,\Omega$$

EXEMPLO 4.8-2 Equações de Nó

Determine o valor da resistência *R* no circuito da Figura 4.8-3.

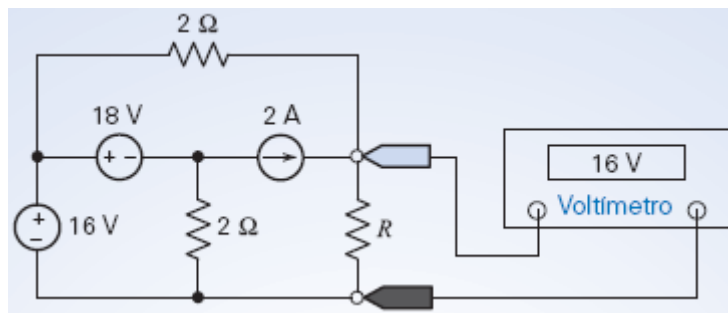



FIGURA 4.8-3 Circuito do Exemplo 4.8-2.

Solução

A Figura 4.8-4*a* mostra o circuito da Figura 4.8-3 depois que o voltímetro foi substituído por circuito aberto equivalente e foi indicada a tensão medida pelo voltímetro. O circuito pode ser analisado usando o método das equações de malha ou o método das tensões de nó. Para escolher o método a ser usado, contamos o número de nós e o número de malhas. O circuito possui quatro nós. Escolhendo um nó de referência e aplicando a LKC aos outros três nós, obtemos um sistema de três equações de nó. O circuito possui três malhas. Aplicando a LKT a essas malhas, obtemos um sistema de três equações de malha. Assim, o número de equações é o mesmo quando usamos o método das equações de malha e quando usamos o método das tensões de nó. Observe que uma das três correntes de malha pode ser determinada diretamente a partir da corrente da fonte de corrente, mas duas das tensões de nó podem ser determinadas diretamente a partir das tensões das fontes de tensão. Isso mostra que o problema pode ser resolvido com mais facilidade usando o método das tensões de nó. Vamos analisar o circuito escrevendo e resolvendo as equações de nó.

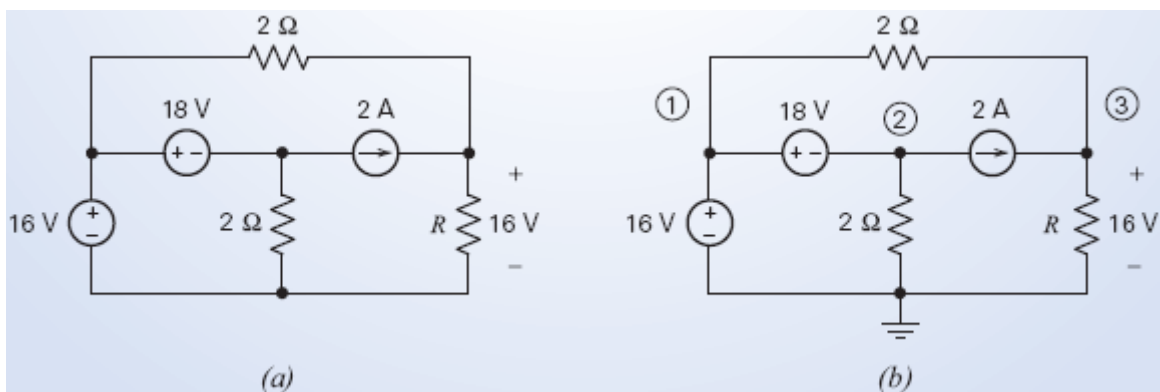



FIGURA 4.8-4 (*a*) O circuito da Figura 4.8-3 com o voltímetro substituído por um circuito aberto. (*b*) O mesmo circuito com os nós rotulados.

A Figura 4.8-4*b* mostra o circuito depois que um nó de referência foi escolhido e os outros nós foram numerados. Sejam v_1, v_2 e v_3 as tensões de nó dos nós 1, 2 e 3, respectivamente. A tensão da fonte de 16 V pode ser expressa em termos das tensões de nó como

$$16 = v_1 - 0 \;\Rightarrow\; v_1 = 16 \text{ V}$$

A tensão da fonte de 18 V pode ser expressa em termos das tensões de nó como

$$18 = v_1 - v_2 \;\Rightarrow\; 18 = 16 - v_2 \;\Rightarrow\; v_2 = -2 \text{ V}$$

Como o voltímetro mede a tensão de nó do nó 3, temos:

$$v_3 = 16 \text{ V}$$

Aplicando a LKC ao nó 3, obtemos:

$$\frac{v_1 - v_3}{2} + 2 = \frac{v_3}{R}$$

Substituindo os valores das tensões de nó, temos:

$$\frac{16-16}{2}+2=\frac{16}{R} \quad \Rightarrow \quad R=8\ \Omega$$

Se o circuito contém fontes de corrente e fontes de tensão, é difícil dizer qual dos métodos é melhor. Um possível critério é comparar o número de equações envolvidas no uso de cada método. Se o circuito possui menos nós do que malhas, pode ser melhor usar o método das tensões de nó. Se o circuito possui menos malhas do que nós, pode ser melhor usar o método das correntes de malha.

Outro ponto a ser considerado na escolha do método é o tipo de informação que se deseja. Se o objetivo é determinar várias correntes, pode ser melhor usar o método das correntes de malha. Não se esqueça, porém, de que o método das correntes de malha só se aplica a circuitos planares.

Em geral, vale a pena perder algum tempo examinando o problema para decidir qual dos dois métodos é o mais adequado antes de iniciar a solução propriamente dita.

4.9 *Análise de Circuitos Usando o MATLAB*

Como vimos, os circuitos que contêm resistores e fontes independentes e dependentes podem ser analisados da seguinte forma:

1. Escrevendo um sistema de equações de nó ou de malha
2. Resolvendo o sistema de equações

Nesta seção, vamos usar o programa de computador MATLAB para resolver o sistema de equações.

Considere o circuito da Figura 4.9-1*a*. O circuito contém um potenciômetro. Na Figura 4.9-1*b*, o potenciômetro foi substituído por um modelo. R_p é a resistência do potenciômetro. O parâmetro *a* pode variar de 0 a 1, dependendo da posição do cursor. As resistências R_4 e R_5 são descritas pelas equações

$$R_4 = aR_p \tag{4.9-1}$$

e

$$R_5 = (1-a)R_p \tag{4.9-2}$$

Nosso objetivo é analisar o circuito para determinar de que forma a tensão de saída varia com a posição do cursor do potenciômetro.

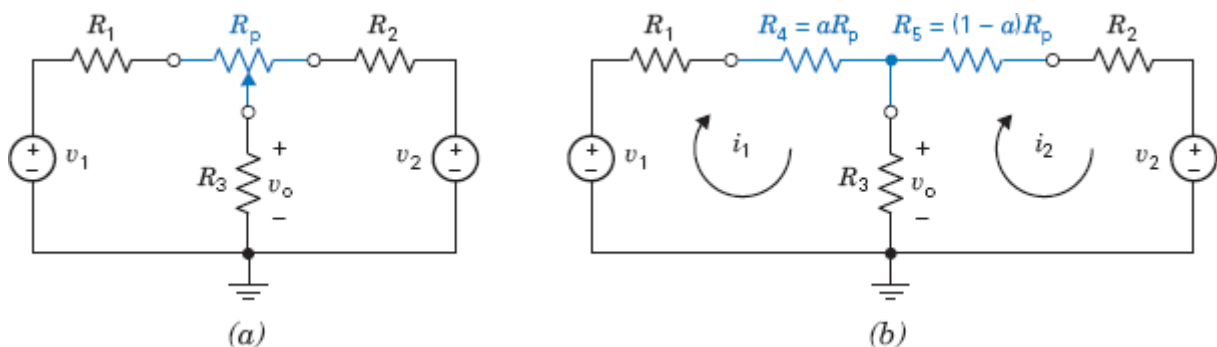



FIGURA 4.9-1 (*a*) Circuito com um potenciômetro e (*b*) circuito equivalente no qual o potenciômetro foi substituído por um modelo ($0 < a < 1$).

As equações de malha do circuito da Figura 4.9-1*b* são

$$\begin{aligned} R_1 i_1 + R_4 i_1 + R_3(i_1 - i_2) - v_1 &= 0 \\ R_5 i_2 + R_2 i_2 + [v_2 - R_3(i_1 - i_2)] &= 0 \end{aligned} \tag{4.9-3}$$

Essas equações podem ser escritas na seguinte forma:

$$\begin{aligned}(R_1 + R_4 + R_3)i_1 - R_3 i_2 &= \quad v_1 \\ -R_3 i_1 + (R_5 + R_2 + R_3)i_2 &= -v_2\end{aligned} \tag{4.9-4}$$

Substituindo as Eqs. 4.9-1 e 4.9-2 na Eq. 4.9-4, obtemos:

$$\begin{aligned}(R_1 + aR_\text{p} + R_3)i_1 - R_3 i_2 &= \quad v_1 \\ -R_3 i_1 + [(1-a)R_\text{p} + R_2 + R_3]i_2 &= -v_2\end{aligned} \tag{4.9-5}$$

Usando matrizes, a Equação 4.9-5 pode ser escrita na forma

$$\begin{bmatrix} R_1 + aR_\text{p} + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & (1-a)R_\text{p} + R_2 + R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ -v_2 \end{bmatrix} \tag{4.9-6}$$

Os valores de i_1 e i_2 podem ser obtidos usando o programa MATLAB para resolver a Eq. 4.9-6. Em seguida, a tensão de saída pode ser calculada usando a equação

$$v_\text{o} = R_3(i_1 - i_2) \tag{4.9-7}$$

A Figura 4.9-2 mostra o arquivo de entrada do MATLAB. O parâmetro *a* varia de 0 a 1 em incrementos de 0,05. Para cada valor de *a*, o MATLAB resolve a Eq. 4.96 e usa a Eq. 4.9-7 para calcular a tensão de saída. Finalmente, o MATLAB produz o gráfico de v_o em função de *a* que aparece na Figura 4.9-3.

```
% malha.m resolve equações de malha

%-----------------------------------------------------------
% Entrar com os valores dos parâmetros do circuito.
%-----------------------------------------------------------
               % parâmetros do circuito
R1=1000;       % ohms
R2=1000;       % ohms
R3=5000;       % ohms
V1= 15;        % volts
V2=-15;        % volts

               % parâmetros do potenciômetro
Rp=20e3;       % ohms

%----------------------------------------------------------
% o parâmetro a varia de 0 a 1 em incrementos de 0,05.
%----------------------------------------------------------

a=0:0.05:1;    % adimensional

for k=1:length(a)
    %-------------------------------------------------------
    % Seguem as equações de malha, RI = V:
    %-------------------------------------------------------

    R = [R1+a(k)*Rp+R3        -R3;                % ------
             -R3       (1-a(k))*Rp+R2+R3];        % eqs.
    V = [ V1;                                     % 4.9-6
         -V2];                                    % ------
    %-------------------------------------------------------
    % Comando do MATLAB para resolver a equação de malha:
    %-------------------------------------------------------
    I = R\V;
    %-------------------------------------------------------
    % Calcular a tensão de saída a partir das correntes de malha.
    %-------------------------------------------------------

    Vo(k) = R3*(I(1)-I(2));    % eq. 4.9-7

end

%-----------------------------------------------------------
% Plotar Vo em função de a
%-----------------------------------------------------------
plot (a, Vo)
axis ([0 1 -15 15])
xlabel ('a, adimensional')
ylabel ('Vo, V')
```

FIGURA 4.9-2 Arquivo de entrada do MATLAB usado para analisar o circuito da Figura 4.9-1.

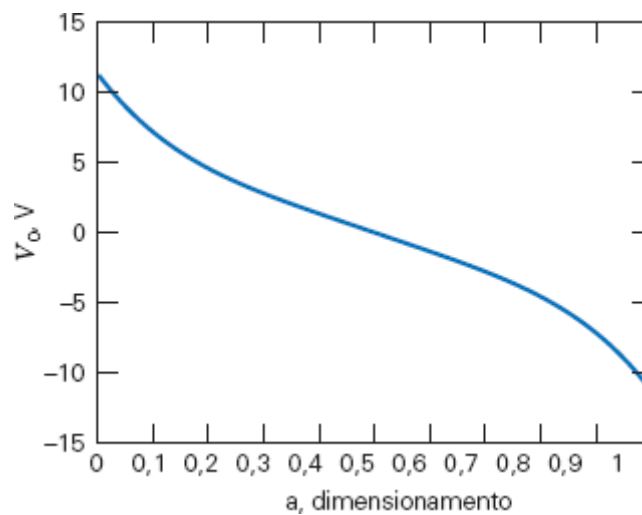



FIGURA 4.9-3 Gráfico de v_o em função de a para o circuito da Figura 4.9-1, plotado usando o programa MATLAB.

4.10 *Uso do PSpice para Determinar Tensões de Nó e Correntes de Malha*

Para determinar tensões de nó em um circuito de cc usando o PSpice, fazemos o seguinte:

1. Desenhamos o circuito no espaço de trabalho OrCAD Capture.
2. Especificamos uma simulação do tipo Bias Point.
3. Executamos a simulação.

Depois de executada a simulação, o PSpice indica os valores das tensões de nó no diagrama do circuito.

Um passo adicional é necessário para obter os valores das correntes de malha usando o PSpice. O PSpice não indica o valor das correntes de malha, mas fornece o valor da corrente nas fontes de tensão. Como uma fonte de tensão de 0 V é equivalente a um curto-circuito, podemos introduzir fontes de tensão de 0 V no circuito sem alterar o valor das correntes de malha. Podemos introduzir essas fontes no circuito de tal forma que as correntes nas fontes sejam as correntes de malha. Assim, para determinar as correntes de malha em um circuito de cc usando o PSpice, fazemos o seguinte:

1. Desenhamos o circuito no espaço de trabalho OrCAD Capture.
2. Introduzimos fontes de tensão de 0 V para medir as correntes de malha.
3. Especificamos uma simulação do tipo Bias Point.
4. Executamos a simulação.

O programa PSpice fornece os valores das correntes nas fontes de tensão no arquivo de saída.

EXEMPLO 4.10-1 Uso do PSpice para Determinar Tensões de Nó e Correntes de Malha

Use o PSpice para determinar os valores das tensões de nó e das correntes de malha no circuito da Figura 4.10-1.

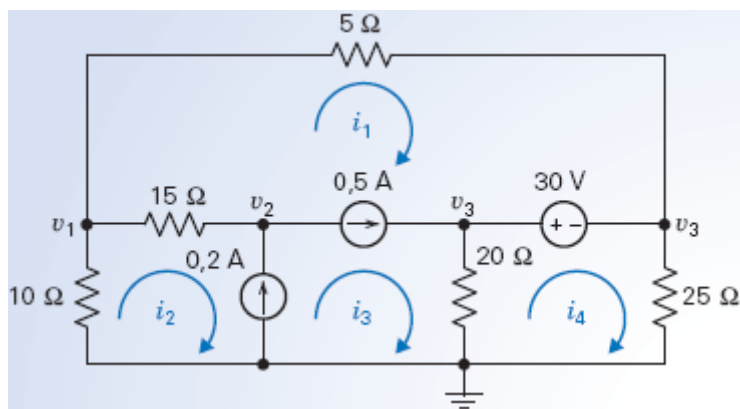



FIGURA 4.10-1 Circuito com tensões de nó v_1, v_2, v_3 e v_4 e correntes de malha i_1, i_2, i_3 e i_4.

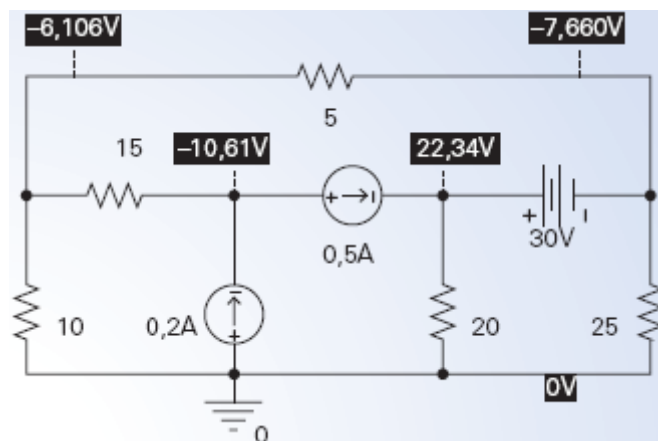



FIGURA 4.10-2 O circuito da Figura 4.10-1 desenhado do espaço de trabalho OrCAD. Os números brancos em fundo preto são os valores das tensões de nó.

Solução

A Figura 4.10-2 mostra o resultado obtido quando desenhamos o circuito no espaço de trabalho OrCAD (veja o Apêndice A) e realizamos uma simulação do tipo Bias Point. (Selecione PSpice\New Simulation Profile no menu principal do programa OrCAD Capture, escolha um nome para a simulação e, em seguida, selecione Bias Point na lista Analysis Type da caixa de diálogo Simulation Settings para especificar uma simulação do tipo Bias Point. Selecione PSpice\Run no menu OrCad Capture para executar a simulação.) O PSpice indica os valores das tensões de nó usando números brancos em fundo preto. Comparando as Figuras 4.10-1 e 4.10-2, vemos que as tensões de nó são

$$v_1 = -6{,}106\text{ V},\ v_2 = -10{,}61\text{ V},\ v_3 = 22{,}34\text{ V e } v_4 = -7{,}660\text{ V.}$$

A Figura 4.10-3 mostra o circuito da Figura 4.10-2 depois da introdução de fontes de tensão de 0 V em todas as malhas simples. As correntes nessas fontes de 0 V são iguais às correntes de malha assinaladas na Figura 4.10-1. Em particular, a fonte V2 é usada para medir a corrente de malha i_1, a fonte V3 é usada para medir a corrente de malha i_2 e a fonte V4 é usada para medir a corrente de malha i_3 e a fonte V5 é usada para medir a corrente de malha i_4.

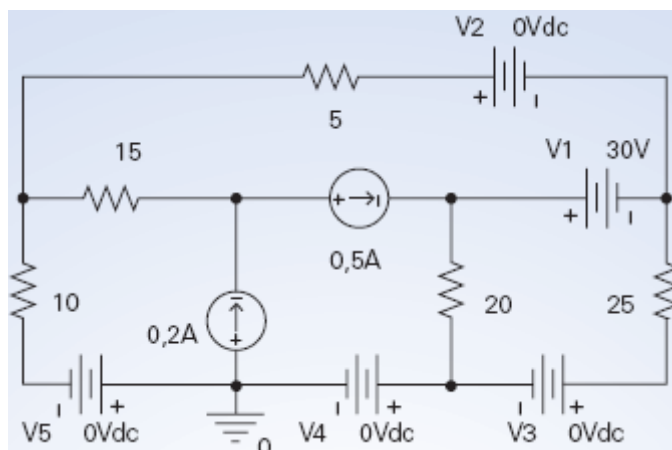



FIGURA 4.10-3 O circuito da Figura 4.10-1 desenhado no espaço de trabalho OrCAD com fontes de tensão de 0 V introduzidas para medir as correntes de malha.

Depois que a simulação é executada novamente (selecionando PSpice\Run no menu OrCAD Capture), o programa abre uma janela Schematics. Selecione View\Output File no menu da janela Schematics. Role para baixo o arquivo de saída para observar as correntes nas fontes de tensão:

```
VOLTAGE SOURCE CURRENTS
NAME           CURRENT

V_V1          - 6.170E - 01
V_V2            3.06E  - 01
V_V3          - 3.064E - 01
V_V4            8.106E - 01
V_V5            6.106E - 01

TOTAL POWER DISSIPATION   1.85E + 01   WATTS

        JOB CONCLUDED
```

O programa PSpice usa a convenção passiva para a corrente e tensão em todos os componentes do circuito, incluindo das fontes de tensão. Observando os sinais + e – dos símbolos das fontes de tensão na Figura 4.10-3, vemos que as correntes fornecidas pelo PSpice têm o sentido da esquerda para a direita nas fontes V1 e V2 e o sentido da direita para a esquerda nas fontes V3, V4 e V5. Em particular, as correntes de malha são

$$i_1 = 0{,}3106\ \text{A},\ i_2 = 0{,}6106\ \text{A},\ i_3 = 0{,}8106\ \text{A e } i_4 = -0{,}3064\ \text{A}.$$

4.11 *Como Podemos Testar . . . ?*

Os engenheiros são frequentemente encarregados de verificar se a solução de um problema está correta. As soluções de problemas de projeto, por exemplo, devem ser verificadas para confirmar que todas as especificações estão sendo atendidas. Além disso, os resultados obtidos com o auxílio de computadores devem ser revistos para evitar possíveis erros na digitação dos dados e as afirmações dos vendedores a respeito dos seus produtos devem ser confirmadas.

Os estudantes de engenharia muitas vezes também precisam verificar se os resultados que obtiveram estão corretos. Às vezes falta muito pouco tempo para terminar um exame e é importante poder identificar rapidamente as questões que precisam ser refeitas.

Os exemplos a seguir ilustram algumas técnicas que podem ser usadas para verificar se as soluções de problemas do tipo discutido neste capítulo estão corretas.

EXEMPLO 4.11-1 Como Podemos Testar as Tensões de Nó?

O circuito da Figura 4.11-1*a* foi analisado usando o programa PSpice. O arquivo de saída do PSpice, Figura 4.11-1*b*, fornece as tensões de nó do circuito. **Como podemos testar** se essas tensões de nó estão corretas?

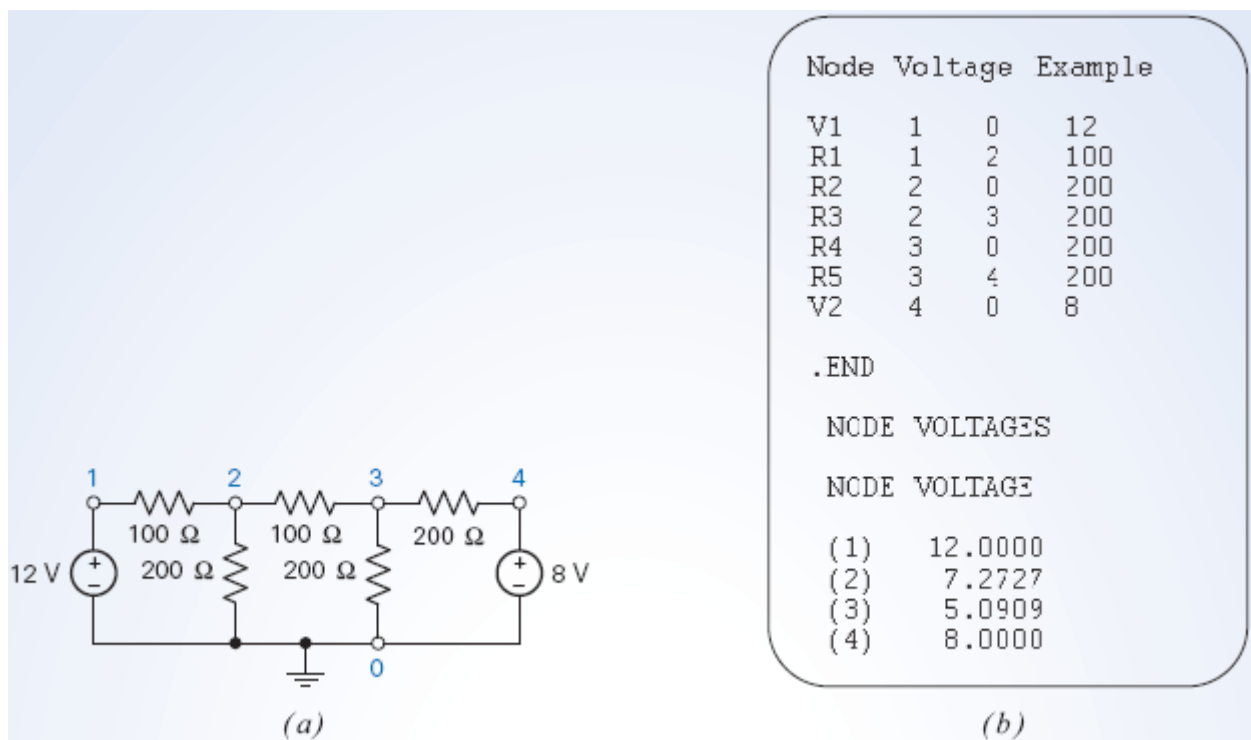



FIGURA 4.11-1 (*a*) Circuito e (*b*) tensões de nó calculadas usando o PSpice. O nó de baixo foi escolhido como nó de referência, como indicam o símbolo de terra e o número 0. As tensões e resistências estão em volts e ohms, respectivamente.

Solução

A equação de nó correspondente ao nó 2 é

$$\frac{V(2)-V(1)}{100}+\frac{V(2)}{200}+\frac{V(2)-V(3)}{100}=0$$

em que, por exemplo, $V(2)$ é a tensão de nó do nó 2. Quando as tensões de nó da Figura 4.11-1*b* são substituídas no lado esquerdo da equação, o resultado é o seguinte:

$$\frac{7,2727-12}{100}+\frac{7,2727}{200}+\frac{7,2727-5,0909}{100}=0,011$$

O lado direito da equação deveria ser 0 em vez de 0,011. Parece que algo está errado. Uma corrente de 0,011 A pode ser considerada desprezível? Neste caso, provavelmente não. Se as tensões de nó estivesse corretas, as correntes nos resistores de 100 Ω seriam 0,047 A e 0,022 A. A corrente de 0,011 A não parece desprezível em comparação com as correntes de 0,047 A e 0,022 A.

Será que o PSpice calculou incorretamente as tensões de nó? Isso é pouco provável. Entretanto, pode ser que o arquivo de entrada do PSpice contenha erros. Neste caso, o valor da resistência ligada entre os nós 2 e 3 foi especificado erroneamente como 200 Ω. Quando o valor da resistência é mudado para 100 Ω, o PSpice calcula as novas tensões de nó

$$v(1)=12,0,\ v(2)=7,0,\ v(3)=5,5,\ v(4)=8,0$$

Substituindo essas tensões na equação de nó, obtemos

$$\frac{7,0-12,0}{100}+\frac{7,0}{200}+\frac{7,0-5,5}{100}=0,0$$

e, portanto, as novas tensões de nó satisfazem a equação de nó correspondente ao nó 2.

EXEMPLO 4.11-2 Como Podemos Testar as Correntes de Malha?

O circuito da Figura 4.11-2*a* foi analisado usando o programa PSpice. O arquivo de saída do PSpice, Figura 4.11-2*b*, fornece as correntes de malha do circuito. **Como podemos testar** se essas correntes de malha estão corretas?

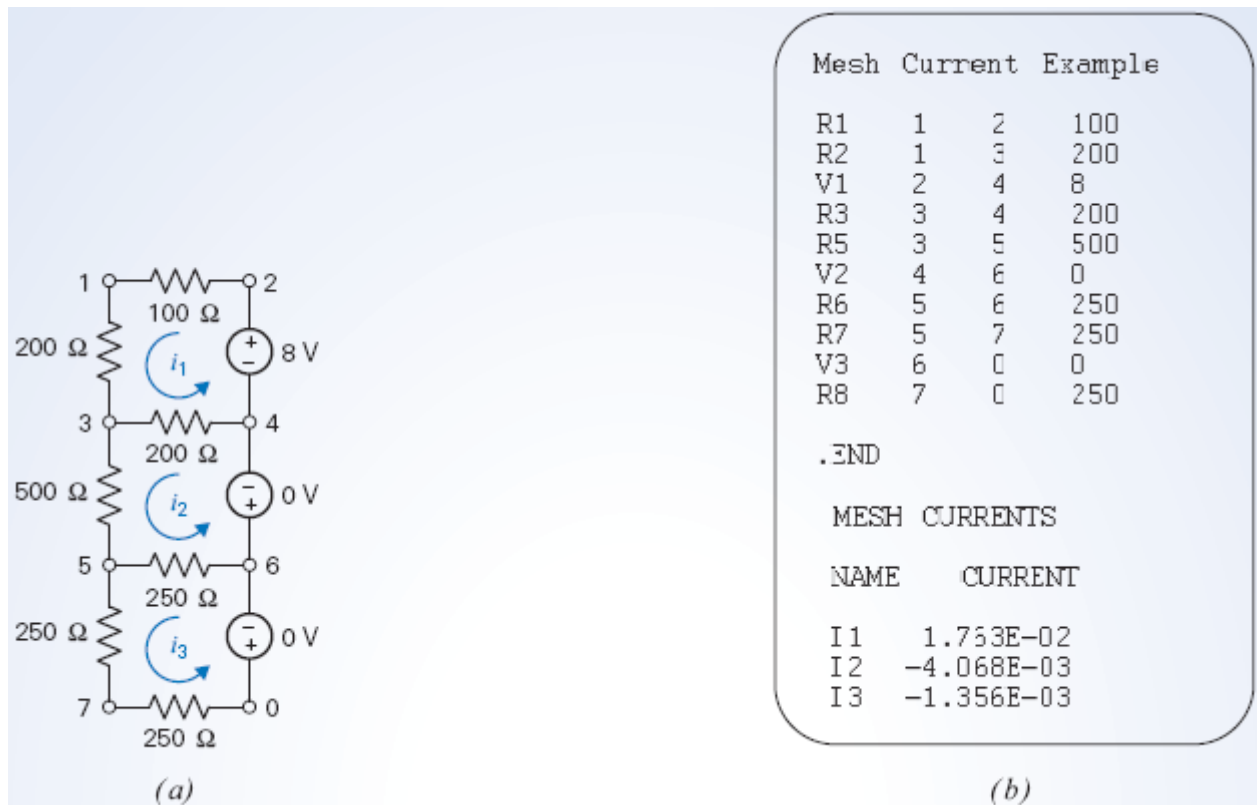



FIGURA 4.11-2 (a) Circuito e (b) correntes de malha calculadas usando o PSpice. As tensões e resistências estão em volts e ohms, respectivamente.

(O arquivo de saída do PSpice contém as correntes nas fontes de tensão. Lembre-se de que o PSpice usa a convenção passiva, de modo que a corrente na fonte de 8 V é $-i_1$ e não i_1. As duas fontes de 0 V foram introduzidas para incluir as correntes de malha i_2 e i_3 no arquivo de saída.)

Solução

A equação de malha correspondente à malha 2 é

$$200(i_2 - i_1) + 500i_2 + 250\,(i_2 - i_3) = 0$$

Quando as correntes de malha da Figura 4.11-2*b* são substituídas no lado esquerdo da equação, o resultado é o seguinte:

$$200(-\,0{,}004068 - 0{,}01763) + 500(-\,0{,}004068) + 250(-0{,}004068 - (-\,0{,}001356)) = 1{,}629$$

O lado direito da equação deveria ser 0 em vez de 1,629. Parece que algo está errado. O mais provável é que o arquivo de entrada do PSpice contenha um erro. Esse é realmente o caso: os nós das duas fontes de 0 V foram especificados na ordem errada. Lembre-se de que o primeiro nó deve ser o nó positivo da fonte de tensão. Quando o erro é corrigido, o PSpice fornece as seguintes correntes:

$$i_1 = 0{,}01763,\ i_2 = 0{,}004068,\ i_3 = 0{,}001356$$

Usando esses valores na equação de malha, obtemos:

$$200(0{,}004068 - 0{,}01763) + 500(0{,}004068) + 250(0{,}004068 - 0{,}001356) = 0{,}0$$

e, portanto, as novas correntes satisfazem a equação de malha correspondente à malha 2.

4.12 EXEMPLO DE PROJETO Indicador do Ângulo de um Potenciômetro

Necessita-se de um circuito para medir e indicar a posição angular do eixo de um potenciômetro. A posição angular, θ, irá variar de –180º a 180º.

A Figura 4.12-1 mostra um possível circuito. As fontes de alimentação de +15 V e –15 V, o potenciômetro e os resistores R_1 e R_2 são usados para obter uma tensão, v_i, proporcional a θ. O amplificador é usado para mudar a constante de proporcionalidade para que haja uma relação simples entre θ e a tensão v_o mostrada pelo voltímetro. Neste exemplo, a saída do amplificador será tal que

$$v_o = k \cdot \theta \text{ em que } k = 0{,}1 \frac{\text{volt}}{\text{grau}} \tag{4.12-1}$$

e, portanto, o valor de θ pode ser obtido multiplicando por 10 a leitura do voltímetro. Assim, por exemplo, se a leitura do voltímetro for –7,32 V, isso indica que $\theta = -73{,}2º$.

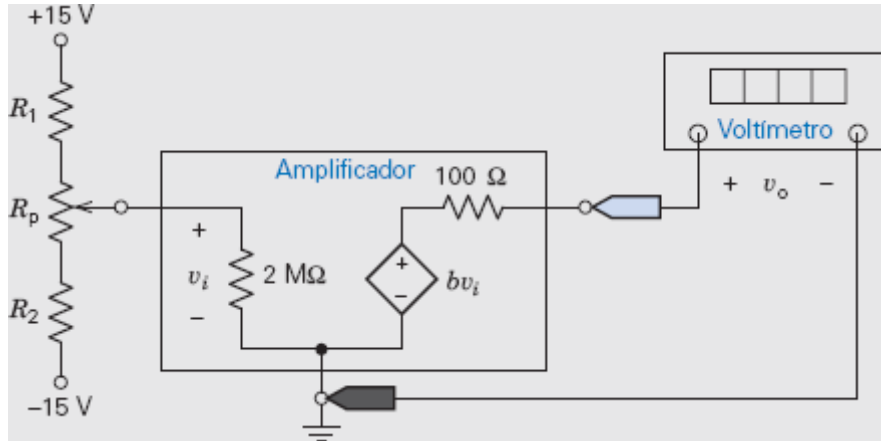



FIGURA 4.12-1 Um possível circuito para medir e indicar a posição angular do eixo de um potenciômetro.

Descreva a Situação e as Hipóteses

O diagrama da Figura 4.12-2 foi obtido modelando as fontes de alimentação como fontes ideais, o voltímetro como um circuito aberto e o potenciômetro como dois resistores. O parâmetro a do modelo do potenciômetro varia de 0 a 1 quando θ varia de –180º a 180º. Isso significa que

$$a = \frac{\theta}{360^\circ} + \frac{1}{2} \tag{4.12-2}$$

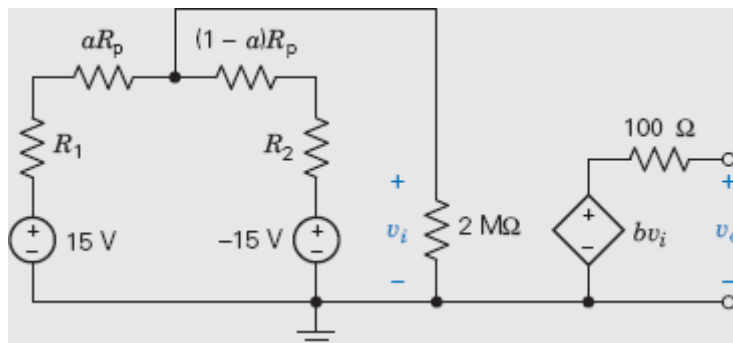



FIGURA 4.12-2 Diagrama do circuito contendo modelos das fontes de alimentação, do voltímetro e do potenciômetro.

Explicitando θ, obtemos:

$$\theta = \left(a - \frac{1}{2}\right) \cdot 360^\circ \tag{4.12-3}$$

Estabeleça a Meta

Especificar valores dos resistores R_1 e R_2, da resistência R_p do potenciômetro e do ganho b do amplificador tais que a tensão do medidor, v_o, esteja relacionada ao ângulo θ pela Eq. 4.12-1.

Formule um Plano

Analisar o circuito da Figura 4.12-2 para determinar a relação entre v_i e θ. Escolher valores de R_1, R_2 e R_p. Usar esses valores para simplificar a relação entre v_i e θ. Se for possível, calcular o valor de b para o qual a tensão medida, v_o, está relacionada ao ângulo θ pela Eq. 4.12-1. Se não for possível, mudar os valores de R_1, R_2 e R_p e tentar novamente.

Execute o Plano

O circuito foi redesenhado na Figura 4.12-3. Uma única equação de nó é suficiente para expressar a relação entre v_i e θ:

$$\frac{v_i}{2\ \text{M}\Omega} + \frac{v_i - 15}{R_1 + aR_p} + \frac{v_1 - (-15)}{R_2 + (1-a)R_p} = 0$$

Explicitando v_i, obtemos:

$$v_i = \frac{2\ \text{M}\Omega(R_p(2a-1) + R_1 - R_2)15}{(R_1 + aR_p)(R_2 + (1-a)R_p) + 2\ \text{M}\Omega(R_1 + R_2 + R_p)} \quad (4.12\text{-}4)$$

Esta equação é muito complicada. Vamos impor algumas restrições a R_1, R_2 e R_p que permitam simplificá-la. Em primeiro lugar, fazemos $R_1 = R_2 = R$. Em segundo lugar, exigimos que R e R_p sejam muito menores que 2 MΩ (supomos, por exemplo, que $R < 20$ kΩ e $R_p < 20$ kΩ). Nesse caso,

$$(R + aR_p)(R + (1-a)R_p) \ll 2\ \text{M}\Omega(2R + R_p)$$

Esta desigualdade mostra que o primeiro termo do denominador do lado esquerdo da Eq. 4.12-4 é desprezível em comparação com o segundo. Nesse caso, a Eq. 4.12-4 pode ser simplificada para

$$v_1 = \frac{R_p(2a-1)15}{2R + R_p}$$

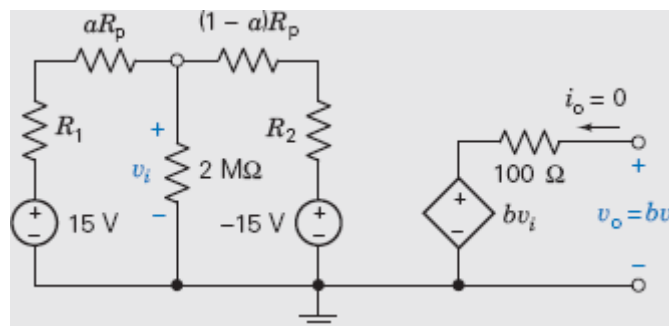



FIGURA 4.12-3 Outro desenho do mesmo circuito mostrando a relação entre v_o e v_i.

Em seguida, usando a Eq. 4.12-3, obtemos:

$$v_i = \left(\frac{R_p}{2R + R_p}\right)\left(\frac{15\ \text{V}}{180°}\right)\theta$$

Está na hora de escolher os valores de R e R_p. Fazendo $R = 5$ kΩ e $R_p = 10$ kΩ, temos:

$$v_i = \left(\frac{7{,}5\ \text{V}}{180°}\right)$$

De acordo com a Figura 4.12-2, a saída do amplificador é dada por

$$v_o = bv_1 \quad (4.12\text{-}5)$$

ou

$$v_o = b\left(\frac{7{,}5\ \text{V}}{180°}\right)\theta$$

Comparando esta equação com a Eq. 4.12-1, temos:

$$b\left(\frac{7{,}5\ \text{V}}{180°}\right) = 0{,}1\frac{\text{volt}}{\text{grau}}$$

ou

$$b = \frac{180}{7{,}5}(0{,}1) = 2{,}4$$

O circuito final aparece na Figura 4.12-4.

Verifique se a Solução Proposta Está Correta

Para verificar se o circuito foi bem projetado, supomos que $\theta = 150°$. De acordo com a Eq. 4.12-2, temos:

$$a = \frac{150°}{360°} + \frac{1}{2} = 0{,}9167$$

Usando a Eq. 4.12-4, obtemos:

$$v_i = \frac{2\ \text{M}\Omega\ (10\ \text{k}\Omega\ (2\times 0{,}9167 - 1))15}{(5\ \text{k}\Omega + 0{,}9167\times 10\ \text{k}\Omega)\ (5\ \text{k}\Omega + (1-0{,}9167)\ 10\ \text{k}\Omega) + 2\ \text{M}\Omega\ (2\times 5\ \text{k}\Omega + 10\ \text{k}\Omega)} = 6{,}24$$

Finalmente, a Eq. 4.12-5 mostra que a leitura do voltímetro será

$$v_o \times 2{,}4 \cdot 6{,}24 = 14{,}98$$

Essa leitura será interpretada como indicando que o ângulo é

$$\theta = 10 \cdot v_o = 149{,}8°$$

que é o valor correto com uma precisão de três algarismos significativos.

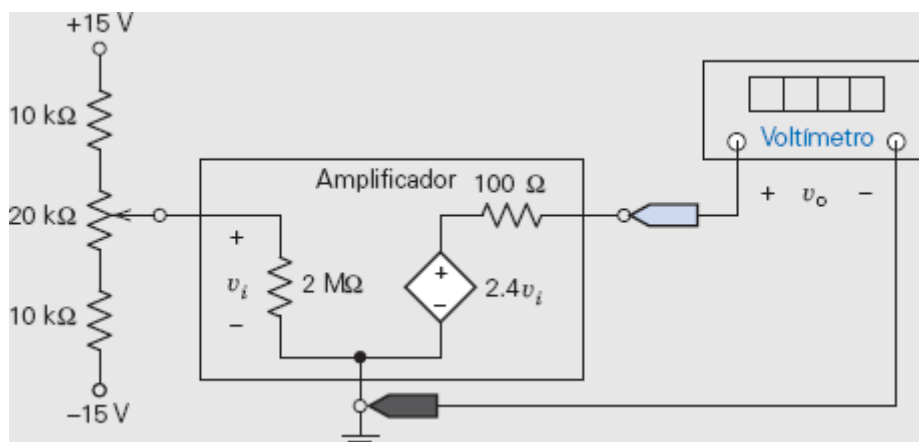



FIGURA 4.12-4 O circuito final.

4.13 RESUMO

- No método das tensões de nó para análise de circuitos, identificamos os nós de um circuito, ou seja, os pontos de ligação entre dois ou mais componentes. Se o circuito é formado apenas por resistores e fontes de corrente, o seguinte processo pode ser usado para obter as equações de nó:
  1. Escolhemos um dos nós como nó de referência e rotulamos as tensões de nó para todos os outros nós.
  2. Expressamos as correntes dos componentes em função das tensões de nó. A Figura 4.13-1*a* ilustra a relação entre a corrente e as tensões nos nós de cada resistor.
  3. Aplicamos a LKC a todos os nós, exceto o nó de referência. Com isso, obtemos um sistema de equações cuja solução são as tensões dos nós. Uma vez conhecidas as tensões dos nós, todas as tensões e correntes do circuito podem ser calculadas.
- Se o circuito possui fontes de tensão, é possível simplificar o uso do método das tensões de nó recorrendo ao conceito de supernó. O supernó é um nó ampliado formado por dois nós ligados por uma fonte cuja tensão é conhecida. Se uma fonte de tensão de valor v_s está ligada entre um nó q e o nó de referência, podemos fazer $v_q = v_s$ e escrever as equações da LKC para os nós restantes.
- Se o circuito contém uma fonte dependente, primeiro expressamos a tensão ou corrente de controle da fonte dependente em função das tensões de nó. Em seguida, expressamos a tensão ou corrente controlada em função das tensões de nó. Finalmente, aplicamos a LKC aos nós e supernós.
- No método das correntes de malha para análise de circuitos, aplicamos a LKT às malhas de um circuito planar. Se o circuito é formado apenas por resistores e fontes de tensão, o seguinte processo pode ser usado para obter as equações de malha:
  1. Rotulamos as correntes de malha.
  2. Expressamos as tensões nos componentes em função das correntes de malha. A Figura 4.13-1*b* ilustra a relação entre a tensão em um resistor e as correntes nas malhas a que pertence o resistor.
  3. Aplicamos a LKT a todas as malhas. Com isso obtemos um sistema de equações cuja solução são correntes de malha. Uma vez conhecidas as correntes de malha, todas as tensões e correntes do circuito podem ser calculadas.
- Se o circuito possui fontes de corrente comuns a duas malhas vizinhas, podemos simplificar o uso do método das correntes de malha recorrendo ao conceito de supermalha. A supermalha é uma malha ampliada formada por duas malhas vizinhas. Se uma fonte de corrente de valor i_s pertence a apenas uma certa malha q, podemos fazer $i_q = i_s$ e escrever as equações da LKT para as malhas restantes.
- Se o circuito contém uma fonte dependente, primeiro expressamos a tensão ou corrente de controle da fonte dependente em função das correntes de malha. Em seguida, expressamos a tensão ou corrente controlada em função das correntes de malha. Finalmente, aplicamos a LKT às malhas e supermalhas.
- A análise de qualquer circuito pode ser realizada usando o método das tensões de nó ou o método das correntes de malha. Entretanto, em um circuito com um número menor de equações de nó que de equações de malha, é mais fácil trabalhar com o método das tensões de nó. Por outro lado, em um circuito com um número menor de equações de malha que de equações de nó, é mais fácil trabalhar com o método das correntes de malha.
- O uso do programa MATLAB facilita bastante a solução das equações de nó e de malha.

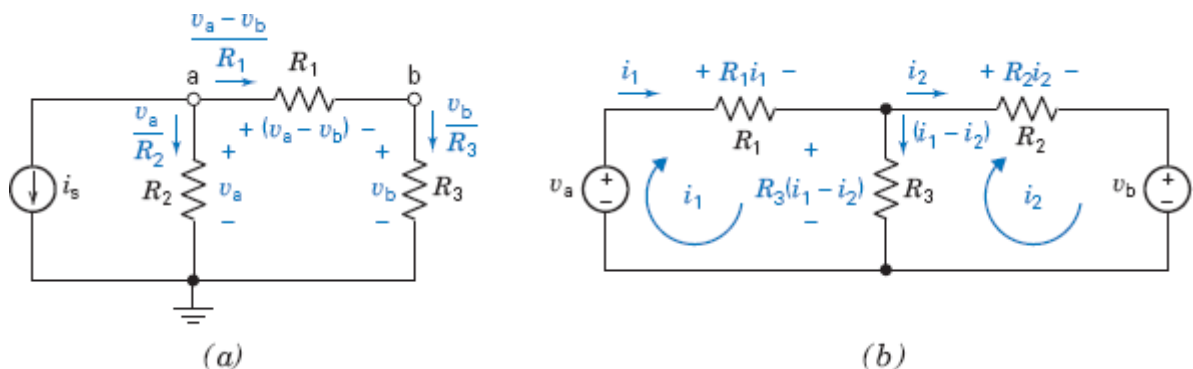



FIGURA 4.13-1 Correntes e tensões expressas (*a*) em função das tensões de nó e (*b*) em função das correntes de malha.

PROBLEMAS

Seção 4.2 Método das Tensões de Nó com Fontes de Corrente Independentes

P 4.2-1 As tensões de nó do circuito da Figura P 4.2-1 são $v_1 = -4$ V e $v_2 = 2$ V. Determine o valor de i, a corrente da fonte de corrente.

Resposta: $i = 1{,}5$ A

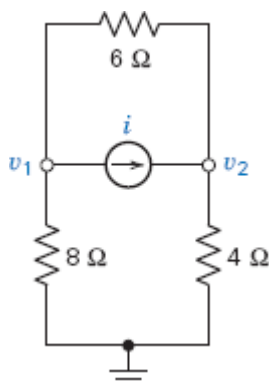



Figura P 4.2-1

P 4.2-2 Determine as tensões de nó do circuito da Figura P 4.2-2.

Resposta: $v_1 = 2$ V, $v_2 = 30$ V e $v_3 = 24$ V

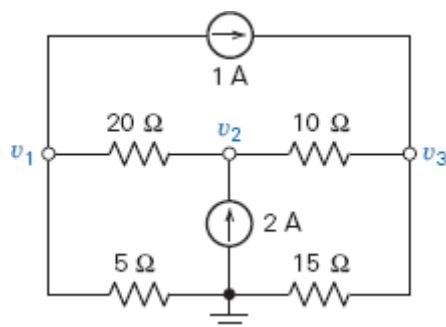



Figura P 4.2-2

P 4.2-3 Os nós do circuito da Figura P 4.2-3 estão indicados por círculos numerados. Determine o valor das tensões de nó correspondentes, v_1 e v_2.

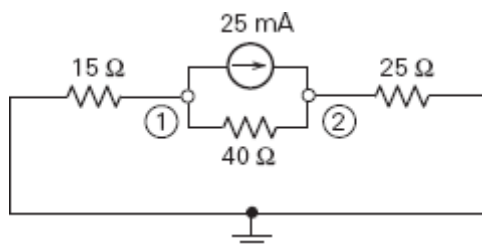



Figura P 4.2-3

P 4.2-4 Considere o circuito da Figura P 4.2-4. Determine o valor das resistências R_1 e R_2 para que as tensões v_1 e v_2 sejam $v_1 = 1$ V e $v_2 = 2$ V.

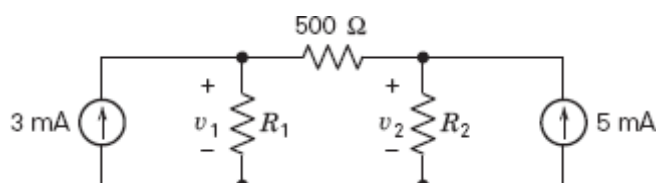



Figura P 4.2-4

P 4.2-5 Determine a tensão v no circuito da Figura P 4.2-5.

Resposta: v = 21,7 mV

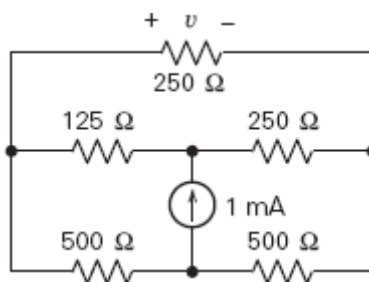



Figura P 4.2-5

P 4.2-6 Simplifique o circuito da Figura P 4.2-6 substituindo os resistores em série e em paralelo por resistores equivalentes; em seguida, analise o circuito simplificado escrevendo e resolvendo equações de nó. (*a*) Determine as potências fornecidas pelas fontes de corrente. (*b*) Determine a potência recebida pelo resistor de 12 Ω.

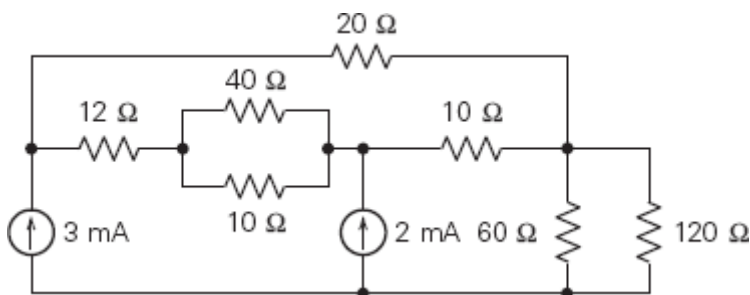



Figura P 4.2-6

P 4.2-7 As tensões de nó do circuito da Figura P 4.2-7 são v_a= 7 V e v_b = 10 V. Determine o valor da corrente da fonte de corrente, i_s, e da resistência, R.

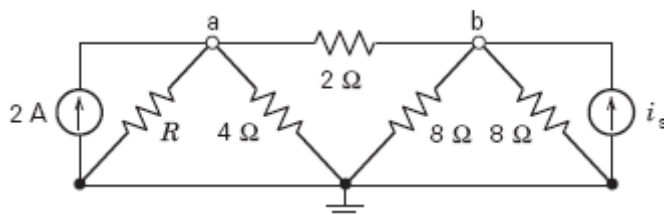



Figura P 4.2-7

P 4.2-8 Os nós do circuito Figura P 4.2-8 estão indicados por círculos numerados. As tensões de nó correspondentes são v_1 e v_2. A equação das tensões de nó que representa o circuito é

$$\begin{bmatrix} 0{,}225 & -0{,}125 \\ -0{,}125 & 0{,}125 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(a) Determine o valor de R e I_s na Figura P 4.2-8.

(b) Determine o valor da potência fornecida pela fonte de corrente de 3 A.

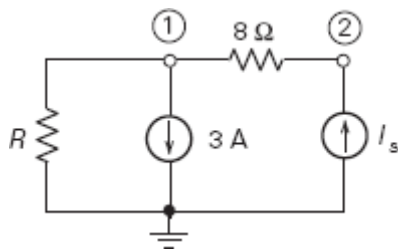



Figura P 4.2-8

Seção 4.3 Método das Tensões de Nó com Fontes de Corrente e de Tensão Independentes

P 4.3-1 O voltímetro da Figura P 4.3-1 mede v_c, a tensão de nó do nó c. Determine o valor de v_c.

Resposta: $v_c = 2$ V

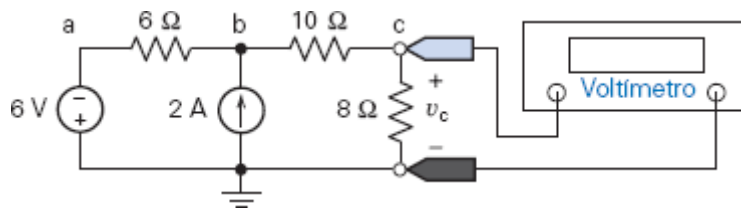



Figura P 4.3-1

P 4.3-2 As tensões v_a, v_b, v_c e v_d da Figura P 4.3-2 são as tensões de nó correspondentes aos nós a, b, c e d. A corrente i é a corrente em um curto-circuito ligado entre os nós b e c. Determine o valor de v_a, v_b, v_c, v_d e i.

Resposta: $v_a = -12$ V, $v_b = v_c = 4$ V, $v_d = -4$ V e $i = 2$ mA

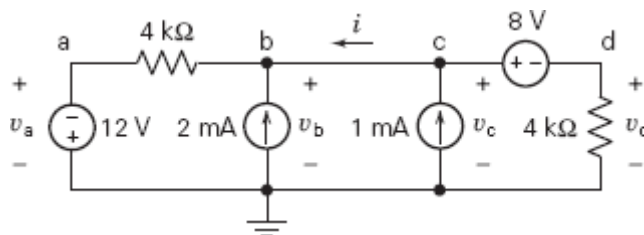



Figura P 4.3-2

P 4.3-3 Determine o valor das potências fornecidas pelas fontes do circuito da Figura P 4.3-3.

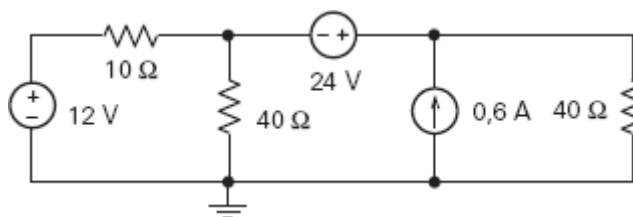



Figura P 4.3-3

P 4.3-4 Determine o valor das tensões de nó v_1, v_2 e v_3 no circuito da Figura P 4.3-4.

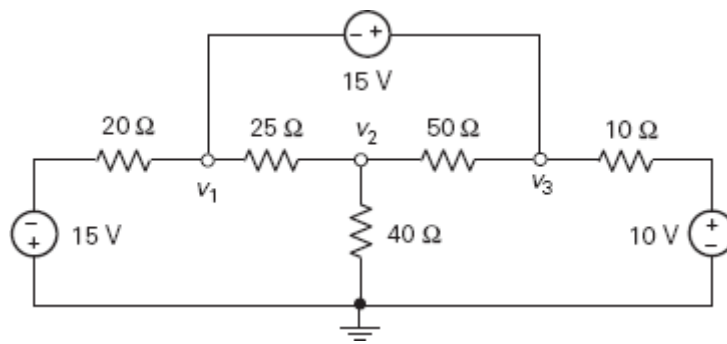



Figura P 4.3-4

P 4.3-5 As tensões v_a, v_b e v_c da Figura P 4.3-5 são as tensões de nó correspondentes aos nós a, b e c. Os valores das tensões são os seguintes:

$$v_a = 12 \text{ V}, v_b = 9{,}882 \text{ V e } v_c = 5{,}294 \text{ V}$$

Determine a potência fornecida pela fonte de tensão.

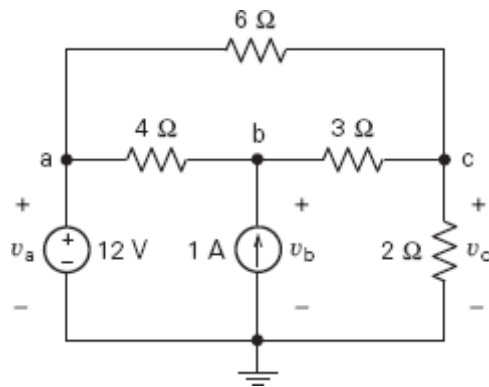



Figura P 4.3-5

P 4.3-6 O voltímetro do circuito da Figura P 4.3-6 é usado para medir uma tensão de nó cujo valor depende do valor da resistência R.

(a) Determine o valor da resistência R para o qual a tensão medida pelo voltímetro é 4 V.

(b) Determine o valor da tensão medida pelo voltímetro para R = 1,2 kΩ = 1.200 Ω.

Respostas: **(a)** 6 kΩ; **(b)** 2 V

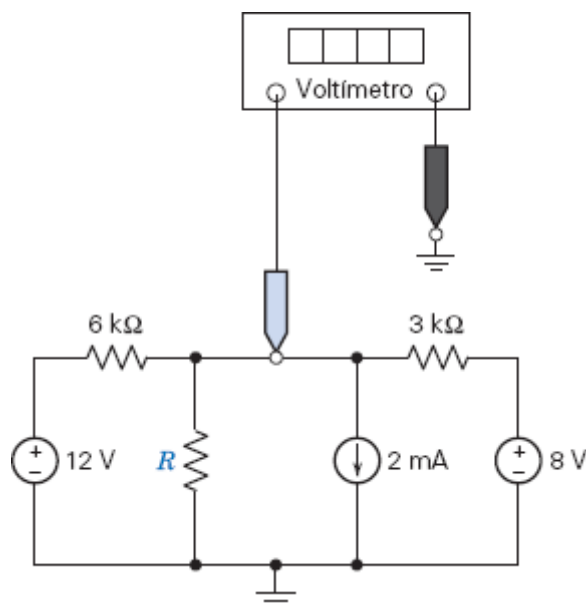



Figura P 4.3-6

P 4.3-7 Determine o valor das tensões de nó v_1 e v_2 e das correntes i_a e i_b no circuito da Figura P 4.3-7.

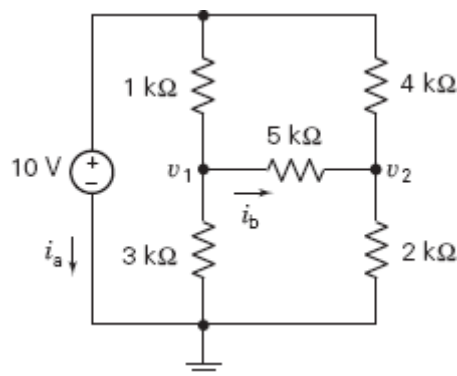



Figura P 4.3-7

P 4.3-8 O circuito da Figura P 4.3-8 possui duas entradas, v_1 e v_2, e uma saída, v_o. A saída está relacionada à entrada através da equação

$$v_o = av_1 + bv_2$$

em que a e b são constantes que dependem dos valores de R_1, R_2 e R_3.

(a) Determine o valor dos coeficientes a e b para $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 40\ \Omega$ e $R_3 = 8\ \Omega$.

(b) Determine o valor dos coeficientes a e b para $R_1 = R_2$ e $R_3 = R_1 \parallel R_2$.

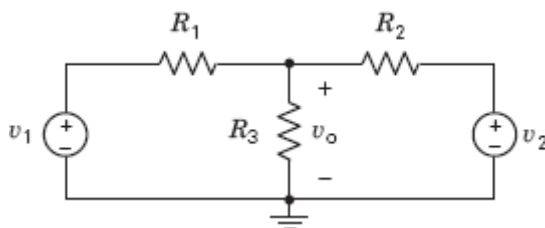



Figura P 4.3-8

P 4.3-9 Determine o valor das tensões de nó do circuito da Figura P 4.3-9.

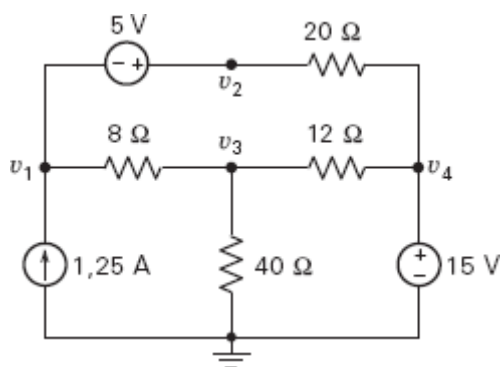



Figura P 4.3-9

P 4.3-10 A Figura P 4.3-10 mostra uma medida realizada em laboratório. Seu parceiro se esqueceu de anotar os valores de R_1, R_2 e R_3. Ele acha que dois resistores eram de 10 kΩ e o outro resistor era de 5 kΩ. Isso é possível? Caso a resposta seja afirmativa, qual dos resistores é o resistor de 5 kΩ?

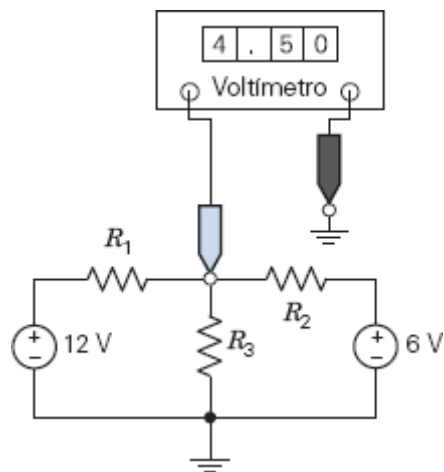



Figura P 4.3-10

P 4.3-11 Determine o valor das tensões de nó no circuito da Figura P 4.3-11.

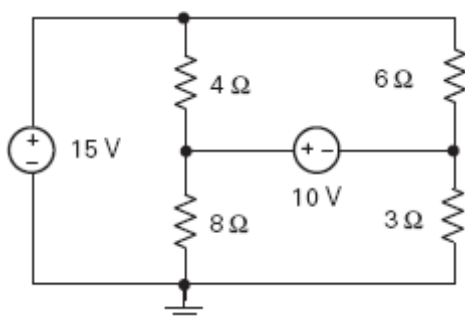



Figura P 4.3-11

P 4.3-12 Determine o valor das tensões de nó no circuito da Figura P 4.3-12.

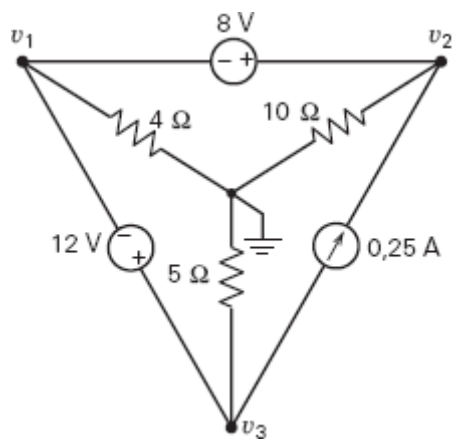



Figura P 4.3-12

P 4.3-13 Determine o valor das tensões de nó v_1 e v_2 no circuito da Figura P 4.3-13.

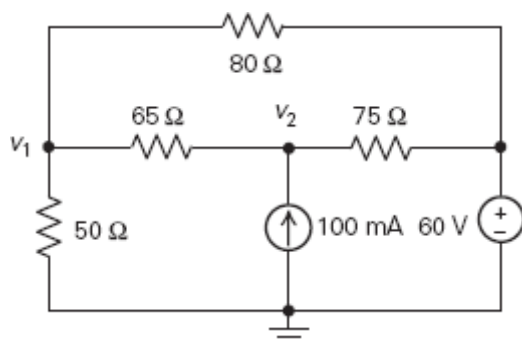



Figura P 4.3-13

P 4.3-14 A fonte de tensão do circuito da Figura 4.3-14 fornece 83,802 W e a fonte de corrente fornece 17,572 W. Determine o valor das tensões de nó v_1 e v_2.

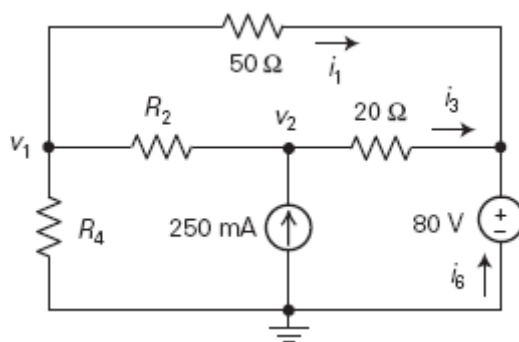



Figura P 4.3-14

Seção 4.4 Método das Tensões de Nó com Fontes Dependentes

P 4.4-1 As tensões v_a, v_b e v_c na Figura P 4.4-1 são as tensões de nó correspondentes aos nós a, b e c. Os valores dessas tensões são os seguintes:

$$v_a = 8{,}667\ \text{V},\ v_b = 2\ \text{V e}\ v_c = 10\ \text{V}$$

Determine o valor de A, o ganho da fonte dependente.

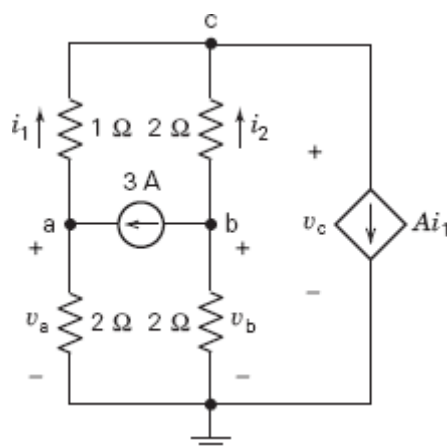



Figura P 4.4-1

P 4.4-2 Determine o valor da corrente i_b no circuito da Figura 4.4-2.

Resposta: $i_b = -12$ mA

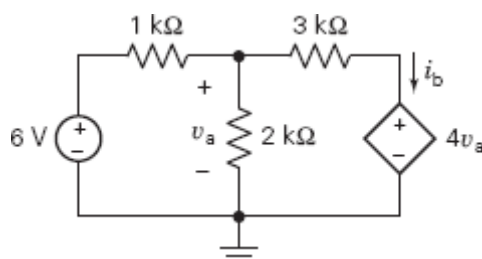



Figura P 4.4-2

P 4.4-3 Determine o valor da tensão de nó v_b no circuito da Figura P 4.4-3.

Resposta: $v_b = 1{,}5$ V

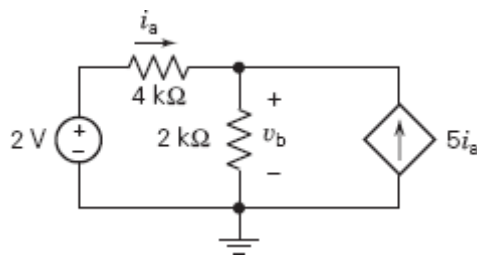



Figura P 4.4-3

P 4.4-4 Os nós do circuito Figura P 4.4-4 estão indicados por círculos numerados. As tensões de nó correspondentes são $v_1 = 10$ V, $v_2 = 14$ V e $v_3 = 12$ V.

(a) Determine o valor da corrente i_b.

(b) Determine o valor de r, o ganho da FTCC.

Respostas: **(a)** –2 A; **(b)** 4 V/A.

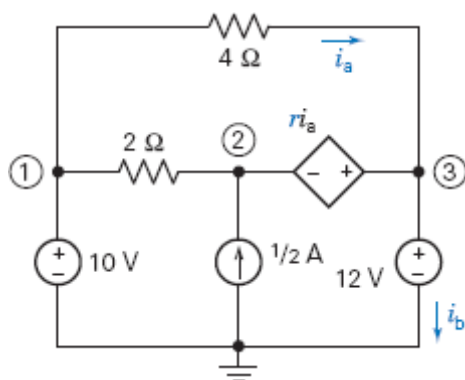



Figura P 4.4-4

P 4.4-5 Determine o valor da corrente i_x no circuito da Figura P 4.4-5.

Resposta: $i_x = 2{,}4$ A

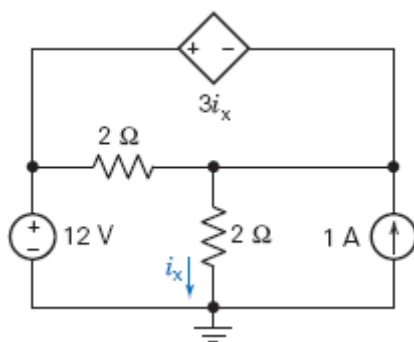



Figura P 4.4-5

P 4.4-6 Os nós do circuito da Figura P 4.4-6 estão indicados por círculos numerados. Determine o valor da potência fornecida pela FTCC.

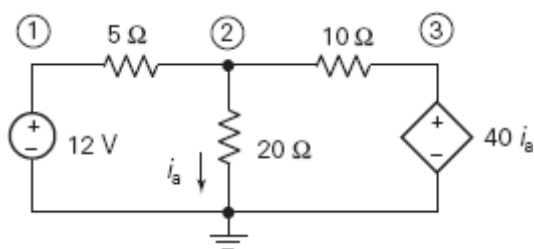



Figura P 4.4-6

P 4.4-7 Dois nós do circuito da Figura P 4.4-7 estão indicados por círculos numerados. As tensões de nó correspondentes são

$$v_1 = 9{,}74 \text{ V e } v_2 = 6{,}09 \text{ V}$$

Determine o ganho das fontes independentes, r e g.

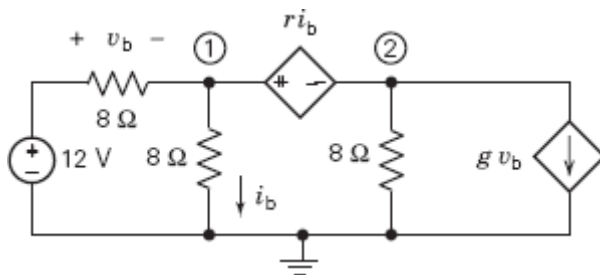



Figura P 4.4-7

P 4.4-8 Determine o valor da potência fornecida pela fonte dependente na Figura P 4.4-8.

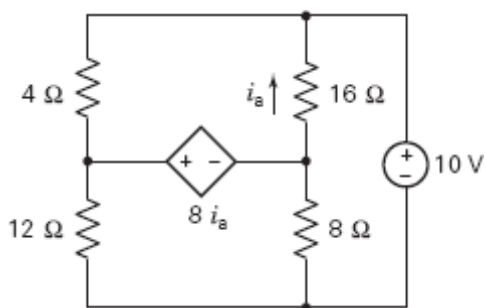



Figura P 4.4-8

P 4.4-9 As tensões de nó do circuito da Figura P 4.4-9 são

$$v_1 = 4 \text{ V}, v_2 = 0 \text{ V e } v_3 = -6 \text{ V}$$

Determine o valor da resistência R e do ganho b da FCCC.

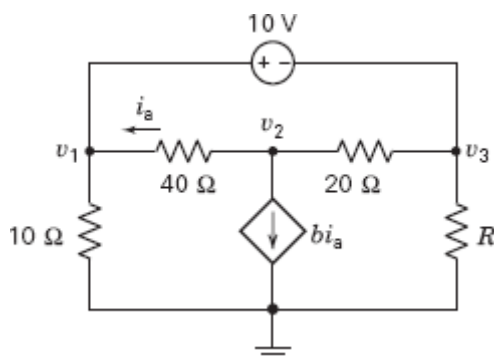



Figura P 4.4-9

P 4.4-10 O valor da tensão de nó do nó b da Figura P 4.4-10 é $v_b = 18$ V.

(a) Determine o valor de A, o ganho da fonte dependente.

(b) Determine a potência fornecida pela fonte dependente.

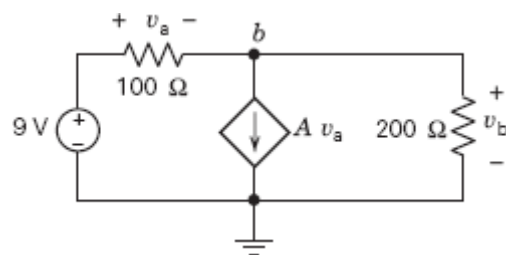



Figura P 4.4-10

P 4.4-11 Determine a potência fornecida pela fonte dependente do circuito da Figura P 4.4-11.

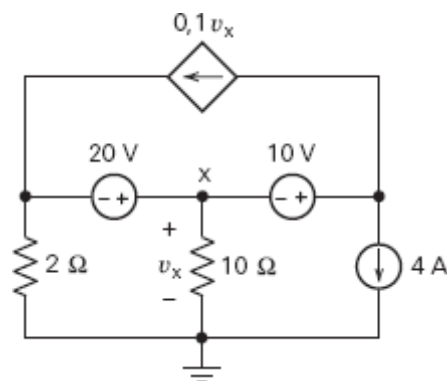



Figura P 4.4-11

P 4.4-12 Determine o valor das tensões de nó v_1, v_2, v_3, v_4 e v_5 no circuito da Figura P 4.4-12.

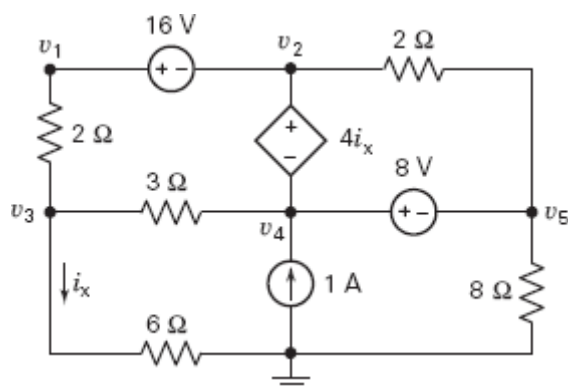



Figura P 4.4-12

P 4.4-13 Determine o valor das tensões de nó v_1, v_2, v_3, v_4 e v_5 no circuito da Figura P 4.4-13.

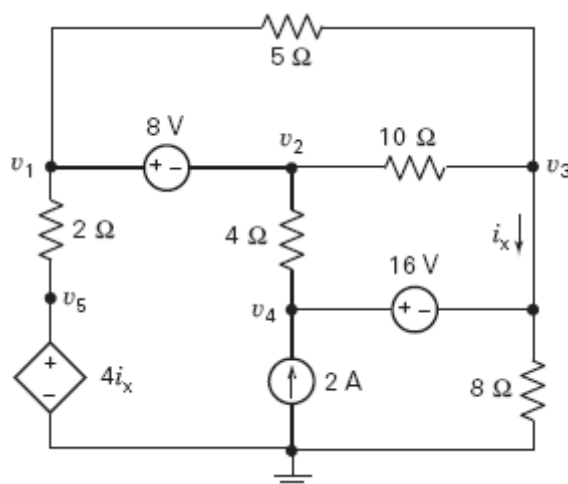



Figura P 4.4-13

P 4.4-14 Os nós do circuito da Figura P 4.4-14 estão indicados por círculos numerados. Determine o valor das tensões de nó v_1, v_2, v_3 e v_4 correspondentes.

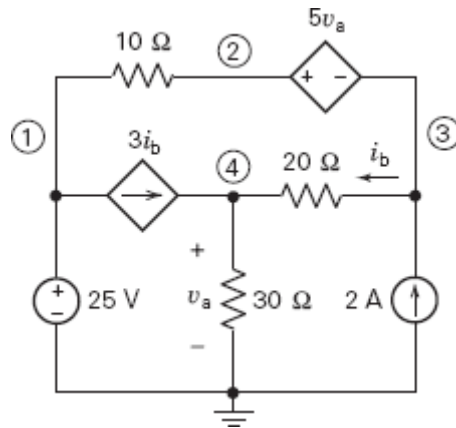



Figura P 4.4-14

P 4.4-15 Os nós do circuito da Figura P 4.4-15 estão indicados por círculos numerados. As tensões correspondentes são

$$v_1 = 10 \text{ V},\ v_2 = 75 \text{ V},\ v_3 = -15 \text{ V e } v_4 = 22{,}5 \text{ V}$$

Determine o ganho das fontes independentes, A e B, e o valor da resistência R_1.

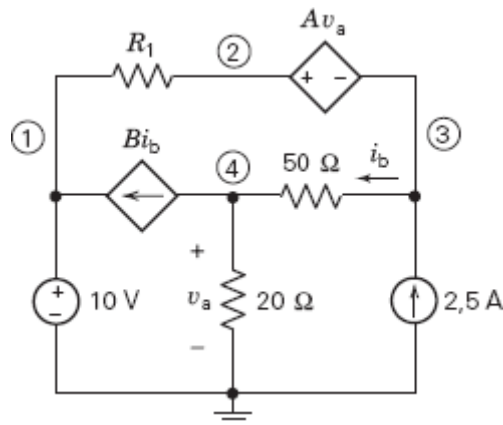



Figura P 4.4-15

P 4.4-16 Os nós do circuito da Figura P 4.4-16 estão indicados por círculos numerados. As tensões correspondentes são

$$v_1 = 12 \text{ V},\ v_2 = 21 \text{ V e } v_3 = -3 \text{ V}$$

(a) Determine o valor das resistências R_1 e R_2.

(b) Determine as potências fornecidas pelas fontes.

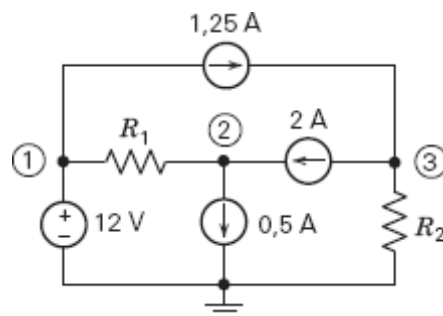



Figura P 4.4-16

P 4.4-17 Os nós do circuito da Figura P 4.4-17 estão indicados por círculos numerados. As tensões correspondentes são

$$v_1 = 12 \text{ V}, v_2 = 9{,}6 \text{ V e } v_3 = -1{,}33 \text{ V}$$

(a) Determine o valor das resistências R_1 e R_2.

(b) Determine as potências fornecidas pelas fontes.

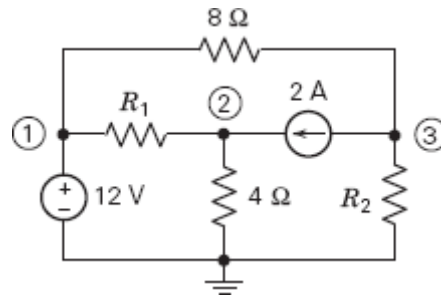



Figura P 4.4-17

P 4.4-18 As tensões v_2, v_3 e v_4 do circuito da Figura P 4.4-18 são

$$v_2 = 16 \text{ V}, v_3 = 8 \text{ V e } v_4 = 6 \text{ V}$$

Determine:

(a) O ganho A da FTVT;

(b) a resistência do resistor R_5;

(c) as correntes i_b e i_c;

(d) a potência recebida pelo resistor R_4.

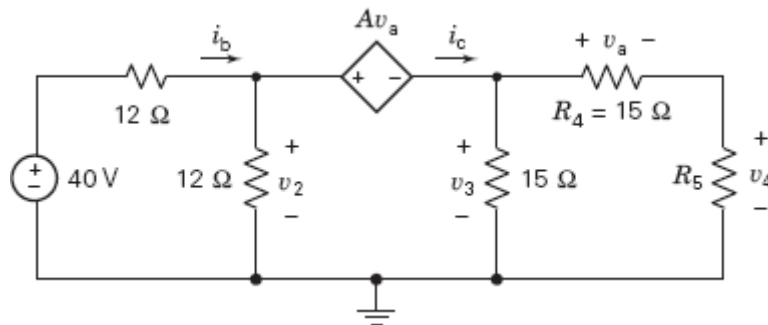



Figura P 4.4-18

P 4.4-19 Determine o valor das tensões de nó v_1 e v_2 no circuito da Figura P 4.4-19.

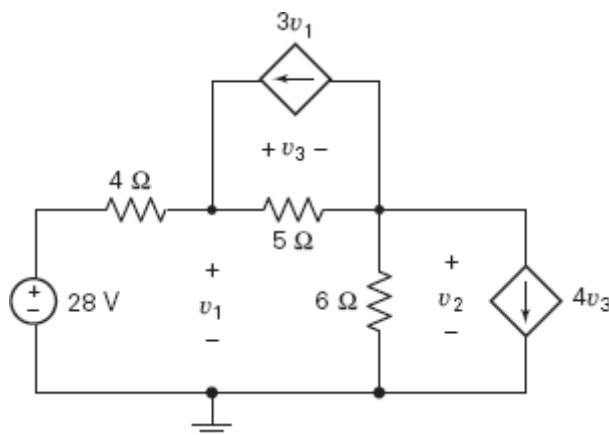



Figura P 4.4-19

P 4.4-20 Os nós do circuito da Figura P 4.4-20 estão indicados por círculos numerados. Determine o valor das tensões de nó correspondentes, v_1, v_2 e v_3.

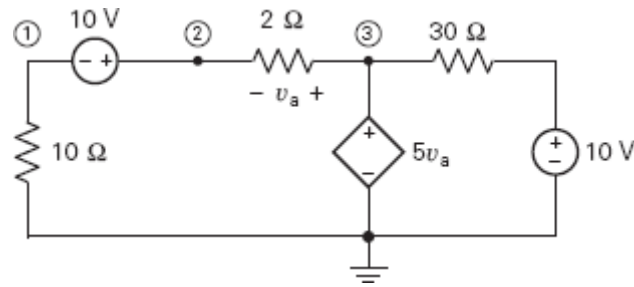



Figura P 4.4-20

P 4.4-21 Determine o valor das tensões de nó v_1, v_2 e v_3 no circuito da Figura P 4.4-21.

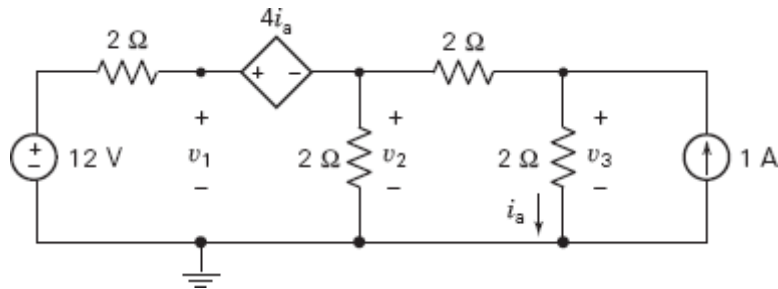



Figura P 4.4-21

P 4.4-22 Determine o valor das tensões de nó v_1, v_2 e v_3 no circuito da Figura P 4.4-22.

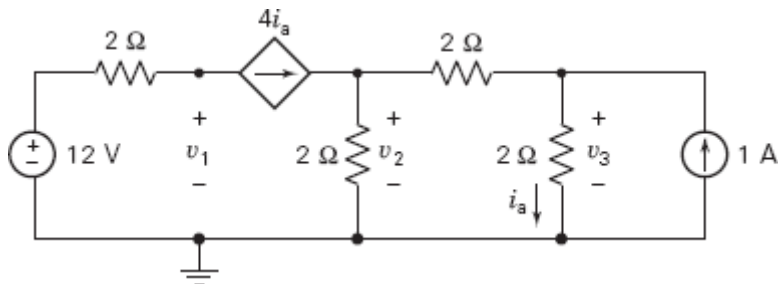



Figura P 4.4-22

Seção 4.5 Método das Correntes de Malha com Fontes de Tensão Independentes

P 4.5-1 Determine as correntes de malha i_1, i_2 e i_3 no circuito da Figura P 4.5-1.

Resposta: $i_1 = 3$ A, $i_2 = 2$ A e $i_3 = 4$ A

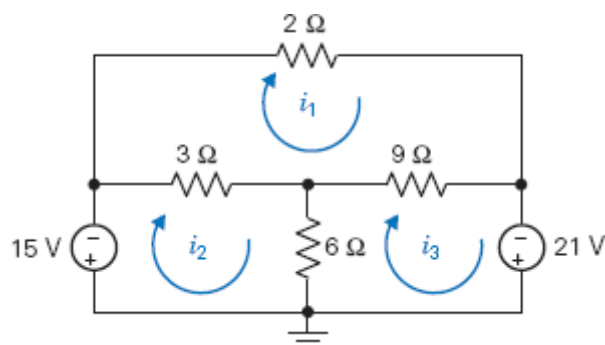



Figura P 4.5-1

P 4.5-2 Os valores das correntes de malha no circuito da Figura P 4.5-2 são $i_1 = 2$ A, $i_2 = 3$ A e $i_3 = 4$ A. Determine o valor da resistência R e das tensões v_1 e v_2 das fontes de tensão.

Resposta: $R = 12\ \Omega$, $v_1 = -4$ V e $v_2 = -28$ V.

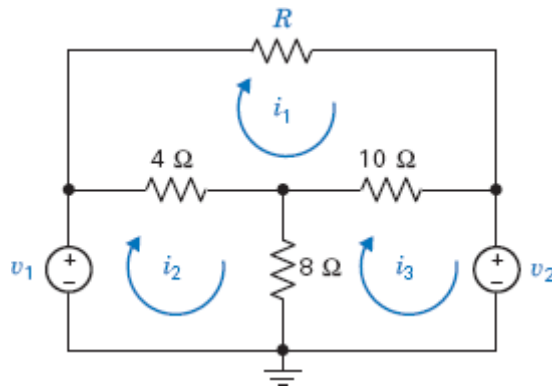



Figura P 4.5-2

P 4.5-3 As correntes i_1 e i_2 da Figura P 4.5-3 são as correntes de malha. Determine o valor da resistência R para que $v_a = -6$ V.

Resposta: $R = 4\ \Omega$.

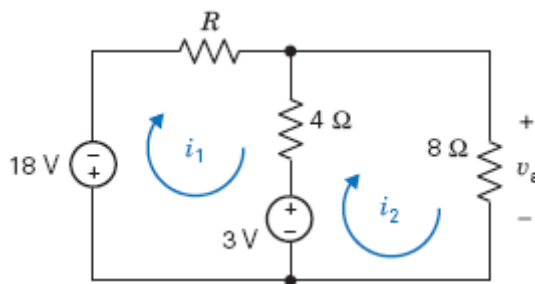



Figura P 4.5-3

P 4.5-4 Determine as correntes de malha i_a e i_b no circuito da Figura P 4.5-4.

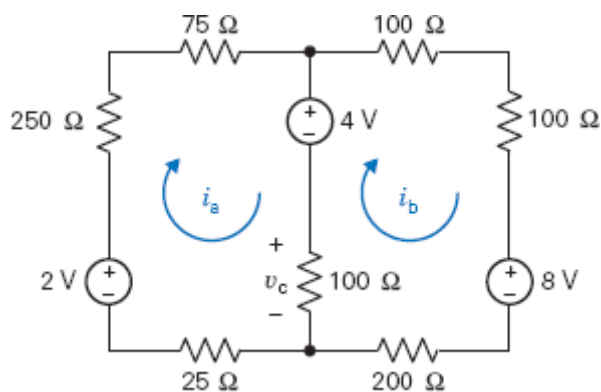



Figura P 4.5-4

P 4.5-5 Determine a corrente i no circuito da Figura P 4.5-5.

Sugestão: Um curto-circuito é equivalente a uma fonte de tensão de 0 V.

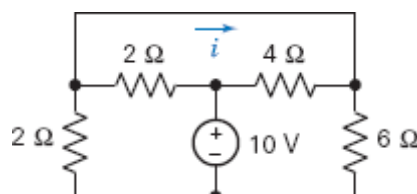



Figura P 4.5-5

P 4.5-6 Simplifique o circuito da Figura P 4.5-6 substituindo resistores em série e em paralelo por resistores equivalentes. Em seguida, analise o circuito simplificado escrevendo e resolvendo equações de malha.

(a) Determine as potências fornecidas pelas fontes.

(b) Determine a potência absorvida pelo resistor de 30 Ω.

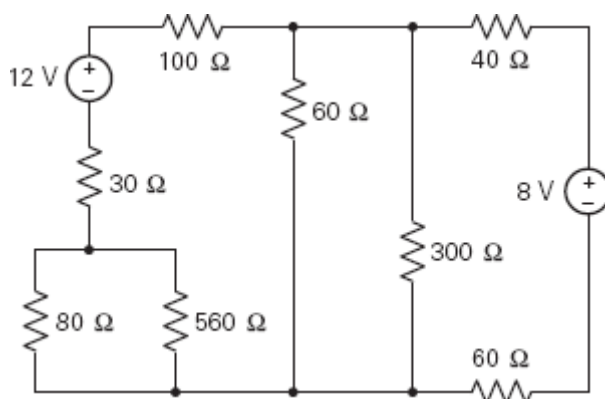



Figura P 4.5-6

Seção 4.6 Método das Correntes de Malha com Fontes de Corrente e de Tensão Independentes

P 4.6-1 Determine o valor de i_b no circuito da Figura P 4.6-1.

Resposta: i_b = 0,6 A.

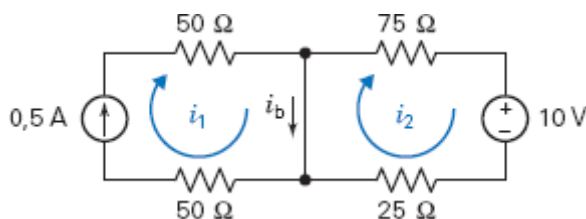



Figura P 4.6-1

P 4.6-2 Determine o valor de v_c no circuito da Figura P 4.6-2.

Resposta: v_c = 15 V.

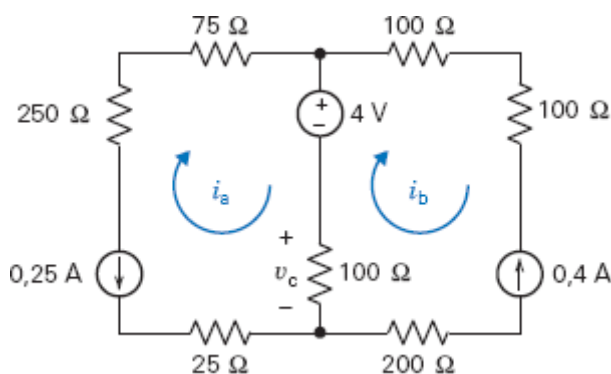



Figura P 4.6-2

P 4.6-3 Determine o valor de v_2 no circuito da Figura P 4.6-3.

Resposta: v_2 = 2 V.

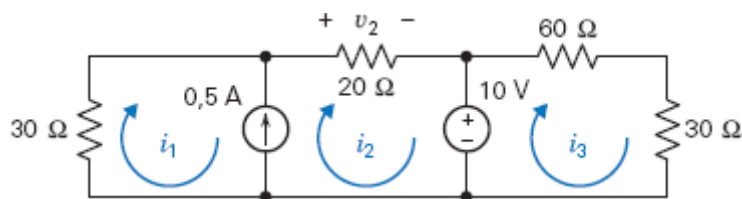



Figura P 4.6-3

P 4.6-4 Determine o valor de v_c no circuito da Figura P 4.6-4.

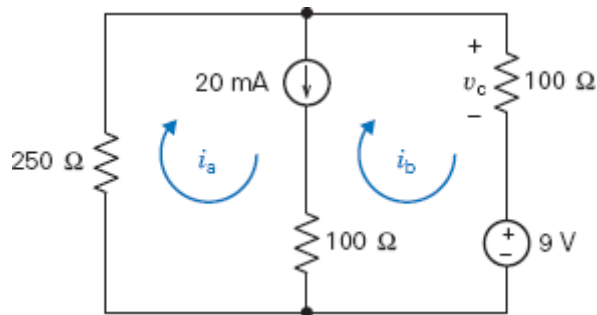



Figura P 4.6-4

P 4.6-5 Determine o valor da tensão medida pelo voltímetro na Figura P 4.6-5.

Resposta: 8 V

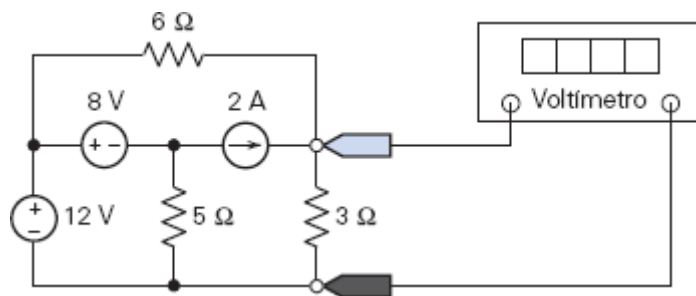



Figura P 4.6-5

P 4.6-6 Determine o valor da corrente medida pelo amperímetro na Figura P 4.6-6.

Sugestão: Escreva e resolva uma equação de malha.

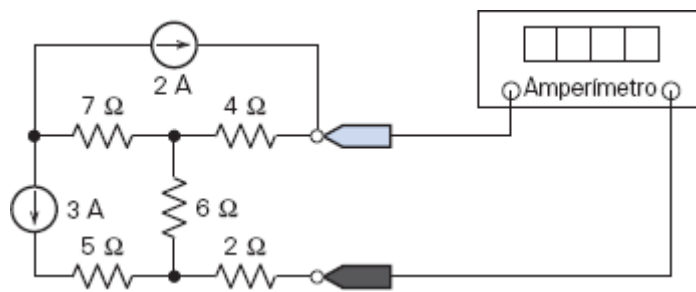



Figura P 4.6-6

P 4.6-7 Os valores das correntes de malha i_1, i_2 e i_3 da Figura P 4.6-7 são

$$i_1 = 1{,}1014 \text{ A}, \; i_2 = 0{,}8986 \text{ A e } i_3 = -0{,}2899 \text{ A}$$

(a) Determine o valor das resistências R_1 e R_3.

(b) Determine o valor da corrente da fonte de corrente.

(c) Determine o valor da potência fornecida pela fonte de tensão de 12 V.

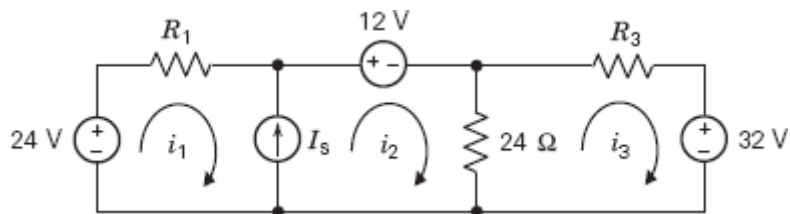



Figura P 4.6-7

P 4.6-8 Determine o valor das correntes de malha i_1, i_2 e i_3 no circuito da Figura P 4.6-8.

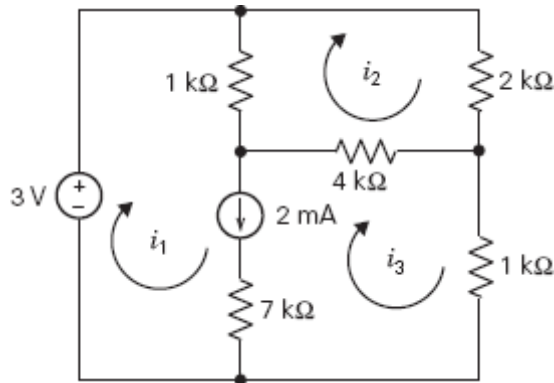



Figura P 4.6-8

P 4.6-9 Determine o valor das correntes de malha i_1 e i_2 no circuito da Figura P 4.6-9.

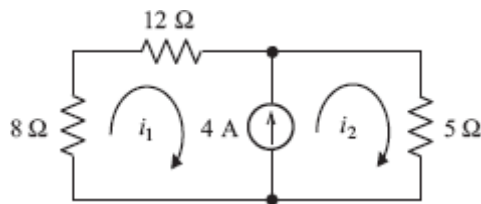



Figura P 4.6-9

P 4.6-10 As correntes de malha no circuito da Figura P 4.6-10 são

$$i_1 = -2{,}2213 \text{ A}, \; i_2 = 0{,}7787 \text{ A e } i_3 = 0{,}0770 \text{ A}$$

(a) Determine o valor das resistências R_1 e R_3.

(b) Determine o valor da potência fornecida pela fonte de corrente.

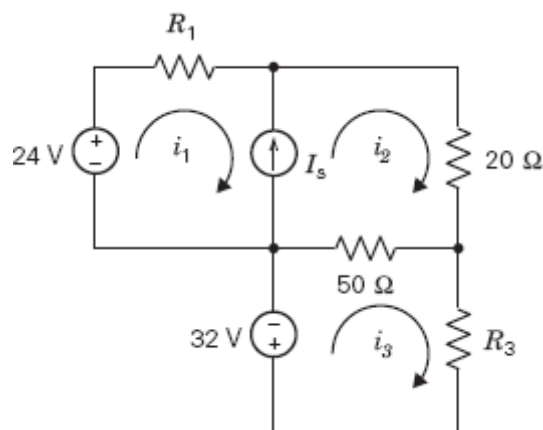



Figura P 4.6-10

P 4.6-11 Determine o valor da tensão medida pelo voltímetro na Figura P 4.6-11.

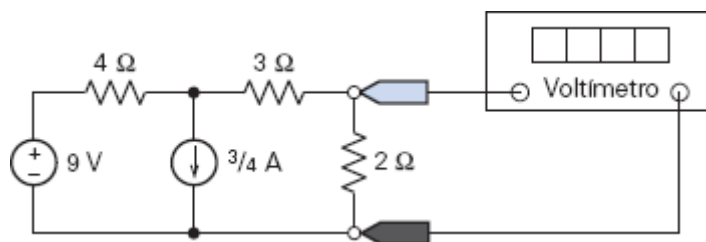
Sugestão: Aplique a LKT a uma supermalha para determinar a corrente no resistor de 2 Ω.

Resposta: 4/3 V

Figura P 4.6-11

P 4.6-12 Determine o valor da corrente medida pelo amperímetro na Figura P 4.6-12.

Sugestão: Aplique a LKT a uma supermalha.

Resposta: – 0,333 A.

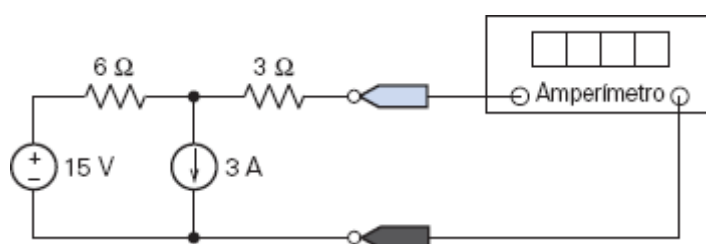



Figura P 4.6-12

P 4.6-13 Determine o valor das correntes de malha i_1, i_2 e i_3 e da tensão de saída v_o no circuito da Figura P 4.6-13.

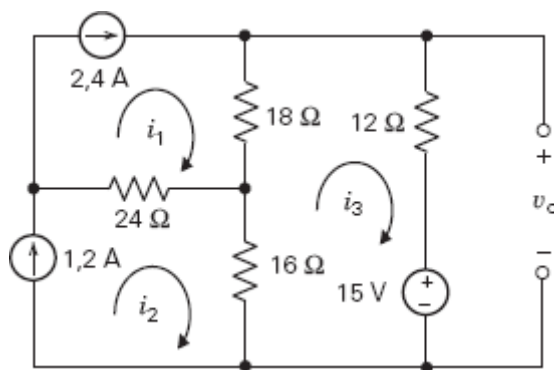



Figura P 4.6-13

P 4.6-14 Determine o valor da potência fornecida pelas fontes no circuito da Figura P 4.6-14.

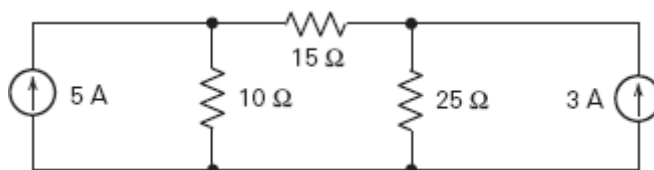



Figura P 4.6-14

P 4.6-15 Determine os valores da resistência R e da potência fornecida pela fonte de corrente de 6 A no circuito da Figura P 4.6-15.

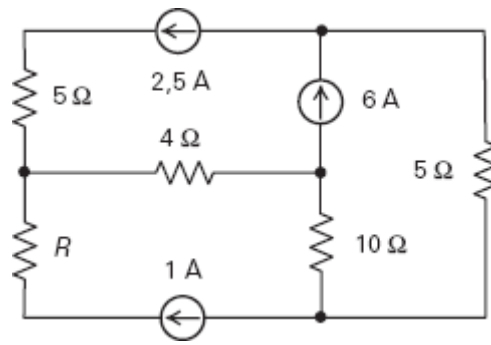



Figura P 4.6-15

Seção 4.7 Método das Correntes de Malha com Fontes Dependentes

P 4.7-1 Determine o valor de v_2 no circuito da Figura P 4.7-1.

Resposta: $v_2 = 10$ V

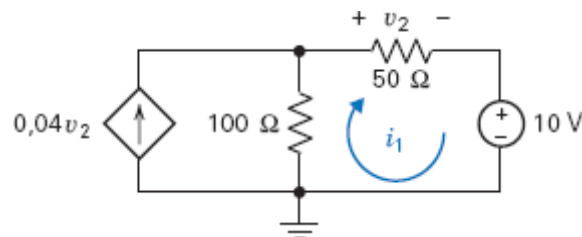



Figura P 4.7-1

P 4.7-2 Determine as potências fornecidas pela fonte de tensão e pela FCCC no circuito da Figura P 4.7-2.

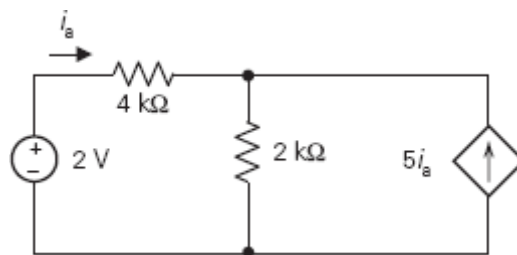



Figura P 4.7-2

P 4.7-3 Determine o valor de v_o no circuito da Figura P 4.7-3.

Resposta: $v_o = 2{,}5$ V

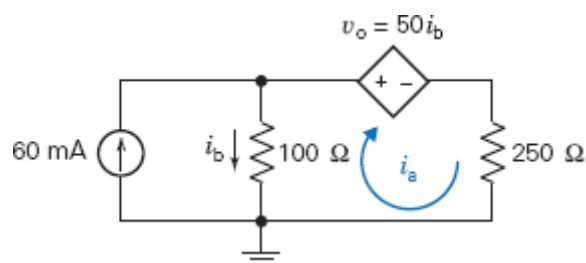



Figura P 4.7-3

P 4.7-4 Determine a corrente de malha i_a no circuito da Figura P 4.7-4.

Resposta: $i_a = -24$ mA

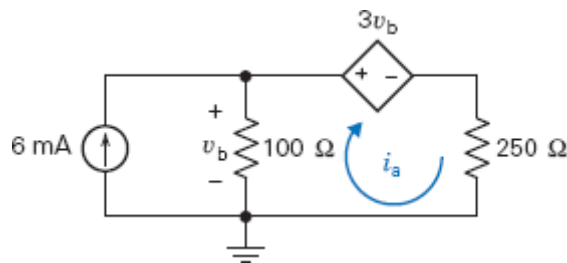



Figura P 4.7-4

P 4.7-5 Embora os cientistas ainda não saibam exatamente por que e como funciona, o processo de utilizar a eletricidade para ajudar a regeneração e o crescimento de ossos, que tem sido usado principalmente no caso de fraturas, poderá em breve ser aplicado a vários outros problemas, desde a osteoporose e a osteoartrite até fusões de vértebras e úlceras da pele.

Uma corrente elétrica é aplicada a fraturas que não consolidaram dentro do prazo esperado. O processo procura imitar as forças elétricas que existem naturalmente no interior do corpo. É necessária apenas uma pequena quantidade de estímulos elétricos para acelerar a regeneração dos ossos. O método da corrente contínua utiliza um eletrodo que é implantado no osso. O método produz bons resultados em quase 80 % dos casos.

O implante é mostrado na Figura P 4.7-5*a* e o modelo do circuito aparece na Figura P 4.7-5*b*. Determine a energia fornecida ao catodo durante um período de 24 horas. O catodo é representado pela FTCC e o resistor de 100 kΩ.

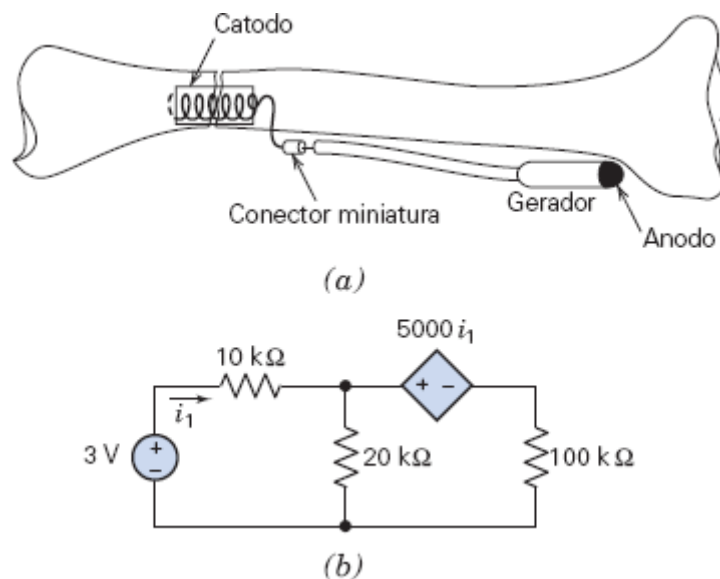



Figura P 4.7-5 (*a*) Regenerador elétrico de ossos. (*b*) Modelo do circuito.

P 4.7-6 Determine o valor da potência fornecida pela FCCT da Figura P 4.7-6.

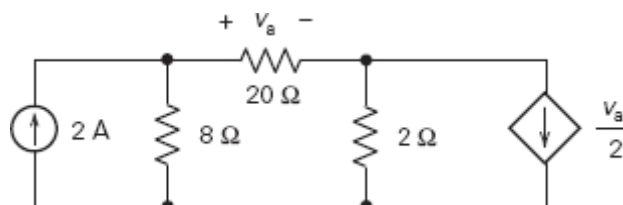



Figura P 4.7-6

P 4.7-7 As correntes i_1, i_2 e i_3 são as correntes de malha do circuito da Figura P 4.7-7. Determine o valor de i_1, i_2 e i_3.

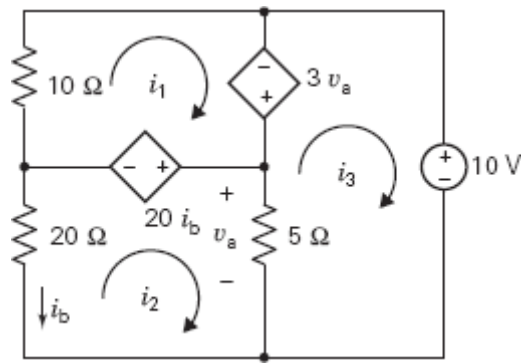



Figura P 4.7-7

P 4.7-8 Determine o valor da potência fornecida pela FCCC dependente da Figura P 4.7-8.

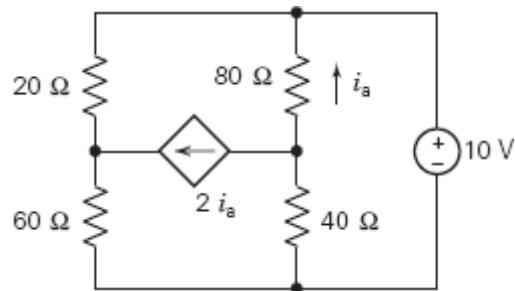



Figura P 4.7-8

P 4.7-9 Determine o valor da resistência R no circuito da Figura P 4.7-9.

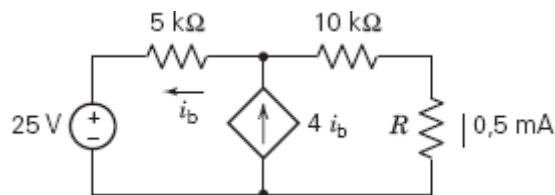



Figura P 4.7-9

P 4.7-10 O circuito da Figura P 4.7-10 é o modelo de um amplificador para pequenos sinais. A entrada do amplificador é a tensão da fonte de tensão, v_s. A saída do amplificador é a tensão v_o.

(a) A razão entre a saída e a entrada, v_o/v_s, é chamada de ganho do amplificador. Determine o ganho do amplificador.

(b) A razão entre a corrente da fonte de entrada e a tensão de entrada, i_b/v_s, é chamada de resistência de entrada do amplificador. Determine a resistência de entrada.

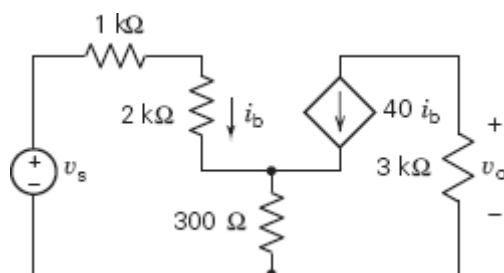



Figura P 4.7-10

P 4.7-11 Determine o valor das correntes de malha i_1, i_2, i_3 e i_4 no circuito da Figura P 4.7-11.

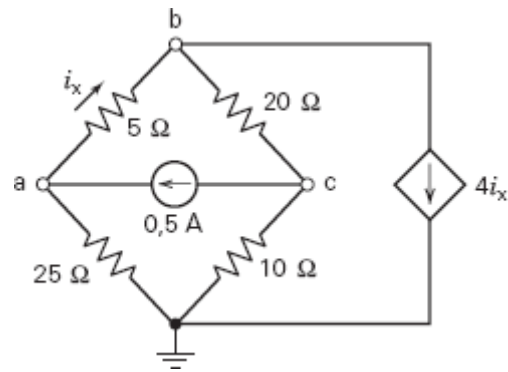



Figura P 4.7-11

P 4.7-12 Determine o valor das correntes de malha i_1, i_2 e i_3 no circuito da Figura P 4.7-12.

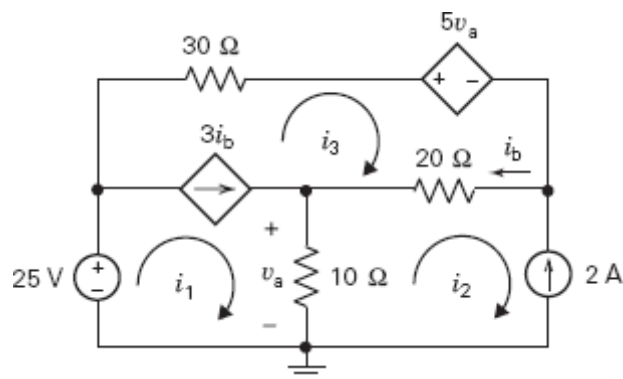



Figura P 4.7-12

P 4.7-13 As correntes de malha i_1, i_2 e i_3 da Figura P 4.7-13 têm os seguintes valores:

$$i_1 = -1,375 \text{ A}, i_2 = -2,5 \text{ A e } i_3 = -3,25 \text{ A}$$

Determine o ganho das fontes dependentes, A e B.

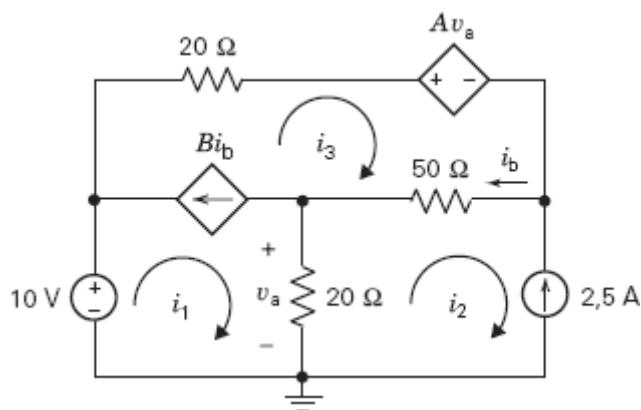



Figura P 4.7-13

P 4.7-14 Determine o valor da corrente i no circuito da Figura P 4.7-14.

Resposta: $i = 3$ A

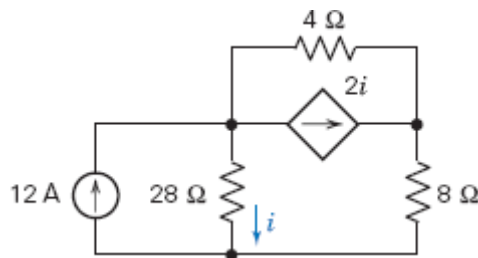



Figura P 4.7-14

P 4.7-15 Determine o valor das correntes de malha i_1 e i_2 no circuito da Figura P 4.7-15.

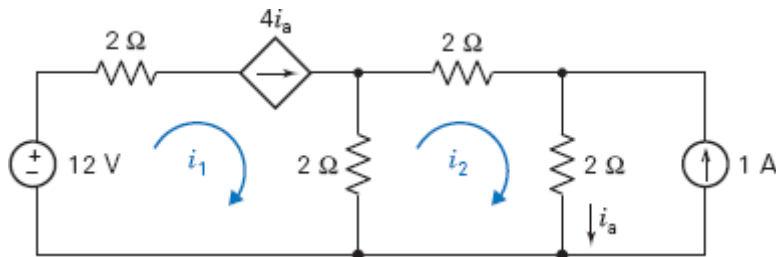



Figura P 4.7-15

P 4.7-16 Determine o valor das correntes de malha i_1 e i_2 no circuito da Figura P 4.7-16.

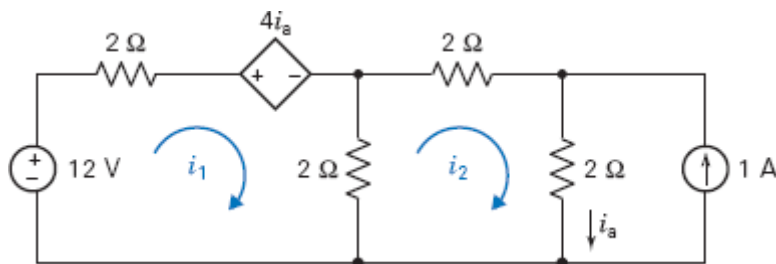



Figura P 4.7-16

Seção 4.8 Comparação dos Métodos das Tensões de Nó e das Correntes de Malha

P 4.8-1 O circuito da Figura P 4.8-1 possui duas entradas, v_s e i_s, e uma saída, v_o. A saída está relacionada às entradas através da equação

$$v_o = ai_s + bv_s$$

em que a e b são constantes a serem determinadas. Determine o valor de a e b (a) escrevendo e resolvendo equações de malha e (b) escrevendo e resolvendo equações de nó.

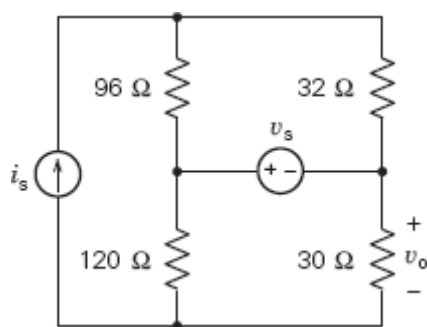



Figura P 4.8-1

P 4.8-2 Determine a potência fornecida pela FCCT no circuito da Figura P 4.8-2 escrevendo e resolvendo (a) equações de nó e (b) equações de malha.

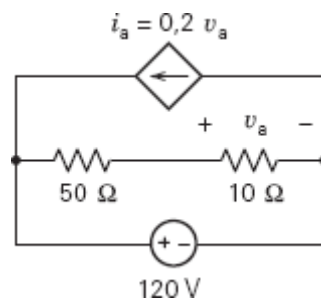



Figura P 4.8-2

Seção 4.9 Análise de Circuitos Usando o MATLAB

P 4.9-1 Os nós do circuito da Figura P 4.9-1 estão indicados por círculos numerados. Determine o valor das tensões de nó correspondentes, v_1, v_2 e v_3.

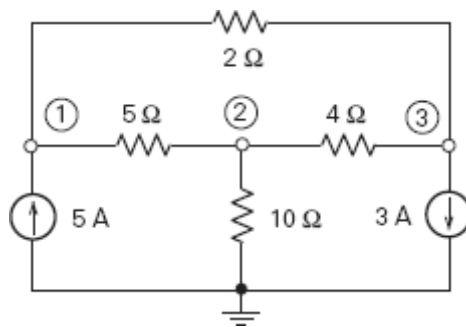



Figura P 4.9-1

P 4.9-2 Determine o valor das tensões de nó v_1 e v_2 no circuito da Figura P 4.9-2.

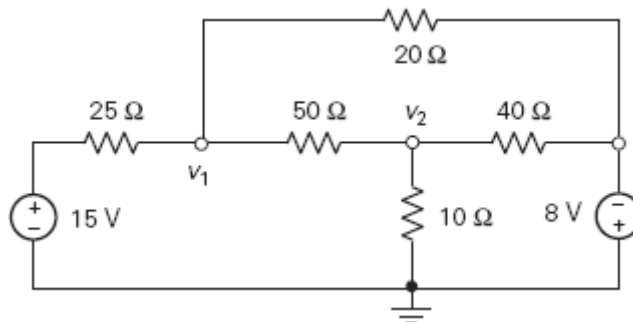



Figura P 4.9-2

P 4.9-3 Determine o valor das tensões de nó v_1, v_2 e v_3 no circuito da Figura P 4.9-3.

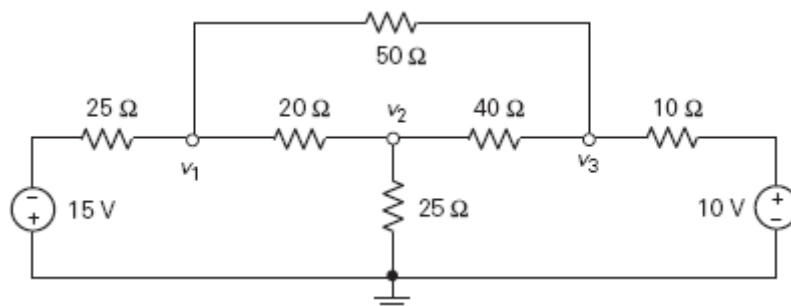



Figura P 4.9-3

P 4.9-4 Determine o valor das tensões de nó v_1 e v_2 no circuito da Figura P 4.9-4.

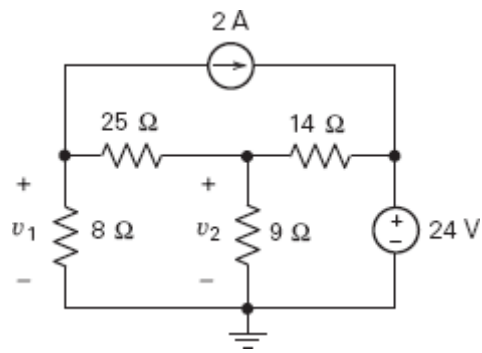



Figura P 4.9-4

P 4.9-5 Determine o valor das correntes de malha i_1 e i_2 no circuito da Figura P 4.9-5.

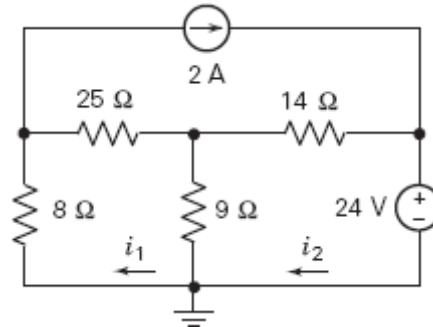



Figura P 4.9-5

P 4.9-6 Represente o circuito da Figura P 4.9-6 pela equação matricial

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 \\ -228 \end{bmatrix}$$

e determine o valor dos coeficientes a_{11}, a_{12}, a_{21} e a_{22}.

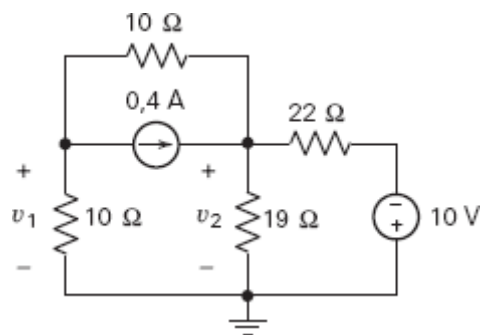



Figura P 4.9-6

P 4.9-7 Represente o circuito da Figura P 4.9-7 pela equação matricial

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

e determine o valor dos coeficientes a_{11}, a_{12}, a_{21} e a_{22}.

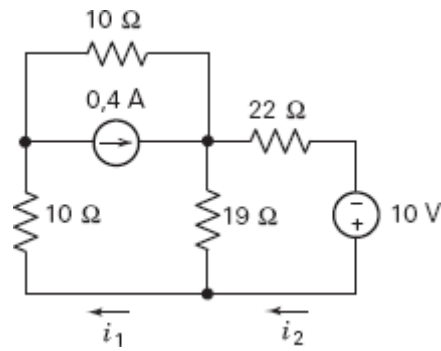



Figura P 4.9-7

P 4.9-8 Determine o valor das potências fornecidas pelas fontes da Figura P 4.9-8.

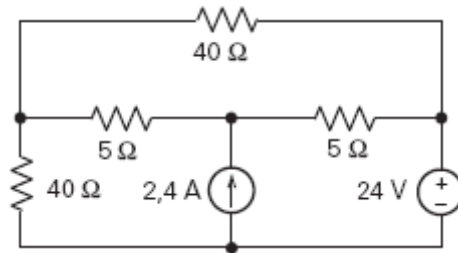



Figura P 4.9-8

P 4.9-9 Determine o valor das correntes de malha i_1 e i_2 no circuito da Figura P 4.9-9.

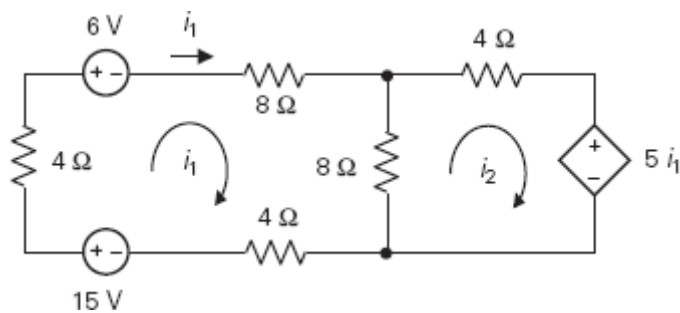



Figura P 4.9-9

P 4.9-10 Os nós do circuito da Figura P 4.9-10 estão indicados por círculos numerados. Determine o valor das tensões de nó correspondentes, v_1 e v_2.

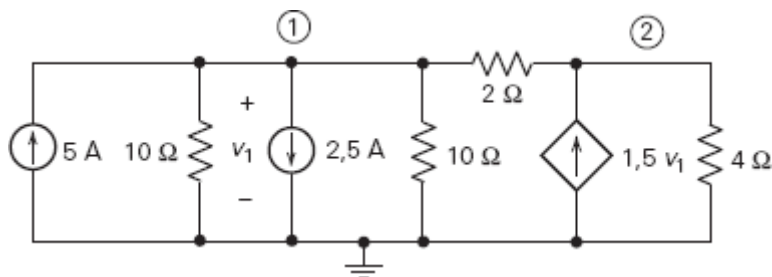



Figura P 4.9-10

Seção 4.11 Como Podemos Testar...?

P 4.11-1 Uma análise em computador do circuito da Figura P 4.11-1 mostra que as tensões de nó são v_a = 5,2 V, v_b = –4,8 V e v_c = 3,0 V. A análise está correta?

Sugestão: Use as tensões de nó para calcular as correntes nos componentes e verifique se a LKC é satisfeita em todos os nós.

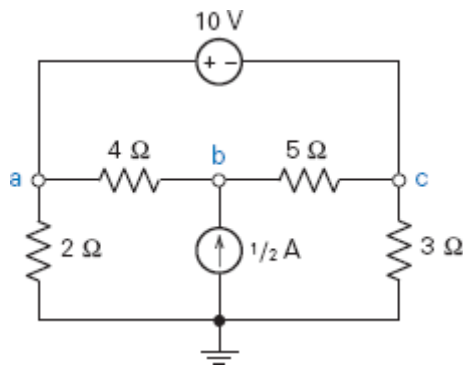



Figura P 4.11-1

P 4.11-2 Um velho relatório afirma que as tensões de nó do circuito da Figura P 4.11-2 são $v_a = 4$ V, $v_b = 20$ V e $v_c = 12$ V. Esses dados estão corretos?

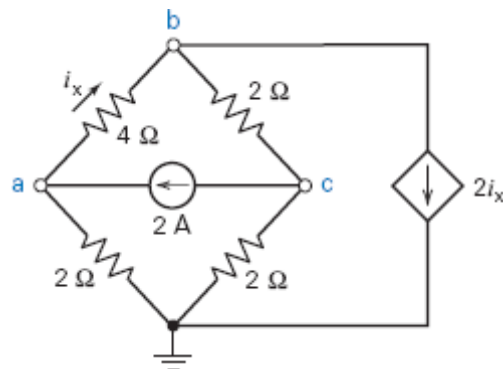



Figura P 4.11-2

P 4.11-3 A Figura P 4.11-3 mostra uma medida realizada em laboratório. Seu parceiro se esqueceu de anotar os valores de R_1, R_2 e R_3. Ele acha que dois resistores eram de 10 kΩ e o outro resistor era de 5 kΩ. Isso é possível? Caso a resposta seja afirmativa, qual dos resistores é o resistor de 5 kΩ?

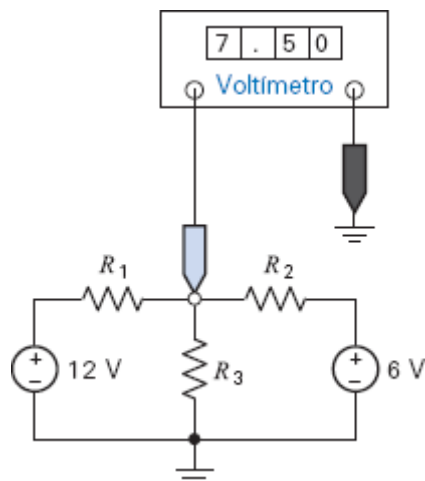



Figura P 4.11-3

P 4.11-4 Uma análise em computador do circuito da Figura P 4.11-4 mostra que as correntes de malha são $i_1 = 2$ A, $i_2 = 4$ A e $i_3 = 3$ A. Verifique se esses valores estão corretos.

Sugestão: Use as correntes de malha para calcular as tensões dos componentes e verifique se a LKT é satisfeita em todas as malhas.

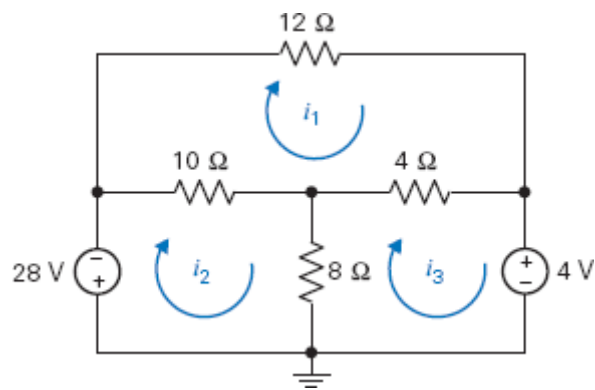



Figura P 4.11-4

Problemas com o PSpice

PS 4-1 Use o PSpice para determinar as tensões de nó no circuito da Figura PS 4-1.

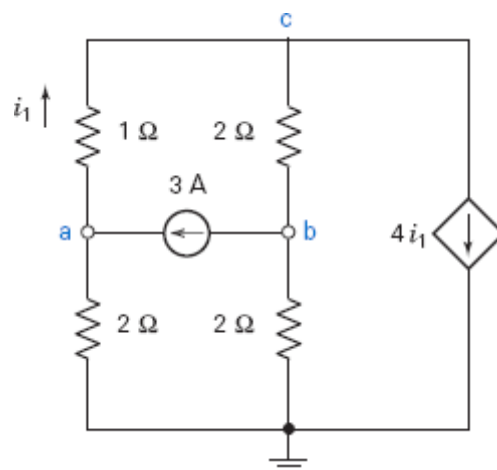



Figura PS 4-1

PS 4-2 Use o PSpice para determinar as correntes de malha no circuito da Figura PS 4-2 para $R = 4\ \Omega$.

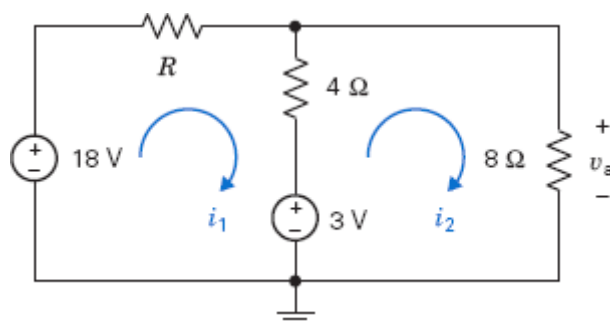



Figura PS 4-2

PS 4-3 As tensões v_a, v_b, v_c e v_d da Figura PS 4-3 são as tensões de nó correspondentes aos nós a, b, c e d. A corrente i é a corrente em um curto-circuito ligado entre os nós b e c. Use o PSpice para determinar o valor de v_a, v_b, v_c e v_d e i.

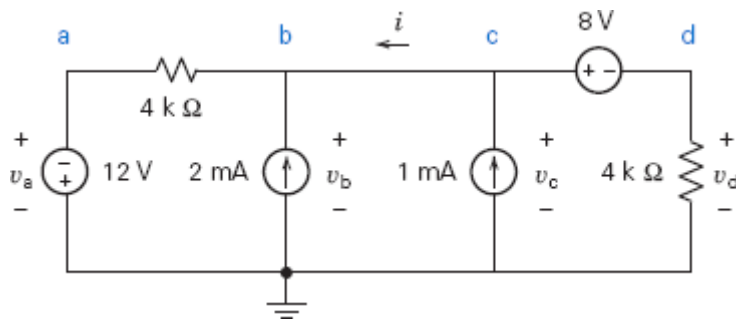



Figura PS 4-3

PS 4-4 Determine a corrente i na Figura PS 4-4.

Resposta: $i = 0,56$ A.

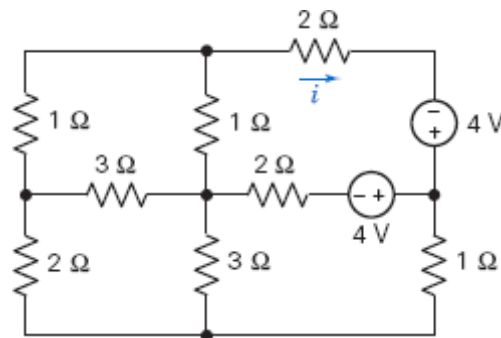



Figura PS 4-4

Problemas de Projeto

PP 4-1 Um instrumento eletrônico utiliza uma fonte de alimentação de 15 V. O mostrador do instrumento necessita de uma alimentação de 5 V. Infelizmente, o orçamento do projeto estourou e você é obrigado a usar a fonte de alimentação de 15 V para alimentar o mostrador. Usando um divisor de tensão, como mostra a Figura PP 4-1, você consegue obter 5 V. Segundo a folha de especificações do mostrador digital, ele funciona corretamente se a tensão de alimentação se mantiver entre 4,8 V e 5,4 V. Além disso, o mostrador consome uma corrente de 300 mA (I) quando o mostrador está ativo e uma corrente de 100 mA quando o mostrador está inativo.

(a) Escolha os valores de R_1 e R_2 para que a tensão fornecida ao mostrador permaneça entre 4,8 e 5,4 V para qualquer valor da corrente I.

(b) Calcule as potências máximas dissipadas pelos resistores R_1 e R_2 e a corrente máxima fornecida pela fonte de 15 V para alimentar o mostrador.

(c) O uso de um divisor de tensão é uma boa solução prática? Justifique sua resposta.

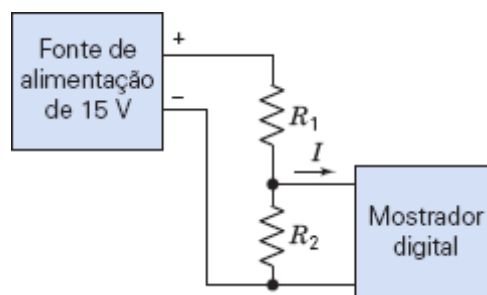



Figura PP 4-1

PP 4-2 No circuito da Figura PP 4-2, deseja-se fazer a tensão do nó a igual a 0 V para controlar um motor elétrico. Escolha as tensões v_1 e v_2 para que $v_a = 0$ V com v_1 e v_2 menores que 20 V e maiores que zero e $R = 2\ \Omega$.

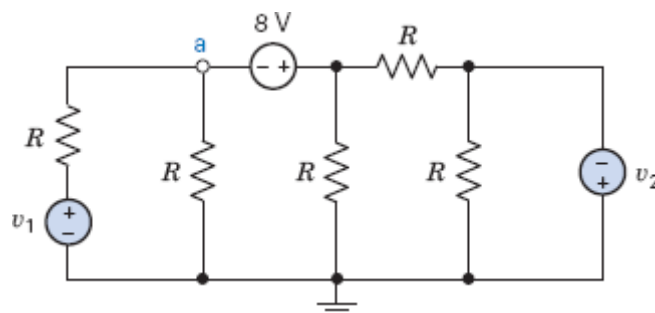



Figura PP 4-2

PP 4-3 A Figura PP 4-3 mostra o circuito de alimentação de uma lâmpada especial. A lâmpada possui uma resistência de 2 Ω e o projetista escolheu $R = 100\ \Omega$. A lâmpada acende para $I \geq 50$ mA, mas queima se $I > 75$ mA.

(a) Determine a corrente na lâmpada e verifique se a lâmpada vai queimar com $R = 100\ \Omega$.

(b) Escolha o valor de R para que a lâmpada acenda, mas não queime, se R variar de ±10 % por causa de variações da temperatura ambiente.

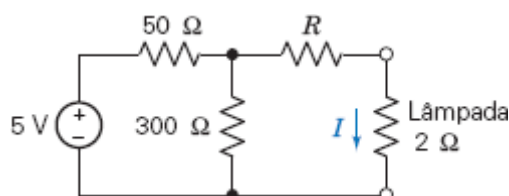



Figura PP 4-3 Circuito de alimentação de uma lâmpada.

PP 4-4 Para controlar um dispositivo usando o circuito da Figura PP 4-4, é necessário que $v_{ab} = 10$ V. Escolha os resistores de tal forma que todos os resistores sejam maiores que 1 Ω e $R_3 + R_4 = 20\ \Omega$.

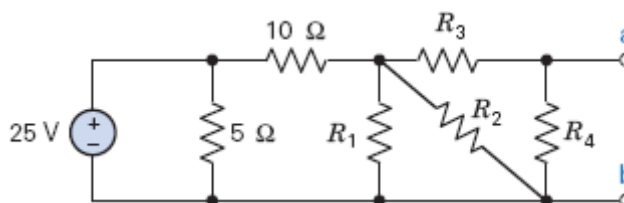



Figura PP 4-4

PP 4-5 A corrente i do circuito da Figura PP 4-5 é usada para medir a tensão mecânica entre os dois lados de uma falha geológica. A tensão elétrica v_1 é obtida de um lado da falha e a tensão elétrica v_2 é obtida do outro lado da falha. Escolha as resistências R_1, R_2 e R_3 para que o valor absoluto da corrente i permaneça entre 0,5 mA e 2 mA quando v_1 e v_2 variam, de forma independente, entre +1 V e +2 V ($+1\text{ V} \leq v_1 \leq +2\text{ V}$) e ($+1\text{ V} \leq v_2 \leq +2\text{ V}$).

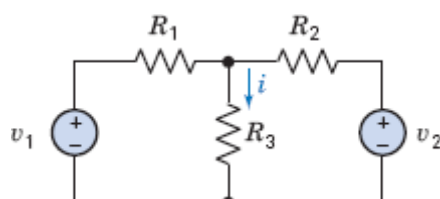



Figura PP 4-5 Circuito para medir a tensão mecânica em uma falha geológica.

CAPÍTULO 5 Teoremas dos Circuitos Elétricos

NESTE CAPÍTULO

5.1 *Introdução*

Neste capítulo vamos discutir cinco teoremas dos circuitos elétricos:

- As **transformações de fontes** permitem substituir uma fonte de tensão com um resistor em série por uma fonte de corrente com um resistor em paralelo e vice-versa. Essas transformações não mudam as correntes e tensões nos outros componentes do circuito.
- De acordo com o princípio da **superposição**, a resposta de um circuito linear a várias entradas simultâneas é igual à soma das respostas a cada uma das entradas se essa entrada estivesse atuando separadamente.
- O **teorema de Thévenin** permite substituir parte de um circuito por uma fonte de tensão em série com um resistor. Essa substituição não muda as correntes e tensões nos outros componentes do circuito.
- O **teorema de Norton** permite substituir parte de um circuito por uma fonte de corrente em paralelo com um resistor. Essa substituição não muda as correntes e tensões nos outros componentes do circuito.
- O **teorema de máxima transferência de potência** descreve as condições necessárias para que um circuito transfira a maior potência possível para outro circuito.

Cada um desses teoremas dos circuitos elétricos pode ser considerado uma forma de reduzir a complexidade dos circuitos para que possam ser analisados com mais facilidade. O mais importante, porém, é que esses teoremas permitem compreender melhor a natureza dos circuitos elétricos lineares.

5.2 *Transformações de Fonte*

A fonte de tensão ideal é o modelo mais simples de fonte de tensão, mas às vezes precisamos de um modelo mais realista. A Figura 5.2-1*a* mostra um modelo mais realista e mais complexo de uma fonte de tensão. O circuito da Figura 5.2-1*a* é às vezes chamado de fonte de tensão não ideal. (A tensão de uma fonte de tensão real diminui quando a potência fornecida pela fonte aumenta. A fonte de tensão não ideal apresenta o mesmo comportamento, o que não acontece com a fonte de tensão ideal. A fonte de tensão não ideal pode ser um modelo mais realista de uma fonte de tensão real que a fonte de tensão ideal, mas é também mais complexa. Na maioria das vezes, vamos usar fontes de tensão ideais para modelar fontes de tensão reais, mas, em alguns casos, usaremos fontes de tensão não ideais.) A Figura 5.2-1*b* mostra uma fonte de corrente não ideal; trata-se de um modelo mais realista preciso e mais complexo de uma fonte de corrente real.

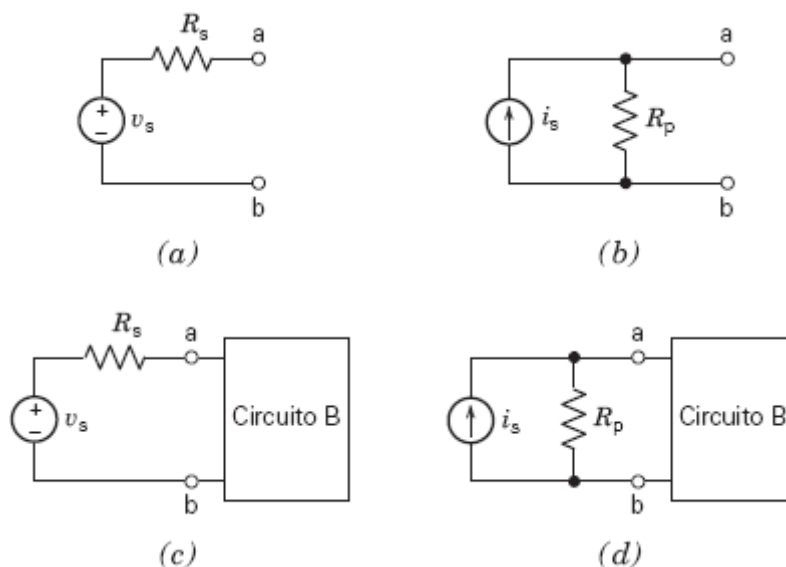



FIGURA 5.2-1 (*a*) Fonte de tensão não ideal. (*b*) Fonte de corrente não ideal. (*c*) Circuito B ligado a uma fonte de tensão não ideal. (*d*) Circuito B ligado a uma fonte de corrente não ideal.

Em certas condições ($R_p = R_s$ e $v_s = R_s i_s$), uma fonte de tensão não ideal e uma fonte de corrente não ideal são equivalentes. A Figura 5.2-1 ilustra o significado de "equivalente". Na Figura 5.2-1*c*, uma fonte de tensão não ideal está ligada ao Circuito B. Na Figura 5.2-1*d*, uma fonte de corrente não ideal está ligada ao mesmo Circuito B. Talvez a Figura 5.2-1*d* tenha sido obtida a partir da Figura 5.2-1*c* substituindo a fonte de tensão não ideal por uma fonte de corrente não ideal. A substituição da fonte de tensão não ideal por uma fonte de corrente não ideal *equivalente* não muda as tensões e correntes nos componentes do Circuito B. Isso significa que se você consultar uma lista dos valores das correntes e tensões de todos os componentes do Circuito B, não poderá dizer se o Circuito B estava ligado a uma fonte de tensão não ideal ou a uma fonte de corrente não ideal equivalente quando as medidas foram feitas. Da mesma forma, podemos imaginar que a Figura 5.2-1*c* foi obtida a partir da Figura 5.2-1*d* substituindo a fonte de corrente não ideal por uma fonte de tensão não ideal. A substituição da fonte de corrente não ideal por uma fonte de tensão não ideal *equivalente* não muda as tensões e correntes nos componentes do Circuito B. O processo de transformar a Figura 5.2-1*c* na Figura 5.2-1*d*, ou vice-versa, é chamado de *transformação de fonte*.

Para mostrar como se processa uma transformação de fonte, vamos realizar um experimento usando o circuito de teste da Figura 5.2-2. O circuito contém um dispositivo conhecido como *amplificador operacional*. Como os amplificadores operacionais só serão discutidos no Capítulo 6, ainda não estamos preparados para analisar esse circuito. Em vez disso, vamos montar o circuito e executar algumas medidas para descobrir como funciona.

Considere o seguinte experimento: ligamos um resistor *R* aos terminais do circuito, como mostra a Figura 5.2-2, e medimos a tensão *v* e a corrente *i* no resistor. Em seguida, substituímos o resistor por um resistor de valor diferente e medimos os novos valores da tensão e da corrente. Depois fazer algumas dessas substituições, obtemos a seguinte tabela de resultados:

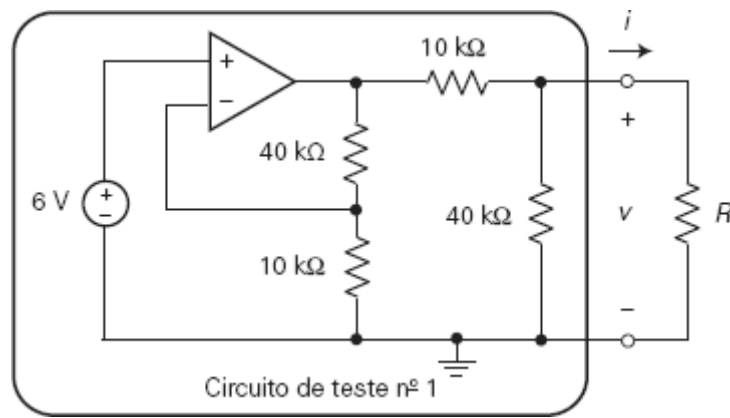



FIGURA 5.2-2 Um circuito de teste.

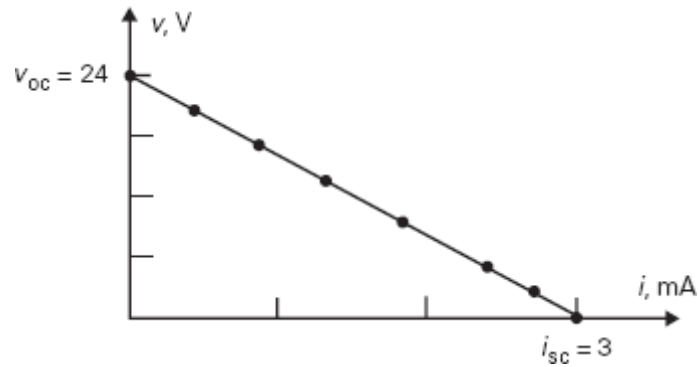



FIGURA 5.2-3 Gráfico dos dados colhidos no circuito de teste.

R, kΩ	0	1	2	5	10	20	50	∞
i, mA	3	2,667	2,4	1,846	1,33	0,857	0,414	0
v, V	0	2,667	4,8	9,231	13,33	17,143	20,69	24

Dois desses conjuntos de dados merecem atenção especial. O primeiro é o conjunto de dados para $R = \infty$, que corresponde ao caso em que não existe um componente entre os terminais do circuito. Como era de se esperar, $i = 0$ e a tensão entre os terminais é chamada de *tensão de circuito aberto* e representada pelo símbolo v_{oc}.[1] O resultado da medida mostra que $v_{oc} = 24$ V. O segundo é o conjunto de dados para $R = 0$, que corresponde ao caso em que os terminais do circuito estão ligados por um fio. Como era de se esperar,$v = 0$ e a corrente no fio é chamada de *corrente de curto-circuito* e representada pelo símbolo i_{sc}.[2] O resultado da medida mostra que $i_{sc} = 3$ mA.

Os dados da tabela estão plotados na Figura 5.2-3. Todos os pontos experimentais pertencem à reta que liga os pontos (i_{sc}, 0) e (0, v_{oc}). A inclinação da reta é

$$inclinação = \frac{v_{oc}}{i_{sc}}$$

Como a inclinação tem unidades de resistência, é conveniente definir uma constante R_t através da relação

$$R_t = \frac{v_{oc}}{i_{sc}} \tag{5.2-1}$$

A equação da linha reta que representa os dados é

$$v = \left(-\frac{v_{oc}}{i_{sc}}\right) \Rightarrow v = -R_t i + v_{oc} \qquad (5.2\text{-}2)$$

Os resultados do nosso experimento foram satisfatórios. A Eq. 5.2-2 é uma descrição concisa do circuito de teste. Entretanto, uma surpresa nos aguarda. Considere o circuito da Figura 5.2-4.

O circuito de teste da Figura 5.2-4 é formado por uma fonte de tensão em série com um resistor. A tensão da fonte de tensão desse segundo circuito de teste é igual à tensão de circuito aberto do primeiro circuito de teste e a resistência do resistor é igual ao parâmetro R_t do primeiro circuito de teste, dado pela Eq. 5.2-1.

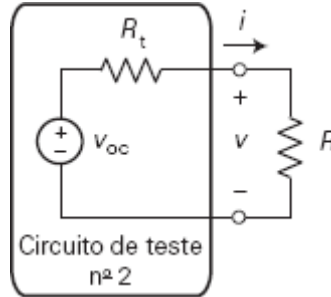



FIGURA 5.2-4 Circuito equivalente de Thévenin

Aplicando a LKT ao circuito da Figura 5.2-4, obtemos

$$R_t i + v - v_{oc} = 0 \Rightarrow v = -R_t i + v_{oc} \qquad (5.2\text{-}3)$$

A Eq. 5.2-3 é igual à Eq. 5.2-2. Isso significa que os circuitos das Figuras 5.2-2 e 5.2-4 são descritos pela mesma equação! Ainda há mais. Considere o circuito da Figura 5.2-5. O circuito de teste da Figura 5.2-5 é formado por uma fonte de corrente em paralelo com um resistor. A corrente da fonte de corrente do terceiro circuito de teste é a corrente de curto-circuito do primeiro circuito de teste e a resistência do resistor, como no segundo circuito de teste, é igual ao parâmetro R_t do primeiro circuito de teste.

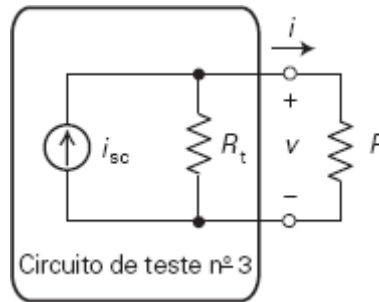



FIGURA 5.2-5 Circuito equivalente de Norton.

Aplicando a LHC ao circuito da Figura 5.2-5, obtemos:

$$i_{sc} = \frac{v}{R_t} + i = 0 \Rightarrow v = -R_t i + R_t i_{oc} \Rightarrow v = -R_t i + v_{oc} \qquad (5.2\text{-}4)$$

O fato de que Eqs. 5.2-2, 5.2-3 e 5.2-4 são iguais significa que os três circuitos de teste são representados pela mesma equação, ou seja, qualquer desses circuitos poderia ter gerado os dados da tabela! É por isso que dizemos que o segundo e o terceiro circuito de teste são equivalentes ao primeiro.

O segundo e o terceiro circuito de teste são chamados, respectivamente, de *circuito equivalente de Thévenin* e *circuito equivalente de Norton* do primeiro circuito de teste. Além disso, o parâmetro R_t dado pela Eq. 5.2-1 é chamado de *resistência de Thévenin* quando é usado no circuito equivalente de Thévenin e de *resistência de Norton* quando é usado no circuito equivalente de Norton.

Como os circuitos de Thévenin e de Norton são equivalentes, a transformação de fonte mencionada no início desta seção e representada na Figura 5.2-6 pode ser realizada para substituir um circuito equivalente

de Thévenin por um circuito equivalente do Norton ou um circuito equivalente de Norton por um circuito equivalente de Thévenin.

$$v_s = R_p i_p \quad \text{e} \quad R_s = R_p \qquad\qquad i_p = \frac{v_s}{R_s} \quad \text{e} \quad R_p = R_s$$

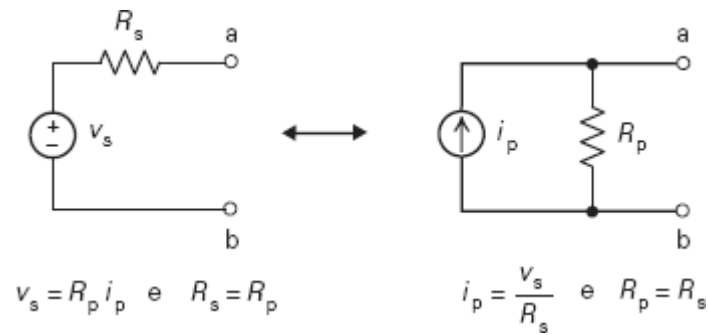



FIGURA 5.2-6 Transformação de fonte.

EXEMPLO 5.2-1 Transformação de Fonte

Determine os valores de i_p e de R_p para os quais a parte do circuito ligada ao resistor de 2 kΩ da Figura 5.2-7*b* é equivalente à parte do circuito ligada ao resistor de 2 kΩ da Figura 5.2-7*a*. Em seguida, determine os valores de v_a e v_b.

Solução

Podemos usar uma transformação de fonte para determinar os valores pedidos de i_p e R_p. De acordo com a Figura 5.2-6, temos

$$i_p = \frac{12}{6000} = 0{,}002 \text{ A} = 2 \text{ mA} \quad \text{e} \quad R_p = 6 \text{ k}\Omega$$

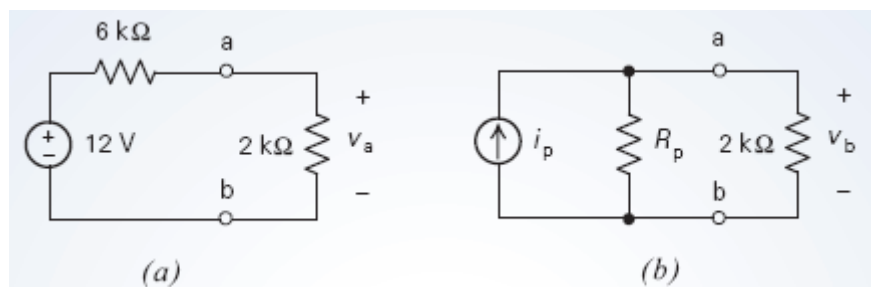



FIGURA 5.2-7 Circuito do Exemplo 5.2-1.

Aplicando o método da divisão de tensão ao circuito da Figura 5.2-7*a*, obtemos

$$v_a = \frac{2000}{2000 + 6000}(12) = 3 \text{ V}$$

A tensão dos resistores em paralelo do circuito da Figura 5.2-7*b* é

$$v_b = \frac{2000 R_p}{2000 + R_p} i_p = \frac{2000(6000)}{2000 + 6000}(0{,}002) = 1500(0{,}002) = 3 \text{ V}$$

Como era esperado, a transformação de fonte não muda o valor da tensão do resistor de 2 kΩ.

EXEMPLO 5.2-2 Transformação de Fonte

Determine os valores de i_p e de R_p para os quais a parte do circuito ligada ao resistor de 2 kΩ da Figura 5.2-8*b* é equivalente à parte do circuito ligada ao resistor de 2 kΩ da Figura 5.2-8*a*. Em seguida, determine os valores de v_a e v_b.

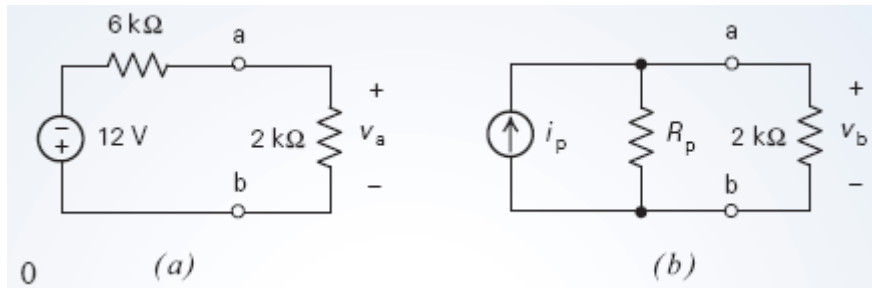



FIGURA 5.2-8 Circuito do Exemplo 5.2-2.

Solução

Este exemplo é muito parecido com o exemplo anterior; a diferença está apenas na polaridade da fonte de tensão do circuito da parte (a) das figuras. Como inverter a polaridade de uma fonte de tensão equivale a trocar o sinal do valor da tensão, a execução simultânea das duas mudanças deixa o circuito inicial inalterado. Isso significa que o circuito da Figura 5.2-8*a* pode ser substituído pelo circuito da Figura 5.2-9*a*. Em seguida, podemos usar uma transformação de fonte para determinar os valores pedidos de i_p e R_p. De acordo com a Figura 5.2-6, temos:

$$i_p = \frac{-12}{6000} = -0,002 \text{ A} = -2 \text{ mA} \quad \text{e} \quad R_p = 6 \text{ k}\Omega$$

Aplicando o método da divisão de tensão ao circuito da Figura 5.2-9*a*, obtemos:

$$v_a = -\frac{2000}{2000 + 6000}(12) = -3 \text{ V}$$

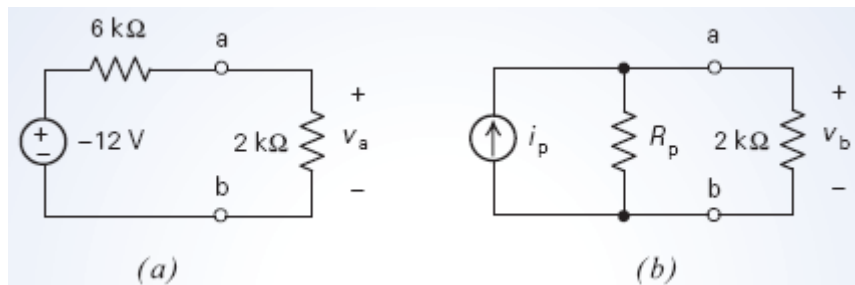



FIGURA 5.2-9 O circuito da Figura 5.2-8, com a polaridade da fonte de tensão invertida.

A tensão dos resistores em paralelo do circuito da Figura 5.2-9*b* é

$$v_b = \frac{2000 R_p}{2000 + R_p} i_p = \frac{2000(6000)}{2000 + 6000}(-0,002) = 1500(-0,002) = -3 \text{ V}$$

Como era esperado, a transformação de fonte não muda o valor da tensão do resistor de 2 kΩ.

EXEMPLO 5.2-3 Aplicação de uma Transformação de Fonte

Use uma transformação de fonte para determinar uma relação entre a resistência *R* e a corrente *i* no circuito da Figura 5.2-10.

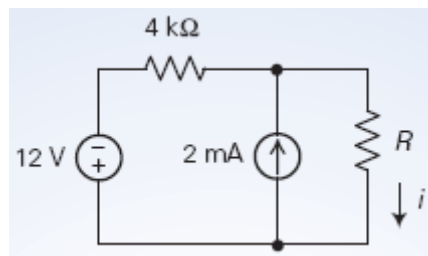



FIGURA 5.2-10 Circuito do Exemplo 5.2-3.

Solução

Usando uma transformação de fonte, podemos substituir a fonte de 12 V em série com um resistor de 4 kΩ por uma fonte de corrente em paralelo com um resistor. O circuito resultante aparece na Figura 5.2-11.

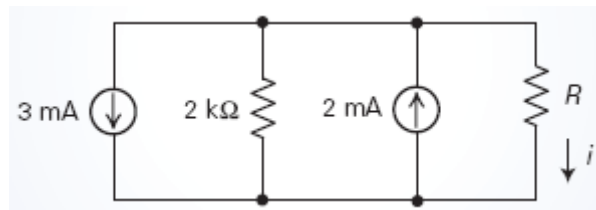



FIGURA 5.2-11 Circuito da Figura 5.2-10 depois de uma transformação de fonte.

Em seguida, podemos substituir as duas fontes de corrente em paralelo por uma fonte equivalente. O circuito resultante aparece na Figura 5.2-12. Aplicando o método da divisão de corrente ao circuito, obtemos

$$i = \frac{2000}{2000 + R}(0{,}001) = \frac{2}{2000 + R} \tag{5.2-5}$$

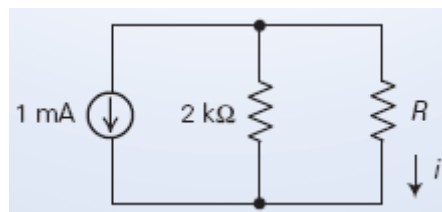



FIGURA 5.2-12 Circuito da Figura 5.2-11 depois da substituição das duas fontes de corrente por uma fonte equivalente.

Como a transformação da fonte e a substituição das duas fontes de corrente por uma fonte equivalente não mudam o valor da corrente no resistor *R*, a relação entre a resistência *R* e a corrente *i* é a mesma nos circuitos das Figuras 5.2-12 e 5.2-10. Assim, a relação pedida entre *R* e *i* no circuito da Figura 5.2-11 é dada pela Eq. 5.2-5.

EXERCÍCIO 5.2-1 Determine, usando uma transformação de fonte, o valor de R e i_s para que os circuitos das Figuras E 5.2-1*a* e E 5.2-1*b* sejam equivalentes.

Resposta: $R = 10\ \Omega$ e $i_s = 1{,}2$ A

EXERCÍCIO 5.2-2 Determine, usando uma transformação de fonte, o valor de R e i_s para que os circuitos das Figuras E 5.2-2*a* e E 5.2-2*b* sejam equivalentes.

Sugestão: Observe que a polaridade da fonte de tensão na Figura E 5.2-2*a* não é a mesma da Figura E 5.2-1*a*.

Resposta: $R = 10\ \Omega$ e $i_s = -1{,}2$ A

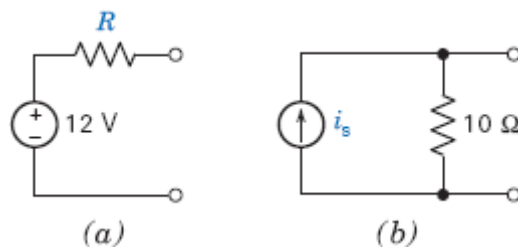



FIGURA E 5.2-1

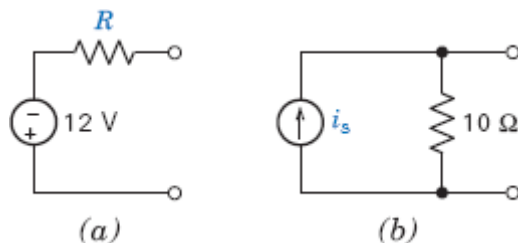



FIGURA E 5.2-2

EXERCÍCIO 5.2-3 Determine, usando uma transformação de fonte, o valor de R e v_s para que os circuitos das Figuras E 5.2-3*a* e E 5.2-3*b* sejam equivalentes.

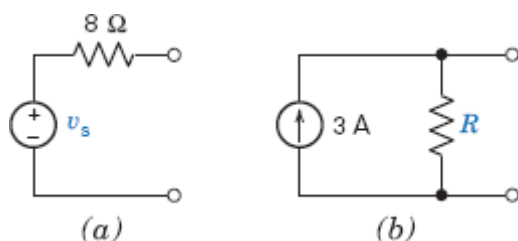



FIGURA E 5.2-3

Resposta: $R = 8\ \Omega$ e $v_s = 24$ V

EXERCÍCIO 5.2-4 Determine, usando uma transformação de fonte, o valor de R e v_s para que os circuitos das Figuras E 5.2-4*a* e E 5.2-4*b* sejam equivalentes.

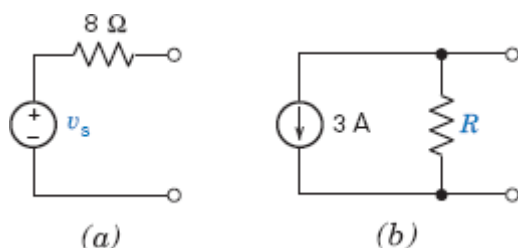



FIGURA E 5.2-4

Sugestão: Note que o sentido da fonte de corrente da Figura E 5.2-4*b* não é o mesmo da Figura E 5.2-3*b*.

Resposta: $R = 8\ \Omega$ e $v_s = -24$ V

5.3 Superposição

A saída de um circuito linear pode ser expressa como uma combinação linear das entradas. Considere, por exemplo, um circuito com as seguintes propriedades:

1. O circuito é formado exclusivamente por resistores e fontes dependentes e independentes.

2. As entradas do circuito são as tensões de todas as fontes de tensão independentes e as correntes de todas as fontes de corrente independentes.
3. A saída é a tensão ou a corrente de qualquer componente do circuito.

Um circuito com as propriedades acima é um circuito linear. Em consequência, a saída do circuito pode ser expressa como uma combinação linear das entradas do circuito. Por exemplo:

$$v_o = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n \tag{5.3-1}$$

em que v_o é a saída do circuito (que poderia ser uma corrente em vez de uma tensão) e $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são as entradas do circuito (algumas ou todas as entradas poderiam ser correntes em vez de tensões). Os coeficientes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ da Eq. 5.3-1 são constantes reais conhecidas como ganhos.

Considere o que acontece se fizermos todas as entradas iguais a zero, exceto uma. Seja v_{oi} a saída quando todas as entradas, exceto a entrada i, são nulas. Suponha, por exemplo, que $v_2 = v_3 = \ldots = v_n = 0$. Nesse caso,

$$v_{o1} = a_1 v_1 \tag{5.3-2}$$

Podemos interpretar $v_{o1} = a_1 v_1$ como a saída do circuito produzida pela entrada v_1 agindo separadamente. Por outro lado, v_o na Eq. 5.3-1 é a saída do circuito produzida por todas as entradas agindo simultaneamente. Temos, portanto, a seguinte interpretação importante da Eq. 5.3-1:

A saída de um circuito linear produzida por várias entradas agindo simultaneamente é igual à soma das saídas produzidas pelas entradas agindo separadamente.

As entradas do nosso circuito são tensões de fontes de tensão independentes e correntes de fontes de corrente independentes. Quando anulamos todas as entradas, exceto uma, as outras entradas se tornam fontes de tensão de 0 V e fontes de corrente de 0 A. Como uma fonte de tensão de 0 V é equivalente a um curto-circuito e uma fonte de corrente de 0 A é equivalente a um circuito aberto, as fontes correspondentes às outras entradas devem ser substituídas por curtos-circuitos ou circuitos abertos.

A Eq. 5.3-2 sugere um método para determinar o valor dos coeficientes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ da combinação linear. Para determinar a_1, por exemplo, fazemos $v_2 = v_3 = \ldots = v_n = 0$ na Eq. 5.3-1 e dividimos o resultado (v_{o1}) por v_1, o que nos dá

$$a_1 = \frac{v_{o1}}{v_1}$$

Os outros ganhos podem ser determinados de forma análoga.

EXEMPLO 5.3-1 Superposição

O circuito da Figura 5.3-1 tem uma saída, v_o, e três entradas, v_1, i_2 e v_3. (Como deve ser, todas as entradas são tensões de fontes de tensão independentes ou correntes de fontes de corrente independentes.) Expresse a saída como uma combinação linear das entradas.

Solução

Vamos analisar o circuito usando tensões de nó. Para isso, definimos um supernó da forma indicada na Figura 5.3-2 e aplicamos a LKC a esse supernó para obter

$$\frac{v_1 - (v_3 + v_o)}{40} + i_2 = \frac{v_o}{10}$$

Multiplicando ambos os membros da equação por 40 para eliminar as frações, obtemos

$$v_1 - (v_3 + v_o) + 40i_2 = 4v_o \;\Rightarrow\; v_1 + 40i_2 - v_3 = 5v_o$$

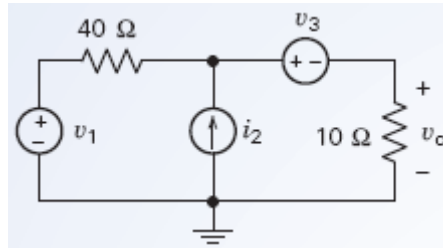



FIGURA 5.3-1 O circuito linear do Exemplo 5.3-1.

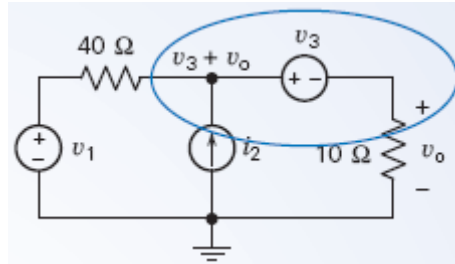



FIGURA 5.3-2 Um supernó.

Dividindo ambos os membros por 5, obtemos a saída como uma combinação linear das entradas:

$$v_o = \frac{v_1}{5} + 8i_2 - \frac{v_3}{5}$$

Além disso, podemos calcular os coeficientes da combinação linear, ou seja, os ganhos das entradas:

$$a_1 = \frac{v_{o1}}{v_1} = \frac{1}{5}\text{V/V},\; a_2 = \frac{v_{o2}}{i_2} = 8\text{V/A e } a_3 = \frac{v_{o3}}{i_3} = -\frac{1}{5}\text{V/V}$$

Solução Alternativa

A Figura 5.3-3 mostra o circuito da Figura 5.3-1 para $i_2 = 0$ A e $v_3 = 0$ V. (Uma fonte de corrente nula é equivalente a um circuito aberto e uma fonte de tensão nula é equivalente a um curto-circuito.)

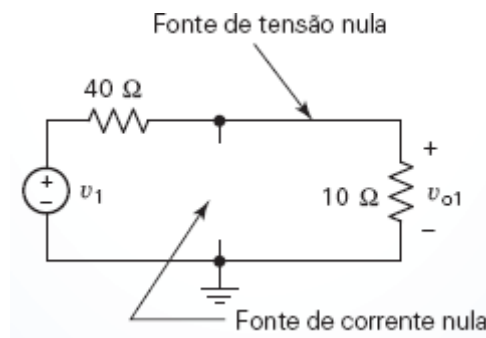



FIGURA 5.3-3 Saída produzida pela primeira entrada.

Usando o método da divisão de tensão, obtemos

$$v_{o1} = \frac{10}{40 + 10} v_1 = \frac{1}{5} v_1$$

o que significa que

$$a_1 = \frac{v_{o1}}{v_1} = \frac{1}{5} \text{ V/V}$$

A Figura 5.3-4 mostra o circuito para $v_1 = 0$ V e $v_3 = 0$ V. Os resistores estão ligados em paralelo. Aplicando a lei de Ohm à resistência equivalente, obtemos

$$v_{o2} = \frac{40 \times 10}{40 + 10} i_2 = 8 i_2$$

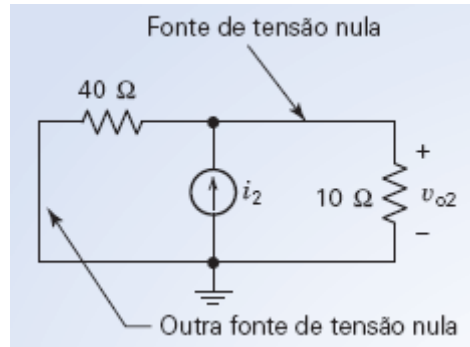



FIGURA 5.3-4 Saída produzida pela segunda entrada.

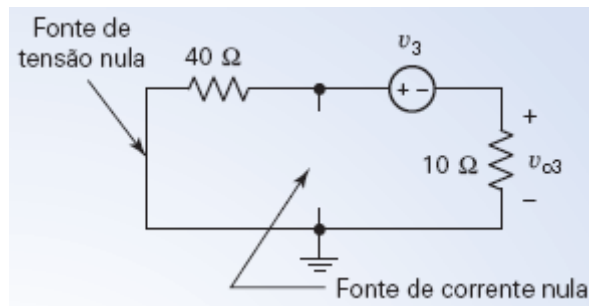



FIGURA 5.3-5 Saída produzida pela terceira entrada.

o que significa que

$$a_2 = \frac{v_{o2}}{i_2} = 8 \text{ V/A}$$

Finalmente, a Figura 5.3-5 mostra o circuito para $v_1 = 0$ V e $i_2 = 0$ A. Usando o método da divisão de tensão, obtemos

$$v_{o3} = \frac{10}{40 + 10}(-v_3) = -\frac{1}{5} v_3$$

o que significa que

$$a_3 = \frac{v_{o3}}{v_3} = -\frac{1}{5} \text{ V/V}$$

A saída pode ser expressa como uma combinação linear das entradas:

$$v_o = a_1 v_1 + a_2 i_2 + a_3 v_3 = \frac{1}{5} v_1 + 8 i_2 + \left(-\frac{1}{5}\right) v_3$$

que é um resultado igual ao anterior.

EXEMPLO 5.3-2 Superposição

Determine o valor da corrente i no circuito da Figura 5.3-6*a*.

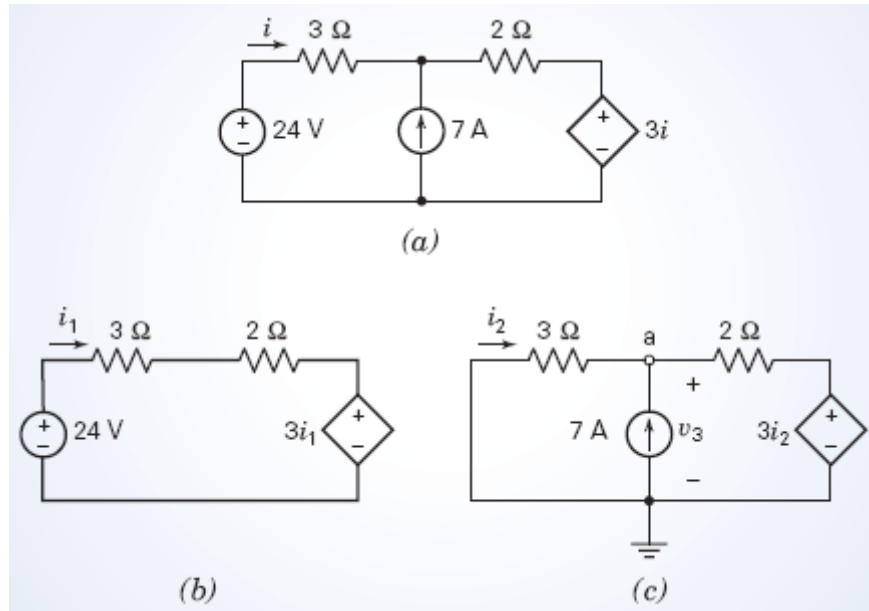



FIGURA 5.3-6 (*a*) Circuito do Exemplo 5.3-2. (*b*) A fonte de tensão independente agindo separadamente. (*c*) A fonte de corrente independente agindo separadamente.

Solução

As fontes independentes constituem as entradas de um circuito. O circuito da Figura 5.3-6*a* tem duas entradas: a tensão da fonte de tensão independente e a corrente da fonte de corrente independente. A corrente i produzida pelas duas fontes agindo simultaneamente é igual à soma das correntes produzidas pelas duas fontes independentes agindo separadamente.

1º passo: A Figura 5.3-6*b* mostra o circuito usado para calcular a corrente produzida pela fonte de tensão independente agindo separadamente. Para realizar esse cálculo, anulamos a fonte de corrente. (Como uma fonte de corrente cuja corrente é zero equivale a um circuito aberto, a fonte de corrente foi substituída por um circuito aberto.) A corrente produzida pela fonte de tensão independente agindo separadamente foi chamada de i_1 na Figura 5.3-6*b*.

Aplicando a lei de Kirchhoff para tensões à malha da Figura 5.3-6*b*, obtemos

$$-24 + (3 + 2)i_1 + 3i_1 + 0 \ \Rightarrow\ i_1 = 3\text{ A}$$

(Observe que não anulamos a fonte dependente. As entradas de um circuito são as fontes independentes, não as fontes dependentes. Para calcular a resposta a uma das entradas agindo sozinha, devemos anular apenas as outras entradas. Assim, anulamos a outra fonte independente, mas não há razão para anular as fontes dependentes.)

2º passo: A Figura 5.3-6*c* mostra o circuito usado para calcular a corrente produzida pela fonte de corrente agindo separadamente. Para realizar este cálculo, anulamos a fonte de tensão independente. (Como uma fonte de tensão com a tensão igual a zero equivale a um curto-circuito, a fonte de tensão independente foi substituída por um curto-circuito.) A corrente produzida pela fonte de corrente independente agindo separadamente foi chamada de i_2 na Figura 5.3-6*c*.

Em primeiro lugar, usamos a lei de Ohm para expressar a corrente de controle da fonte dependente em termos da tensão de nó v_a:

$$i_2 = -\frac{v_a}{3} \quad \Rightarrow \quad v_a = -3i_2$$

Em seguida, aplicamos a lei de Kirchhoff para correntes ao nó a para obter

$$i_2 + 7 = \frac{v_a - 3i_2}{2} \quad \Rightarrow \quad i_2 + 7 = \frac{-3i_2 - 3i_2}{2} \quad \Rightarrow \quad i_2 = -\frac{7}{4} \text{ A}$$

3º passo: A corrente i produzida pelas duas fontes independentes agindo simultaneamente é igual à soma das correntes i_1 e i_2 produzidas pelas fontes agindo separadamente:

$$i = i_1 + i_2 = 3 - \frac{7}{4} = \frac{5}{4} \text{ A}$$

5.4 *Teorema de Thévenin*

Nesta seção, vamos discutir o circuito equivalente de Thévenin, baseado em um teorema proposto em 1883 por M. L. Thévenin, um engenheiro francês que provavelmente se inspirou em trabalhos anteriores de Hermann van Helmholtz (veja a Figura 5.4-1).

Universal Images Group Editoria/GettyImages
FIGURA 5.4-1 Hermann von Helmholtz (1821–1894), cujos trabalhos provavelmente levaram ao teorema de Thévenin.

A Figura 5.4-2 ilustra o uso do circuito equivalente de Thévenin. Na Figura 5.4-2*a*, um circuito foi dividido em duas partes, o Circuito A e o Circuito B, ligadas por um único par de terminais. (Essa é a única ligação entre os dois circuitos. Em particular, se o circuito contém uma fonte dependente, as duas partes da fonte dependente devem estar no Circuito A ou no Circuito B.) Na Figura 5.4-2*b*, o Circuito A foi substituído pelo circuito equivalente de Thévenin, que é formado por uma fonte de tensão ideal em série com um resistor. A substituição do Circuito A por um circuito equivalente de Thévenin não altera a tensão e a corrente de nenhum componente do Circuito B. Isso significa que se alguém consultar uma lista de valores das correntes e tensões dos componentes do Circuito B, não poderá saber se esses valores foram obtidos com o Circuito B ligado ao Circuito A ou com o Circuito B ligado ao circuito equivalente de Thévenin do Circuito A.

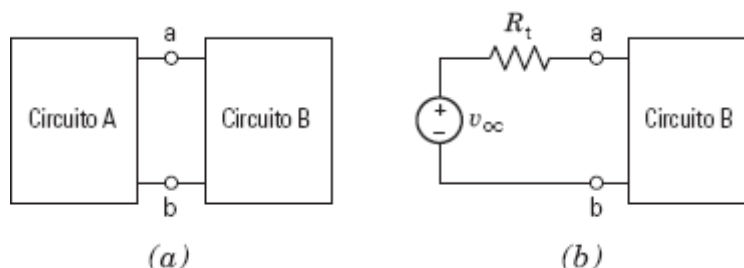



FIGURA 5.4-2 (*a*) Circuito dividido em duas partes: Circuito A e Circuito B. (*b*) Substituição do circuito A por um circuito equivalente de Thévenin.

Para determinar o circuito equivalente de Thévenin do Circuito A, basta conhecer três parâmetros: a tensão de circuito aberto, v_{oc}, a corrente de curto-circuito, i_{sc}, e a resistência de Thévenin, R_t. A Figura 5.4-3 ilustra o significado dos três parâmetros. Na Figura 5.4-3*a*, um circuito aberto é ligado aos terminais do circuito A. A tensão entre os terminais desse circuito aberto é a tensão de circuito aberto, v_{oc}. Na Figura 5.4-3*b*, um curto-circuito é ligado aos terminais do circuito A. A corrente nesse curto-circuito é a corrente de curto-circuito, i_{sc}.

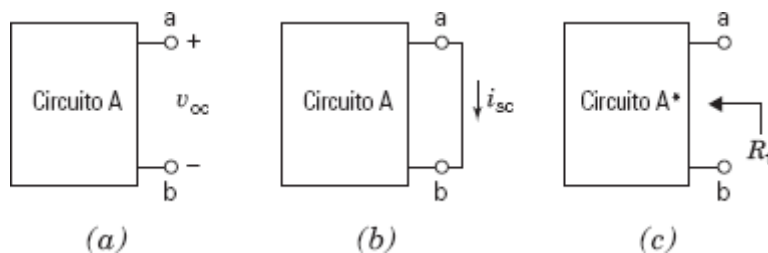



FIGURA 5.4-3 O circuito equivalente de Thévenin envolve três parâmetros: (a) a tensão de circuito aberto, v_{oc}, (b) a corrente de curto-circuito, i_{sc}, e (c) a resistência de Thévenin, R_t.

A Figura 5.4-3*c* mostra que a resistência de Thévenin, R_t, é a resistência equivalente do Circuito A*. O Circuito A* é obtido a partir do Circuito A substituindo todas as fontes de tensão *independentes* por curtos-circuitos e substituindo todas as fontes de corrente *independentes* por circuitos abertos. (A fontes *dependentes* de tensão e de corrente permanecem inalteradas.) Frequentemente, a resistência de Thévenin R_t pode ser obtida substituindo repetidamente resistores em série e/ou em paralelo por resistores equivalentes. Às vezes, porém, é necessário usar um método mais formal. A Figura 5.4-4 ilustra um método formal para determinar o valor da resistência de Thévenin. Uma fonte de corrente que produz uma corrente i_t é ligada aos terminais do Circuito A*. A tensão v_t entre os terminais da fonte de corrente é calculada ou medida. A resistência de Thévenin é determinada a partir dos valores de i_t e v_t através da equação

$$R_t = \frac{v_t}{i_t} \qquad (5.4\text{-}1)$$

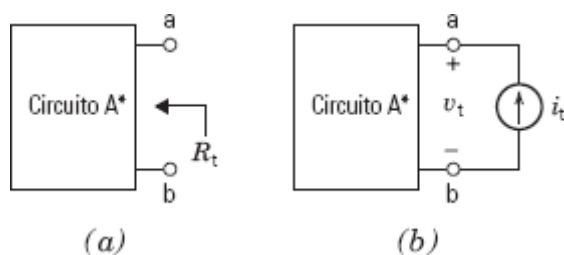



FIGURA 5.4-4 (*a*) A resistência de Thévenin, R_t, e (*b*) um método para medir ou calcular a resistência de Thévenin, R_t.

A tensão de circuito aberto, v_{oc}, a corrente de curto-circuito, i_{sc}, e a resistência de Thévenin, R_t, estão relacionadas através da equação

$$v_{oc} = R_t i_{sc} \qquad (5.4\text{-}2)$$

Isso significa que a resistência de Thévenin pode ser calculada a partir da tensão de circuito aberto e da corrente de curto-circuito.

Resumindo, o circuito equivalente de Thévenin do circuito A é formado por uma fonte de tensão ideal, de tensão v_{oc}, em série com um resistor de resistência R_t. A substituição do Circuito A pelo circuito equivalente de Thévenin não altera a tensão e a corrente dos componentes do Circuito B.

EXEMPLO 5.4-1 Circuito Equivalente de Thévenin

EXEMPLO 5.4-1 Circuito Equivalente de Thévenin

Determine o circuito equivalente de Thévenin do circuito da Figura 5.4-5.

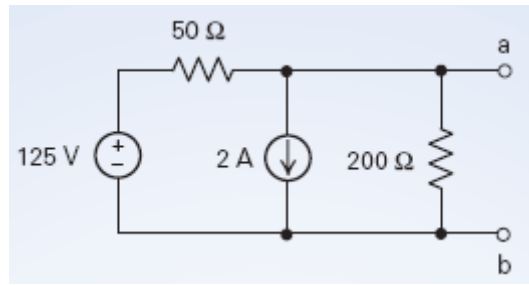



FIGURA 5.4-5 Circuito do Exemplo 5.4-1.

Primeira Solução

Para determinar o circuito equivalente de Thévenin de um circuito, basta conhecer a tensão de circuito aberto v_{oc} e a resistência de Thévenin R_t. A Figura 5.4-3 mostra como determinar a tensão de circuito aberto, a resistência de Thévenin e também a corrente de curto-circuito i_{sc}. Depois de determinar v_{oc}, R_t e i_{sc}, vamos usar a Equação 5.4-2 para verificar se os resultados estão corretos.

Para determinar a tensão de circuito aberto do circuito da Figura 5.4-5, basta calcular a tensão entre os terminais a e b da Figura 5.4-6*a*. Tomando o nó b da Figura 5.4-6*a* como nó de referência, vemos que a tensão do nó a é igual a v_{oc}. Aplicando a LKC ao nó a, obtemos a equação

$$\frac{125 - v_{oc}}{50} = 2 + \frac{v_{oc}}{200}$$

Explicitando v_{oc}, obtemos

$$v_{oc} = 20 \text{ V}$$

Para determinar a corrente de curto-circuito do circuito da Figura 5.4-5, é preciso ligar um fio entre os terminais a e b, como mostra a Figura 5.4-6*b*. A corrente que atravessa o fio é i_{sc}. O curto-circuito faz com que a tensão do resistor de 200 Ω passe a ser 0 V. Nesse caso, de acordo com a lei de Ohm, a corrente do resistor de 200 Ω passe a ser 0 A, como mostra a Figura 5.4-6*b*. Aplicando a LKT à malha formada pela fonte de tensão, o resistor de 50 Ω e o fio, vemos que a tensão do resistor de 50 Ω é 125 V, como mostra também a Figura 5.4-6*b*. Aplicando a LKC ao nó a da Figura 5.4-6*b*, obtemos a relação

$$\frac{125}{50} = 2 + 0 + i_{sc}$$

Explicitando i_{oc}, temos, finalmente,

$$i_{sc} = 0{,}5 \text{ A}$$

Para determinar a resistência de Thévenin do circuito da Figura 5.4-5, fazemos a tensão da fonte de tensão e a corrente da fonte de corrente iguais a zero (lembre-se de que uma fonte de tensão de 0 V equivale a um curto-circuito e uma fonte de corrente de 0 A equivale a um circuito aberto) e calcularmos a resistência equivalente R_t do ponto de vista dos terminais a e b, como mostra a Figura 5.4-5*c*.

$$R_t = 50 \,||\, 200 = \frac{50(200)}{50 + 200} = 40 \ \Omega$$

O fato de que os valores obtidos para v_{oc}, R_t e i_{sc} estão de acordo com a Eq. 5.4-2 é uma indicação de que os cálculos estão corretos. O circuito equivalente de Thévenin é mostrado na Figura 5.4-6*d*.

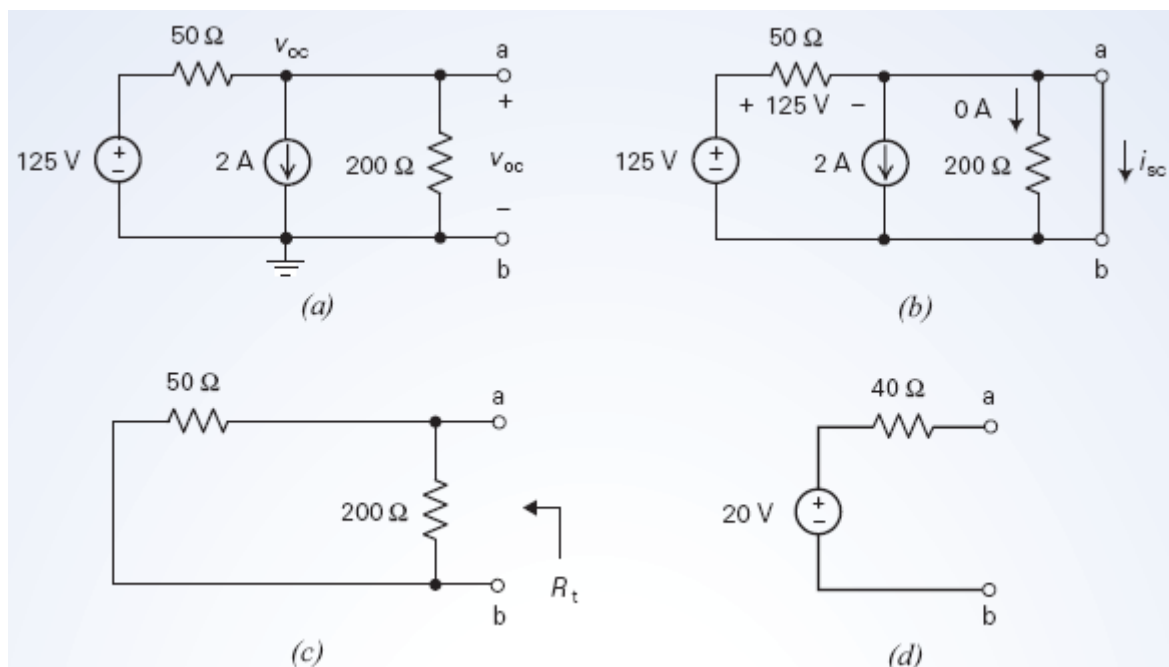



FIGURA 5.4-6 Determinação (a) da tensão de circuito aberto; (b) da corrente de curto-circuito; (c) da resistência de Thévenin do circuito da Figura 5.4-5. (d) Circuito equivalente de Thévenin do circuito da Figura 5.4-5.

Note o papel importante que os terminais a e b desempenham neste problema. Esses terminais são usados para definir v_{oc} na Figura 5.4-6*a*, i_{sc} na Figura 5.4-6*b* e R_t na Figura 5.4-6*c*, e o par de terminais ao qual deve ser ligado o circuito equivalente de Thévenin. Finalmente, note que a polaridade de v_{oc} é a mesma, positiva no terminal a e negativa no terminal b, nas Figuras 5.4-6*a*, 5.4-6*b*, 5.4-6*c* e 5.4-6*d*.

Solução Alternativa

Muitas vezes, é possível simplificar um circuito usando transformações de fonte e circuitos equivalentes. Nesta solução, vamos usar transformações e equivalências para obter o circuito equivalente de Thévenin do circuito da Figura 5.4-5. Começamos pelo lado esquerdo do circuito, longe dos terminais a e b. Se for possível continuar as transformações e equivalências até que o circuito equivalente seja formado apenas por uma fonte de tensão em série com um resistor, ligados aos terminais a e b, esse será o circuito equivalente de Thévenin. A Figura 5.4-7 ilustra o processo.

O circuito da Figura 5.4-6 contém uma fonte de tensão de 125 V ligada em série com um resistor de 50 Ω. Usando uma transformação de fonte, esses componentes do circuito são substituídos por uma fonte de corrente de 2,5 A em paralelo com um resistor de 50 Ω, como mostra a Figura 5.4-7*a*. O circuito da Figura 5.4-7*a* contém duas fontes de corrente em paralelo e dois resistores em paralelo. Na Figura 5.4-7*b*, as fontes de corrente foram substituídas por uma fonte equivalente e os resistores foram substituídos por um resistor equivalente. Outra transformação de fonte converte a fonte de corrente em paralelo com um resistor da Figura 5.4-7*b* em uma fonte de tensão em série com um resistor, como mostra a Figura 5.4-7*c*. O circuito da Figura 5.4-7*c*, que é o mesmo da Figura 5.4-6*d*, é o circuito equivalente de Thévenin o circuito da Figura 5.4-5.

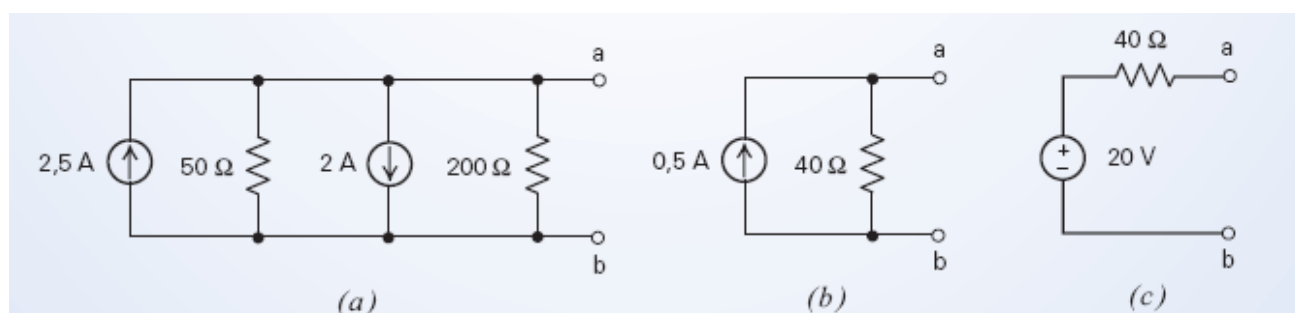



FIGURA 5.4-7 Uso de transformações de fonte e circuitos equivalentes para obter o circuito equivalente de Thévenin do circuito da Figura 5.4-5.

EXEMPLO 5.4-2 Circuito Equivalente de Thévenin de um Circuito com Fontes Dependentes

Determine o circuito equivalente de Thévenin do circuito da Figura 5.4-8.

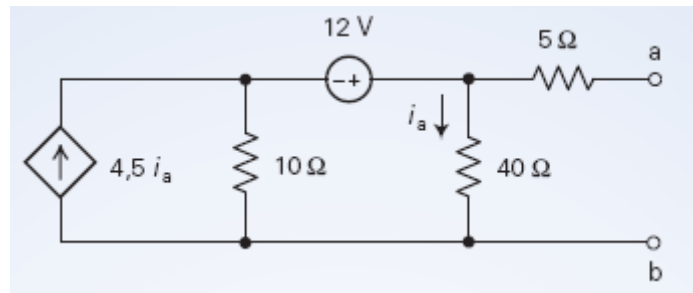



FIGURA 5.4-8 Circuito do Exemplo 5.4-2.

Solução

Vamos determinar v_{oc}, R_t e i_{sc} e usar a Eq. 5.4-2 para verificar se os resultados estão corretos.

Para determinar a tensão de circuito aberto do circuito da Figura 5.4-8, chamamos a tensão entre os terminais a e b de v_{oc}. A Figura 5.4-9 mostra o circuito resultante, depois que usamos a LKC para determinar as correntes nos componentes em função de i_a, a corrente do resistor de 40 Ω.

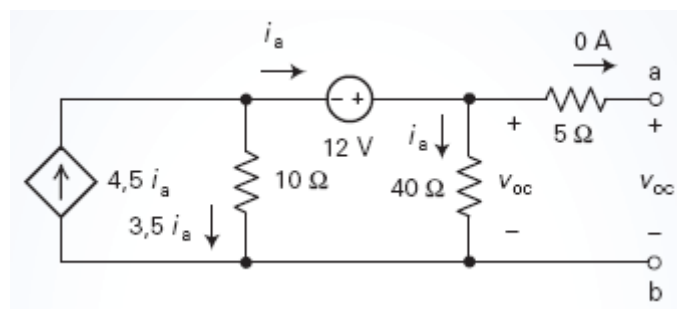



FIGURA 5.4-9 Circuito usado para determinar a tensão de circuito aberto.

O circuito aberto faz com que a corrente do resistor de 5 Ω seja nula. Em consequência, a tensão do resistor também é zero e, portanto, a tensão do resistor de 40 Ω é igual a v_{oc}, como mostra a Figura 5.4-9. Assim, de acordo com a lei de Ohm,

$$i_a = \frac{v_{oc}}{40}$$

Aplicando a LKT à malha formada pela fonte de 12 V, o resistor de 10 Ω e o resistor de 40 Ω, obtemos

$$0 = -12 + v_{oc} - 10(3,5 i_a)$$

o que nos dá

$$v_{oc} = 96 \text{ V}$$

Para determinar a corrente de curto-circuito da Figura 5.4-8, ligamos um fio entre os terminais a e b e chamamos a corrente do fio de i_{sc}. A Figura 5.4-10 mostra o circuito resultante depois que usamos a LKC para determinar as correntes dos elementos em função de i_a, a corrente do resistor de 40 Ω, e i_b, a corrente do resistor de 10 Ω.

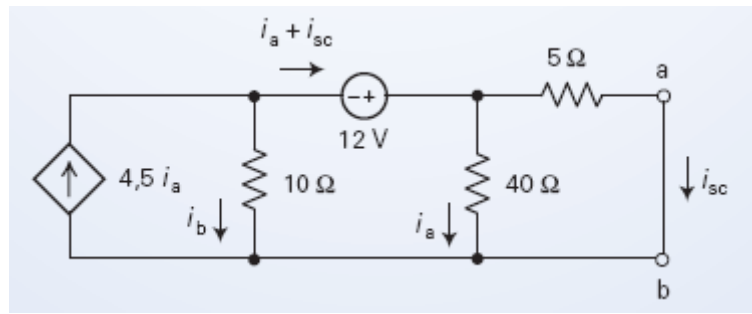



FIGURA 5.4-10 Circuito usado para calcular a corrente de curto-circuito.

Aplicando a LKT à malha formada pelos resistores de 5 Ω e 40 Ω, temos

$$5i_{cs} - 40i_a = 0 \quad \Rightarrow \quad i_a = \frac{i_{sc}}{8}$$

Aplicando a LKC ao nó superior do resistor de 10 Ω, obtemos

$$4{,}5i_a = i_b + (i_a + i_{sc}) \quad \Rightarrow \quad i_b = 3{,}5i_a - i_{sc} = -\frac{9}{16}i_{sc}$$

Aplicando a LKT à malha formada pela fonte de tensão e os resistores de 5 Ω e 10 Ω, temos

$$-12 + 5i_{sc} - 10\left(-\frac{9}{16}i_{sc}\right) = 0$$

o que nos dá

$$i_{sc} = \frac{12}{5 + \frac{90}{16}} = 1{,}1294 \text{ A}$$

Voltando à Figura 5.4-4, vamos determinar a resistência de Thévenin do circuito substituindo a fonte de tensão independente por um curto-circuito e ligando uma fonte de corrente aos terminais a e b, como mostra a Figura 5.4-11. (O circuito A* da Figura 5.4-4 é obtido a partir do circuito A substituindo as fontes de tensão independentes por curtos-circuitos e as fontes de corrente independentes por circuitos abertos.)

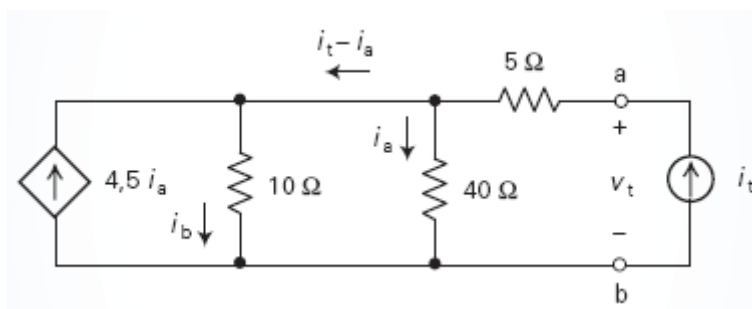



FIGURA 5.4-11 Circuito usado para determinar a resistência de Thévenin.

Aplicando a LKC ao nó superior do resistor de 10 K, obtemos:

$$4{,}5i_a + (i_t - i_a) = i_b \;\Rightarrow\; i_b = 3{,}5i_a + i_{ta}$$

Aplicando a LKT à malha formada pelos resistores de 10 Ω e 40 Ω, temos

$$40i_a = 10i_b = 10(3{,}5i_a + i_t) \Rightarrow i_a = 2i_t$$

Aplicando a LKT à malha formada pela fonte de corrente independente e os resistores de 10 Ω e 40 Ω, obtemos:

$$v_t 5i_t + 10i_b = 5i_t + 10(3{,}5i_a + i_t) = 15i_t + 35i_a = 15i_t + 35(2i_t) = 85i_t$$

A resistência de Thévenin é dada por

$$R_t = \frac{v_t}{i_t} = 85\ \Omega$$

O fato de que os valores obtidos para v_{oc}, R_t e i_{sc} estão de acordo com a Eq. 5.4-2 é uma indicação de que os cálculos estão corretos. O circuito equivalente de Thévenin é mostrado na Figura 5.4-12.

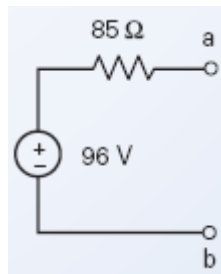



FIGURA 5.4-12 Circuito equivalente de Thévenin do circuito da Figura 5.4-8.

EXEMPLO 5.4-3 Uma Aplicação do Circuito Equivalente de Thévenin

Dado o circuito da Figura 5.4-13,

(a) determine a corrente i para $R = 2\ \Omega$;

(b) determine o valor da resistência R para que $i = 5\text{A}$;

(c) determine o valor da resistência R para que $i = 8$ A.

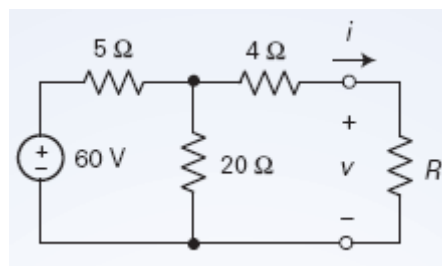



FIGURA 5.4-13 Circuito do Exemplo 5.4-3.

Solução

O circuito da Figura 5.4-13 é um exemplo da situação mostrada na Figura 5.4-2*a*, no qual o Circuito B é o resistor R e o circuito A é o resto do circuito. A substituição da parte do circuito que está ligada ao resistor R pelo circuito equivalente de Thévenin não altera a corrente do resistor R.

Na Figura 5.4-14, transformações de fonte e resistências equivalentes são usadas para determinar o circuito equivalente de Thévenin da parte do circuito que está ligada ao resistor R. O circuito equivalente de Thévenin é mostrado na Figura 5.4-14*e*.

Na Figura 5.4-15, a parte do circuito ligada ao resistor R foi substituída pelo circuito equivalente de Thévenin. É fácil mostrar que

$$i = \frac{48}{8+R} \tag{5.4-3}$$

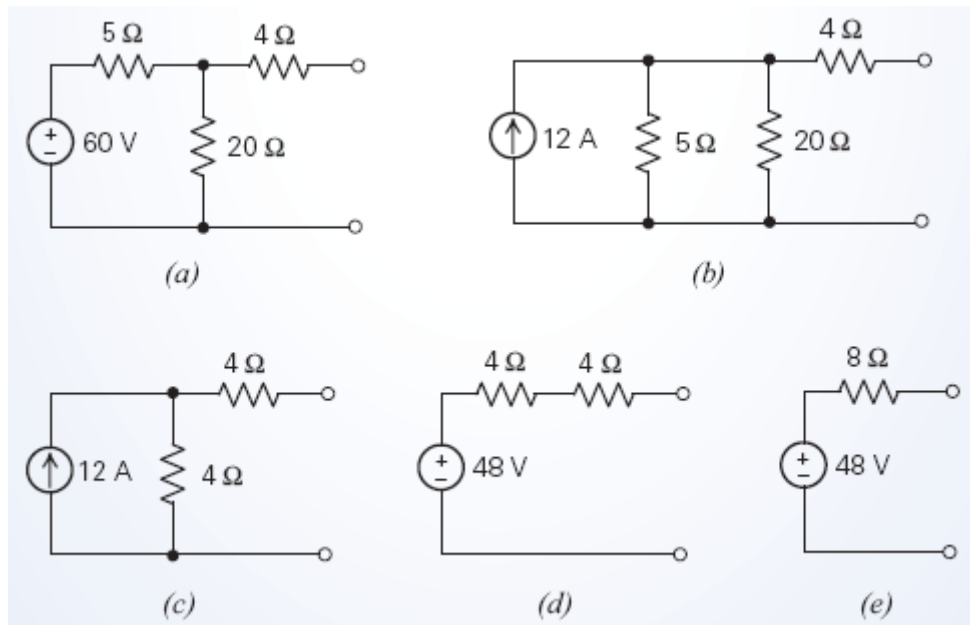



FIGURA 5.4-14 Determinação do circuito equivalente de Thévenin de parte do circuito da Figura 5.4-13 usando transformações de fonte e resistências equivalentes.

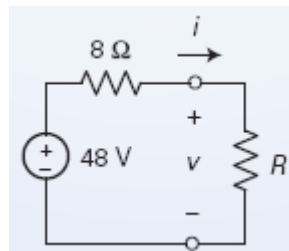



FIGURA 5.4.15 Circuito obtido substituindo parte do circuito da Figura 5.4-13 pelo circuito equivalente de Thévenin.

no circuito da Figura 5.4-15. Como a substituição da parte do circuito que está ligada ao resistor *R* pelo circuito equivalente de Thévenin não altera a corrente do resistor *R*, a Eq. 5.4-3 também expressa a relação entre *i* e *R* no circuito da Figura 5.4-13, o que permite responder aos itens (a), (b) e (c) do enunciado.

(a) Para $R = 2\ \Omega$, a corrente *i* é dada por $i = \frac{48}{8+2} = 4{,}8\ \text{A}.$

(b) Para que $i = 5\text{A}$, devemos ter $R = \frac{48}{i} - 8 = \frac{48}{5} - 8 = 1{,}6\ \Omega.$

(c) Para que $i = 8$ A, devemos ter $R = \frac{48}{i} - 8 = \frac{48}{8} - 8 = -2\ \Omega.$

O valor obtido para o item (c) não é aceitável, já que o valor de *R* deve ser positivo. Assim, a resposta do item (c) deve ser “impossível”, ou seja, não existe um valor de *R* para o qual $i = 8$ A.

Uma forma experimental de determinar o circuito equivalente de Thévenin de um circuito desconhecido (veja a Figura 5.4-16*a*) é medir *i* e *v* para dois ou mais valores de v_s e um valor fixo de *R*. No circuito da Figura 5.4-16*b*, em que o circuito desconhecido foi substituído pelo circuito equivalente de Thévenin, o resultado é o seguinte:

$$v = v_{oc} + iR_t \tag{5.4-4}$$

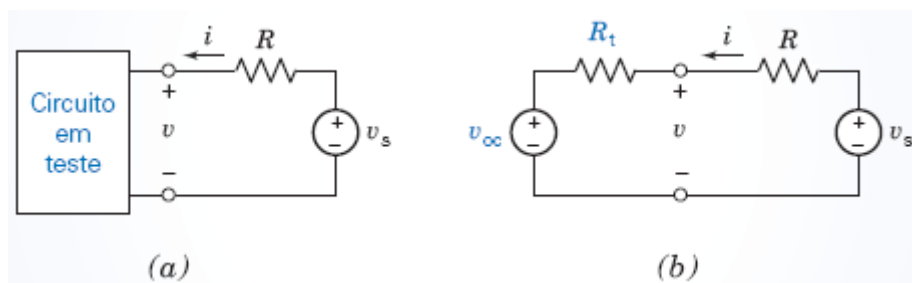



FIGURA 5.4-16 (a) Circuito sendo testado em laboratório com o auxílio de uma fonte de tensão v_s e um resistor R. (*b*) O mesmo circuito, com o circuito que está sendo testado substituído pelo circuito equivalente de Thévenin.

Suponha, por exemplo, que $R = 10\ \Omega$ e considere os resultados de duas medidas:

$$(1) \quad v_s = 49\text{ V} : i = 0{,}5\text{ A},\ v = 44\text{ V}$$

$$(2) \quad v_s = 76\text{ V} : i = 2\text{ A},\ v = 56\text{ V}$$

Temos, portanto, um sistema de duas equações com duas incógnitas (usando a Eq. 5.4-4):

$$44 = v_{oc} + 0{,}5R_t$$

$$56 = v_{oc} + 2R_t$$

Resolvendo esse sistema de equações, obtemos $R_t = 8\ \Omega$ e $v_{oc} = 40$ V, o que nos permite desenhar o circuito equivalente de Thévenin do circuito desconhecido.

EXERCÍCIO 5.4-1 Determine o valor de R_t e v_{oc} para que o circuito da Figura E 5.4-1*b* seja o circuito equivalente de Thévenin do circuito da Figura E 5.4-1*a*.

Resposta: $R_t = 8\ \Omega$ e $v_{oc} = 2$ V

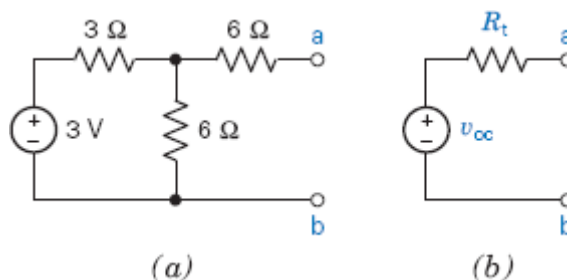



FIGURA E 5.4-1

EXERCÍCIO 5.4-2 Determine o valor de R_t e v_{oc} para que o circuito da Figura E 5.4-2*b* seja o circuito equivalente de Thévenin do circuito da Figura E 5.4-2*a*.

Resposta: $R_t = 3\ \Omega$ e $v_{oc} = -6$ V

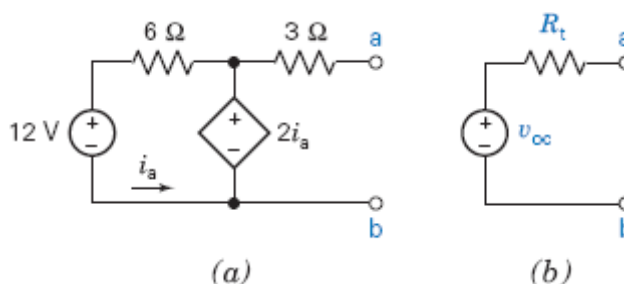



FIGURA E 5.4-2

5.5 *Circuito Equivalente de Norton*

Um engenheiro americano, E. L. Norton, do Bell Telephone Laboratories, propôs um circuito equivalente ao circuito A da Figura 5.4-2 formado por uma fonte de corrente e uma resistência. O circuito equivalente de Norton está relacionado ao circuito equivalente de Thévenin por uma transformação de fonte. Em outras palavras, uma transformação de fonte converte um circuito equivalente de Thévenin em um circuito equivalente de Norton e vice-versa. Norton publicou seu método em 1926, 43 anos depois de Thévenin.

O *teorema de Norton* pode ser enunciado da seguinte forma: dado um circuito linear qualquer, divida-o em dois circuitos, A e B. Se A ou B contém uma fonte dependente, a variável de controle da fonte deve estar no mesmo circuito. Determine a corrente de curto-circuito i_{sc} nos terminais do Circuito A. O circuito equivalente de Norton do Circuito A é uma fonte de corrente i_{sc} em paralelo com uma resistência R_n, em que R_n é a resistência equivalente do circuito A com todas as fontes de tensão independentes substituídas por curtos-circuitos e todas as fontes de corrente independentes substituídas por circuitos abertos.

A Figura 5.5-1 mostra um circuito equivalente de Norton. O circuito equivalente de Thévenin do mesmo circuito é formado por uma resistência R_t em série com uma fonte de tensão $v_{oc} = R_t i_{sc}$. Isso significa que o circuito equivalente de Thévenin pode ser obtido a partir do equivalente de Norton através de uma simples transformação de fonte e vice-versa.

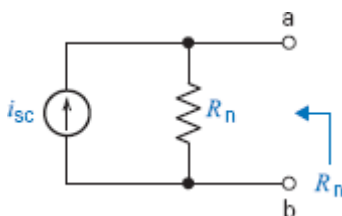



FIGURA 5.5-1 Circuito equivalente de Norton de um circuito linear.

EXEMPLO 5.5-1 Circuito Equivalente de Norton

Determine o circuito equivalente de Norton do circuito da Figura 5.5-2.

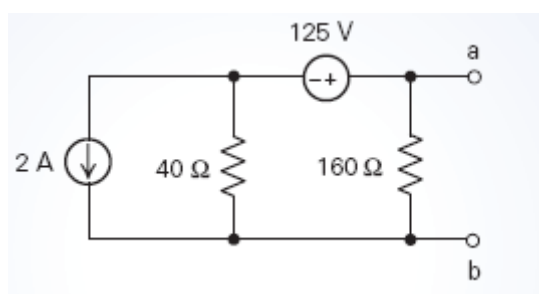



FIGURA 5.5-2 Circuito do Exemplo 5.5-1.

Solução

Na Figura 5.5-3, transformações de fonte e circuitos equivalentes são usados para simplificar o circuito da Figura 5.5-2. Essas simplificações continuam até chegarmos ao circuito da Figura 5.5-3*d*, constituído por uma fonte de corrente em paralelo com um resistor. O circuito da Figura 5.5-3*d* é o circuito equivalente de Norton do circuito da Figura 5.5-3. Assim,

$$i_{sc} = 1{,}25 \text{ A e } R_t = R_n = 32\ \Omega$$

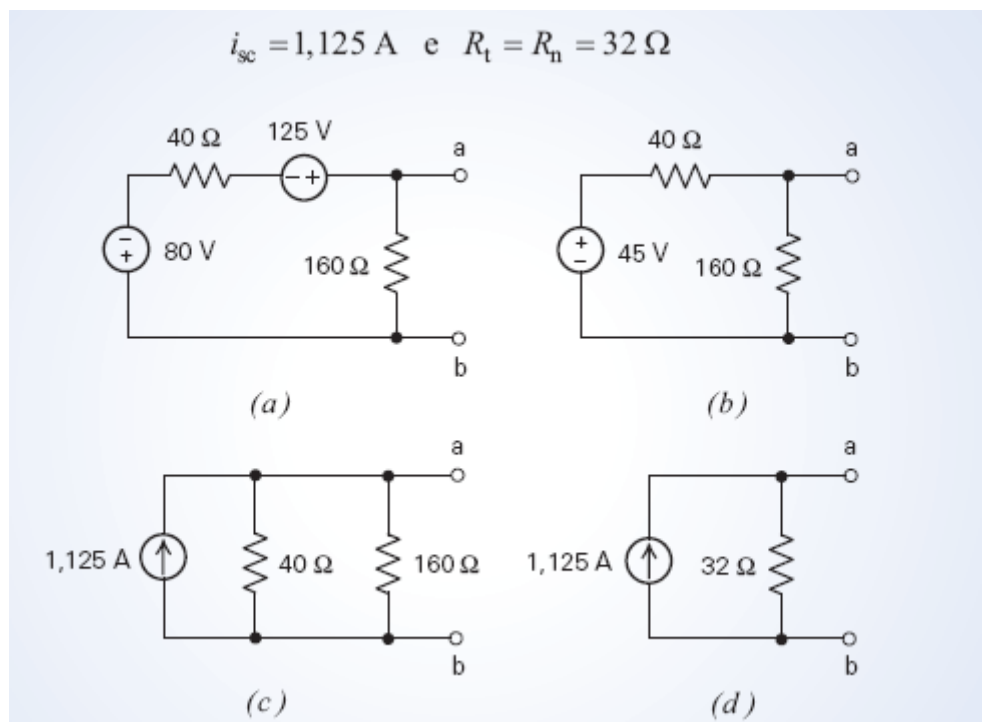



FIGURA 5.5-3 Uso de transformações de fonte e circuitos equivalentes para obter o circuito equivalente de Norton do circuito da Figura 5.5-2.

EXEMPLO 5.5-2 Circuito Equivalente de Norton de um Circuito com uma Fonte Dependente

Determine o circuito equivalente de Norton do circuito da Figura 5.5-4.

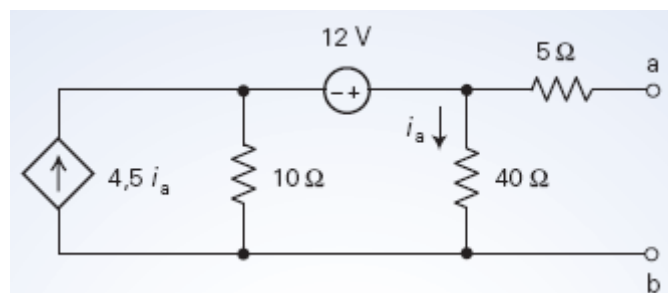



FIGURA 5.5-4 Circuito do Exemplo 5.5-2.

Solução

O circuito equivalente de Thévenin do circuito da Figura 5.5-4 foi obtido no Exemplo 5.4-2. O método usado para obter o circuito equivalente de Norton é muito parecido com o método usado para obter o circuito equivalente de Thévenin. Em particular, os valores de v_{oc}, R_t e i_{sc} são obtidos exatamente como no Exemplo 5.4-2. De acordo com o Exemplo 5.4-2, temos:

$$v_{oc} = 96,\ i_{sc} = 1{,}1294\ \text{A e}\ R_n = R_t = 85\ \Omega$$

O fato de que os valores obtidos para v_{oc}, R_t e i_{sc} estão de acordo com a Eq. 5.4-2 é uma indicação de que os cálculos estão corretos. O circuito equivalente de Norton é mostrado na Figura 5.5-5.

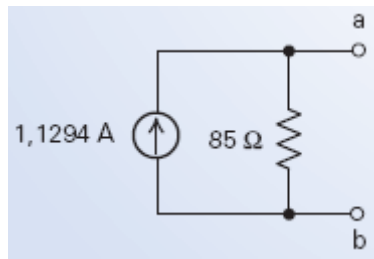



FIGURA 5.5-5 Circuito equivalente de Norton do circuito da Figura 5.5-4.

EXEMPLO 5.5-3 Uma Aplicação do Circuito Equivalente de Norton

Dado o circuito da Figura 5.5-6,

(a) determine a tensão v para $R = 24\ \Omega$;

(b) determine o valor da resistência R para que $v = 40$ V;

(c) determine o valor da resistência R para que $v = 60$ V.

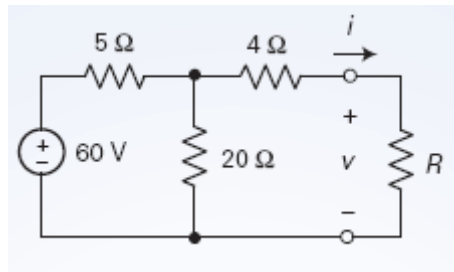



FIGURA 5.5-6 Circuito do Exemplo 5.5-3.

Solução

Encontramos um problema semelhante no Exemplo 5.4-3. No Exemplo 5.4-3, substituímos a parte do circuito ligada ao resistor R pelo circuito equivalente de Thévenin. Neste exemplo, vamos substituir a parte do circuito ligada ao resistor R pelo circuito equivalente de Norton. O circuito equivalente de Norton pode ser obtido a partir do circuito equivalente de Thévenin através de uma transformação de fonte. Aplicando uma transformação de fonte ao circuito da Figura 5.4-15, obtemos o circuito da Figura 5.5-7, na qual a parte do circuito ligada ao resistor R foi substituída pelo circuito equivalente de Norton. É fácil mostrar que

$$v = \frac{8R}{8+R}(6) = \frac{48R}{8+R} \tag{5.5-1}$$

no circuito da Figura 5.5-7. Como a substituição da parte do circuito que está ligada ao resistor R pelo circuito equivalente de Thévenin não altera a corrente do resistor R, a Eq. 5.5-1 também expressa a relação entre v e R no circuito da Figura 5.5-6, o que permite responder aos itens (a), (b) e (c) do enunciado.

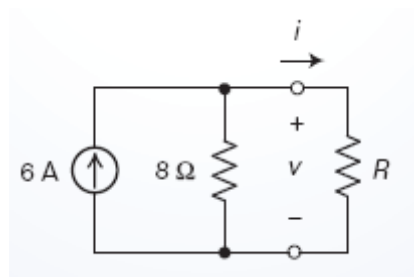



FIGURA 5.5-7 Circuito obtido substituindo parte do circuito da Figura 5.5-6 pelo circuito equivalente de Norton.

(a) Para $R = 24\ \Omega$, a tensão do resistor é $v = \frac{48(24)}{8+24} = 36\ \text{V}.$

(b) Para que $v = 40$ V, devemos ter $R = \frac{8(40)}{48-40} = 40\ \Omega.$

(c) Para que $v = 60$ V, devemos ter $R = \frac{8(60)}{48-60} = -40\ \Omega.$

O valor obtido para o item (c) não é aceitável, já que o valor de R deve ser positivo. Assim, a resposta do item (c) deve ser "impossível", ou seja, não existe um valor de R para o $v = 60$ V.

EXERCÍCIO 5.5-1 Determine o valor de R_t e i_{sc} para que o circuito da Figura E 5.5-1*b* seja o circuito equivalente de Norton do circuito da Figura E 5.5-1*a*.

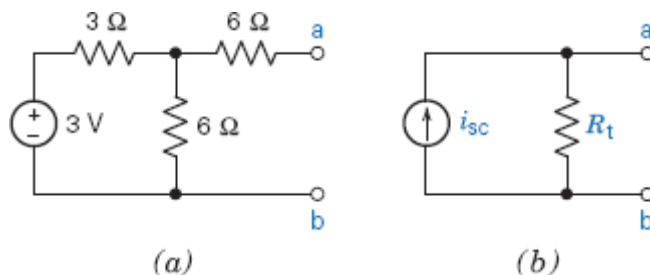



FIGURA E 5.5-1

Resposta: $R_t = 8\ \Omega$ e $i_{sc} = 0{,}25$ A

5.6 *Transferência Máxima de Potência*

Em muitas aplicações de circuitos, é desejável que a maior potência possível seja transferida de uma fonte para um resistor de carga R_L. Considere o Circuito A da Figura 5.6-1, que termina em um resistor R_L. Como foi demonstrado na Seção 5.4, o circuito A pode ser reduzido ao circuito equivalente de Thévenin que aparece na Figura 5.6-2.

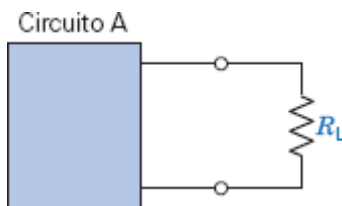



FIGURA 5.6-1 O Circuito A contém resistores e fontes independentes e dependentes. A carga é o resistor R_L.

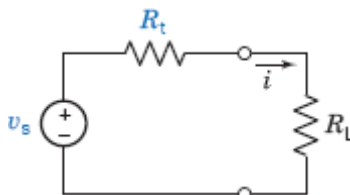



FIGURA 5.6-2 O Circuito A da Figura 5.6-1 foi substituído por um circuito equivalente de Thévenin. A tensão de Thévenin está representada pelo símbolo v_s.

O problema genérico de transferência de potência pode ser discutido em termos de eficiência (no caso de sistemas de distribuição de energia elétrica) ou de eficácia (no caso de sistemas de telecomunicações).

Os sistemas de distribuição de energia elétrica são projetados para transportar a energia elétrica até a carga com a maior eficiência possível, ou seja, com o mínimo de perdas nas linhas de transmissão. Nesse caso,

os esforços se concentram em reduzir R_t, que representa a soma da resistência interna da fonte com a resistência da linha de transmissão. É por isso que a ideia de usar linhas supercondutoras, que conduzem corrente elétrica com resistência zero, é tão atraente para os engenheiros eletricistas.

No caso das telecomunicações, o objetivo é conseguir que o sinal tenha a maior intensidade possível no destino final. Considere o sinal transmitido por uma estação distante e recebido pela antena de um receptor de rádio. O engenheiro deve projetar o circuito do receptor de tal forma que a maior potência possível seja transferida da antena para a saída do circuito amplificador ligado à antena.

Tanto o gerador de uma usina de energia elétrica e uma carga resistiva como a antena de um receptor de rádio e a resistência de entrada do primeiro amplificador podem ser representados pelo circuito equivalente de Thévenin que aparece na Figura 5.6-2. Nos dois casos, estamos interessados em determinar o valor da resistência de carga R_L para que a potência fornecida a essa resistência seja a maior possível. Para qualquer valor de R_L, a potência é dada por

$$p = i^2 R_L$$

Como a corrente i é

$$i = \frac{v_s}{R_L + R_t}$$

a potência também pode ser expressa na forma

$$p = \left(\frac{v_s}{R_L + R_t}\right)^2 R_L \qquad (5.6\text{-}1)$$

Supondo que os valores de v_s e R_t da fonte de energia ou de sinal não possam ser alterados, a potência máxima depende apenas de R_L. Para determinar o valor de R_L que maximiza a potência, usamos o fato de que, de acordo com um teorema do cálculo diferencial, a derivada de uma função é nula no ponto em que passa por um máximo ou por um mínimo. Derivando a potência em relação a R_L, temos:

$$\frac{dp}{dR_L} = v_s^2 \frac{(R_t + R_L)^2 - 2(R_t + R_L)R_L}{(R_L + R_t)^4}$$

Para que a derivada se anule, devemos ter

$$(R_t + R_L)^2 - 2(R_t + R_L)R_L = 0 \qquad (5.6\text{-}2)$$

ou

$$(R_t + R_L)(R_t + R_L - 2R_L) = 0 \qquad (5.6\text{-}3)$$

Resolvendo a Eq. 5.6-3, obtemos

$$R_L = R_t \qquad (5.6\text{-}4)$$

É possível mostrar que $d^2p/dR_L^2 < 0$ para $R_L = R_t$, o que confirma que o valor dado pela Eq. 5.6-4 corresponde a um máximo e não a um mínimo. Assim, a potência transferida para a carga é máxima quando R_L é igual à resistência do circuito equivalente de Thévenin, R_t.

A potência máxima pode ser calculada, portanto, fazendo $R_L = R_t$ na Eq. 5.6-1, o que nos dá

$$p_{max} = \frac{v_s^2 R_t}{(2R_t)^2} = \frac{v_s^2}{4R_t}$$

Quando a resistência de carga é diferente de R_t, a potência é menor o valor máximo. A Figura 5.6-3 mostra a razão entre a potência fornecida a R_L e a potência máxima em função da razão entre R_L e R_t.

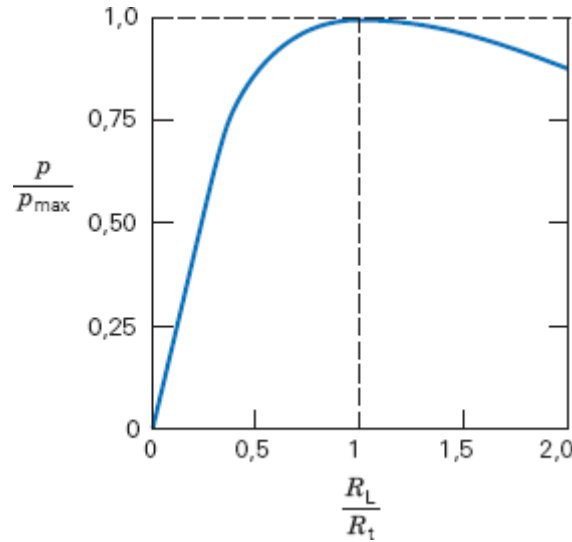



FIGURA 5.6-3 Razão entre a potência transferida e a potência máxima em função da razão entre R_L e R_t.

De acordo com o teorema de **máxima transferência de potência**, a potência transferida por uma fonte a uma carga é máxima quando a resistência da carga, R_L, é igual à resistência de Thévenin da fonte, R_t.

Podemos também usar o circuito equivalente de Norton para representar o Circuito A da Figura 5.6-1. Nesse caso, o circuito equivalente é constituído por uma fonte de corrente e uma resistência em paralelo com a resistência de carga, como na Figura 5.6-4. A corrente *i* pode ser determinada usando o método de divisão de corrente:

$$i = \frac{R_t}{R_t + R_L} i_s$$

Assim, a potência p é dada por

$$p = i^2 R_L = \frac{i_s^2 R_t^2 R_L}{(R_t + R_L)^2} \qquad (5.6\text{-}5)$$

Usando os métodos do cálculo, é possível demonstrar que a potência é máxima para

$$R_L = R_t \qquad (5.6\text{-}6)$$

Assim, a potência máxima fornecida a carga é

$$p_{max} = \frac{R_t i_s^2}{4} \qquad (5.6\text{-}7)$$

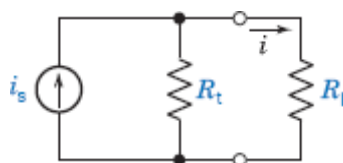



FIGURA 5.6-4 O Circuito A da Figura 5.6-1 foi substituído por um circuito equivalente de Norton. A corrente de Norton está representada pelo símbolo i_s.

EXEMPLO 5.6-1 Transferência Máxima de Potência

Exemplo 5.6-1 Transferência Máxima de Potência

Determine a resistência de carga R_L para a qual a potência fornecida à carga no circuito da Figura 5.6-5 é máxima. Determine também o valor da potência máxima.

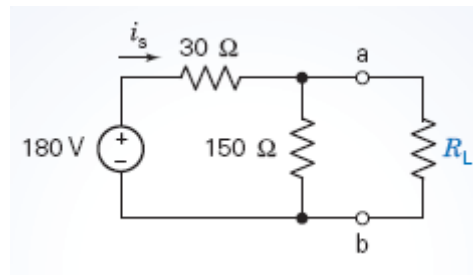



FIGURA 5.6-5 Circuito do Exemplo 5.6-1.

Solução

Para determinar o circuito equivalente de Thévenin do circuito à esquerda dos terminais a e b, supomos que o resistor de carga foi desligado do circuito. A tensão de Thévenin v_{oc} é dada por

$$v_{oc} = \frac{150}{180} \times 180 = 150 \text{ V}$$

A resistência de Thévenin R_t é dada por

$$R_t = \frac{30 \times 150}{30 + 150} = 25 \ \Omega$$

A Figura 5.6-6 mostra o circuito equivalente de Thévenin ligado ao resistor de carga. A transferência de potência é máxima para $R_L = R_t = 25$ Ω.

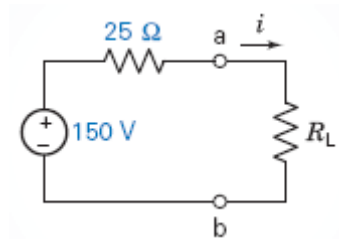



FIGURA 5.6-6 Circuito equivalente de Thévenin do circuito do Exemplo 5.6-1 ligado a R_L.

A potência máxima é

$$p_{max} = \frac{v_{oc}^2}{4R_L} = \frac{(150)^2}{4 \times 25} = 225 \text{ W}$$

Exemplo 5.6-2 Máxima Transferência de Potência

Determine a carga R_L para a qual a potência fornecida à carga do circuito da Figura 5.6-7*a* é máxima. Determine também o valor da potência máxima.

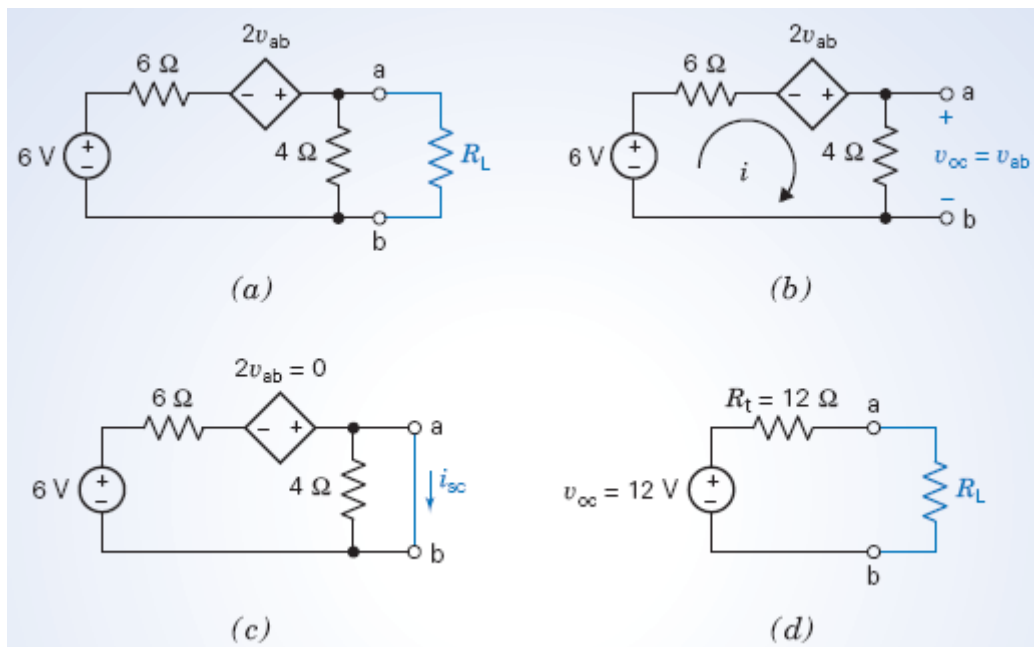



FIGURA 5.6-7 Determinação da potência máxima transferida a uma carga R_L.

Solução

Vamos determinar o circuito equivalente de Thévenin da parte do circuito à esquerda dos terminais a e b da Figura 5.6-7*a*. Primeiro, calculamos v_{oc} com o resistor de carga desligado, como na Figura 5.6-7*b*. A LKT nos dá

$$-6 + 10i - 2v_{ab} = 0$$

Observe que, de acordo com a lei de Ohm, $v_{ab} = v_{oc} = 4i$. Assim,

$$10i - 8i = 6$$

e, portanto, $i = 3$A. Assim, $v_{oc} = 4i = 12$ V.

Para determinar a corrente de curto-circuito, curto-circuitamos os terminais a e b, como na Figura 5.6-7*c*. Nesse caso, o resistor de 4 Ω fica em paralelo com o curto-circuito e pode ser ignorado. Aplicando a LKT, obtemos:

$$-6 + 6i_{sc} = 0$$

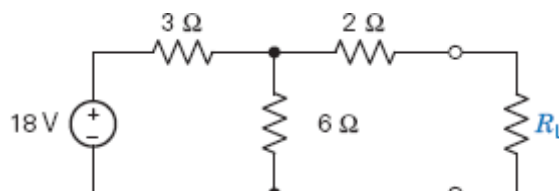
e, portanto, $i_{sc} = 1$ A.

Assim, $R_t = v_{oc}/i_{sc} = 12$ Ω. O circuito equivalente de Thévenin aparece na Figura 5.6-7*d*, com o resistor de carga ligado aos terminais a e b.

A potência fornecida à carga é máxima para $R_L = R_t = 12$ Ω. Nesse caso,

$$p_{max} = \frac{v_{oc}^2}{4R_L} = \frac{12^2}{4(12)} = 3 \text{ W}$$

EXERCÍCIO 5.6-1 Determine a potência máxima que pode ser fornecida a R_L no circuito da Figura E 5.6-1 usando um circuito equivalente de Thévenin.

FIGURA E 5.6-1

Resposta: 9 W, para $R_L = 4\ \Omega$

5.7 *Uso do MATLAB para Obter o Circuito Equivalente de Thévenin*

O MATLAB pode ser usado para reduzir o trabalho necessário para obter o circuito equivalente de Thévenin de um circuito como o da Figura 5.7-1*a*. Em primeiro lugar, ligamos um resistor, *R*, aos terminais do circuito, como na Figura 5.7-1*b*. Em seguida, escrevemos equações de nó ou de malha para descrever o circuito com o resistor ligado aos terminais. Assim, por exemplo, o circuito da Figura 5.7-1*b* pode ser representado pelas equações de malha

$$\begin{aligned} 12 &= 28i_1 - 10i_2 - 8i_3 \\ 12 &= -10i_1 + 28i_2 - 8i_3 \\ 0 &= -8i_1 - 8i_2 + (16 + R)i_3 \end{aligned} \qquad (5.7\text{-}1)$$

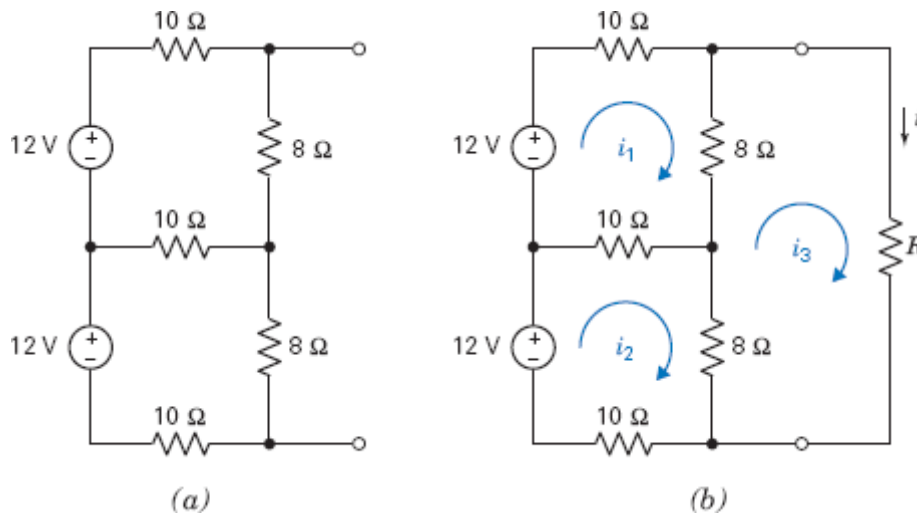



FIGURA 5.7-1 O circuito (*b*) é obtido ligando um resistor *R* aos terminais do circuito (*a*).

A corrente *i* no resistor *R* é igual à corrente de malha da terceira malha, ou seja,

$$i = i_3 \qquad (5.7\text{-}2)$$

As equações de malha podem ser escritas usando matrizes:

$$\begin{bmatrix} 28 & -10 & -8 \\ -10 & 28 & -8 \\ -8 & 8 & 16+R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 12 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (5.7\text{-}3)$$

Observe que $i = i_3$ na Figura 5.7-1*b*.

A Figura 5.7-2 mostra um arquivo do MATLAB chamado cap5.m que resolve a Eq. 5.7-1. A Figura 5.7-3 ilustra o uso do arquivo e mostra que para *R* = 6 Ω, *i* = 0,7164 A, enquanto para *R* = 12 Ω,*i* = 0,5106 A.

```
% cap5.m - Arquivo de entrada do MATLAB para a Seção 5-7

z = [ 28     -10      -8;          %
     -10      28      -8;          %  Equação de Malha
      -8      -8    16+R];         %
                                   %  Equação 5.7-3
v = [ 12;                          %
      12;                          %
       0];                         %

Im  = Z\V;            %  Calcular as correntes de malha.

I   = Im(3)           %  Equação 5.7-2
```

FIGURA 5.7-2 Arquivo do MATLAB usado para resolver as equações de malha que representam o circuito da Figura 5.7-1*b*.

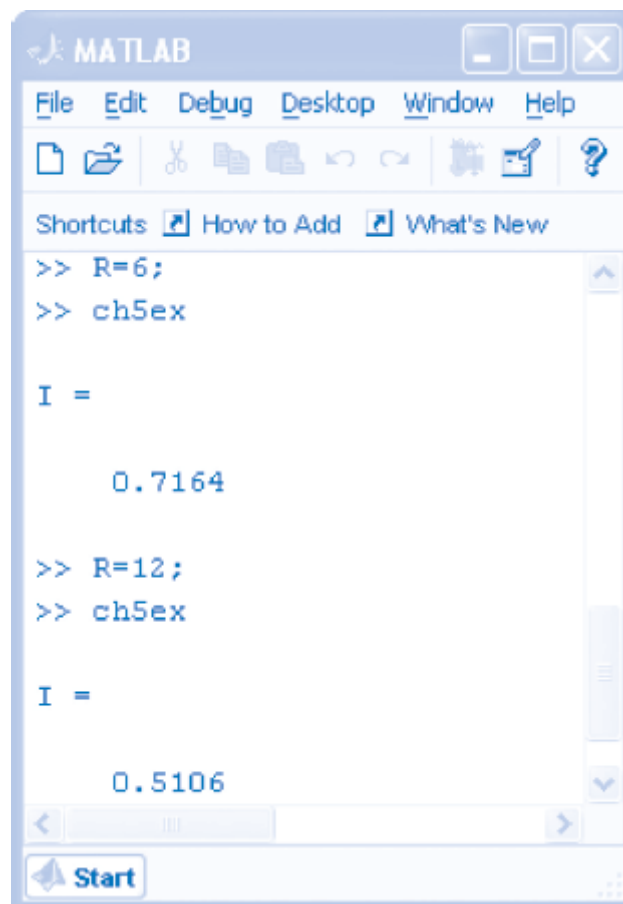



FIGURA 5.7-3 Tela de computador mostrando o uso do MATLAB para analisar o circuito da Figura 5.7-1.

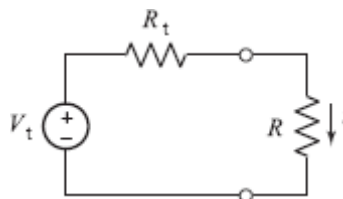



FIGURA 5.7-4 Circuito obtido ligando um resistor R aos terminais de um circuito equivalente de Thévenin.

Considere agora a Figura 5.7-4, que mostra um resistor *R* ligado aos terminais de um circuito equivalente de Thévenin. O circuito da Figura 5.7-4 é representado pela equação de malha

$$V_t = R_t i + Ri \tag{5.7-4}$$

Por questão de notação, vamos fazer $i = i_a$ se $R = R_a$ e $i = i_b$ se $R = R_b$. De acordo com a Eq. 5.7-4,

$$\begin{aligned} V_t &= R_t i_a + R_a i_a \\ V_t &= R_t i_b + R_b i_b \end{aligned} \tag{5.7-5}$$

Usando matrizes, a Eq. 5.7-5 pode ser escrita na forma

$$\begin{bmatrix} R_a i_a \\ R_b i_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -i_a \\ 1 & -i_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_t \\ R_t \end{bmatrix} \tag{5.7-6}$$

Dadas i_a, R_a, i_b e R_b, a equação matricial pode ser resolvida para obter V_t e R_t, os parâmetros do circuito equivalente de Thévenin. A Figura 5.7-5 mostra um arquivo do MATLAB que resolve a Eq. 5.7-6 usando os valores $i_b = 0{,}7164$ A, $R_b = 6\ \Omega$, $i_a = 0{,}5106$ A e $R_a = 12\ \Omega$. Os valores obtidos para V_t e R_t são

$$V_t = 10{,}664 \text{ V e } R_t = 8{,}8863\ \Omega$$

```
% Determinação do circuito equivalente de
% Thévenin do circuito ligado do resistor R

Ra = 12;  ia = 0.5106;    % Se R = Ra, i = ia

Rb = 6;   ib = 0.7164;    % Se R = Rb, i = ib

A = [1 -ia;   %
      1 -ib];  %
               % Equação 5.7-6
b = [Ra*ia;   %
      Rb*ib];  %

X = A\b;

Vt = X(1)  % Tensão de circuito aberto

Rt = X(2)  % Resistência de Thévenin
```

FIGURA 5.7-5 Arquivo do MATLAB usado para calcular a tensão de circuito aberto e a resistência de Thévenin.

5.8 *Uso do PSpice para Obter o Circuito Equivalente de Thévenin*

Podemos usar o programa de computador PSpice para determinar o circuito equivalente de Thévenin ou de Norton de praticamente qualquer circuito, dos mais simples aos mais complexos. Este método está ilustrado na Figura 5.8-1. Obtemos o circuito equivalente de Thévenin do circuito da Figura 5.8-1*a* calculando a tensão de circuito aberto v_{oc} e a corrente de curto-circuito i_{sc}. Para isso, ligamos um resistor aos terminais do circuito. Quando a resistência do resistor é infinita, como na Figura 5.8-1*b*, a tensão do resistor é igual à tensão de circuito aberto v_{oc}. Quando a resistência é nula, como na Figura 5.8-1*c*, a corrente do resistor é igual à corrente de curto-circuito i_{sc}.

Como não é possível usar resistências infinitas no PSpice, a resistência infinita deve ser substituída por uma resistência que seja várias ordens de grandeza maior que a maior resistência do Circuito A. Podemos verificar se a resistência escolhida é suficientemente grande multiplicando por dois o valor escolhido e executando novamente a simulação. Se o valor calculado de v_{oc} permanecer o mesmo, é sinal de que a resistência é infinita para todos os efeitos práticos. Da mesma forma, a resistência nula deve ser substituída por uma resistência que seja várias ordens de grandeza menor que a menor resistência do circuito. Podemos verificar se a resistência escolhida é suficientemente pequena dividindo por dois o valor escolhido e verificando se o valor de i_{sc} permanece inalterado.

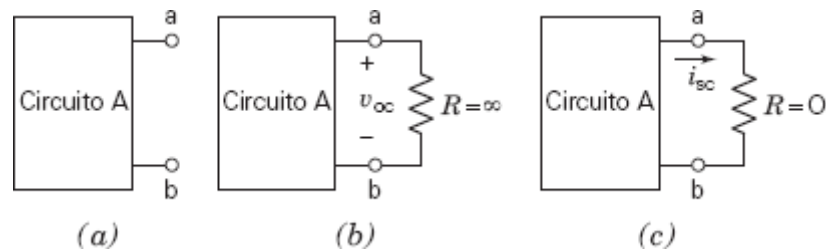



FIGURA 5.8-1 Método para calcular o valor de v_{oc} e i_{sc} usando o programa PSpice.

EXEMPLO 5.8-1 Uso do Programa PSpice para Determinar o Circuito Equivalente de Thévenin

Use o programa PSpice para determinar o valor da tensão de circuito aberto, v_{oc}, e a corrente de curto-circuito, i_{sc}, para o circuito da Figura 5.8-2.

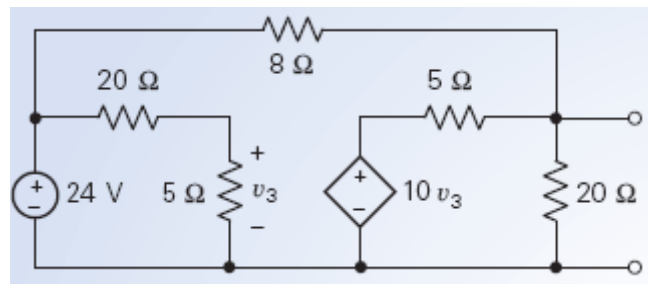



FIGURA 5.8-2 Circuito do Exemplo 5.8-1.

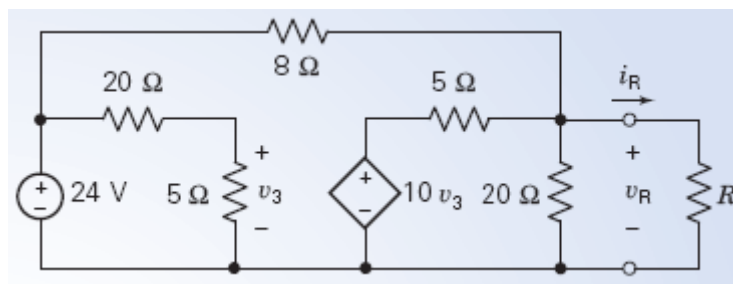



FIGURA 5.8-3 Circuito da Figura 5.8-2 com um resistor ligado aos terminais de saída.

Solução

O primeiro passo é ligar um resistor aos terminais de saída do circuito, como mostra a Figura 5.8-3. Como a maior resistência do circuito é 20 Ω e a menor é 5 Ω, determinamos v_{oc} e i_{sc} usando resistências R tais que

$$R >> 20\ \Omega \text{ para determinar } v_{oc}$$

$$R << 5\ \Omega \text{ para determinar } i_{sc}$$

Para usar o programa PSpice, devemos montar o circuito no espaço de trabalho OrCAD Capture, como mostra a Figura 5.8-4 (veja o Apêndice A). A FTCT da Figura 5.8-3 é representada por um **componente E** na Figura 5.8-4. A Figura 5.8-5 mostra a correspondência entre uma FTCT e o **componente E** do PSpice.

Para determinar a tensão de circuito aberto, escolhemos um valor muito grande para R e executamos uma simulação do tipo Bias Point (veja o Apêndice A). A Figura 5.8-6 mostra os resultados da simulação para $R = 20$ MΩ. Como a tensão entre os terminais do resistor R é 33,6 V, $v_{oc} = 33{,}6$ V. (Para verificar se o valor escolhido para R foi suficientemente grande, multiplicamos por dois o valor de R e observamos que o valor da tensão entre os terminais de R permanece o mesmo.)

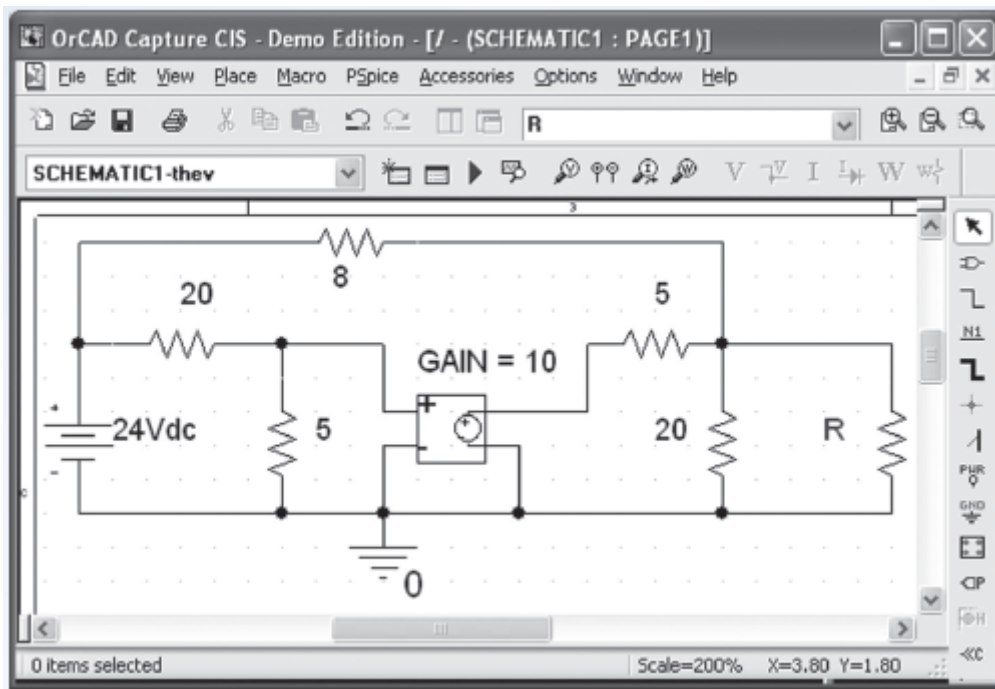



FIGURA 5.8-4 O circuito da Figura 5.8-3 desenhado no espaço de trabalho OrCAD Capture do PSpice.

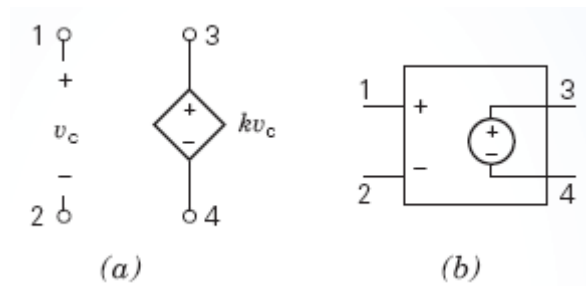



FIGURA 5.8-5 Uma FTCT (*a*) e o **componente E** do Pspice usado para representá-la (*b*).

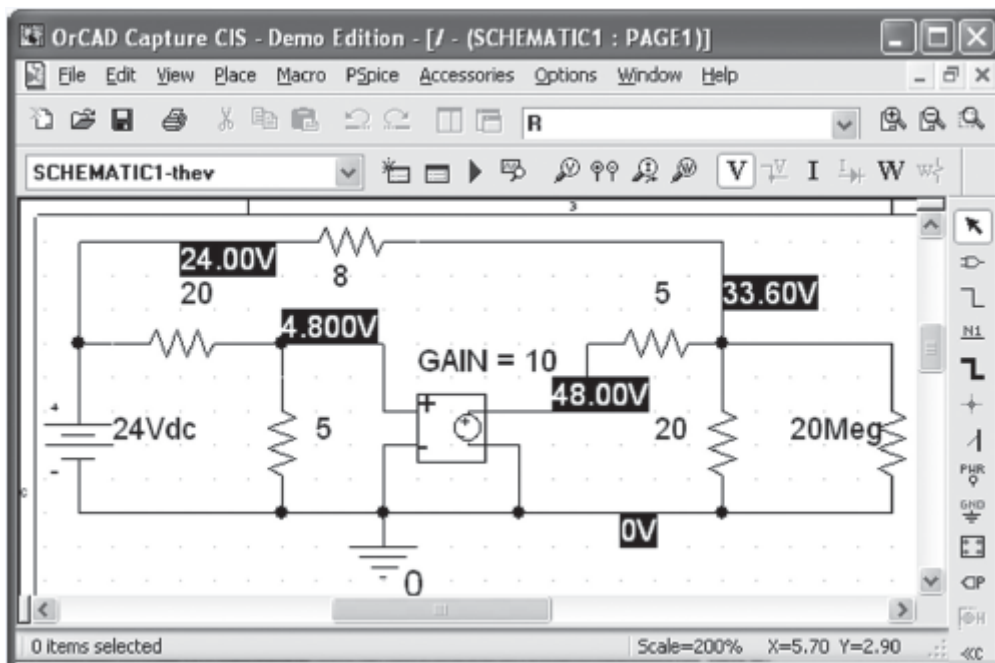



FIGURA 5.8-6 Resultados da simulação para $R = 20$ MΩ.

Para determinar a corrente de curto-circuito, escolhemos um valor muito pequeno para *R* e executamos uma simulação do tipo Bias Point (veja o Apêndice A). A Figura 5.8-7 mostra os resultados da simulação para $R = 1$ mΩ. A tensão entre os terminais do resistor *R* é 12,6 mV. De acordo com a lei de

Ohm, o valor da corrente de curto-circuito é, portanto,

$$i_{sc} = \frac{12{,}6 \times 10^{-3}}{1 \times 10^{-3}} = 12{,}6 \text{ A}$$

(Para verificar se o valor escolhido para R foi suficientemente pequeno, dividimos por dois o valor de R e observamos que o valor da tensão entre os terminais de R permanece o mesmo.)

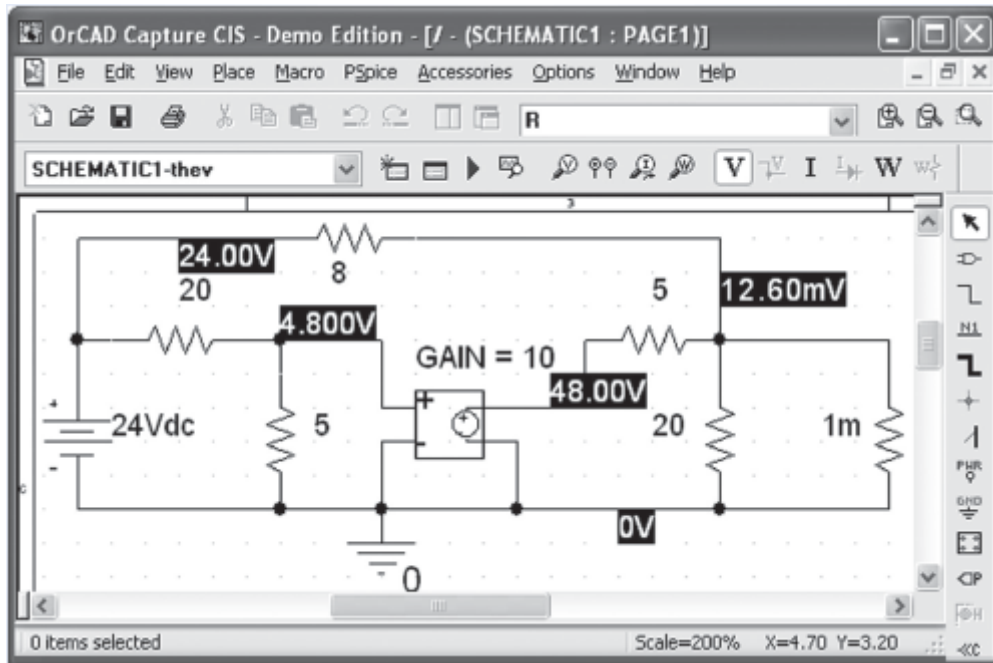



FIGURA 5.8-7 Resultados da simulação para $R = 1$ mΩ $= 0{,}001$ Ω.

5.9 *Como Podemos Testar . . . ?*

Os engenheiros são frequentemente encarregados de verificar se a solução de um problema está correta. As soluções de problemas de projeto, por exemplo, devem ser verificadas para confirmar que todas as especificações estão sendo atendidas. Além disso, os resultados obtidos com o auxílio de computadores devem ser revistos para evitar possíveis erros na digitação dos dados e as afirmações dos vendedores a respeito dos seus produtos devem ser confirmadas.

Os estudantes de engenharia muitas vezes também precisam verificar se os resultados que obtiveram estão corretos. Às vezes falta muito pouco tempo para terminar um exame e é importante poder identificar rapidamente as questões que precisam ser refeitas.

O exemplo a seguir ilustra algumas técnicas que podem ser usadas para verificar se as soluções de problemas do tipo discutido neste capítulo estão corretas.

EXEMPLO 5.9-1 Como Podemos Verificar Circuitos Equivalentes de Thévenin?

Suponha que o circuito da Figura 5.9-1*a* tenha sido montado em laboratório usando $R = 2$ kΩ e que a tensão v tenha sido medida como $v = -1{,}87$ V. Quando o resistor R foi mudado para $R = 5$ kΩ, a tensão v mudou para $v = -3{,}0$ V. Quando o resistor foi mudado para $R = 10$ kΩ, a tensão mudou para $v = -3{,}75$ V. **Como podemos verificar** se essas medidas estão corretas?

Solução

Vamos substituir a parte do circuito ligada ao resistor R pelo circuito equivalente de Thévenin. A Figura 5.9-1*b* mostra o circuito resultante. Aplicando o método da divisão de tensão ao circuito da Figura 5.9-1*b*, obtemos:

$$v = \frac{R}{R + R_t} v_{oc} \tag{5.9-1}$$

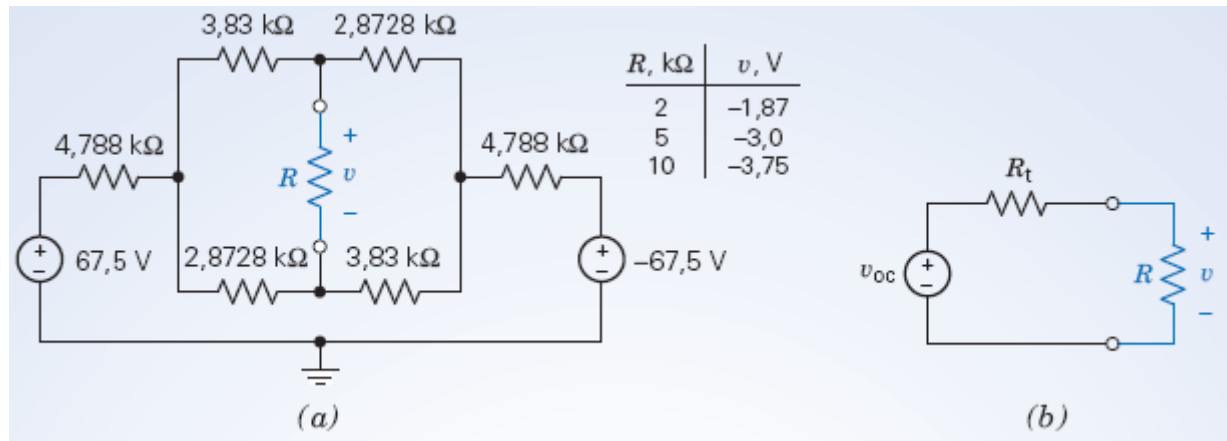



FIGURA 5.9-1 (*a*) Circuito com um resistor *R* e a tensão medida entre os terminais do resistor para três valores de *R*; (*b*) circuito obtido substituindo a parte do circuito ligada a *R* pelo circuito equivalente de Thévenin.

Para $R = 2$ kΩ, $v = -1{,}87$ V e a Eq. 5.9-1 se torna

$$-1{,}87 = \frac{2000}{2000 + R_t} v_{oc} \tag{5.9-2}$$

Para $R = 5$ kΩ, $v = -3{,}0$ V e a Eq. 5.9-1 se torna

$$-3{,}0 = \frac{5000}{5000 + R_t} v_{oc} \tag{5.9-3}$$

As Eqs. 5.9-2 e 5.9-3 formam um sistema de duas equações com duas incógnitas, v_{oc} e R_t. Resolvendo o sistema, obtemos $v_{oc} = -5$ V e $R_t = 3333$ Ω. Substituindo esses valores na Eq. 5.9-1, obtemos

$$v = \frac{R}{R + 3333}(-5) \tag{5.9-4}$$

A Eq. 5.9-4 pode ser usada para prever a tensão que será medida para $R = 10$ kΩ. Se o valor de *v* obtido usando a Eq. 5.9-4 concorda com o valor medido de *v*, isso significa que os dados experimentais são coerentes. Fazendo $R = 10$ kΩ na Eq. 5.9-4, obtemos

$$v = \frac{10.000}{10.000 + 3333}(-5) = -3{,}75 \text{ V} \tag{5.9-5}$$

Como este valor concorda com o valor medido de *v*, os resultados experimentais são coerentes.

5.10 EXEMPLO DE PROJETO Extensômetro

Os extensômetros são transdutores que medem deformações mecânicas. Eletricamente, os extensômetros são resistores; a deformação produz uma variação da resistência que é proporcional à deformação.

A Figura 5.10-1 mostra quatro extensômetros ligados em uma configuração conhecida como ponte. As pontes de extensômetros são usadas para medir força ou pressão (Doebelin, 1966).

A saída da ponte é, em geral, uma pequena tensão v_i. Na Figura 5.10-1, um amplificador multiplica a tensão por um fator b, conhecido como ganho, para produzir uma tensão maior, v_o, que é mostrada por um voltímetro.

Descreva a Situação e as Hipóteses

Uma ponte de extensômetros é usada para medir forças. Os extensômetros foram posicionados de tal forma que a força faz aumentar a resistência elétrica de dois extensômetros e ao mesmo tempo faz diminuir a resistência elétrica dos outros dois.

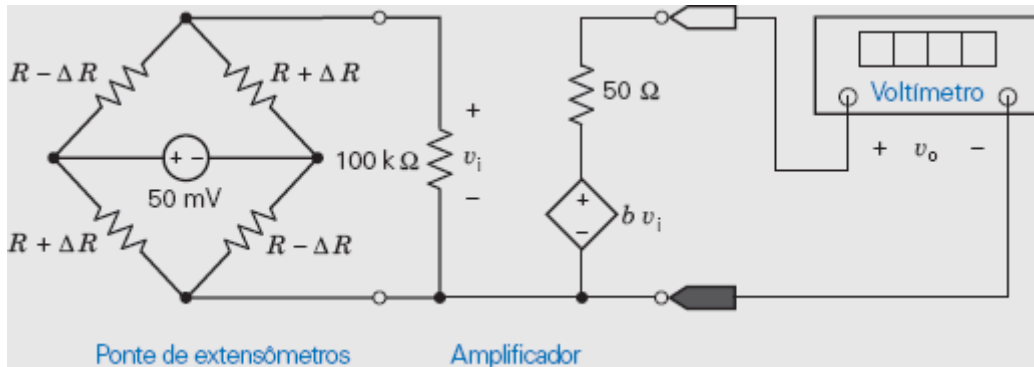



FIGURA 5.10-1 Problema de projeto envolvendo uma ponte de extensômetros.

Os extensômetros que formam a ponte têm uma resistência nominal $R = 120\ \Omega$. (Resistência nominal é a resistência na ausência de deformação.) A resistência não aumenta ou diminui mais que 2 Ω quando o extensômetro é deformado. Isso significa que

$$-2\ \Omega \leq \Delta R \leq 2\ \Omega \qquad (5.10\text{-}1)$$

A tensão de saída, v_o, deve variar de –10 V a +10 V quando ΔR varia de –2 Ω a +2 Ω.

Estabeleça a Meta

Determinar o ganho do amplificador, b, para que a relação entre v_o e ΔR seja dada por

$$v_o = (5\ \text{V}/\Omega) \cdot \Delta R \qquad (5.10\text{-}2)$$

Formule um Plano

Usar o teorema de Thévenin para analisar o circuito da Figura 5.10-1 e determinar a relação entre v_i e ΔR. Calcular o ganho do amplificador para que a Eq. 5.10-2 seja satisfeita.

Execute o Plano

Começamos por obter o circuito equivalente de Thévenin da ponte de extensômetros. Para isso são necessários dois cálculos: um para obter a tensão de circuito aberto v_t e outro para determinar a resistência de Thévenin R_t. A Figura 5.10-2*a* mostra o circuito usado para obter v_t. Começamos por calcular as correntes i_1 e i_2.

$$i_1 = \frac{50\ \text{mV}}{(R - \Delta R) + (R + \Delta R)} = \frac{50\ \text{mV}}{2R}$$

De forma similar

$$i_2 = \frac{50\ \text{mV}}{(R + \Delta R) + (R - \Delta R)} = \frac{50\ \text{mV}}{2R}$$

Então

$$
\begin{aligned}
V_1 &= (R+\Delta R)i_1 - (R-\Delta R)i_2 \\
&= (2\Delta R)\frac{50\ \text{mV}}{2R} \\
&= \frac{\Delta R}{R} 50\ \text{mV} = \frac{50\ \text{mV}}{120\ \Omega}\Delta R = (0{,}4167\times 10^{-3})\Delta R
\end{aligned}
\qquad (5.10\text{-}3)
$$

A Figura 5.10-2*b* mostra o circuito usado para calcular R_t. De acordo com a figura, R_t é o resultado da associação em série de duas resistências, cada uma das quais é uma associação em paralelo das resistências de dois extensômetros:

$$
R_t = \frac{(R-\Delta R)(R+\Delta R)}{(R-\Delta R)+(R+\Delta R)} + \frac{(R+\Delta R)(R-\Delta R)}{(R+\Delta R)+(R-\Delta R)} = 2\frac{R^2-\Delta R^2}{2R}
$$

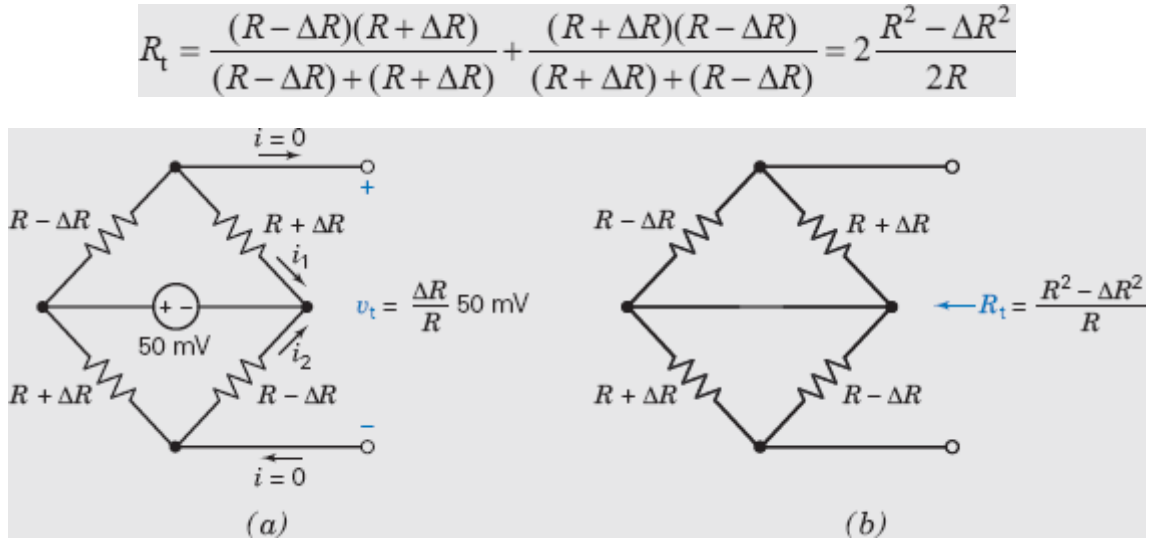



FIGURA 5.10-2 Cálculo da tensão de circuito aberto (*a*) e da resistência de Thévenin (*b*) da ponte de extensômetros.

Como R é muito maior que ΔR, a equação pode ser simplificada para

$$
R_t = R
$$

Na Figura 5.10-3, a ponte de extensômetros foi substituída pelo circuito equivalente de Thévenin. Essa simplificação permite calcular v_i usando o método da divisão de tensão:

$$
v_i = \frac{100\ \text{k}\Omega}{100\ \text{k}\Omega + R_t} v_t = 0{,}9988 v_t = (0{,}4162\times 10^{-3})\Delta R \qquad (5.10\text{-}4)
$$

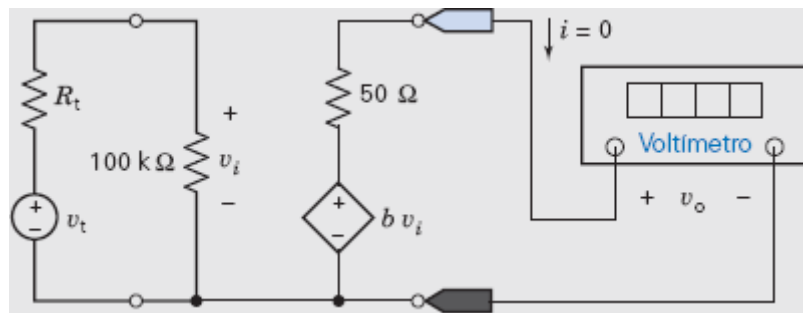



FIGURA 5.10-3 Solução do problema de projeto.

Supondo que o voltímetro se comporta como um voltímetro ideal, a corrente no voltímetro é $i = 0$, como mostra a Figura 5.10-3. Aplicando a LKT à malha da direita, obtemos

$$
\begin{aligned}
v_o + 50(0) - bv_i &= 0 \\
v_o = bv_i &= b(0{,}4162\times 10^{-3})\Delta R
\end{aligned}
\qquad (5.10\text{-}5)
$$

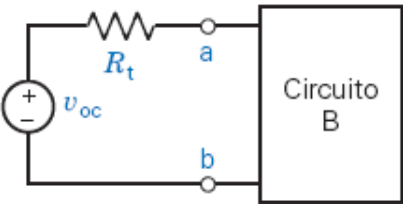
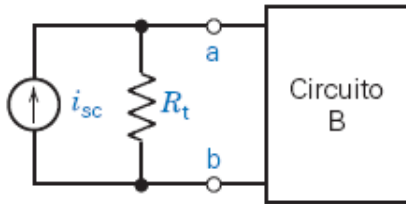
Comparando a Eq. 5.10-5 com a Eq. 5.10-2, vemos que o ganho do amplificador, b, deve satisfazer a relação

$$b(0{,}4162 \times 10^{-3}) = 5$$

Assim, o ganho do amplificador é

$$b = 12.013$$

Verifique se a Solução Proposta Está Correta

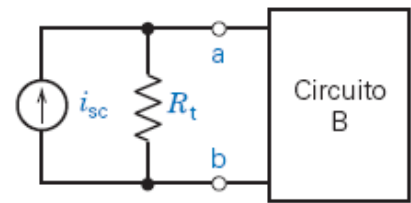
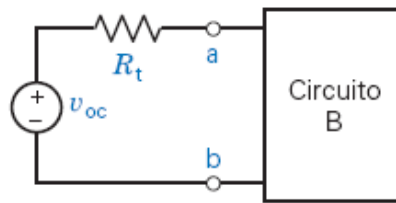
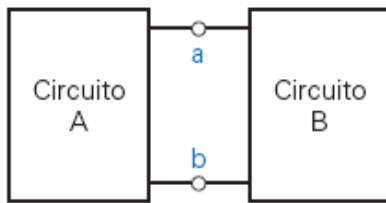
Fazendo $b = 12.013$ na Eq. 5.10-5, obtemos

$$v_o = (12.013)\,(0{,}4162 \times 10^{-3})\Delta R = 4{,}9998\ \Delta R \qquad (5.10\text{-}6)$$

o que está de acordo com a Eq. 5.10-2.

5.11 RESUMO

- As transformações de fonte, ilustradas na Tabela 5.11-1, são usadas para transformar um circuito em um circuito equivalente. Uma fonte de tensão v_{oc} em série com um resistor R_t pode ser transformada em uma fonte de corrente $i_{sc} = v_{oc}/R_t$ em paralelo com um resistor R_t. Da mesma forma, uma fonte de corrente i_{sc} em paralelo com um resistor R_t pode ser transformada em uma fonte de tensão $v_{oc} = R_t i_{sc}$ em série com um resistor R_t. Os circuitos da Tabela 5.11-1 são equivalentes no sentido de que a tensão e a corrente de todos os elementos do Circuito B não são alteradas pela transformação de fonte.
- O princípio da superposição permite determinar a resposta total de um circuito linear a várias fontes independentes determinando separadamente a resposta a cada fonte independente e somando algebricamente as respostas.
- Os circuitos equivalentes de Thévenin e Norton, ilustrados na Tabela 5.11-2, são usados para transformar um circuito dado em um circuito equivalente mais simples. Em primeiro lugar, o circuito é separado em duas partes, Circuito A e Circuito B, como na Tabela 5.11-2. O Circuito A pode ser substituído por um circuito equivalente de Thévenin ou por um circuito equivalente de Norton. Os circuitos da Tabela 5.11-2 são equivalentes no sentido de que as tensões e correntes em todos os componentes do Circuito B não são alteradas quando o Circuito A é substituído pelo circuito equivalente de Thévenin ou pelo circuito equivalente de Norton.
- Os métodos para calcular os parâmetros v_{oc}, i_{sc} e R_t dos circuitos equivalentes de Thévenin e de Norton aparecem nas Figuras 5.4-3 e 5.4-4.
- Em muitos circuitos de distribuição de energia elétrica e de telecomunicações, existe interesse em fornecer a maior potência possível a um resistor de carga R_L. A potência fornecida é máxima quando R_L é igual à resistência de Thévenin, R_t, do circuito ligado a R_L. Esse é o valor para o qual a potência transferida à carga é máxima nos casos em que a resistência R_t não pode ser reduzida.
- Os programas de computador MATLAB e PSpice podem ser usados para calcular os parâmetros v_{oc}, i_{sc} e R_t dos circuitos equivalentes de Thévenin e Norton.

Tabela 5.11-1 Transformações de Fonte

Tabela 5.11-2 Circuitos Equivalentes de Thévenin e de Norton

PROBLEMAS

Seção 5-2 Transformações de Fonte

P 5.2-1 O circuito da Figura P 5.2-1*a* foi dividido em duas partes. O circuito da Figura P 5.2-1*b* foi obtido simplificando a parte à direita dos terminais através de transformações de fonte. A parte do circuito à esquerda dos terminais não foi alterada.

(a) Determine o valor de R_t e v_t na Figura P 5.2-1*b*.

(b) Determine o valor da corrente i e da tensão v na Figura P 5.2-1*b*. Como o circuito da Figura P 5.2-1*b* é equivalente ao circuito da Figura P 5.2-1*a*, a corrente i e a tensão v na Figura P 5.2-1*a* têm o mesmo valor que a corrente i e a tensão v na Figura P 5.2-1*b*.

(c) Determine o valor da corrente i_a na Figura P 5.2-1*a*.

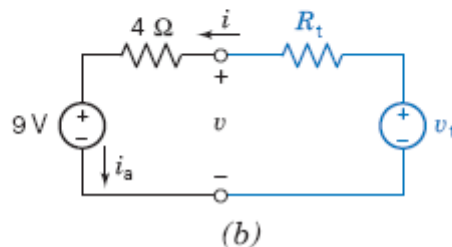
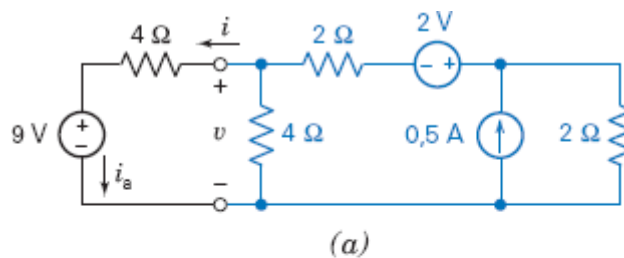



Figura P 5.2-1

P 5.2-2 Determine o valor de i_a na Figura P 5.2-2 simplificando o circuito (usando transformações de fonte) até que reste apenas uma malha e baste escrever uma equação da LKT para calcular i_a.

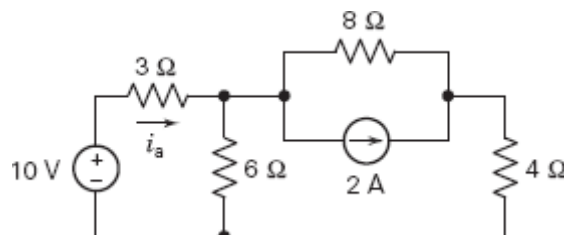



Figura P 5.2-2

P 5.2-3 Determine o valor de v_o usando transformações de fonte se $i = 5/2$ A no circuito da Figura P 5.2-3.

Sugestão: Reduza o circuito a uma única malha que contenha a fonte de tensão v_o.

Resposta: $v_o = 28$ V

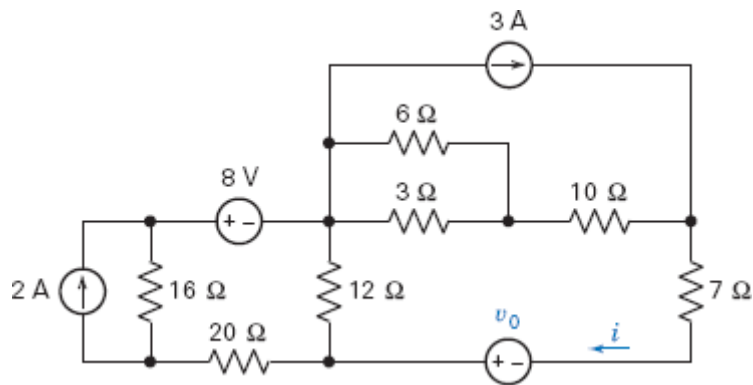



Figura P 5.2-3

P 5.2-4 Determine o valor da corrente i_a no circuito da Figura P 5.2-4.

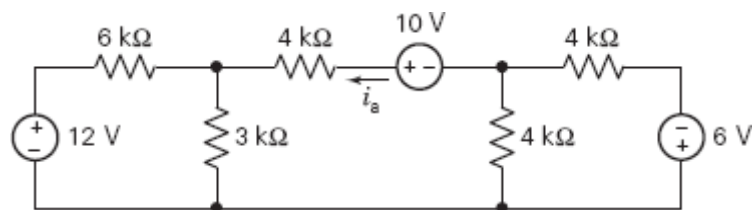



Figura P 5.2-4

P 5.2-5 Use transformações de fonte para determinar a corrente i_a no circuito da Figura P 5.2-5.

Resposta: $i_a = 1$ A

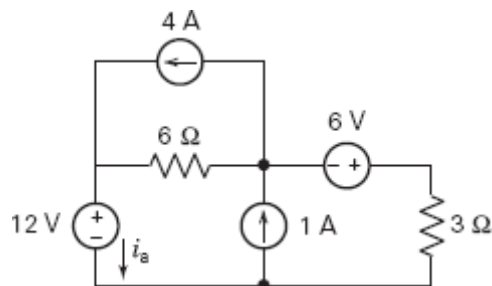



Figura P 5.2-5

P 5.2-6 Use transformações de fonte para determinar o valor da tensão v_a na Figura P 5.2-6.

Resposta: $v_a = 7$ V.

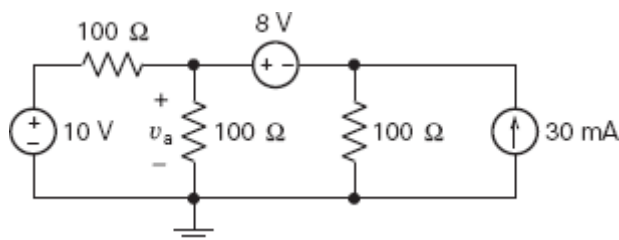



Figura P 5.2-6

P 5.2-7 O circuito equivalente da Figura P 5.2-7 foi obtido a partir do circuito original usando transformações de fonte e resistências equivalentes. (As letras *a* e *b* representam os terminais do capacitor no circuito original e no circuito equivalente.) Determine o valor de R_a, V_a, R_b e I_b no circuito equivalente.

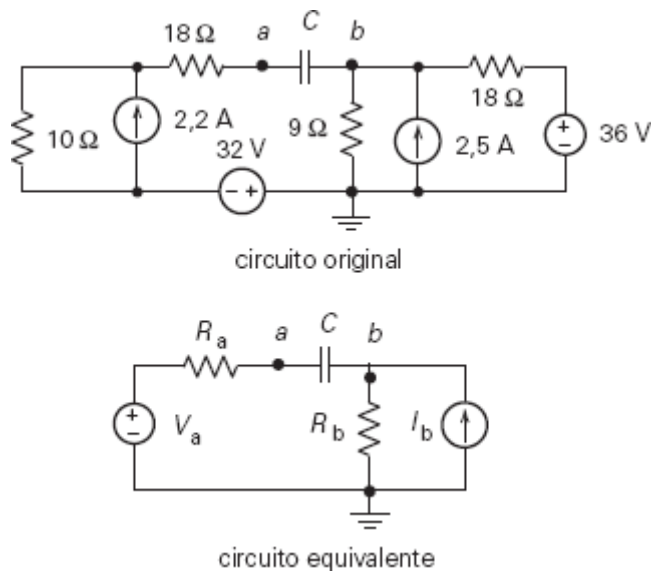



Figura P 5.2-7

P 5.2-8 O circuito da Figura P 5.2-8 contém uma resistência R.

(a) Determine o valor da corrente i para $R = 4\ \Omega$.

(b) Determine o valor da tensão v para $R = 8\ \Omega$.

(c) Determine o valor de R para que $i = 1$ A.

(d) Determine o valor de R para que $v = 16$ V.

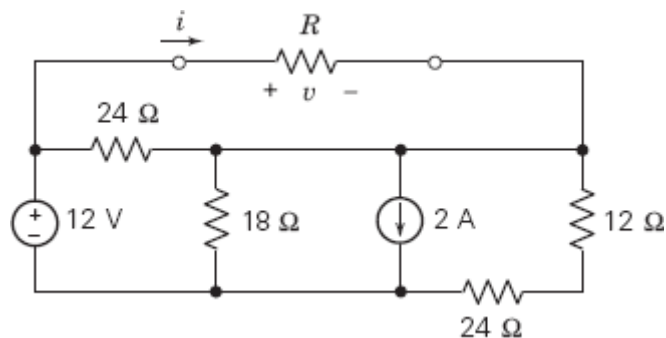



Figura P 5.2-8

P 5.2-9 Determine o valor da potência fornecida pela fonte de corrente no circuito da Figura P 5.2-9.

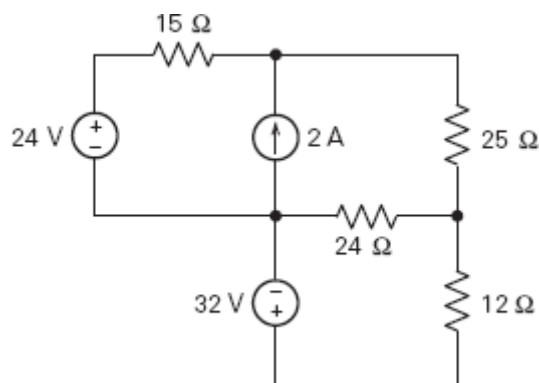



Figura P 5.2-9

Seção 5.3 Superposição

P 5.3-1 As entradas do circuito da Figura P 5.3-1 são as tensões das fontes de tensão v_1 e v_2. A saída do circuito é a tensão v_o. A saída está relacionada às entradas através da equação

$$v_o = av_1 + bv_2$$

em que a e b são constantes. Determine o valor de a e b.

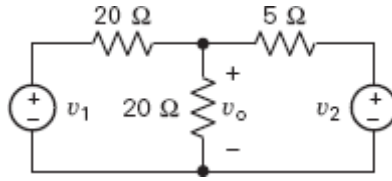



Figura P 5.3-1

P 5.3-2 Um circuito linear tem duas entradas, v_1 e v_2, e uma saída, v_o. São realizadas três medidas. A primeira medida mostra que a saída é $v_o = 4$ V quando as entradas são $v_1 = 2$ V e $v_2 = 0$. A segunda medida mostra que a saída é $v_o = 10$ V quando as entradas são $v_1 = 0$ e $v_2 = -2{,}5$ V. Na terceira medida, as entradas são $v_1 = 3$ V e $v_2 = 3$ V. Qual é o valor da saída na terceira medida?

P 5.3-3 O circuito da Figura P 5.3-3 possui duas entradas, v_s e i_s, e uma saída, i_o. A saída está relacionada às entradas através da equação

$$i_o = ai_s + bv_s$$

São fornecidas duas informações:

A saída é $i_o = 0{,}45$ A quando as entradas são $i_s = 0{,}25$ A e $v_s = 15$ V

e

A saída é $i_o = 0{,}30$ A quando as entradas são $i_s = 0{,}50$ A e $v_s = 0$ V

Determine o valor das constantes a e b e o valor das resistências R_1 e R_2.

Resposta: $a = 0{,}6$ A/A, $b = 0{,}02$ A/V, $R_1 = 30\ \Omega$, $R_2 = 20\ \Omega$

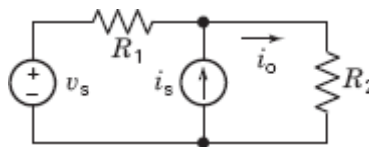



Figura P 5.3-3

P 5.3-4 Use o princípio da superposição para determinar o valor de v no circuito da Figura P 5.3-4.

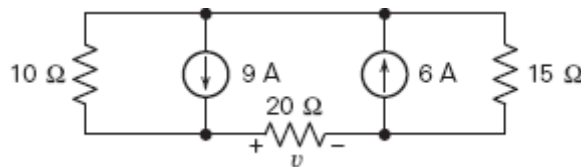



Figura P 5.3-4

P 5.3-5 Determine $v(t)$, a tensão do resistor vertical no circuito da Figura P 5.3-5.

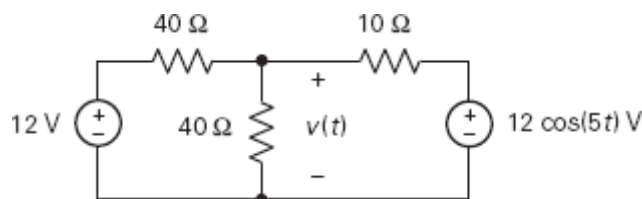



Figura P 5.3-5

P 5.3-6 Use o princípio da superposição para determinar o valor de i no circuito da Figura P 5.3-6.

Resposta: $i = 3{,}5$ mA

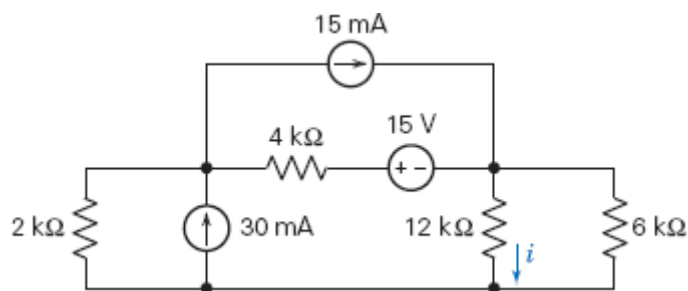



Figura P 5.3-6

P 5.3-7 Determine $v(t)$, a tensão do resistor de 40 Ω no circuito da Figura P 5.3-7.

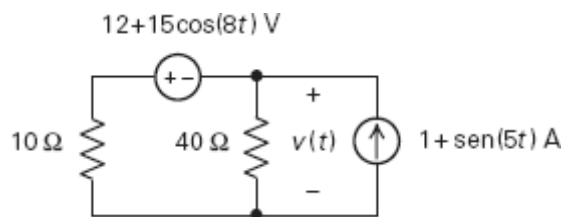



Figura P 5.3-7

P 5.3-8 Use o princípio da superposição para determinar o valor de i_x no circuito da Figura P 5.3-8.

Resposta: $i_x = 1/6$ A

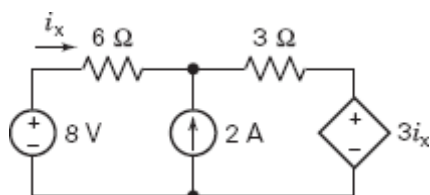



Figura P 5.3-8

P 5.3-9 A entrada do circuito da Figura P 5.3-10 é a tensão v_s da fonte de tensão. A saída é a tensão v_o. A corrente i_a da fonte de corrente é usada para ajustar a relação entre a entrada e a saída. Projete o circuito para que a entrada e a saída estejam relacionadas através da equação $v_o = 2v_s + 9$.

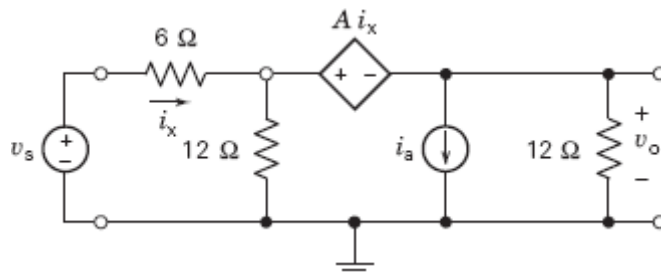



Figura P 5.3-9

Sugestão: Determine os valores apropriados de A e i_a.

P 5.3-10 O circuito da Figura P 5.3-10 tem três entradas: v_1, v_2 e i_3. A saída do circuito é v_o. A saída está relacionada às entradas através da equação

$$v_o = av_1 + bv_2 + ci_3$$

em que a, b e c são constantes. Determine o valor de a, b e c.

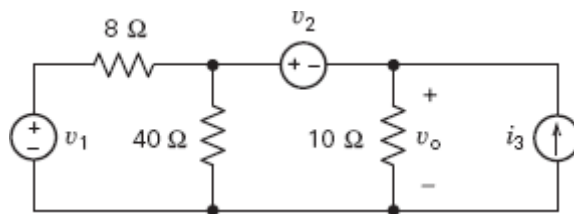



Figura P 5.3-10

P 5.3-11 Determine a tensão $v_o(t)$ no circuito da Figura P 5.3-11.

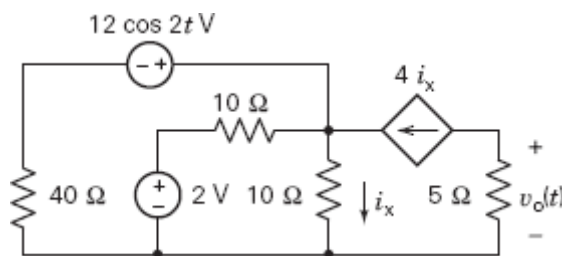



Figura P 5.3-11

P 5.3-12 Determine o valor da tensão v_o no circuito da Figura P 5.3-12.

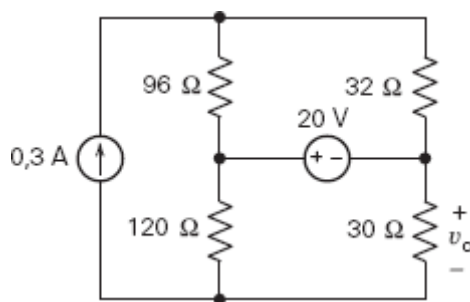



Figura P 5.3-12

P 5.3-13 A entrada do circuito da Figura P 5.3-13 é a corrente i_i. A saída é a tensão v_o. A corrente i_2 é usada para ajustar a relação entre a entrada e a saída. Determine o valor da corrente i_2 e da resistência R para que a saída esteja relacionada à entrada através da equação

$$v_o = -0,5i_1 + 4$$

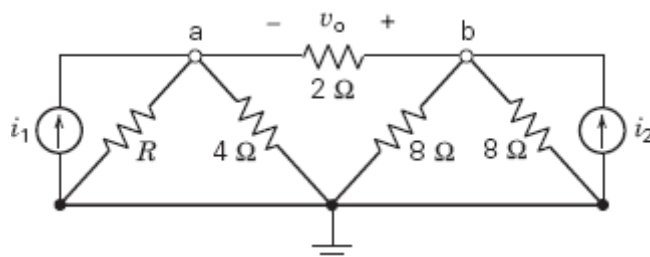



Figura P 5.3-13

P 5.3-14 Determine o valor da corrente i_a e da resistência R no circuito da Figura P 5.3-14.

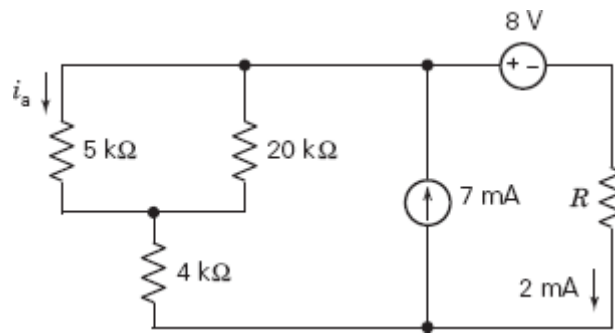



Figura P 5.3-14

P 5.3-15 O circuito da Figura P 5.3-15 tem três entradas: v_1, i_2 e v_3. A saída do circuito é a corrente i_o. A saída está relacionada às entradas através da equação

$$i_1 = av_o + bv_2 + ci_3$$

em que a, b e c são constantes. Determine o valor de a, b e c.

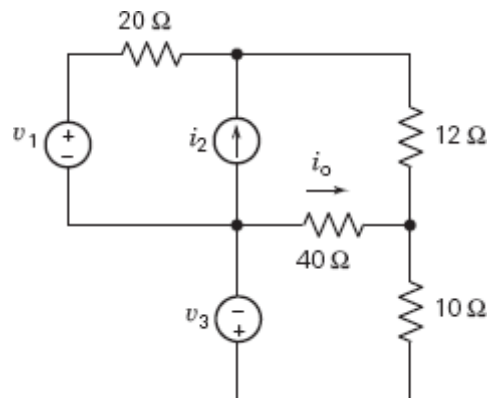



Figura P 5.3-15

P 5.3-16 Use o princípio da superposição para determinar o valor da corrente medida pelo amperímetro da Figura P 5.3-16*a*.

Sugestão: A Figura P 5.3-16*b* mostra o circuito depois que o amperímetro ideal foi substituído por um curto-circuito e foi acrescentado um dístico para indicar a corrente i_m medida pelo amperímetro.

Resposta: $i_m = 2$ A

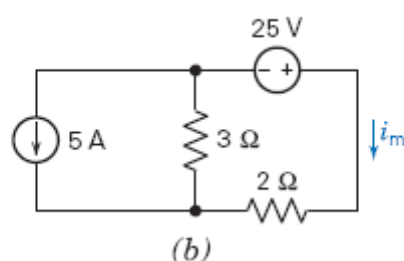
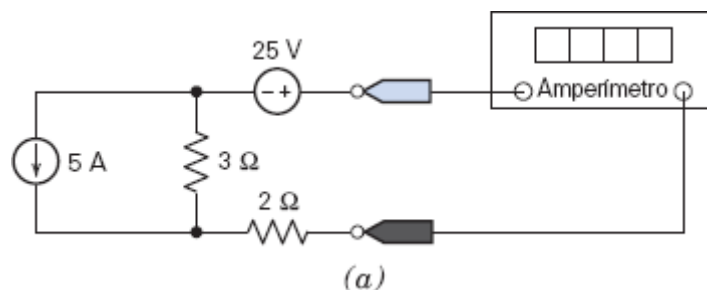



Figura P 5.3-16 (*a*) Um circuito com duas fontes independentes. (*b*) O circuito depois que o amperímetro ideal foi substituído por um curto-circuito equivalente e um dístico foi introduzido para indicar a corrente i_m medida pelo amperímetro.

Seção 5.4 Teorema de Thévenin

P 5.4-1 Determine o valor de R_t e v_{oc} para o qual o circuito da Figura P 5.4-1*b* é o circuito equivalente de Thévenin do circuito da Figura P 5.4-1*a*.

Sugestão: Use transformações de fonte e resistências equivalentes para reduzir o circuito da Figura P 5.4-1*a* até que se torne o circuito da Figura P 5.4-1*b*.

Resposta: $R_t = 5\ \Omega$ e $v_{oc} = 2$ V

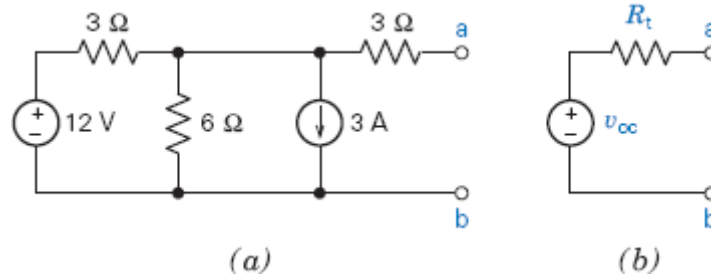



Figura P 5.4-1

P 5.4-2 O circuito da Figura P 5.4-2*b* é o circuito equivalente de Thévenin do circuito da Figura P 5.4-2*a*. Determine a tensão de circuito aberto, v_{oc}, e a resistência de Thévenin, R_t.

Resposta: $v_{oc} = -12$ V e $R_t = 16\ \Omega$

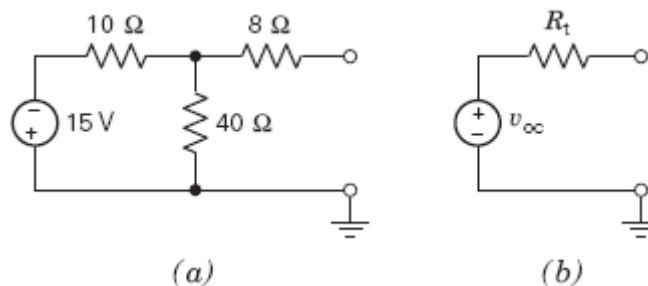



Figura P 5.4-2

P 5.4-3 O circuito da Figura P 5.4-3*b* é o circuito equivalente de Thévenin do circuito da Figura P 5.4-3*a*. Determine a tensão de circuito aberto, v_{oc}, e a resistência de Thévenin, R_t.

Resposta: $v_{oc} = 2$ V e $R_t = 4\ \Omega$

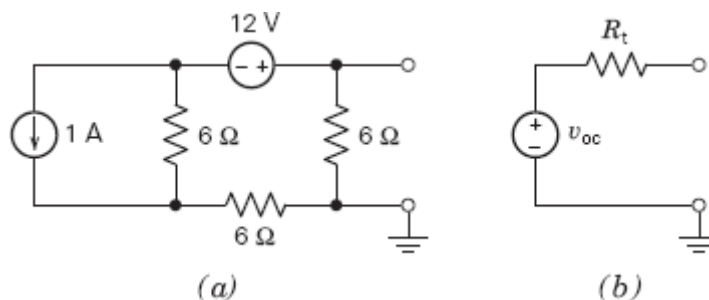



Figura P 5.4-3

P 5.4-4 Determine o circuito equivalente de Thévenin do circuito da Figura P 5.4-4.

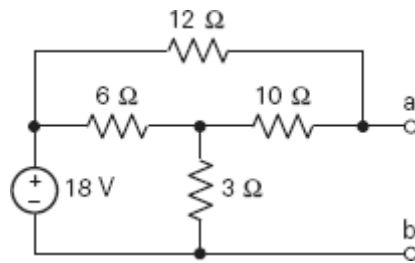



Figura P 5.4-4

P 5.4-5 Determine o circuito equivalente de Thévenin do circuito da Figura P 5.4-5.

Resposta: $v_{oc} = -2$ V e $R_t = -8/3\ \Omega$

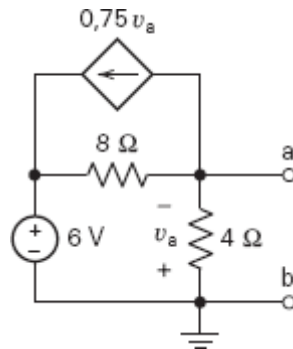



Figura P 5.4-5

P 5.4-6 Determine o circuito equivalente de Thévenin do circuito da Figura P 5.4-6.

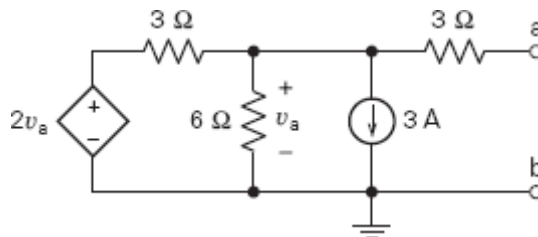



Figura P 5.4-6

P 5.4-7 O circuito equivalente da Figura P 5.4-7 foi obtido substituindo parte do circuito original pelo circuito equivalente de Thévenin. Os valores dos parâmetros do circuito equivalente de Thévenin são

$$v_{oc} = 15 \text{ V e } R_t = 60\ \Omega$$

Determine:

(a) O valor de V_s e R_a. (Quatro resistores do circuito original têm a mesma resistência, R_a.)

(b) O valor de R_b para que $i = 0{,}2$ A.

(c) O valor de R_b para que $v = 12$ V.

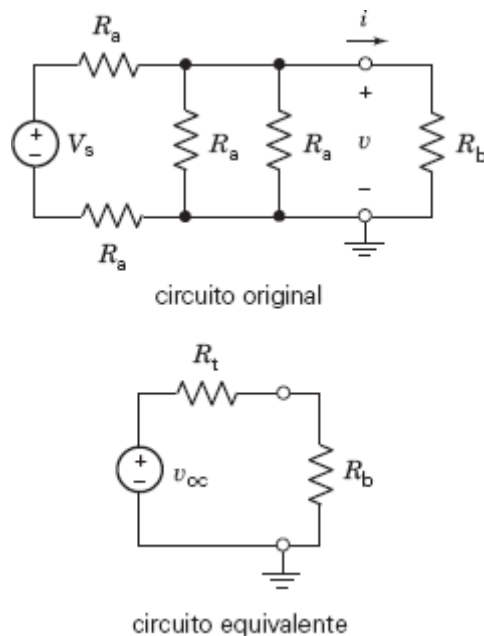



Figura P 5.4-7

P 5.4-8 Um resistor R foi ligado a um circuito desconhecido, como na Figura P 5.4-8. A tensão v foi medida. O resistor foi substituído por um resistor de outro valor e a tensão foi novamente medida. Os resultados aparecem na tabela. Determine o circuito equivalente de Thévenin do circuito desconhecido e calcule qual será a tensão v se $R = 8$ kΩ.

R	v
2 kΩ	6 V
4 kΩ	2 V

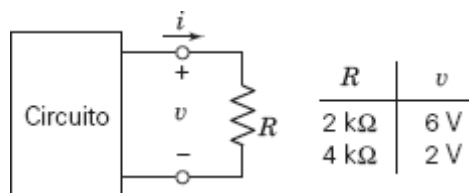



Figura P 5.4-8

P 5.4-9 Um resistor R foi ligado a um circuito desconhecido, como na Figura P 5.4-9. A corrente i foi medida. O resistor foi substituído por um resistor de outro valor e a corrente foi novamente medida. Os resultados aparecem na tabela.

(a) Determine o valor de R para que $i = 2$ mA.

(b) Sabendo que $R \geq 0$, determine o maior valor possível da corrente i.

Sugestão: Use os dados da tabela para representar o circuito por um circuito equivalente de Thévenin.

R	i
2 kΩ	4 mA
4 kΩ	3 mA

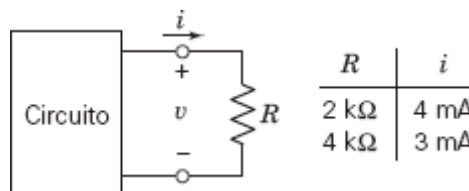



Figura P 5.4-9

P 5.4-10 Especifique a resistência R do circuito da Figura P 5.4-10 para que $i_b = 2$ mA. A corrente i_a é medida em ampères.

Sugestão: Determine o circuito equivalente de Thévenin do circuito ligado a R.

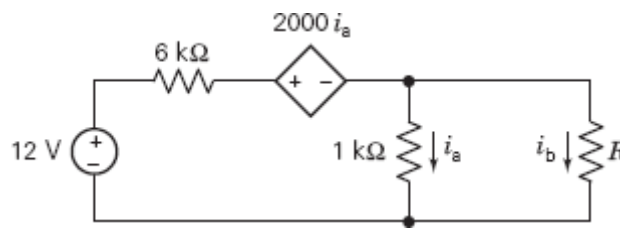



Figura P 5.4-10

P 5.4-11 Especifique o valor da resistência R_L no circuito da Figura P 5.4-11 para que $i_L = -2$ A.

Resposta: $R_L = 12\ \Omega$

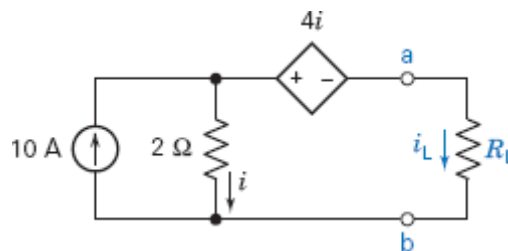



Figura P 5.4-11

P 5.4-12 O circuito da Figura P 5.4-12 contém um resistor ajustável. A resistência R pode assumir qualquer valor no intervalo $0 \le R \le 100$ kΩ.

(a) Determine o valor máximo da corrente i_a que pode ser obtido ajustando o valor de R e o valor correspondente de R.

(b) Determine o valor máximo da tensão v_a que pode ser obtido ajustando o valor de R e o valor correspondente de R.

(c) Determine o valor máximo da potência fornecida ao resistor ajustável que pode ser obtido ajustando o valor de R e o valor correspondente de R.

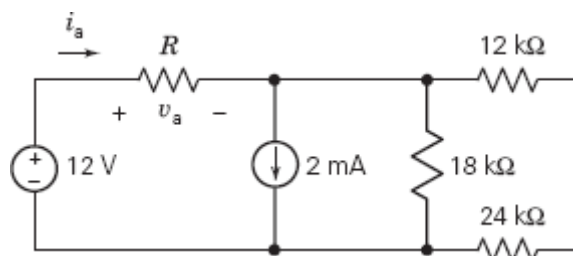



Figura P 5.4-12

P 5.4-13 O circuito da Figura P 5.4-13 é formado por duas partes, uma fonte (à esquerda dos terminais) e uma carga. A carga é um resistor ajustável de resistência $0 \le R_L \le 20\ \Omega$. A resistência R é fixa, mas seu valor não é conhecido. Para $R_L = 4\ \Omega$, a corrente na carga é $i_o = 0{,}375$ A. Para $R_L = 8\ \Omega$, a corrente na carga é $i_o = 0{,}300$ A.

(a) Determine o valor da corrente na carga para $R_L = 10\ \Omega$.

(b) Determine o valor de R.

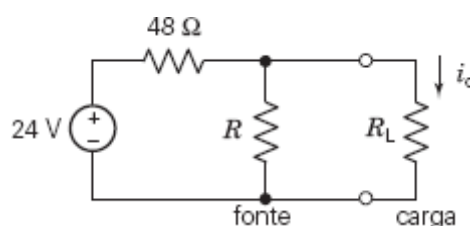



Figura P 5.4-13

P 5.4-14 O circuito da Figura P 5.4-14 contém uma resistência R de valor desconhecido. Determine o valor de R de duas formas diferentes:

(a) Escrevendo e resolvendo as equações de malha.

(b) Substituindo a parte do circuito ligada ao resistor R por um circuito equivalente de Thévenin e analisando o circuito resultante.

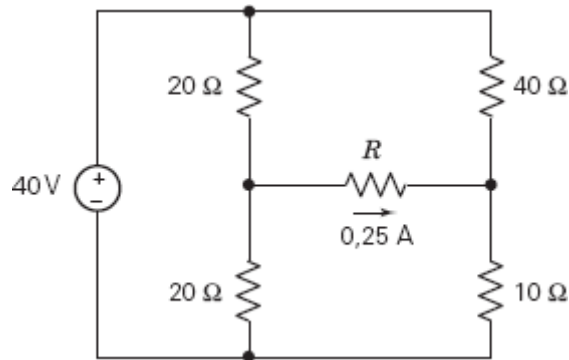



Figura P 5.4-14

P 5.4-15 Substitua a parte do circuito da Figura P 5.4-15 que está à esquerda dos terminais a e b pelo circuito equivalente de Thévenin e determine o valor da corrente i_o.

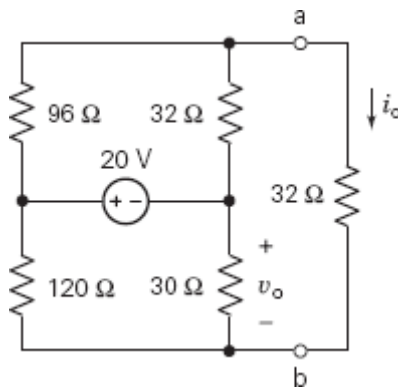



Figura P 5.4-15

P 5.4-16 Um voltímetro ideal é modelado por um circuito aberto, mas um modelo mais realista de um voltímetro é uma resistência de valor elevado. A Figura P 5.4-16*a* mostra um circuito com um voltímetro que mede a tensão v_m. Na Figura P 5.4-16*b*, o voltímetro foi substituído pelo modelo de um voltímetro ideal, um circuito aberto. O voltímetro mede v_{mi}, o valor ideal de v_m.

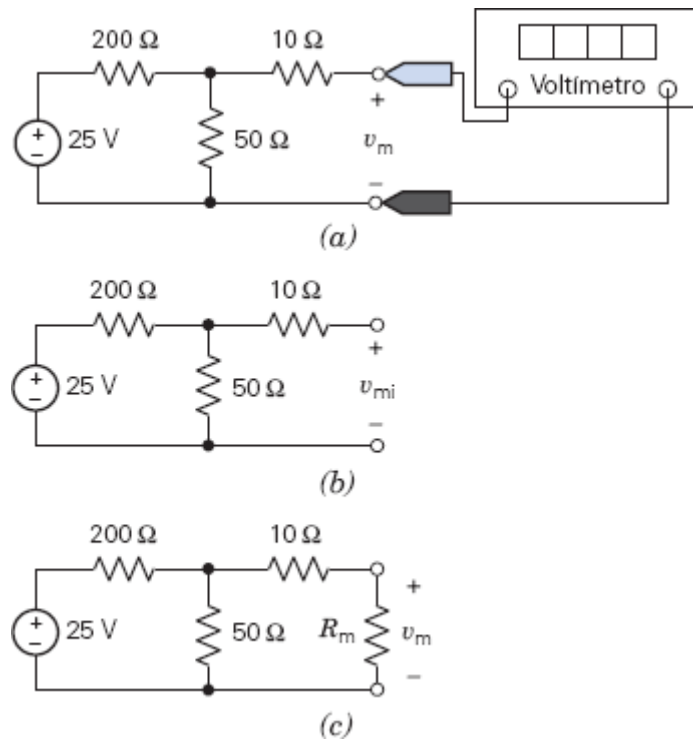



Figura P 5.4-16

Na Figura P 5.4-16*c*, o voltímetro foi substituído pelo modelo de um voltímetro real, uma resistência R_m de valor elevado. Se $R_m \to \infty$, o voltímetro se torna ideal e $v_m \to v_{mi}$. Se $R_m < \infty$, o voltímetro não é ideal e $v_m < v_{mi}$. A diferença entre v_m e v_{mi} é um erro de medição causado pelo fato de que o voltímetro não é ideal.

(a) Determine o valor de v_{mi}.

(b) Expresse o erro de medição para $R_m = 1000\ \Omega$ como uma porcentagem de v_{mi}.

(c) Determine o valor mínimo de R_m para que o erro de medição seja menor que 2 % de v_{mi}.

P 5.4-17 Dado que $0 \le R \le \infty$ no circuito da Figura P 5.4-17, considere duas observações:

Observação 1: Se $R = 2\ \Omega$, $v_R = 4$ V e $i_R = 2$ A.

Observação 2: Se $R = 6\ \Omega$, $v_R = 6$ V e $i_R = 1$ A.

Determine:

(a) O valor máximo de i_R e o valor de R para o qual i_R é máxima.

(b) O valor máximo de v_R e o valor de R para o qual v_R é máxima.

(c) O valor máximo de $p_R = i_R v_R$ e valor de R para o qual p_R é máxima.

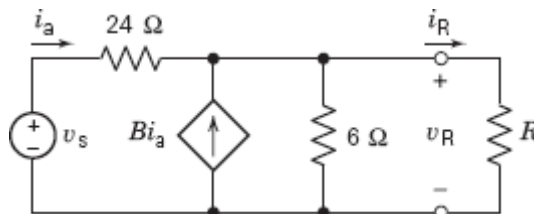



Figura P 5.4-17

P 5.4-18 Considere o circuito da Figura P 5.4-18. Determine:

(a) O valor de v_R para $R = 9\ \Omega$.

(b) O valor de R para o qual $v_R = 5{,}4$ V.

(c) O valor de R para o qual $i_R = 300$ mA.

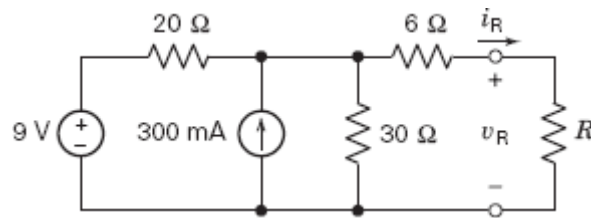



Figura P 5.4-18

P 5.4-19 O circuito da Figura P 5.4-19*a* pode ser reduzido ao circuito da Figura P 5.4-19*b* usando transformações de fonte e resistências equivalentes. Determine o valor da tensão da fonte v_{oc} e da resistência R.

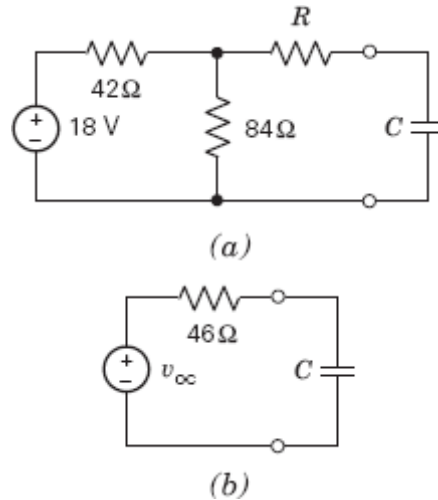



Figura P 5.4-19

P 5.4-20 O circuito equivalente da Figura P 5.4-20 foi obtido substituindo parte do circuito original pelo circuito equivalente de Thévenin. Os valores dos parâmetros equivalentes do circuito equivalente de Thévenin são

$$v_{oc} = 15 \text{ V e } R_t = 60 \ \Omega$$

Determine:

(a) O valor de V_s e R_a. (Três resistores do circuito original têm a mesma resistência, R_a.)

(b) O valor de R_b para que $i = 0{,}2$ A,

(c) O valor de R_b para que $v = 5$ V.

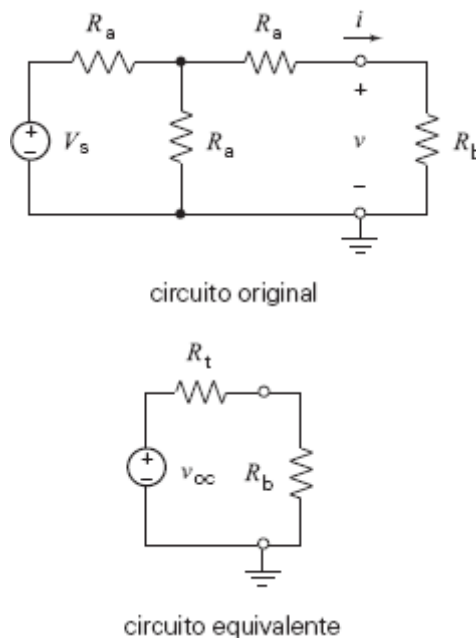



Figura P 5.4-20

Seção 5.5 Circuito Equivalente de Norton

P 5.5-1 A parte do circuito da Figura P 5.5-1*a* à esquerda dos terminais pode ser reduzida ao circuito equivalente de Norton usando transformações de fonte e resistências equivalentes. Os parâmetros do circuito equivalente de Norton, mostrado na Figura P 5.5-1*b*, são

$$i_{sc} = 0{,}5 \text{ A e } R_t = 20\ \Omega$$

(a) Determine v_s e R_1.

(b) Dado que $0 \leq R_2 \leq \infty$, determine o valor máximo da tensão v e da potência $p = vi$.

Respostas: (a) $v_s = 37{,}5$ V, $R_1 = 25\ \Omega$; (b) $v_{max} = 10$ V, $p_{max} = 1{,}25$ W

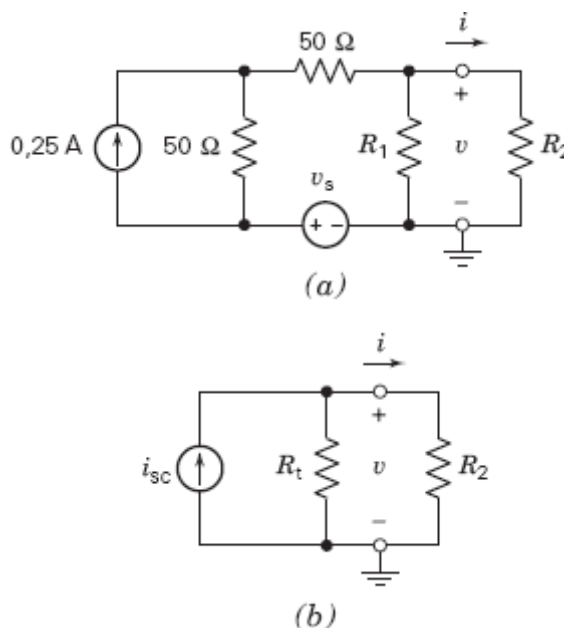



Figura P 5.5-1

P 5.5-2 A Figura P 5.5-2 mostra duas caixas pretas. A caixa A contém o circuito equivalente de Thévenin de um circuito linear e a caixa B contém o circuito equivalente de Norton do mesmo circuito. Como podemos deduzir qual é qual apenas apalpando os invólucros das caixas e confirmar a impressão inicial ligando um fio condutor aos terminais das caixas?

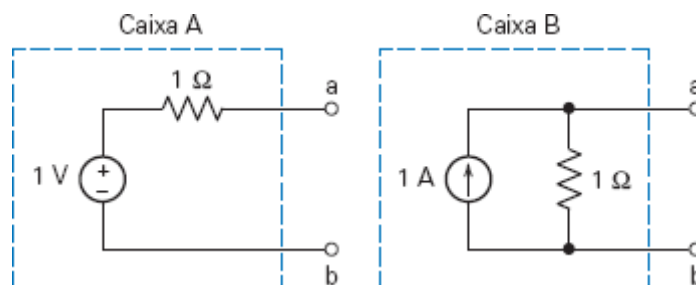



Figura P 5.5-2 Problema das caixas pretas.

P 5.5-3 O circuito da Figura P 5.5-3*a* pode ser reduzido ao circuito da Figura P 5.5-3*b* usando transformações de fonte e resistências equivalentes. Determine o valor da corrente da fonte i_{sc} e da resistência R.

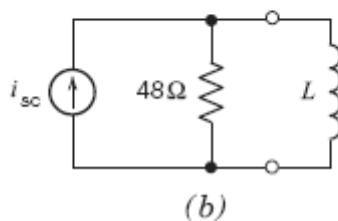
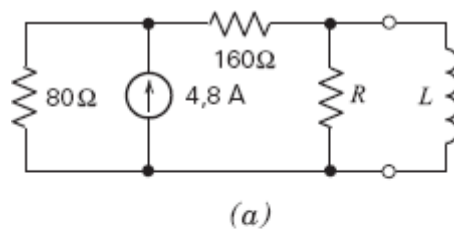



Figura P 5.5-3

P 5.5-4 Determine o circuito equivalente de Norton do circuito da Figura P 5.5-4.

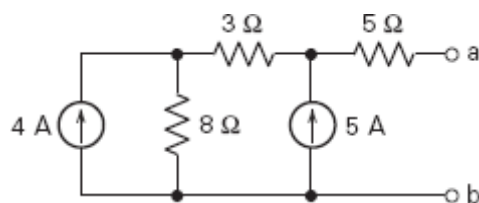



Figura P 5.5-4

P 5.5-5 O circuito da Figura P 5.5-5*b* é o circuito equivalente de Norton do circuito da Figura P 5.5-5*a*. Determine o valor da corrente de curto-circuito i_{sc} e da resistência de Thévenin R_t.

Resposta: i_{sc} = 1,13 A e R_t = 7,57 Ω.

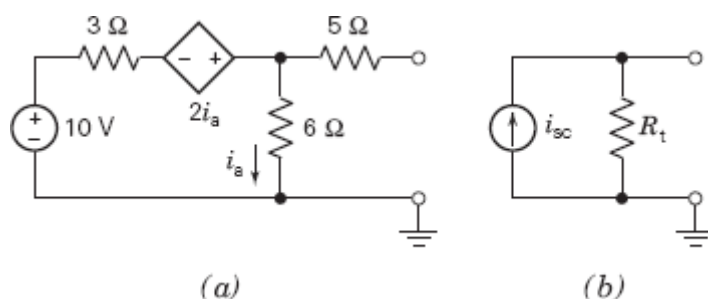



Figura P 5.5-5

P 5.5-6 O circuito da Figura P 5.5-6*b* é o circuito equivalente de Norton do circuito da Figura P 5.5-6*a*. Determine o valor da corrente de curto-circuito i_{sc} e da resistência de Thévenin R_t.

Resposta: i_{sc} = –24 A e R_t = –3 Ω.

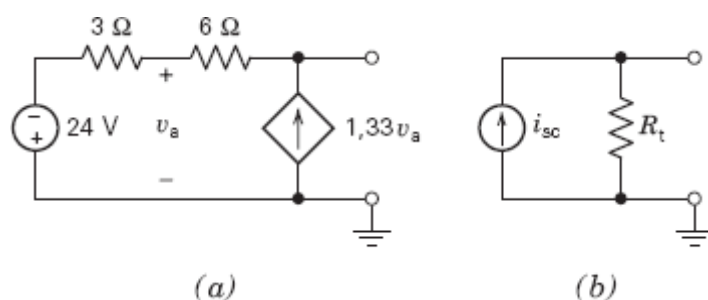



Figura P 5.5-6

P 5.5-7 Determine o valor da resistência R no circuito da Figura P 5.5-7 usando os seguintes métodos:

(a) Substituindo a parte do circuito à esquerda dos terminais a e b pelo circuito equivalente de Norton e usando o método da divisão de corrente para determinar o valor de R.

(b) Escrevendo as equações de malha do circuito e resolvendo as equações para determinar o valor de R.

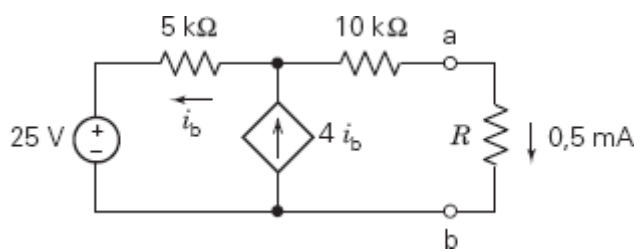



Figura P 5.5-7

P 5.5-8 Determine o circuito equivalente de Norton do circuito da Figura P 5.5-8.

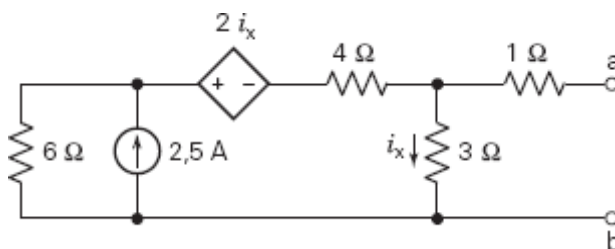



Figura P 5.5-8

P 5.5-9 Determine o circuito equivalente de Norton do circuito da Figura P 5.5-9.

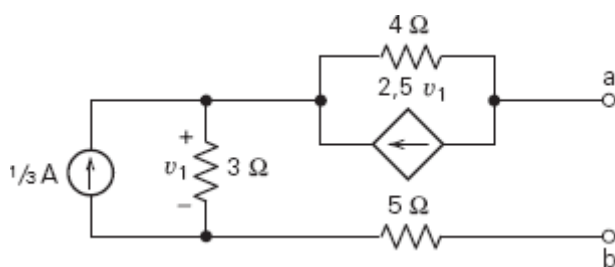



Figura P 5.5-9

P 5.5-10 Um amperímetro ideal é modelado por um curto-circuito, mas um modelo mais realista de um amperímetro é uma resistência de pequeno valor. A Figura P 5.5-10*a* mostra um circuito com um amperímetro que mede a tensão i_m. Na Figura P 5.5-10*b*, o amperímetro foi substituído pelo modelo de um amperímetro ideal, um curto-circuito. O amperímetro mede i_{mi}, o valor ideal de i_m.

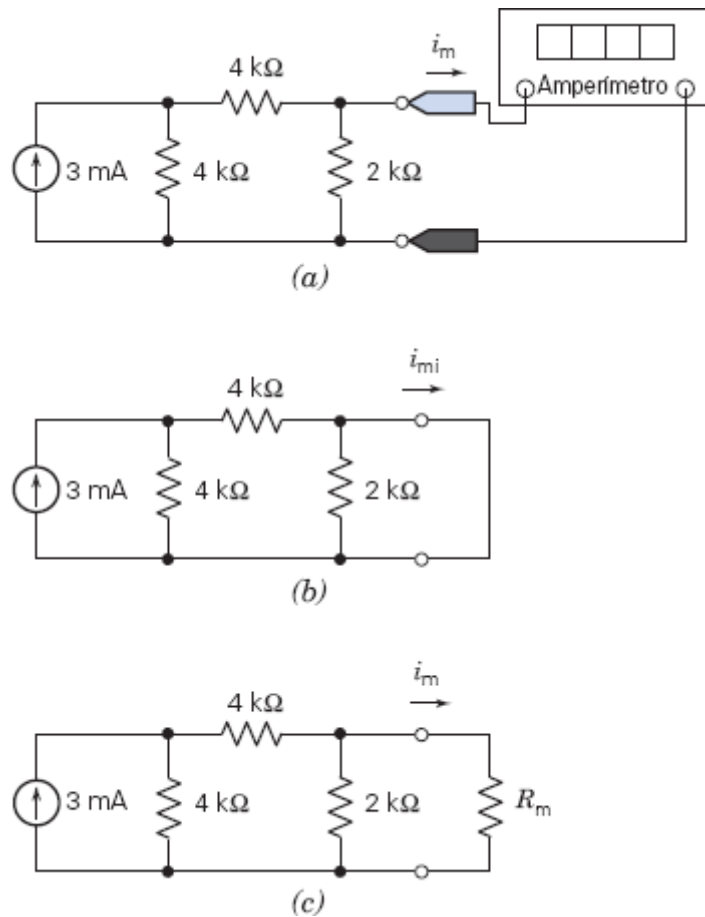



Figura P 5.5-10

Na Figura P 5.5-10*c*, o amperímetro foi substituído pelo modelo de um amperímetro real, uma resistência R_m de pequeno valor. Se $R_m \to 0$, o voltímetro se torna ideal e $i_m \to i_{mi}$. Se $R_m > 0$, o voltímetro não é ideal e $i_m < i_{mi}$. A diferença entre i_m e i_{mi} é um erro de medição causado pelo fato de que o amperímetro não é ideal.

(a) Determine o valor de i_{mi}.

(b) Expresse o erro de medição para $R_m = 20\ \Omega$ como uma porcentagem de i_{mi}.

(c) Determine o valor máximo de R_m para que o erro de medição seja menor que 2 % de i_{mi}.

P 5.5-11 Determine o valor de R_t e i_{sc} para que o circuito da Figura P 5.5-11*b* seja o circuito equivalente de Norton do circuito da Figura P 5.5-11*a*.

Resposta: $R_1 = 3\ \Omega$ e $i_{sc} = -2$ A

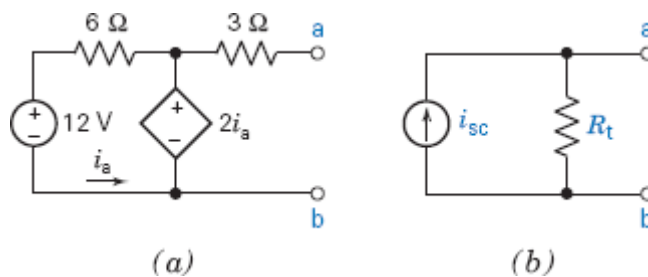



Figura P 5.5-11

P 5.5-12 Use o teorema de Norton para escrever uma expressão geral para a corrente *i* em termos da resistência variável *R* da Figura P 5.5-12.

Resposta: $i = 20/(8 + R)$ A.

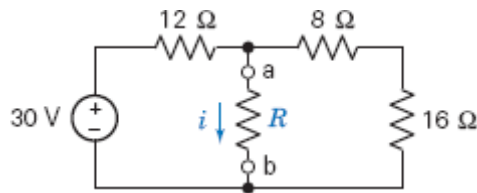



Figura P 5.5-12

Seção 5.6 Transferência Máxima de Potência

P 5.6-1 O circuito da Figura P 5.6-1 é formado por duas partes separadas por um par de terminais. Considere a parte do circuito à esquerda dos terminais. A tensão de circuito aberto é v_{oc} = 8 V e a corrente de curto-circuito é i_{sc} = 2 A. Determine (a) o valor da tensão v_s e da resistência R_2 e (b) o valor da resistência R para que a potência fornecida ao resistor à direita dos terminais seja a maior possível e o valor da potência fornecida para esse valor de R.

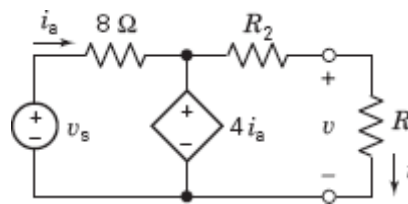



Figura P 5.6-1

P 5.6-2 A Figura P 5.6-2 mostra o modelo de uma célula fotovoltaica (Edelson, 1992). A corrente i_s é proporcional à insolação (kW/m^2).

(a) Determine o valor da resistência de carga R_L para que a transferência de energia seja a maior possível.

(b) Determine o valor da potência máxima transferida para i_s = 1 A.

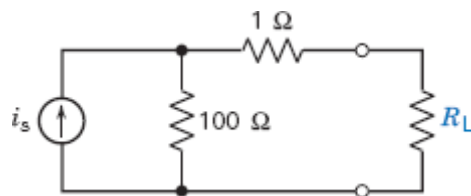



Figura P 5.6-2 Modelo de uma célula fotovoltaica.

P 5.6-3 No circuito da Figura P 5.6-3, (a) determine o valor de R para que a maior potência possível seja dissipada em R e (b) calcule o valor da potência máxima.

Resposta: R = 60 Ω e P_{max} = 54 mW

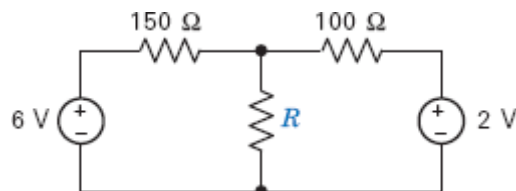



Figura P 5.6-3

P 5.6-4 No circuito da Figura P 5.6-4, prove que, para R_s variável e R_L fixo, a potência dissipada em R_L é máxima para R_s = 0.

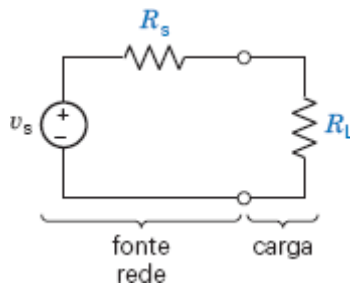



Figura P 5.6-4

P 5.6-5 Determine a potência máxima que pode ser absorvida por um resistor R ligado aos terminais a e b do circuito da Figura P 5.6-5. Especifique o valor de R para o qual a potência é máxima.

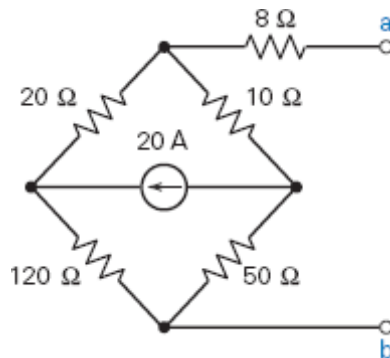



Figura P 5.6-5 Circuito ponte.

P 5.6-6 A Figura P 5.6-6 mostra uma fonte ligada a uma carga através de um amplificador. A carga pode receber com segurança até 15 W de potência. Considere três casos:

(a) A = 20 V/V e R_o = 10 Ω. Determine o valor de R_L que maximiza a potência fornecida à carga e o valor da potência máxima.

(b) A = 20 V/V e R_L = 8 Ω. Determine o valor de R_o que maximiza a potência fornecida à carga e o valor da potência máxima.

(c) R_o = 10 Ω e R_L = 8 Ω. Determine o valor de A que maximiza a potência fornecida à carga e o valor da potência máxima.

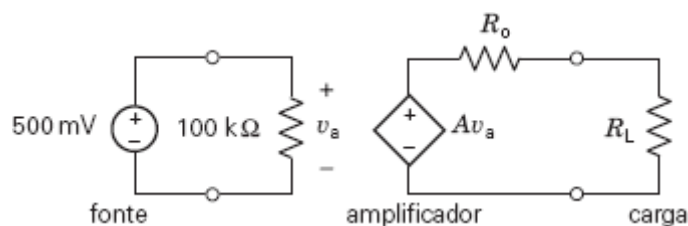



Figura P 5.6-6

P 5.6-7 O circuito da Figura P 5.6-7 contém um potenciômetro que se comporta como um resistor variável, R, cuja resistência pode ser ajustada entre 0 e 1000 Ω. A potência máxima de trabalho do potenciômetro é 1/4 Ω. Determine a potência máxima dissipada pelo potenciômetro. O circuito é seguro?

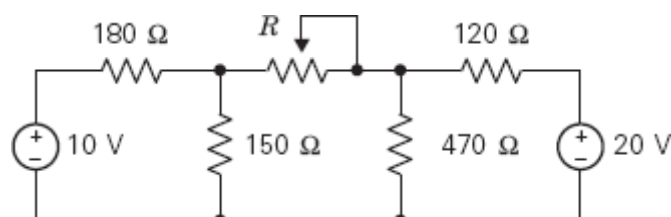



Figura P 5.6-7

P 5.6-8 No circuito da Figura P 5.6-8, determine a potência fornecida à carga quando R_L é mantida fixa e R_t varia entre 1 Ω e 5 Ω. Determine o valor de R_t para que a potência fornecida a R_L seja máxima.

Resposta: 13,9 W

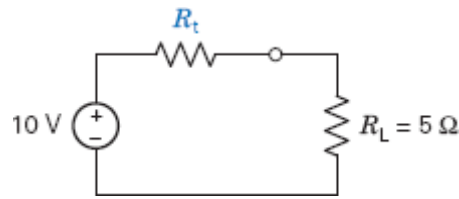



Figura P 5.6-8

P 5.6-9 Um circuito resistivo foi ligado a um resistor variável; a Figura P 5.6-9 mostra a potência fornecida ao resistor em função da resistência do resistor. Determine o circuito equivalente de Thévenin do circuito.

Resposta: $R_t = 20\ \Omega$ e $v_{oc} = 20$ V

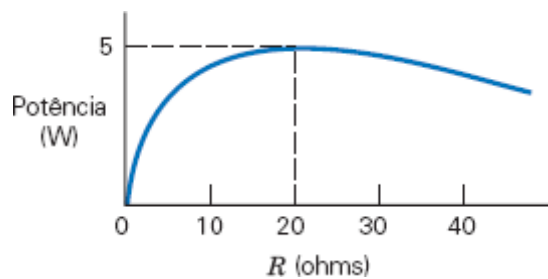



Figura P 5.6-9

P 5.6-10 A parte do circuito da Figura P 5.6-10*a* à esquerda dos terminais pode ser reduzida ao circuito equivalente de Norton usando transformações de fonte e resistências equivalentes. Os valores dos parâmetros do circuito equivalente de Norton, que aparece na Figura P 5.6-10*b*, são:

$$i_{sc} = 1{,}5 \text{ A e } R_t = 80\ \Omega$$

(a) Determine o valor de i_s e R_1.

(b) Dado que $0 \le R_2 \le \infty$, determine o valor máximo de $p = vi$, a potência fornecida ao resistor R_2.

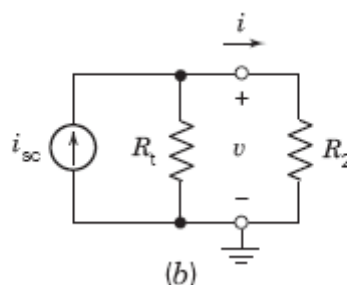
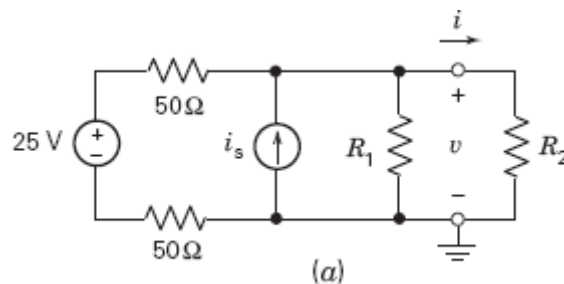



Figura P 5.6-10

P 5.6-11 Dado que $0 \le R \le \infty$ no circuito da Figura P 5.6-11, determine (a) o valor máximo de i_a; (b) o valor máximo de v_a; (c) o valor máximo de $p_a = i_a v_a$.

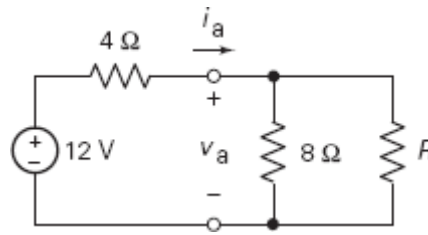



Figura P 5.6-11

P 5.6-12 Dado que $0 \le R \le \infty$ no circuito da Figura P 5.6-12, determine o valor de R para o qual a potência $p_a = i_a v_a$ é máximo e o valor da potência máxima.

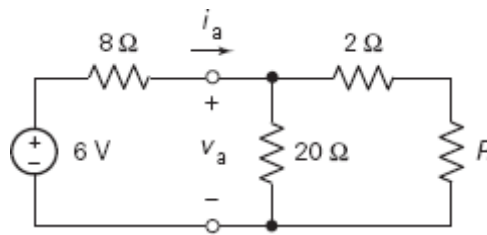



Figura P 5.6-12

Seção 5.8 Uso do PSpice para Obter o Circuito Equivalente de Thévenin

P 5.8-1 O circuito da Figura P 5.8-1 é separado em duas partes por um par de terminais. Chame a parte do circuito à esquerda dos terminais de Circuito A e a parte do circuito à direita dos terminais de Circuito B. Faça o seguinte, usando o programa PSpice:

(a) Determine as tensões de nó de todo o circuito.

(b) Determine o circuito equivalente de Thévenin do Circuito A.

(c) Substitua o Circuito A pelo circuito equivalente de Thévenin e determine as tensões de nó do circuito modificado.

(d) Compare as tensões de nó do Circuito B antes e depois de substituir o Circuito A pelo circuito equivalente de Thévenin.

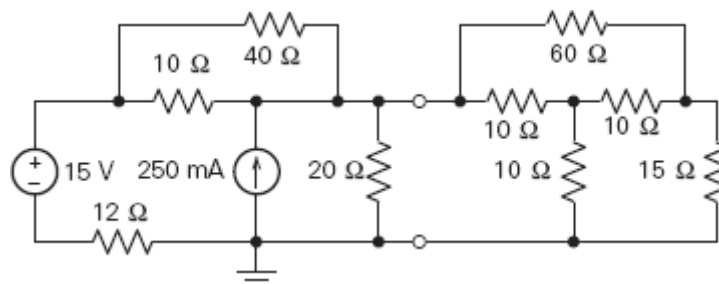



Figura P 5.8-1

Seção 5.9 Como Podemos Testar . . . ?

P 5.9-1 A corrente i no circuito da Figura P 5.9-1 foi medida para três valores diferentes de R e os resultados foram os que aparecem na tabela. Esses resultados são razoáveis?

$R(\Omega)$	i(mA)
5000	16,5
500	43,8
0	97,2

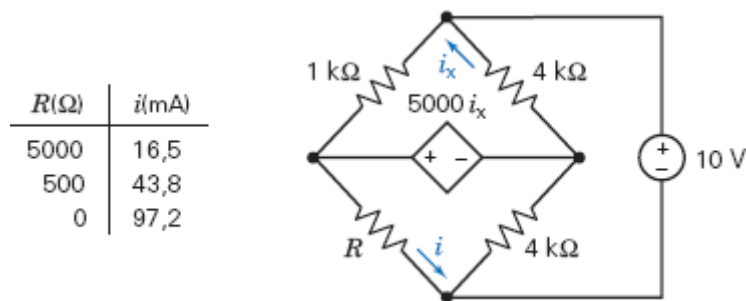



Figura P 5.9-1

P 5.9-2 Seu companheiro de laboratório montou o circuito da Figura P 5.9-2 e mediu a corrente i e a tensão v para vários valores da resistência R. Os resultados foram os que aparecem na tabela. Seu companheiro afirma que com $R = 8000\ \Omega$ a corrente medida foi $i = 1$ mA. Você concorda? Justifique sua resposta.

R	i	v
∞	0 mA	12 V
10 kΩ	0,857 mA	8,57 V
0	3 mA	0 V

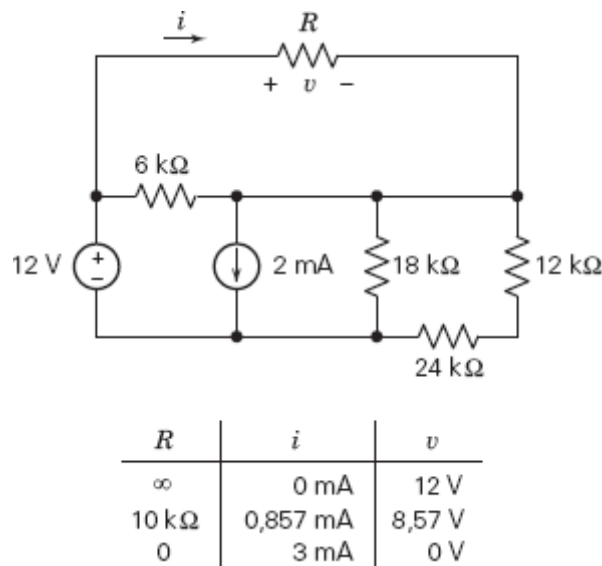



Figura P 5.9-2

P 5.9-3 Como preparativo de uma experiência de laboratório, seu parceiro determinou o circuito equivalente de Thévenin do circuito ligado a R_L na Figura P 5.9-3. Ele afirma que a resistência de Thévenin é $R_t = 6R/11$ e que a tensão de circuito aberto é $v_{oc} = 60/11$ V. Você monta o circuito usando $R = 110\ \Omega$ e $R_L = 40\ \Omega$ e mede uma corrente $i = 163$ mA. Esse resultado é compatível com os cálculos do seu parceiro? Justifique sua resposta.

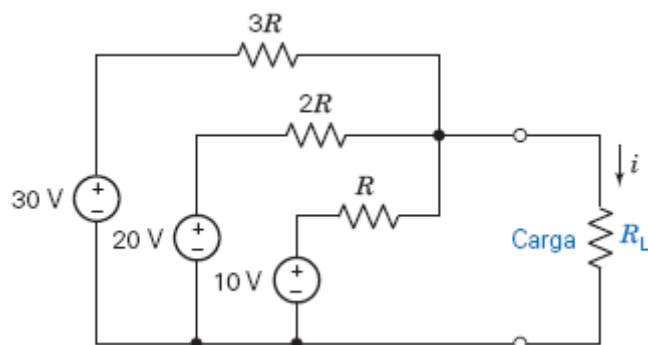



Figura P 5.9-3

P 5.9-4 Seu companheiro de laboratório afirma que a corrente i no circuito da Figura P 5.9-4 não pode ser maior que 12,0 mA, qualquer que seja o valor da resistência R. Você concorda?

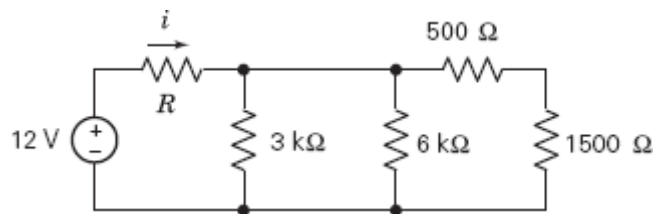



Figura P 5.9-4

P 5.9-5 A Figura P 5.9-5 mostra um circuito e os resultados de algumas medições realizadas no circuito. Duas resistências, R_1 e R, e a corrente da fonte de corrente não são conhecidas. A tabela mostra o valor da corrente i e da tensão v para vários valores da resistência R.

(a) Substitua a parte do circuito ligada ao resistor R por um circuito equivalente de Thévenin, usando os dados das linhas 2 e 3 da tabela para determinar o valor de R_t e v_{oc}, a resistência de Thévenin e a tensão de circuito aberto.

(b) Use os resultados do item (a) para mostrar que os dados da tabela são razoáveis.

(c) Complete as lacunas da tabela.

(d) Determine o valor de R_1 e i_s.

R, Ω	i, A	v, V
0	3	0
10	1,333	13,33
20	0,857	17,14
40	0,5	?
80	?	21,82

(b)

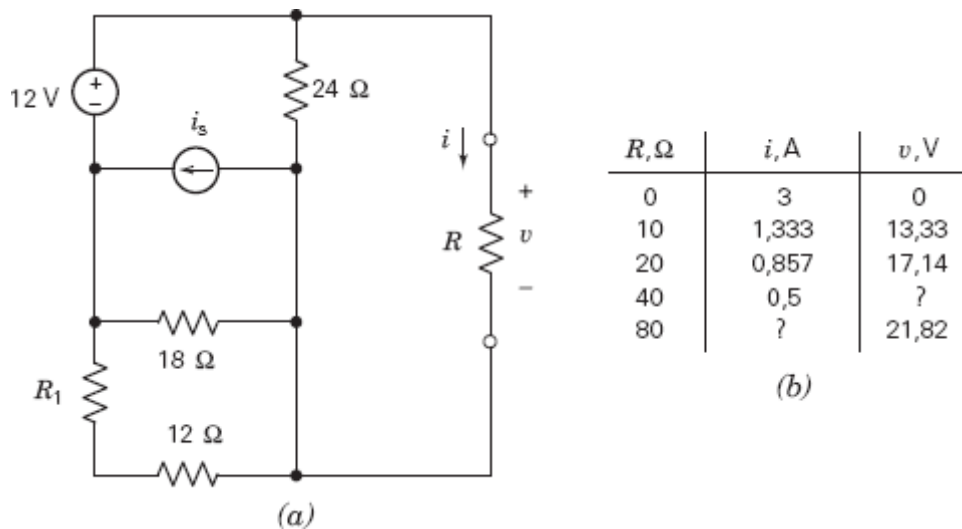



Figura P 5.9-5

Problemas com o PSpice

PS 5-1 O circuito da Figura PS 5-1 possui três entradas, v_1, v_2 e i_3, e uma saída, v_o. A equação

$$v_o = a\, v_1 + b\, v_2 + c\, i_3$$

expressa a saída em função das entradas. Os coeficientes a, b e c são constantes reais.

(a) Use o programa PSpice e o princípio da superposição para determinar o valor de a, b e c.

(b) Suponha que $v_1 = 10$ V, $v_2 = 8$ V e que queremos que a saída seja $v_o = 7$ V. Qual deve ser o valor de i_3?

Sugestão: A saída é dada por $v_o = a$ para $v_1 = 1$ V, $v_2 = 0$ e $i_3 = 0$.

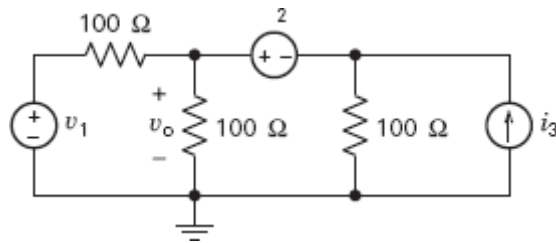



Figura PS 5-1

Respostas: (a) $v_o = 0{,}3333v_1 + 0{,}3333v_2 + 33{,}33i_3$; (b) $i_3 = 30$ mA

PS 5-2 O par de terminais a e b divide o circuito da Figura PS 5-2 em duas partes. Chame as tensões de nó dos nós 1 e 2 de v_1 e v_2. Use o programa PSpice para mostrar que, quando realizamos uma transformação de fonte do lado esquerdo dos terminais, nada muda do lado direito dos terminais. Em particular, mostre que a corrente i_o e as tensões dos nós 1 e 2, v_1 e v_2, têm o mesmo valor antes e depois da transformação da fonte.

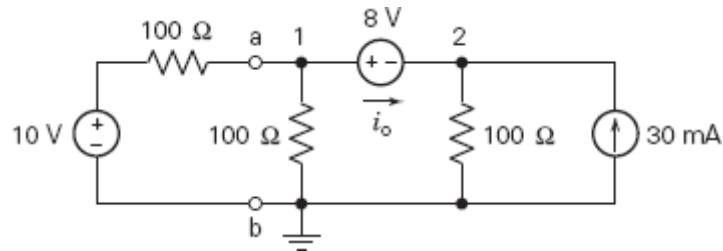



Figura PS 5-2

PS 5-3 Use o programa PSpice para determinar o circuito equivalente de Thévenin do circuito da Figura PS 5-3.

Resposta: $v_{oc} = -2$ V e $R_t = -8/3\ \Omega$

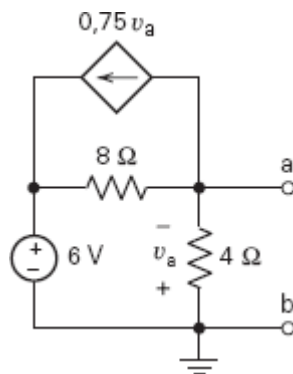



Figura PS 5-3

PS 5-4 O circuito da Figura PS 5-4*b* é o circuito equivalente de Norton do circuito da Figura PS 5-4*a*. Determine o valor da corrente de curto-circuito i_{sc} e da resistência de Thévenin R_t.

Resposta: $i_{sc} = 1{,}13$ V e $R_t = 7{,}57\ \Omega$

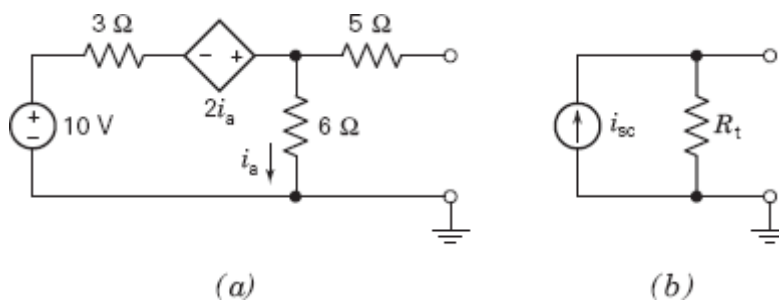



Figura PS 5-4

Problemas de Projeto

PP 5-1 O circuito da Figura PP 5-1*a* possui quatro parâmetros: v_s, R_1, R_2 e R_3. Para projetar o circuito, devemos especificar o valor dos quatro parâmetros. O gráfico da Figura PP 5-1*b* mostra a relação entre a corrente i e a tensão v.

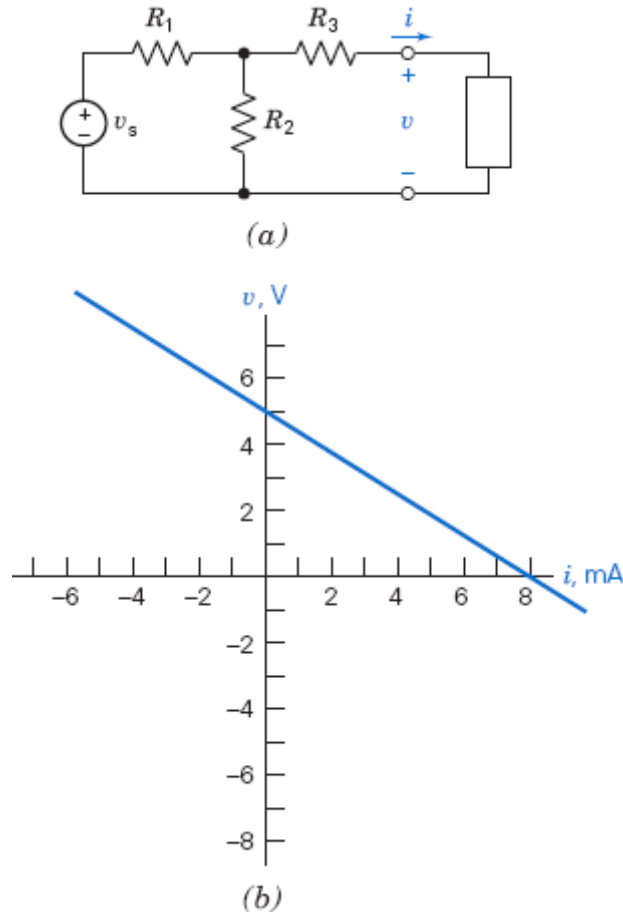



Figura PP 5-1

Especifique valores de v_s, R_1, R_2 e R_3 tais que a corrente i e a tensão v no circuito da Figura PP 5-1*a* obedeçam à relação descrita pelo gráfico da Figura PP 5-1*b*.

Primeira Sugestão: A equação que representa a linha reta da Figura PP 5-1*b* é

$$v = -R_t i + v_{oc}$$

ou seja, a inclinação da reta é igual ao negativo da resistência de Thévenin e o ponto de interseção com o eixo v é igual à tensão de circuito aberto.

Segunda Sugestão: Existe mais de uma resposta correta para o problema. Experimente fazer $R_1 = R_2$.

PP 5-2 O circuito da Figura PP 5-2*a* possui quatro parâmetros: i_s, R_1, R_2 e R_3. Para projetar o circuito, devemos especificar o valor dos quatro parâmetros. O gráfico da Figura PP 5-2*b* mostra a relação entre a corrente i e a tensão v.

Especifique valores de i_s, R_1, R_2 e R_3 tais que a corrente i e a tensão v no circuito da Figura PP 5-2*a* obedeçam à relação descrita pelo gráfico da Figura PP 5-2*b*.

Primeira Sugestão: Calcule a tensão de circuito aberto v_{oc} e a resistência de Thévenin R_t da parte do circuito à esquerda dos terminais da Figura PP 5-2*a*.

Segunda Sugestão: A equação que representa a linha reta da Figura PP 5-2*b* é

$$v = -R_t i + v_{oc}$$

ou seja, a inclinação da reta é igual ao negativo da resistência de Thévenin e o ponto de interseção com o eixo v é igual à tensão de circuito aberto.

Terceira Sugestão: Existe mais de uma resposta correta para o problema. Experimente fazer R_3 e $R_1 + R_2$ iguais ao dobro do valor absoluto da inclinação do gráfico da Figura PP 5-2*b*.

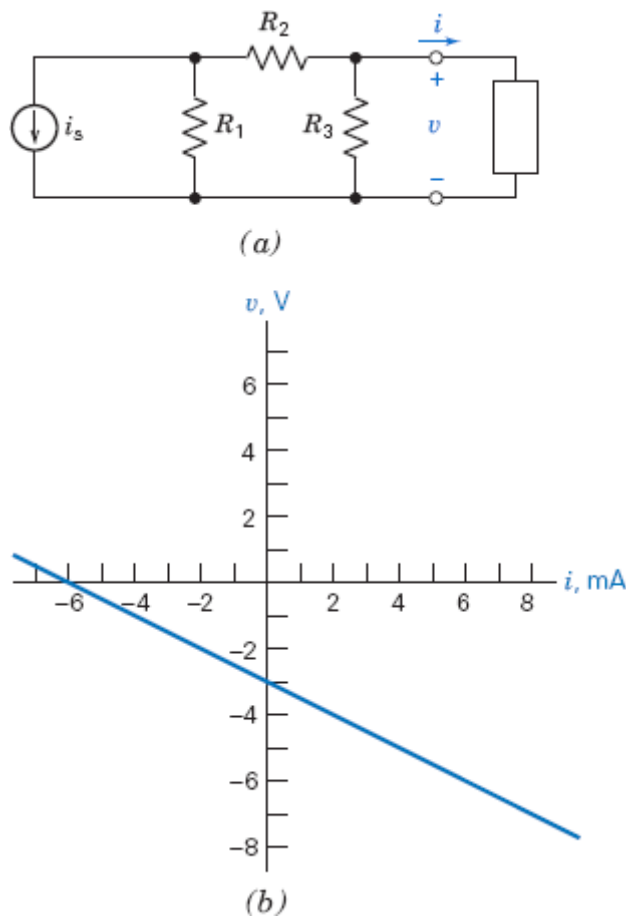



Figura PP 5-2

PP 5-3 O circuito da Figura PP 5-3*a* possui quatro parâmetros: v_s, R_1, R_2 e R_3. Para projetar o circuito, devemos especificar o valor dos quatro parâmetros. O gráfico da Figura PP 5-3*b* mostra a relação entre a corrente i e a tensão v.

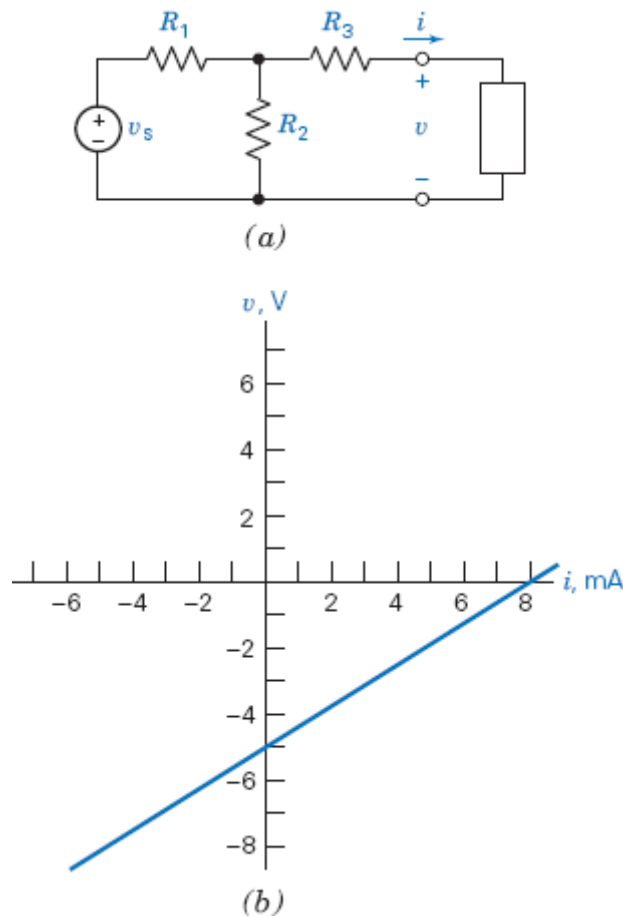



Figura PP 5-3

É possível especificar valores de v_s, R_1, R_2 e R_3 tais que a corrente i e a tensão v no circuito da Figura PP 5-3*a* obedeçam à relação descrita pelo gráfico da Figura PP 5-3*b*? Justifique sua resposta.

PP 5-4 O circuito da Figura PP 5-4*a* possui quatro parâmetros: v_s, R_1, R_2 e d, em que d é o ganho da FCCC. Para projetar o circuito, precisamos especificar o valor dos quatro parâmetros. O gráfico da Figura PP 5-4*b* mostra a relação entre a corrente i e a tensão v.

Especifique valores de v_s, R_1, R_2 e d tais que a corrente i e a tensão v no circuito da Figura PP 5-4*a* obedeçam à relação descrita pelo gráfico da Figura PP 5-4*b*.

Primeira Sugestão: A equação que representa a linha reta da Figura PP 5-4*b* é

$$v = -R_t i + v_{oc}$$

ou seja, a inclinação da reta é igual ao negativo da resistência de Thévenin e o ponto de interseção com o eixo v é igual à tensão de circuito aberto.

Segunda Sugestão: Existe mais de uma resposta correta para este problema. Experimente fazer $R_1 = R_2$.

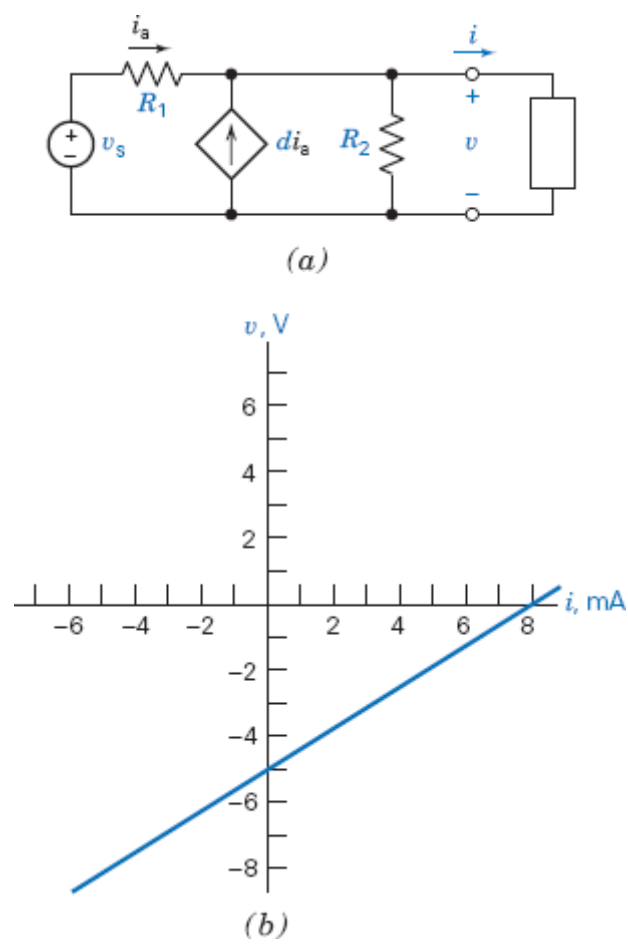



Figura PP 5-4

[1] Do inglês open circuit. Não foi usado o símbolo v_{ca} porque esse símbolo é usado tradicionalmente para representar tensões alternadas. (N.T.)

[2] Do inglês short circuit. Não foi usado o símbolo v_{cc} porque esse símbolo é usado tradicionalmente para representar correntes contínuas. (N.T.)

CAPÍTULO 6 O Amplificador Operacional

NESTE CAPÍTULO

6.1 *Introdução*

Neste capítulo é apresentado mais um componente dos circuitos, o amplificador operacional. Vamos aprender a analisar e projetar circuitos elétricos que contêm amplificadores operacionais. Em particular, vamos ver que:

- Existem vários modelos para os amplificadores operacionais, com diferentes graus de precisão e complexidade. Os modelos mais precisos são também os mais complexos. O modelo mais simples do amplificador operacional é o amplificador operacional ideal.
- Os circuitos que contêm amplificadores operacionais ideais são analisados escrevendo e resolvendo equações de nó.
- Os operadores operacionais podem ser usados para projetar circuitos que realizam operações matemáticas. Muitos desses circuitos são tão usados que receberam nomes específicos; alguns exemplos aparecem na Figura 6.5-1.
- Os amplificadores operacionais reais possuem parâmetros que não são modelados pelo amplificador operacional ideal, como tensão residual de entrada, corrente de polarização, ganho de tensão, resistência de entrada e resistência de saída. Para levar em conta esses parâmetros, é preciso usar modelos mais sofisticados.

6.2 *O Amplificador Operacional*

O *amplificador operacional* é um componente dos circuitos elétricos que realiza operações especiais de processamento de sinais. A Figura 6.2-1*a* mostra um amplificador operacional comercial, o μA741. O dispositivo

possui oito pinos para ligações, cujas funções estão indicadas na Figura 6.2-1*b*.

O amplificador operacional da Figura 6.2-2 tem cinco terminais. Os nomes dos terminais estão indicados tanto na Figura 6.2-1*b* como na Figura 6.2-2. Observe os sinais positivo e negativo na parte triangular do símbolo do amplificador operacional. O sinal positivo identifica a entrada não inversora e o sinal negativo identifica a entrada inversora.

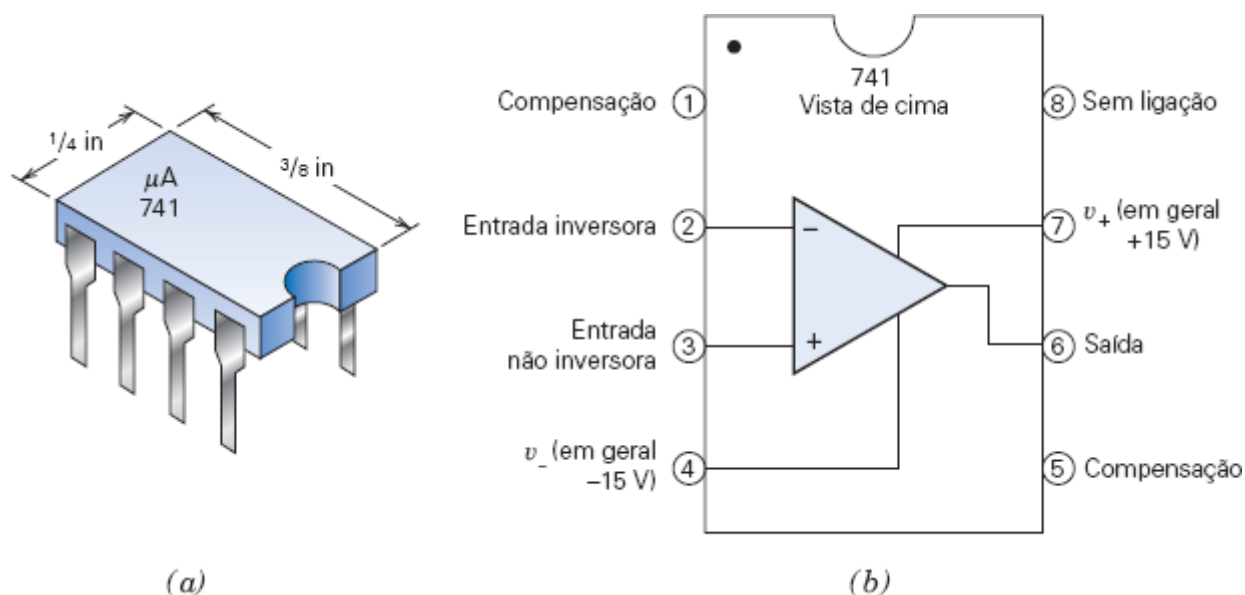



FIGURA 6.2-1 (*a*) Um circuito integrado μA741 possui oito pinos para ligações. (*b*) Correspondência entre os números dos pinos e os nós do amplificador operacional.

Duas fontes de alimentação são usadas para polarizar o amplificador operacional. Em outras palavras, as fontes de alimentação estabelecem as condições necessárias para que o amplificador operacional funcione corretamente. É desnecessário incluir as fontes de alimentação nos esquemas dos circuitos que contêm amplificadores lineares. As fontes tendem a sobrecarregar os esquemas, tornando-os mais difíceis de interpretar. Por esse motivo, as fontes de alimentação são quase sempre omitidas dos esquemas que acompanham as explicações do princípio de funcionamento dos amplificadores operacionais, como os que são usados nos livros didáticos. Fica subentendido que as fontes de alimentação fazem parte do circuito, embora não sejam mostradas. (Por outro lado, nos esquemas usados para a montagem dos circuitos, as fontes de alimentação não podem ser ignoradas.) As tensões das fontes de alimentação estão representadas na Figura 6.2-2 pelos símbolos v_+ e v_-.

Como as fontes de alimentação do amplificador operacional são frequentemente omitidas nos esquemas, é relativamente comum deixar de fora, por esquecimento, as correntes das fontes de alimentação na hora de analisar o circuito. Este erro deve ser evitado na hora de aplicar a lei de Kirchhoff para correntes (LKC). O melhor, porém, é não aplicar a LKC de uma forma tal que envolva as correntes das fontes de alimentação. Dois casos específicos são particularmente importantes. Em primeiro lugar, o nó de terra da Figura 6.2-2 é um dos terminais das duas fontes de alimentação. Assim, se a LKC for aplicada ao nó de terra, as correntes das duas fontes de alimentação estarão envolvidas. Essas correntes não podem ser ignoradas. É melhor simplesmente não aplicar a LKC ao nó de terra de um circuito que contém um amplificador operacional. Em segundo lugar, de acordo com a LKC, a soma das correntes que entram em um amplificador operacional é zero:

$$i_1 + i_2 + i_o + i_+ + i_- = 0$$

As correntes das duas fontes de alimentação aparecem nesta equação. Mais uma vez, essas correntes não podem ser ignoradas. É melhor simplesmente não aplicar a LKC às correntes de um amplificador operacional quando as fontes de alimentação não estão incluídas do esquema.

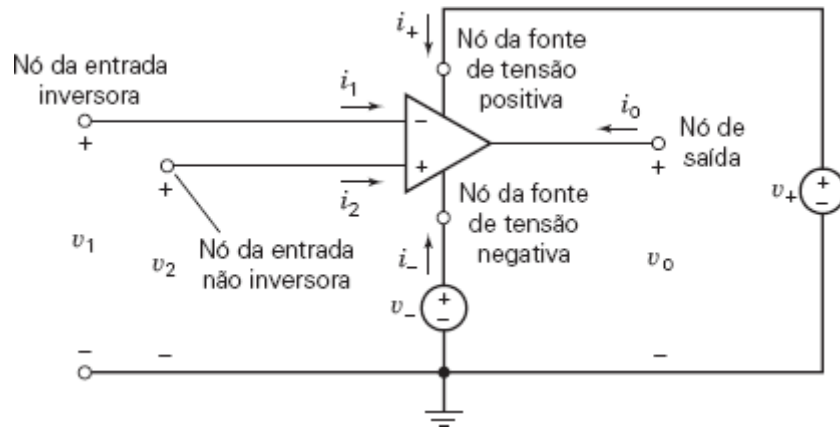



FIGURA 6.2-2 Diagrama de um amplificador operacional, mostrando as fontes de alimentação v_+ e v_-.

6.3 *O Amplificador Operacional Ideal*

Os amplificadores operacionais são componentes complexos, que podem apresentar comportamento linear ou não linear. Para que um amplificador operacional seja linear, a tensão e corrente de saída, v_o e i_o, devem satisfazer três condições:

$$|v_o| \leq v_{sat}$$
$$|i_o| \leq i_{sat}$$
$$\left|\frac{dv_o(t)}{dt}\right| \leq SR \tag{6.3-1}$$

A tensão de saturação v_{sat}, a corrente de saturação i_{sat} e o limite da taxa de variação da tensão da saída, SR[1], variam de acordo com o modelo e as tensões de polarização do amplificador operacional. Assim, por exemplo, se um amplificador operacional μA741 é polarizado com tensões de +15 V e –15 V, temos:

$$v_{sat} = 14 \text{ V}, \quad i_{sat} = 2 \text{ mA} \quad \text{e} \quad SR = 500.000 \frac{\text{V}}{\text{s}} \tag{6.3-2}$$

Essas restrições refletem o fato de que um amplificador operacional não pode produzir tensões e correntes arbitrariamente elevadas e a tensão de saída não pode variar instantaneamente.

A Figura 6.3-1 mostra um *amplificador operacional ideal*. O amplificador operacional ideal é um modelo simplificado de um amplificador operacional linear. O amplificador operacional ideal é caracterizado por restrições impostas às correntes e tensões de entrada. As correntes nos terminais de entrada de um amplificador operacional ideal são nulas. Assim, na Figura 6.3-1,

$$i_1 = 0 \ \text{ e } \ i_2 = 0$$

As tensões de nó nos nós de entrada de um amplificador operacional ideal são iguais. Assim, na Figura 6.3-1,

$$v_2 = v_1$$

Como o amplificador operacional ideal é um modelo de um amplificador operacional linear, a corrente e a tensão da saída do amplificador operacional devem satisfazer as restrições da Eq. 6.3-1. Quando essas restrições não são satisfeitas, o amplificador operacional ideal não é um modelo apropriado do amplificador operacional real. A corrente e tensão de saída dependem do circuito em que o amplificador operacional se encontra. As condições para que um amplificador operacional seja considerado ideal aparecem na Tabela 6.3-1.

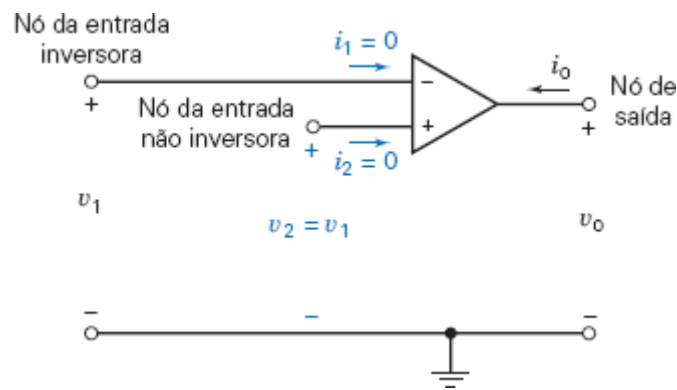



FIGURA 6.3-1 O amplificador operacional ideal.

Tabela 6.3.1 Condições de Operação de um Amplificador Operacional Ideal

VARIÁVEL	CONDIÇÃO IDEAL
Corrente da entrada do nó inversor	$i_1 = 0$
Corrente da entrada do nó não inversor	$i_2 = 0$
Diferença de tensão entre a tensão do nó inversor v_1 e a tensão do nó inversor v_2	$v_2 - v_1 = 0$

EXEMPLO 6.3-1 Amplificador Operacional Ideal

Considere o circuito da Figura 6.3-2*a*. Suponha que o amplificador operacional é um amplificador operacional μA741 e se comporta como um amplificador operacional ideal. Determine a relação entre a tensão de saída v_o e a tensão de entrada v_s.

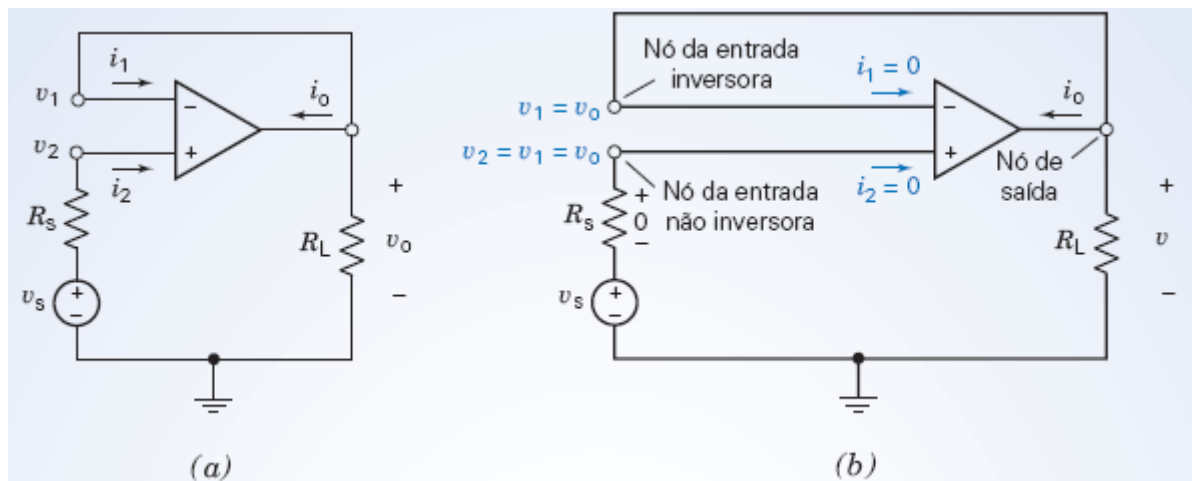



FIGURA 6.3-2 (*a*) Circuito com um amplificador operacional do Exemplo 6.3-1 e (*b*) circuito equivalente mostrando as consequências de usar um amplificador operacional ideal para modelar o amplificador operacional. As tensões v_1, v_2 e v_o são as tensões dos nós.

Solução

A Figura 6.3-2*b* mostra o circuito com o amplificador operacional da Figura 6.3-2*a* modelado por um amplificador operacional ideal.

1. Como o nó de entrada inversor e o nó de saída do amplificador operacional estão ligados por um curto-circuito, as tensões desses nós são iguais:

$$v_1 = v_o$$

2. Como as tensões dos nós inversor e não inversor de um amplificador operacional ideal são iguais,

$$v_2 = v_1 = v_o$$

3. Como as correntes que entram nos nós inversor e não inversor de um amplificador operacional são nulas,

4. Como a corrente no resistor R_s é $i_2 = 0$, a tensão aplicada a R_s é 0 V. Como essa tensão também pode ser expressa como $v_s - v_2 = v_s - v_o$, temos:

$$v_s - v_o = 0$$

ou

$$v_s = v_o$$

Esta solução atende às restrições das Eqs. 6.3-1 e 6.3-2? Para responder a essa pergunta, precisamos calcular a corrente de saída do amplificador operacional. Aplicando a LKC ao nó de saída do amplificador operacional, obtemos:

$$i_1 + i_o + \frac{v_o}{R_L} = 0$$

Como $i_1 = 0$,

$$i_0 = -\frac{v_o}{R_L}$$

De acordo com as Eqs. 6.3-1 e 6.3-2, devemos ter

$$\begin{aligned} |v_s| &\leq 14 \text{ V} \\ \left|\frac{v_s}{R_L}\right| &\leq 2 \text{ mA} \\ \left|\frac{d}{dt}v_s\right| &\leq 500.000\,\frac{\text{V}}{\text{s}} \end{aligned}$$

Se, por exemplo, $v_s = 10$ V e $R_L = 20$ kΩ, temos:

$$\begin{aligned} |v_s| &= 10 \text{ V} < 14 \text{ V} \\ \left|\frac{v_s}{R_L}\right| &= \frac{10}{20.000} = \frac{1}{2}\text{mA} < 2 \text{ mA} \\ \left|\frac{d}{dt}v_s\right| &= 0 < 500.000\,\frac{\text{V}}{\text{s}} \end{aligned}$$

Estes resultados mostram que o amplificador operacional pode ser modelado por um amplificador operacional ideal. Por outro lado, se $v_s = 10$ V e $R_L = 2$ kΩ, temos:

$$\frac{v_s}{R_L} = 5 \text{ mA} > 2 \text{ mA}$$

o que mostra que o μA741 não pode ser modelado por um amplificador ideal se $v_s = 10$ V e $R_L = 2$ kΩ. Se $v_s = 10$ V, é preciso que $R_L > 5$ kΩ para que a Eq. 6.3-1 seja satisfeita.

6.4 *Análise Nodal de Circuitos com Amplificadores Operacionais Ideais*

É conveniente usar equações de nó para analisar circuitos que contêm amplificadores operacionais ideais.

Para isso, basta levar em consideração os seguintes pontos:

1. Como as tensões de nó dos nós de entrada de um amplificador operacional ideal são iguais, uma das tensões de nó pode ser eliminada das equações. Assim, por exemplo, na Figura 6.4-1 as tensões dos nós de entrada do amplificador ideal são v_1 e v_2. Como

$$v_1 = v_2$$

a tensão v_2 pode ser eliminada das equações de nó.

2. As correntes de entrada de um amplificador operacional ideal são nulas. Essas correntes estão envolvidas nas equações da LKC associadas aos nós de entrada do amplificador operacional.
3. A corrente de saída do amplificador operacional ideal não é nula. Essa corrente está envolvida na equação da LKC associada ao nó de saída do amplificador operacional. Aplicando a LKC a esse nó, acrescentamos uma incógnita às equações de nó. Se não há necessidade de determinar a corrente de saída do amplificador operacional, não é preciso aplicar a LKC ao nó de saída do amplificador operacional.

EXEMPLO 6.4-1 Amplificador Diferença

O circuito da Figura 6.4-1 é chamado de amplificador diferença. O amplificador operacional foi modelado por um amplificador operacional ideal. Use equações de nó para analisar o circuito e determinar o valor de v_o em função das duas tensões de entrada, v_a e v_b.

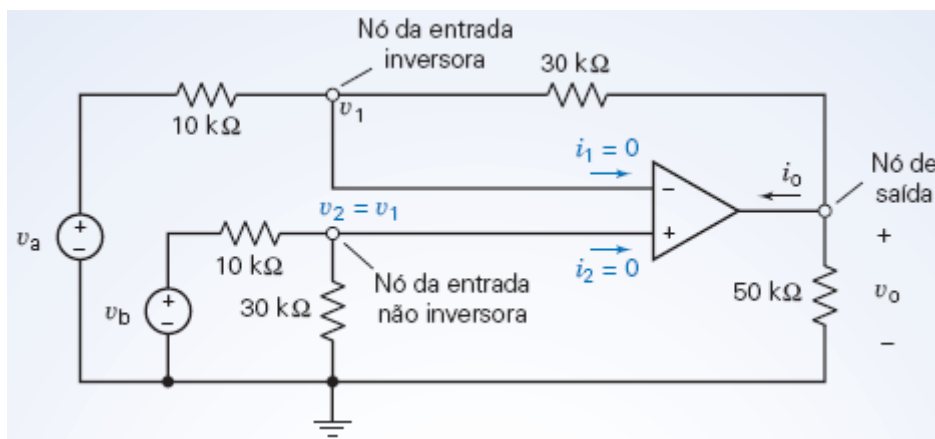



FIGURA 6.4-1 Circuito do Exemplo 6.4-1.

Solução

A equação de nó para o nó não inversor do amplificador operacional ideal é

$$\frac{v_2}{30.000} + \frac{v_2 - v_b}{10.000} + i_2 = 0$$

Como $v_2 = v_1$ e $i_2 = 0$, esta equação se torna

$$\frac{v_1}{30.000} + \frac{v_1 - v_b}{10.000} = 0$$

Explicitando v_1, temos:

$$v_1 = 0{,}75 \cdot v_b$$

A equação de nó para o nó inversor do amplificador operacional ideal é

$$\frac{v_1 - v_a}{10.000} + \frac{v_1 - v_o}{30.000} + i_1 = 0$$

Como $v_1 = 0{,}75v_b$ e $i_1 = 0$, esta equação se torna

$$\frac{0{,}75 \cdot v_b - v_a}{10.000} + \frac{0{,}75 \cdot v_b - v_o}{30.000} = 0$$

Explicitando v_o, temos

$$v_o = 3\,(v_b - v_a)$$

O nome amplificador diferença se deve ao fato de que a tensão de saída, v_o, é proporcional à diferença das tensões de entrada, $v_b - v_a$.

Exemplo 6.4-2 Análise de um Amplificador de Ponte

Considere o circuito da Figura 6.4-2*a*. Este circuito é chamado de amplificador de ponte. A parte do circuito que constitui a ponte aparece na Figura 6.4-2*b*; o amplificador operacional e os resistores R_5 e R_6 são usados para amplificar a tensão de saída da ponte. O amplificador operacional da Figura 6.4-2*a* foi modelado por um amplificador operacional ideal; em consequência, $v_1 = 0$ e $i_1 = 0$, como mostra a figura. Determine a tensão de saída, v_o, em função da tensão da fonte, v_s, e das resistências do circuito.

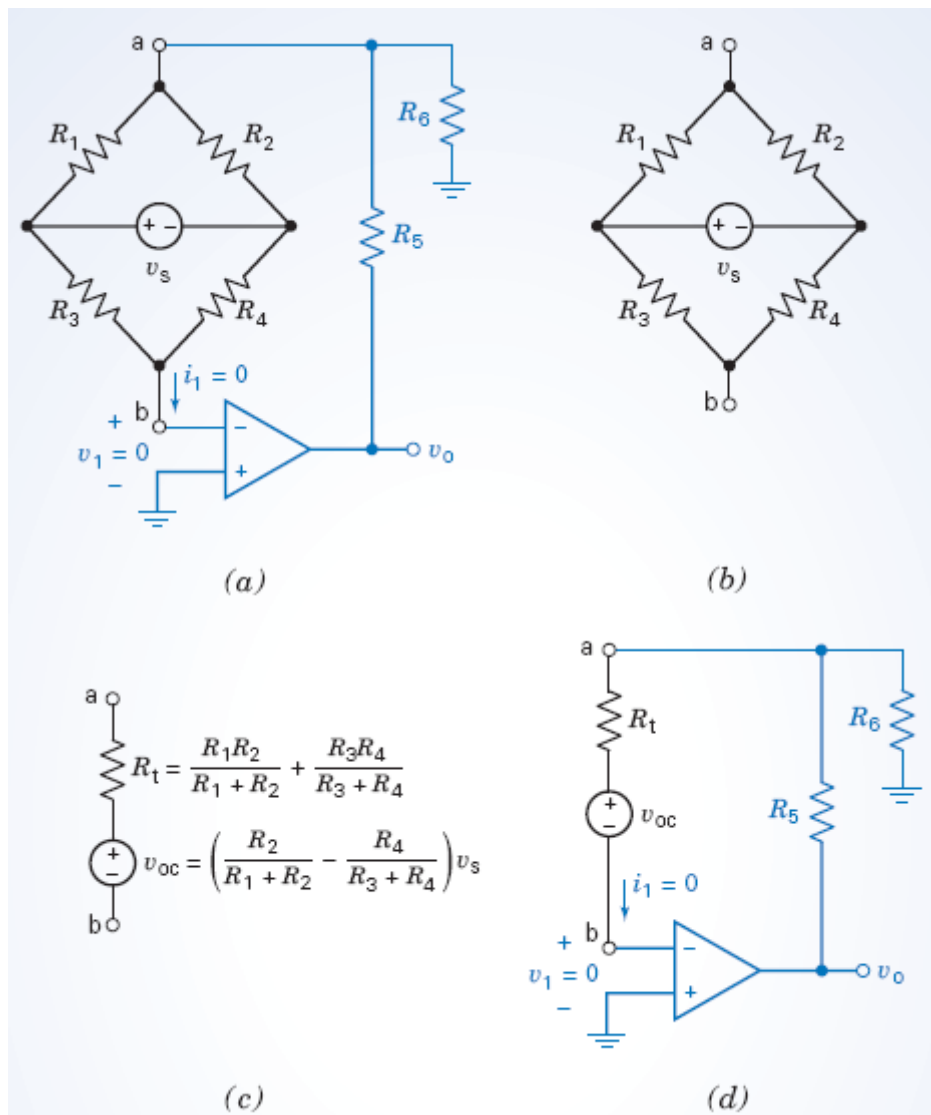



FIGURA 6.4-2 (*a*) Amplificador de ponte ligado a um circuito ponte. (*b*) O circuito ponte. (*c*) Circuito equivalente de Thévenin do circuito ponte. (*d*) Amplificador de ponte ligado ao circuito equivalente de Thévenin do circuito ponte.

Solução

Temos aqui uma oportunidade de usar o teorema de Thévenin. A Figura 6.4-2*c* mostra o circuito equivalente de Thévenin do circuito ponte. A Figura 6.4-2*d* mostra o circuito amplificador depois que a ponte foi substituída pelo circuito equivalente de Thévenin. O circuito da Figura 6.4-2*d* é bem mais simples que o da Figura 6.4-2*a*. É mais fácil escrever e resolver as equações de nó do circuito da Figura 6.4-2*d* que escrever e resolver as equações de nó do circuito da Figura 6.4-2*a*. O teorema de Thévenin nos assegura que a tensão v_o da Figura 6.4-2*d* é igual à tensão v_o da Figura 6.4-2*a*.

Vamos escrever as equações de nó do circuito da Figura 6.4-2*d*. Observe, para começar, que, de acordo com a LKT, a tensão de nó v_a é dada por

$$v_a = v_1 + v_{oc} + R_t i_1$$

Como $v_1 = 0$ e $i_1 = 0$,

$$v_a = v_{oc}$$

Aplicando a LKC ao nó a, temos:

$$i_1 + \frac{v_a - v_o}{R_5} + \frac{v_a}{R_6} = 0$$

Como $v_a = v_{oc}$ e $i_1 = 0$,

$$\frac{v_{oc} - v_o}{R_5} + \frac{v_{oc}}{R_6} = 0$$

Explicitando v_o, obtemos

$$v_o = \left(1 + \frac{R_5}{R_6}\right) v_{oc} = \left(1 + \frac{R_5}{R_6}\right)\left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4}\right) v_s$$

EXEMPLO 6.4-3 Análise do Circuito de um Amplificador Operacional Usando Equações de Nó

EXEMPLO INTERATIVO

Determine o valor da tensão medida pelo voltímetro no circuito da Figura 6.4-3.

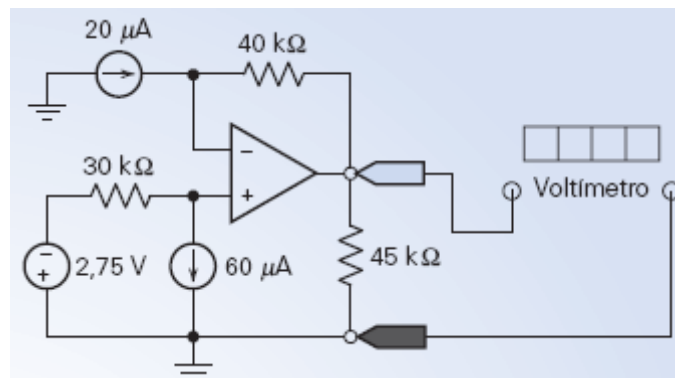



FIGURA 6.4-3 Circuito do Exemplo 6.4-3.

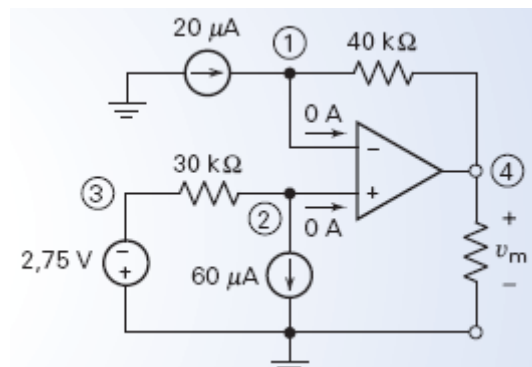



FIGURA 6.4-4 Circuito da Figura 6.4-3 depois que o voltímetro foi substituído por um circuito aberto e os nós foram rotulados. (Os números dentro de círculos são os números dos nós.)

Solução

A Figura 6.4-4 mostra o circuito da Figura 6.4-3 depois que o voltímetro foi substituído por um circuito aberto e foi introduzido um dístico para representar a tensão medida pelo voltímetro. Vamos analisar o circuito escrevendo e resolvendo equações de nó. Os nós do circuito foram numerados na Figura 6.4-4. Sejam v_1, v_2, v_3 e v_4 as tensões de nó dos nós 1, 2, 3 e 4, respectivamente.

A saída do circuito é a tensão medida pelo voltímetro. A tensão de saída está relacionada à tensão do nó 4 através da equação

$$v_m = v_4 - 0 = v_4$$

As entradas do circuito são a tensão da fonte de tensão e as correntes das fontes de corrente. A tensão da fonte de tensão está relacionada à tensão do nó 3 através da equação

$$0 - v_3 = 2{,}75 \quad \Rightarrow \quad v_3 = -2{,}75 \text{ V}$$

Aplicando a LKC ao nó 2, obtemos:

$$\frac{v_3 - v_2}{30.000} = 0 + 60 \times 10^{-6} \quad \Rightarrow \quad v_3 - v_2 = 1{,}8 \text{ V}$$

Como $v_3 = -2{,}75$ V, temos:

$$v_2 = -4{,}55 \text{ V}$$

A entrada não inversora do amplificador operacional está ligada ao nó 2. A tensão de nó da entrada inversora de um amplificador operacional ideal é igual à tensão de nó da entrada não inversora. Como a entrada inversora do amplificador operacional está ligada ao nó 1, temos

$$v_1 = v_2 = -4{,}55 \text{ V}$$

Aplicando a LKC ao nó 1, obtemos:

$$20 \times 10^{-6} = 0 + \frac{v_1 - v_4}{40.000} \quad \Rightarrow \quad v_1 - v_4 = 0{,}8 \text{ V}$$

Como $v_m = v_4$ e $v_1 = -4{,}55$ V, a tensão medida pelo voltímetro é

$$v_m = -4{,}55 - 0{,}8 = -5{,}35 \text{ V}$$

EXEMPLO 6.4-4 Análise de um Circuito com um Amplificador Operacional

EXEMPLO INTERATIVO

Determine o valor da tensão medida pelo voltímetro no circuito da Figura 6.4-5.

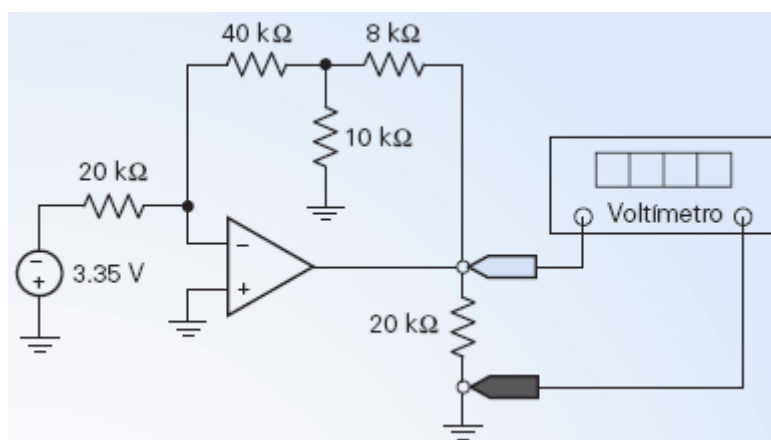



FIGURA 6.4-5 Circuito do Exemplo 6.4-4.

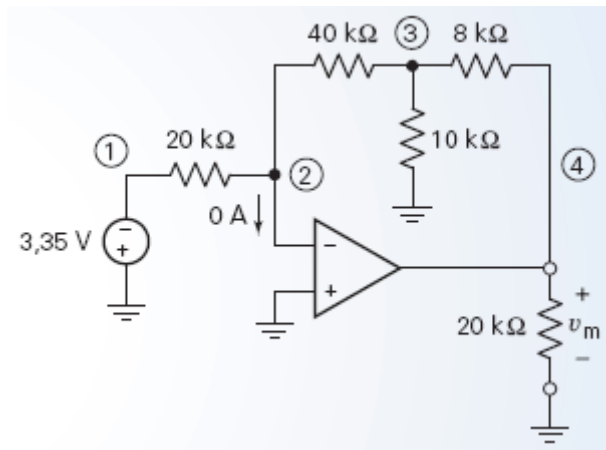



FIGURA 6.4-6 Circuito da Figura 6.4-5 depois que o voltímetro foi substituído por um circuito aberto e os nós foram rotulados. (Os números dentro de círculos são os números dos nós.)

Solução

A Figura 6.4-6 mostra o circuito da Figura 6.4-5 depois que o voltímetro foi substituído por um circuito aberto e foi introduzido um dístico para representar a tensão medida pelo voltímetro. Vamos analisar o circuito escrevendo e resolvendo as equações de nó. A Figura 6.4-6 mostra o circuito depois que os nós foram numerados. Sejam v_1, v_2, v_3 e v_4 as tensões de nó dos nós 1, 2, 3 e 4, respectivamente.

A entrada do circuito é a tensão da fonte de tensão, que está relacionada à tensão do nó 1 através da equação

$$0 - v_1 = 3{,}35 \quad \Rightarrow \quad v_1 = -3{,}35 \text{ V}$$

A saída do circuito é a tensão medida pelo voltímetro, que está relacionada à tensão do nó 4 através da equação

$$v_m = v_4 - 0 = v_4$$

A entrada não inversora do amplificador operacional está ligada ao nó de referência. A tensão de nó da entrada inversora de um amplificador operacional ideal é igual à tensão do nó da entrada não inversora. Como a entrada inversora do amplificador operacional está ligada ao nó 2, temos:

$$v_2 = 0 \text{ V}$$

Aplicando a LKC ao nó 2, obtemos

$$\frac{v_1 - v_2}{20.000} = 0 + \frac{v_2 - v_3}{40.000} \quad \Rightarrow \quad v_3 = -2v_1 + 3v_2 = -2v_1$$

Aplicando a LKC ao nó 3, obtemos

$$\frac{v_2 - v_3}{40.000} = \frac{v_3}{10.000} + \frac{v_3 - v_4}{8.000} \quad \Rightarrow \quad 5v_4 = -v_2 + 10v_3 = 10v_3$$

Combinando as duas equações, temos

$$v_4 = 2v_3 = -4v_1$$

Como $v_m = v_4$ e $v_1 = -3{,}35$ V, a tensão medida pelo voltímetro é

$$v_m = -4\,(-3{,}35) = 13{,}4 \text{ V}$$

6.5 Projeto de Circuitos com Amplificadores Operacionais

Uma das primeiras aplicações dos amplificadores operacionais foi em circuitos para realizar operações matemáticas. Na verdade, o nome amplificador operacional se deve a essa importante aplicação. Muitos dos circuitos com amplificadores operacionais que realizam operações matemáticas são usados com tanta frequência que recebem nomes especiais, que fazem parte do vocabulário dos engenheiros elétricos. A Figura 6.5-1 mostra alguns dos circuitos mais comuns com amplificadores operacionais. Os exemplos a seguir mostram como esses circuitos são usados em aplicações práticas.

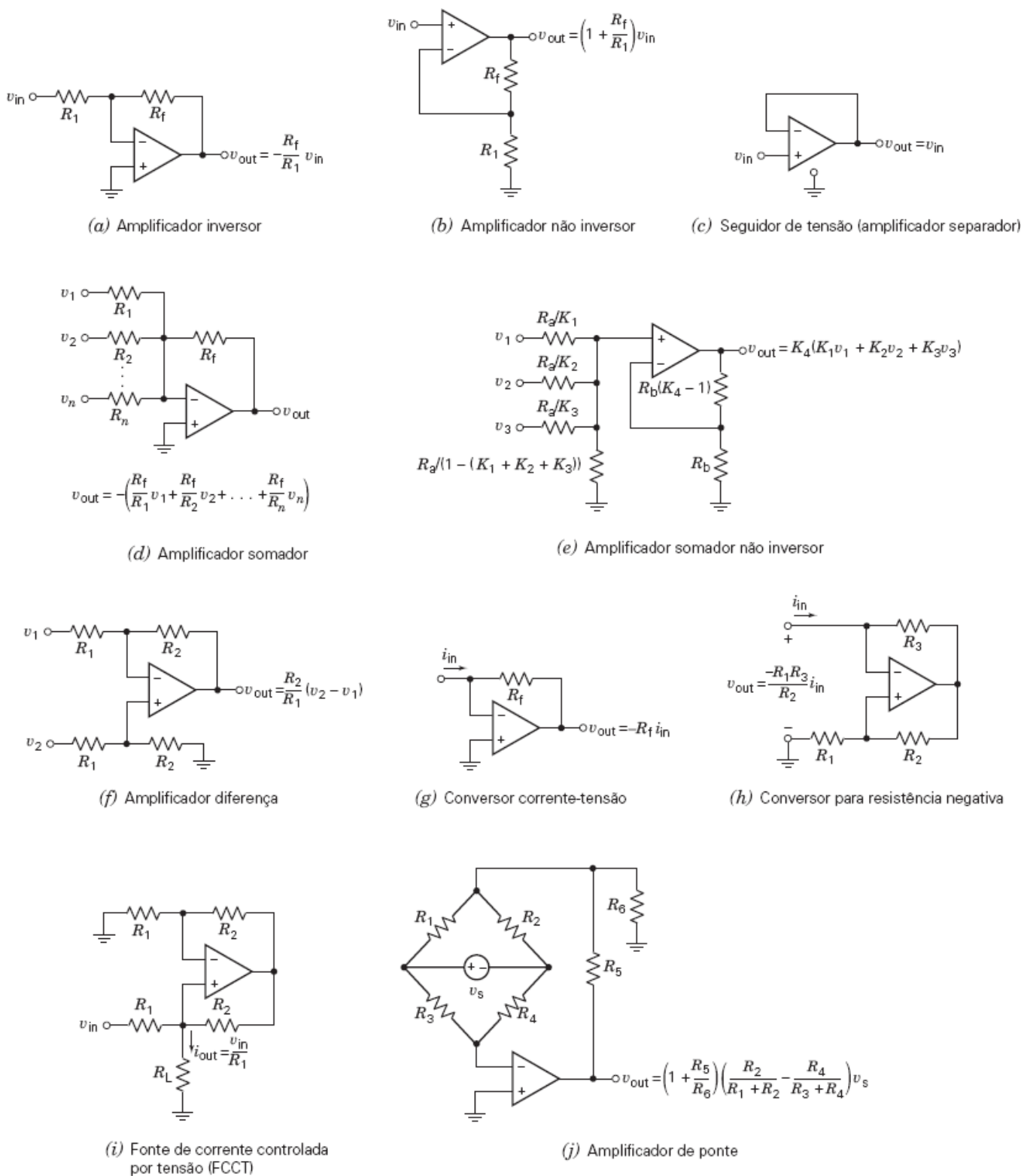



FIGURA 6.5-1 Alguns dos circuitos com amplificadores operacionais mais usados. Observe que todas as tensões de nó são medidas em relação ao nó de terra.

EXEMPLO 6.5-1 Uso de um Seguidor de Tensão para Não Carregar um Circuito

Este exemplo ilustra o uso de um seguidor de tensão para não carregar um circuito. O seguidor de tensão aparece na Figura 6.5-1*c*. Quando dois circuitos são interligados, o segundo circuito pode carregar o primeiro. Considere a Figura 6.5-2. Na Figura 6.5-2*a*, a saída do circuito 1 é a tensão v_a. Na Figura 6.5-2*b*, o circuito 2 é ligado ao circuito 1. A saída do circuito 1 é usada como entrada do circuito 2. Infelizmente, a ligação do circuito 2 ao circuito 1 pode mudar a saída do circuito 1. Quando isso acontece, dizemos que o circuito 2 está *carregando* o circuito 1. Na Figura 6.5-2, o circuito 2 carrega o circuito 1 se $v_b \neq v_a$. A corrente i_b é chamada de corrente de carga. O circuito 1 precisa fornecer a corrente de carga ao circuito da Figura 6.5-2*b*, mas no circuito da Figura 6.5-2*a* a corrente de carga é zero. É isso que faz com que o circuito 2 carregue o circuito 1. A corrente de carga pode ser eliminada usando um seguidor de tensão, como na Figura 6.5-2*c*. O seguidor de tensão copia a tensão v_a da saída do circuito 1 para a entrada do circuito 2 sem perturbar o circuito 1.

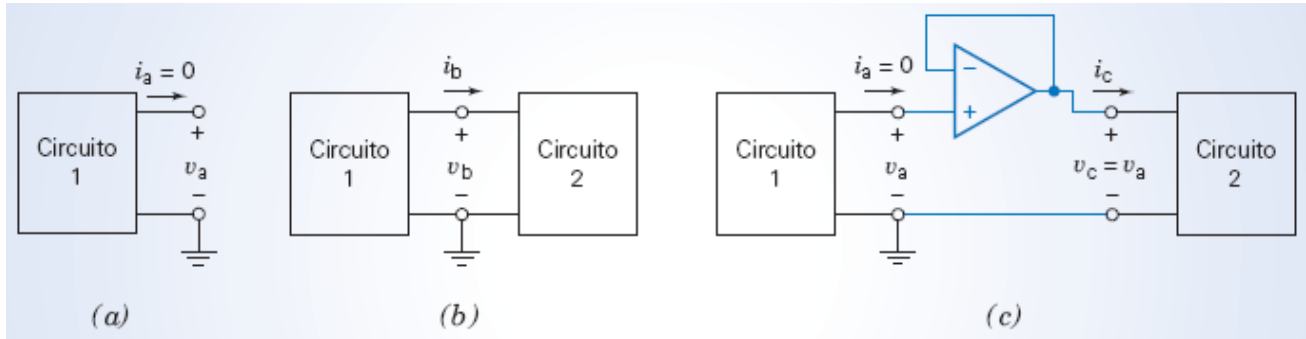



FIGURA 6.5-2 O circuito 1 (*a*) antes e (*b*) depois de ser ligado ao circuito 2. (*c*) Uso de um seguidor de tensão para evitar que o circuito 2 carregue o circuito 1.

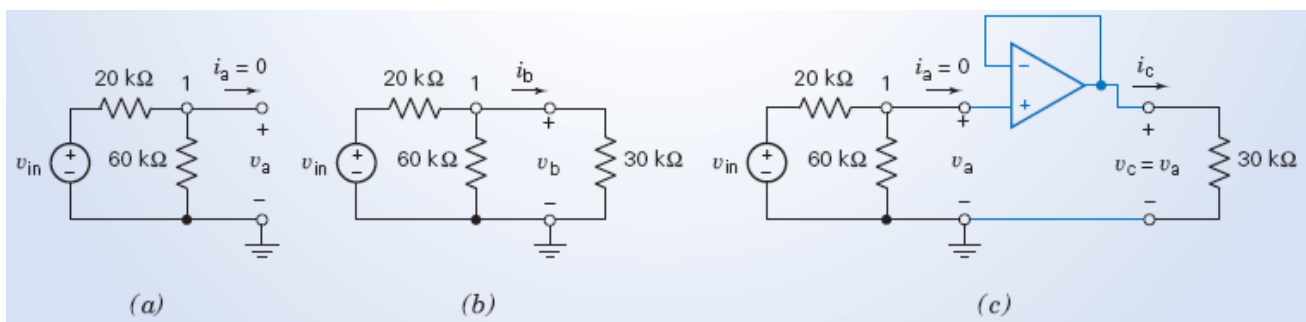



FIGURA 6.5-3 Um divisor de tensão (*a*) antes e (*b*) depois de ser ligado a um resistor de 30 kΩ. (*c*) Uso de um seguidor de tensão para evitar que o resistor de 30 kΩ carregue o divisor de tensão.

Solução

Como exemplo específico, considere a Figura 6.5-3. O divisor de tensão da Figura 6.5-3*a* pode ser analisado escrevendo uma equação de nó para o nó 1:

$$\frac{v_a - v_{in}}{20.000} + \frac{v_a}{60.000} = 0$$

Explicitando v_a, temos:

$$v_a = \frac{3}{4} v_{in}$$

Na Figura 6.5-3*b*, um resistor é ligado entre os terminais de saída do divisor de tensão. O circuito pode ser analisado escrevendo uma equação de nó para o nó 1:

$$\frac{v_b - v_{in}}{20.000} + \frac{v_b}{60.000} + \frac{v_b}{30.000} = 0$$

Explicitando v_b, temos:

$$v_b = \frac{1}{2} v_{in}$$

O fato de que $v_b \neq v_a$ mostra que a ligação do resistor ao divisor de tensão carrega o divisor de tensão. Isso acontece porque o resistor de 30 kΩ consome corrente. Na ausência de um seguidor de tensão, essa corrente é fornecida pelo divisor de tensão.

Na Figura 6.5-3*c*, um seguidor de tensão foi usado para ligar o resistor de 30 kΩ à saída do divisor de tensão. Mais uma vez, o circuito pode ser analisado escrevendo uma equação de nó para o nó 1:

$$\frac{v_c - v_{in}}{20.000} + \frac{v_c}{60.000} = 0$$

Explicitando v_c, obtemos:

$$v_c = \frac{3}{4} v_{in}$$

Como $v_c = v_a$, o resistor de 30 kΩ não carrega o divisor de tensão quando é ligado ao divisor de tensão através do seguidor de tensão. Nesse caso, é o seguidor de tensão, e não o divisor de tensão, que fornece a corrente consumida pelo resistor de 30 kΩ.

EXEMPLO 6.5-2 Projeto de um Amplificador

Uma aplicação comum dos amplificadores operacionais é a mudança de escala de uma tensão, ou seja, a multiplicação da tensão por uma constante *K*, de forma que

$$v_o = K v_{in}$$

Esta situação está ilustrada na Figura 6.5-4*a*. A tensão de entrada, v_{in}, é fornecida por uma fonte de tensão ideal. A tensão de saída, v_o, é a tensão no resistor de 100 kΩ.

Os circuitos que realizam esta operação são em geral chamados de amplificadores. A constante *K* é o ganho do amplificador.

A escolha do circuito da Figura 6.5-1 a ser usado depende do valor que se deseja para a constante *K*. Existem quatro casos possíveis: $K < 0$, $K > 1$, $K = 1$ e $0 < K < 1$.

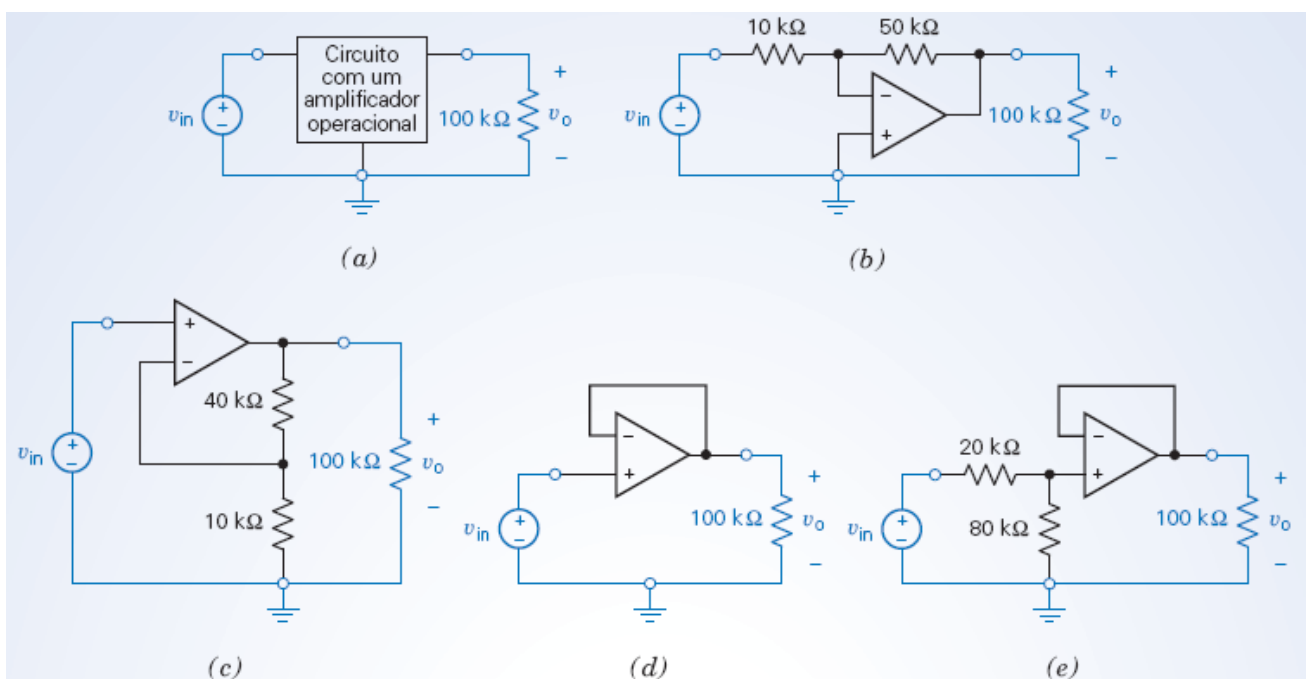



FIGURA 6.5-4 (*a*) Uso de um amplificador para fazer com que $v_o = Kv_{in}$. A escolha do tipo de amplificador depende do valor do ganho K desejado. Quatro casos são mostrados: (*b*) $K = -5$, (*c*) $K = 5$, (*d*) $K = 1$ e (*e*) $K = 0{,}8$.

Solução

Como os valores de resistência são sempre positivos, o ganho do amplificador inversor, mostrado na Figura 6.5-1*a*, é sempre negativo. Assim, quando se deseja que $K < 0$, utiliza-se um amplificador inversor. Suponha, por exemplo, que se deseje que $K = -5$. De acordo com a Figura 6.5-1*a*,

$$-5 = -\frac{R_f}{R_1}$$

e, portanto,

$$R_f = 5R_1$$

É recomendável, sempre que possível, escolher resistores com valores entre 5 kΩ e 500 kΩ para os circuitos com amplificadores operacionais. Fazendo

$$R_1 = 10 \text{ k}\Omega$$

obtemos

$$R_f = 50 \text{ k}\Omega$$

o que nos dá o circuito da Figura 6.5-4*b*.

Suponha agora que se deseje que $K = 5$. O amplificador não inversor, representado na Figura 6.5-1*b*, é usado para obter ganhos maiores que 1. De acordo com a Fig. 6.5-1*b*,

$$5 = 1 + \frac{R_f}{R_1}$$

e, portanto,

$$R_f = 4R_1$$

Se $R_1 = 10$ kΩ, devemos ter $R_f = 40$ kΩ. O circuito resultante aparece na Figura 6.5-4*c*.

Considere o uso do amplificador não inversor da Figura 6.5-1*b* para obter um ganho $K = 1$. De acordo com a Figura 6.5-1*b*,

$$1 = 1 + \frac{R_f}{R_1}$$

o que nos dá

$$\frac{R_f}{R_1} = 0$$

Isso pode ser conseguido substituindo R_f por um curto-circuito ($R_f = 0$), substituindo R_1 por um circuito aberto ($R_1 = \infty$) ou fazendo as duas coisas. Quando fazemos as duas coisas, o circuito se torna um seguidor de tensão, cujo ganho é 1 (Figura 6.5-1*c*). Na Figura 6.5-4*d*, um seguidor de tensão é usado para o caso em que $K = 1$.

Não existe nenhum amplificador da Figura 6.5-1 com um ganho entre 0 e 1. Esse circuito pode ser obtido combinando um divisor de tensão com um seguidor de tensão. Suponha que se deseje que $K = 0{,}8$. Em primeiro lugar, projetamos um divisor de tensão com uma atenuação igual a K:

$$0{,}8 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

e, portanto,

$$R_2 = 4 \cdot R_1$$

Se $R_1 = 20$ kΩ, devemos ter $R_2 = 80$ kΩ. Combinando o divisor de tensão com um seguidor de tensão, obtemos o circuito da Figura 6.5-4*e*.

EXEMPLO 6.5-3 Projeto de um Amplificador Somador Não Inversor

Projete um circuito com uma saída, v_o, e três entradas, v_1, v_2 e v_3. A saída deve estar relacionada às entradas através da equação

$$v_o = 2v_1 + 3v_2 + 4v_3$$

Além disso, sabe-se que os valores das tensões de entrada estão entre –1 V e 1 V, ou seja,

$$|v_i| \leq 1 \text{ V} \quad i = 1, 2, 3$$

Suponha que os parâmetros do amplificador operacional são $i_{sat} = 2$ mA e $v_{sat} = 15$ V.

Solução

O circuito pedido deve multiplicar cada entrada por uma constante diferente e somar os resultados. O somador não inversor da Figura 6.5-1*e* é capaz de realizar essas operações. O circuito é representado por seis parâmetros: K_1, K_2, K_3, K_4, R_a e R_b. Para projetar o somador não inversor, basta escolher os valores corretos dos seis parâmetros. Observe que é necessário que $K_1 + K_2 + K_3 < 1$ para que todos os resistores tenham valores positivos. Vamos fazer $K_4 = 10$ (um valor conveniente que é apenas um pouco maior que $2 + 3 + 4 = 9$). Nesse caso,

$$v_o = 2v_1 + 3v_2 + 4v_3 = 10(0{,}2v_1 + 0{,}3v_2 + 0{,}4v_3)$$

Assim, $K_4 = 10$, $K_1 = 0{,}2$, $K_2 = 0{,}3$ e $K_3 = 0{,}4$. A Figura 6.5-1*e* não especifica os valores de R_a e R_b. Vamos experimentar os valores $R_a = R_b = 100$ Ω. Nesse caso,

$$\frac{R_a}{1-(K_1+K_2+K_3)} = \frac{100}{1-(0{,}2+0{,}3+0{,}4)} = \frac{100}{0{,}1} = 1000\ \Omega, \quad \frac{R_a}{K_1} = \frac{100}{0{,}2} = 500\ \Omega$$

e

$$(K_4 - 1)R_b = (10 - 1)100 = 900\ \Omega$$

A Figura 6.5-5 mostra o circuito resultante. É necessário verificar se o circuito satisfaz as especificações. Escrevendo as equações de nó

$$\frac{v_a - v_1}{500} + \frac{v_a - v_2}{333} + \frac{v_a - v_3}{250} + \frac{v_a}{1000} = 0$$
$$-\frac{v_o - v_a}{900} + \frac{v_s}{100} = 0$$

e resolvendo essas equações, obtemos

$$v_o = 2v_1 + 3v_2 + 4v_3 \quad \text{e} \quad v_a = \frac{v_o}{10}$$

A corrente de saída do amplificador operacional é dada por

$$i_{ao} = \frac{v_a - v_o}{900} = -\frac{v_o}{1000} \tag{6.5-1}$$

Qual é o maior valor possível da tensão de saída? Sabemos que

$$|v_o| = |2v_1 + 3v_2 + 4v_3|$$

e, portanto,

$$|v_o| \leq 2|v_1| + 3\,|v_2| + 4|v_3| \leq 9\text{ V}$$

A tensão de saída do amplificador operacional é sempre menor que v_{sat}. Isso significa que, do ponto de vista da tensão de saída, o circuito está de acordo com as especificações. E quanto à corrente de saída? Observe que $|v_o| \leq 9$ V. De acordo com a Eq. 6.5-1,

$$|i_{ao}| = \left|\frac{-v_o}{1000\ \Omega}\right| \leq \left|\frac{-9\text{ V}}{1000\ \Omega}\right| = 9\text{ mA}$$

Como a corrente de saída do amplificador operacional não pode exceder $i_{sat} = 2$ mA, esta solução não é satisfatória. Para reduzir o valor de i_o, devemos aumentar o valor de R_b. Vamos experimentar o valor $R_b = 1000\ \Omega$. Nesse caso,

$$(K_4 - 1)R_b = (10 - 1)1000 = 9000\ \Omega$$

O novo circuito aparece na Figura 6.5-6. O aumento de R_a e R_b não tem influência sobre a tensão de saída do amplificador operacional; como antes,

$$v_o = 2v_1 + 3v_2 + 4v_3$$

e,

$$|v_o| \leq 2|v_1| + 3|v_2| + 4|v_3| \leq 9\text{ V}$$

Por outro lado, o aumento de R_b diminui a corrente de saída do amplificador operacional. Agora,

$$|i_{ao}| \leq \left|\frac{-9\text{ V}}{10.000\ \Omega}\right| = 0{,}9\text{ mA}$$

e, portanto, $|i_{ao}| < 2$ mA e $|v_o| < 15$ V, como desejávamos.

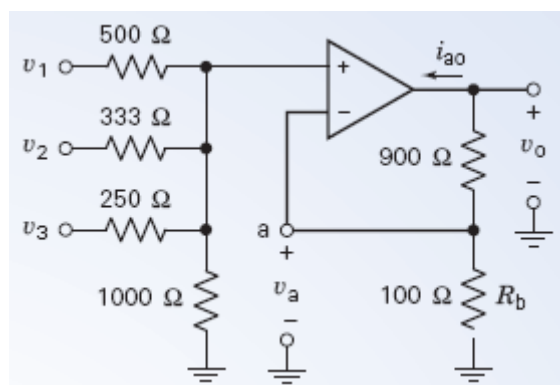



FIGURA 6.5-5 Projeto preliminar do amplificador somador não inversor.

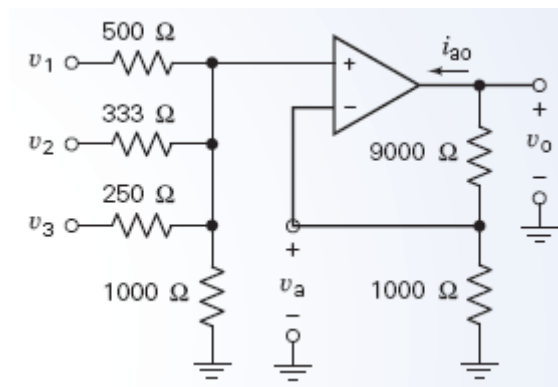



FIGURA 6.5-6 Projeto final do amplificador somador não inversor.

6.6 *Circuitos com Amplificadores Operacionais e Equações Algébricas Lineares*

Nesta seção será apresentado um método para projetar circuitos com amplificadores operacionais com o objetivo de implementar equações algébricas lineares. Algumas tensões de nó do circuito serão escolhidas para representar as variáveis da equação algébrica. Por exemplo: a equação

$$z = 4x - 5y + 2 \tag{6.6-1}$$

será representada por um circuito com um amplificador operacional cujas tensões de nó v_x, v_y e v_z estão relacionadas pela equação

$$v_z = 4v_x - 5v_y + 2 \tag{6.6-2}$$

Uma tensão ou corrente que é usada para representar alguma coisa recebe o nome de sinal.

Essa "alguma coisa" pode ser, por exemplo, uma temperatura, uma posição ou uma força. No caso que estamos examinando, v_x, v_y e v_z são sinais que representam as variáveis x, y e z.

A Equação 6.6-1 mostra de que forma o valor de z é obtido a partir dos valores de x e y. Analogamente, a Eq. 6.6-2 mostra de que forma o valor de v_z é obtido a partir dos valores de v_x e v_y. O circuito envolvido deve ter uma saída, v_z, e duas entradas, v_x e v_y.

O projeto pode ser divido em duas etapas. Em primeiro lugar, representamos a equação por um diagrama conhecido como diagrama de blocos. Em segundo lugar, implementamos cada bloco do diagrama de blocos usando um circuito com um amplificador operacional.

Vamos começar com a equação algébrica. De acordo com a Eq. 6.6-1, o valor da variável z pode ser calculado a partir dos valores das variáveis x e y usando as operações de adição, subtração e multiplicação por uma constante. A Eq. 6.6-1 pode ser escrita na forma

$$z = 4x + (-5)y + 2 \tag{6.6-3}$$

A Eq. 6.6-3 mostra que z pode ser obtida a partir de x e y usando apenas adição e multiplicação por uma constante, contanto que uma das constantes seja negativa.

A Figura 6.6-1 mostra as representações simbólicas das operações de multiplicação por uma constante e adição. Na Figura 6.6-1*a*, a operação de multiplicação por uma constante é representada por um retângulo com duas setas, uma apontando para o retângulo e outra apontando para longe do retângulo. A seta que aponta para o retângulo é rotulada com uma variável que representa a entrada da operação, ou seja, a

variável a ser multiplicada pela constante; a seta que aponta para longe do retângulo é rotulada com uma variável que representa a saída, ou resultado, da operação. O retângulo em si é rotulado com o valor do multiplicador. O símbolo da Figura 6.6-1*b* representa a operação de adição. O retângulo é rotulado com um sinal positivo. As setas que apontam para o retângulo são rotuladas com as variáveis a serem somadas; o número de setas é igual ao número de variáveis a serem somadas. Uma única seta aponta para longe do retângulo; essa seta é rotulada com a variável que representa a soma.

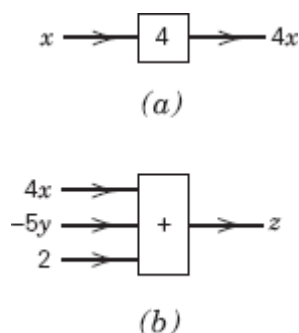



FIGURA 6.6-1 Representação simbólica (*a*) da multiplicação por uma constante e (*b*) da adição.

Os retângulos que representam as operações de multiplicação por uma constante e de adição são chamados de blocos. Um diagrama formado por blocos como esses recebe o nome de diagrama de blocos. A Figura 6.6-2 mostra a representação da Eq. 6.6-3 por um diagrama de blocos. Cada bloco do diagrama de blocos corresponde a uma operação da equação. Observe, em particular, que o produto 4*x* tem dois papéis na Eq. 6.6-3: é ao mesmo tempo a saída de uma operação, a multiplicação de *x* pela constante 4, e uma das entradas de outra operação, a soma de 4*x* a –5*y* e 2 para obter *z*.

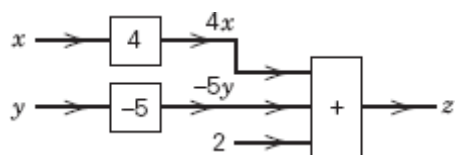



FIGURA 6.6-2 Diagrama de blocos do circuito usado para representar a Eq. 6.6-3.

Vejamos como é possível projetar um circuito com amplificadores operacionais para implementar o diagrama de blocos da Figura 6.6-2. Os blocos que representam multiplicação por uma constante podem ser implementados usando amplificadores inversores ou não inversores, dependendo do sinal do multiplicador. Para isso, projetamos um amplificador com um ganho igual ao multiplicador do bloco correspondente. (Amplificadores não inversores são usados quando a constante é positiva e maior que 1. O Exemplo 6.5-2 mostra que um circuito formado por um divisor de tensão e um seguidor de tensão pode ser usado quando a constante é positiva e menor que 1.)

As Figuras 6.6-3*b*, 6.6-3*d* e 6.6-3*f* mostram circuitos com amplificadores operacionais que implementam os blocos mostrados nas Figuras 6.6-3*a*, 6.6-3*c* e 6.6-3*e*, respectivamente. O bloco da Figura 6.6-3*a* envolve multiplicação por uma constante positiva, 4. A Figura 6.6-3*b* mostra o circuito correspondente, um amplificador não inversor de ganho 4. Esse amplificador não inversor é projetado usando o circuito e a equação da Figura 6.5-1*b* e fazendo

$$R_1 = 20\ \text{k}\Omega \quad \text{e} \quad R_f = 3R_1 = 60\ \text{k}\Omega$$

(É recomendável, sempre que possível, escolher resistores com valores entre 5 kΩ e 500 kΩ para os circuitos com amplificadores operacionais.)

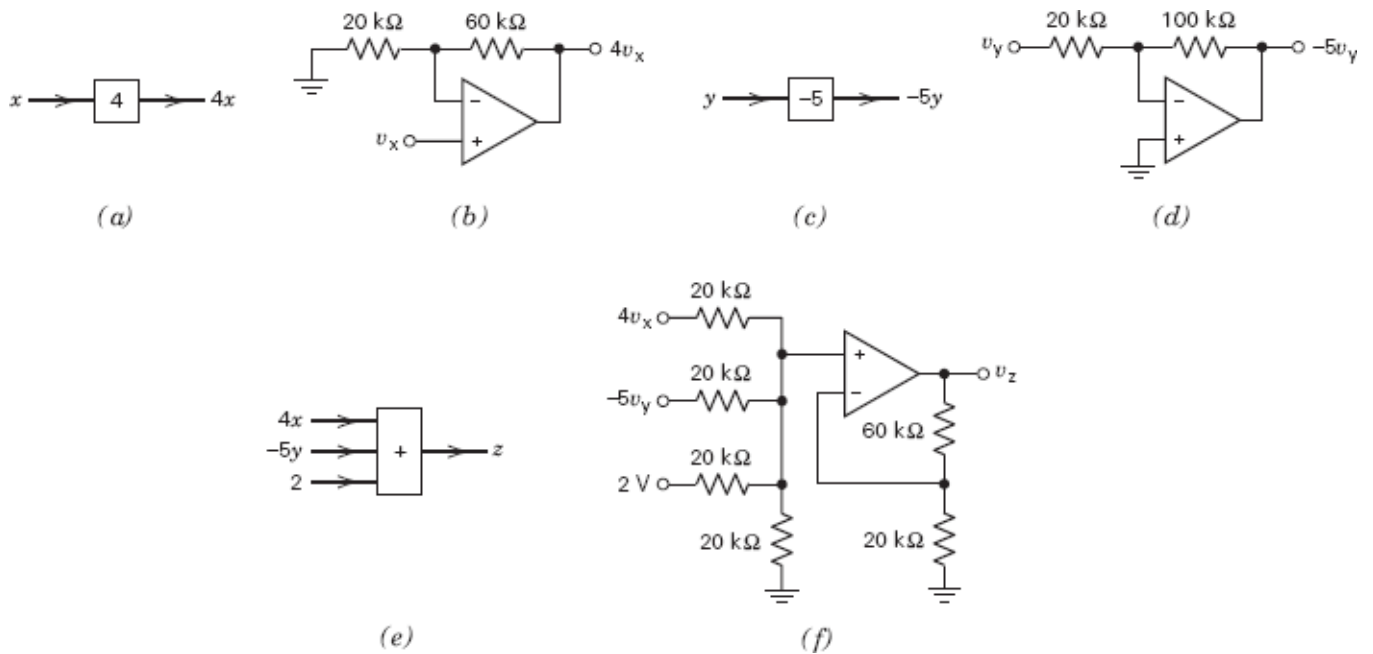



FIGURA 6.6-3 (*a*), (*c*) e (*e*) mostram os blocos da Figura 6.6-2, enquanto (*b*), (*d*) e (*f*) mostram os circuitos correspondentes com amplificadores operacionais.

Na Figura 6.6-3*b*, a notação v_x indica que v_x é a grandeza que representa *x*. Como uma tensão ou corrente usada para representar alguma coisa é chamada de sinal, v_x é o sinal que representa *x*.

O bloco da Figura 6.6-3*c* envolve multiplicação pode uma constante negativa, –5. A Figura 6.6-3*d* mostra o circuito correspondente, um amplificador inversor de ganho –5. Esse amplificador inversor foi projetado usando o circuito da Figura 6.5-1*a* e fazendo

$$R_1 = 20\ \text{k}\Omega \quad \text{e} \quad R_f = 5R_1 = 100\ \text{k}\Omega$$

O bloco da Figura 6.6-3*e* envolve a soma de três termos. A Figura 6.6-3*f* mostra o circuito correspondente, um somador não inversor que foi projetado usando o circuito da Figura 6.6-4 e fazendo

$$R_1 = 20\ \text{k}\Omega,\ n = 3 \quad \text{e} \quad nR = 3(20.000) = 60\ \text{k}\Omega$$

(O somador não inversor é um caso especial do amplificador somador não inversor da Figura 6.5-1*e*; fazendo $K_1 = K_2 = K_3 = 1/(n+1), K_4 = n$, $R_b = R$ e $R_a = R/(n+1)$ na Figura 6.5-1*e*, obtemos o circuito da Figura 6.6-4.)

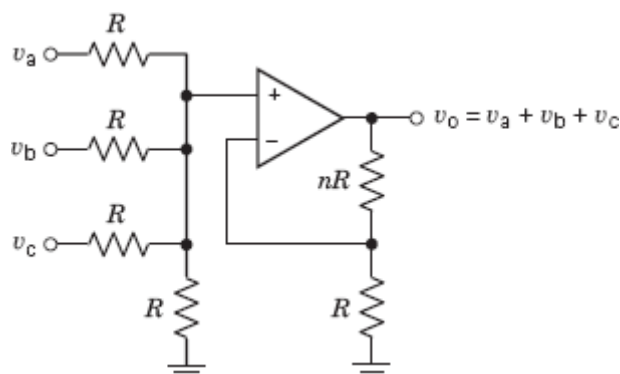



FIGURA 6.6-4 Somador não inversor. O número *n* indica o número de entradas do circuito.

A Figura 6.6-5 mostra o circuito obtido substituindo todos os blocos da Figura 6.6-2 pelos circuitos correspondentes da Figura 6.6-3. O circuito da Figura 6.6-5 implementa a Eq. 6.6-3, mas é possível melhorá-lo.

A entrada constante do somador foi implementada usando uma fonte de tensão de 2 V. Embora esta solução esteja correta, pode ser mais dispendiosa que o necessário. As fontes de tensão são componentes

relativamente caros, muito mais caros, por exemplo, que os resistores e os amplificadores operacionais. Podemos reduzir o custo do circuito usando uma fonte de alimentação já existente em vez de introduzir uma nova fonte. Lembre-se de que são necessárias fontes de alimentação para polarizar o amplificador operacional. Suponha que essas fontes sejam de +15 V e –15 V. Podemos reduzir o custo usando a fonte de +15 V, um divisor de tensão e um seguidor de tensão para obter uma fonte virtual para a entrada de 2 V do somador. A Figura 6.6-6 mostra o circuito resultante. O divisor de tensão produz uma tensão constante de 2 V. O seguidor de tensão evita que o circuito carregue a fonte virtual (veja o Exemplo 6.5-1).

Aplicando o método da divisão de tensão ao circuito da Figura 6.6-6, temos:

$$\frac{R_b}{R_a + R_b} = \frac{2}{15} = 0{,}133 \quad \Rightarrow \quad R_a = 6{,}5R_b$$

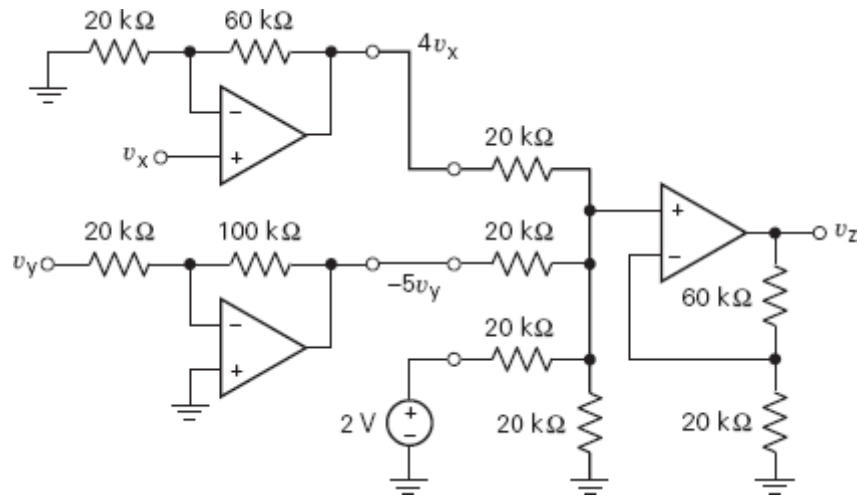



FIGURA 6.6-5 Circuito com amplificadores operacionais que implementa a Eq. 6.6-2.

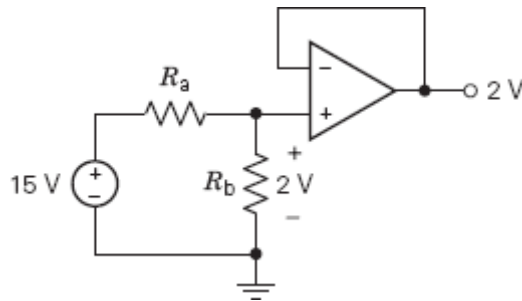



FIGURA 6.6-6 Uso da fonte de alimentação do amplificador operacional para obter um sinal de 2 V.

Esta equação tem um número infinito de soluções. Uma das soluções é R_a = 130 kΩ e R_b = 20 kΩ. O circuito melhorado aparece na Figura 6.6-7. É possível mostrar, escrevendo, por exemplo, as equações de nó, que

$$v_z = 4v_x - 5v_y + 2$$

A possibilidade de saturar os amplificadores operacionais deve ser levada em conta ao definir a relação entre os sinais v_x, v_y e v_z e as variáveis *x*, *y* e *z*. A tensão de saída de um amplificador operacional deve ser tal que $|v_o| \le v_{sat}$. Na maioria dos casos, v_{sat} é aproximadamente igual, em valor absoluto, às tensões de polarização do amplificador operacional. Em outras palavras, v_{sat} é aproximadamente igual a 15 V quando fontes de tensão de ±15 V são usadas para polarizar o amplificador operacional. Na Figura 6.6-7, v_z, $4v_x$ e $-5v_y$ são tensões de saída de amplificadores operacionais. Assim, devemos ter:

$$|v_x| \le \frac{v_{sat}}{4} \approx \frac{15}{4} = 3{,}75 \text{ V}, \quad |v_y| \le \frac{v_{sat}}{5} \approx \frac{15}{5} = 3 \text{ V} \quad \text{e} \quad |v_z| \le v_{sat} \approx 15 \text{ V} \qquad (6.6\text{-}4)$$

Uma codificação simples de *x*, *y* e *z* por v_x, v_y e v_z é a seguinte:

$$v_x = x, \quad v_y = y \quad \text{e} \quad v_z = z \tag{6.6-5}$$

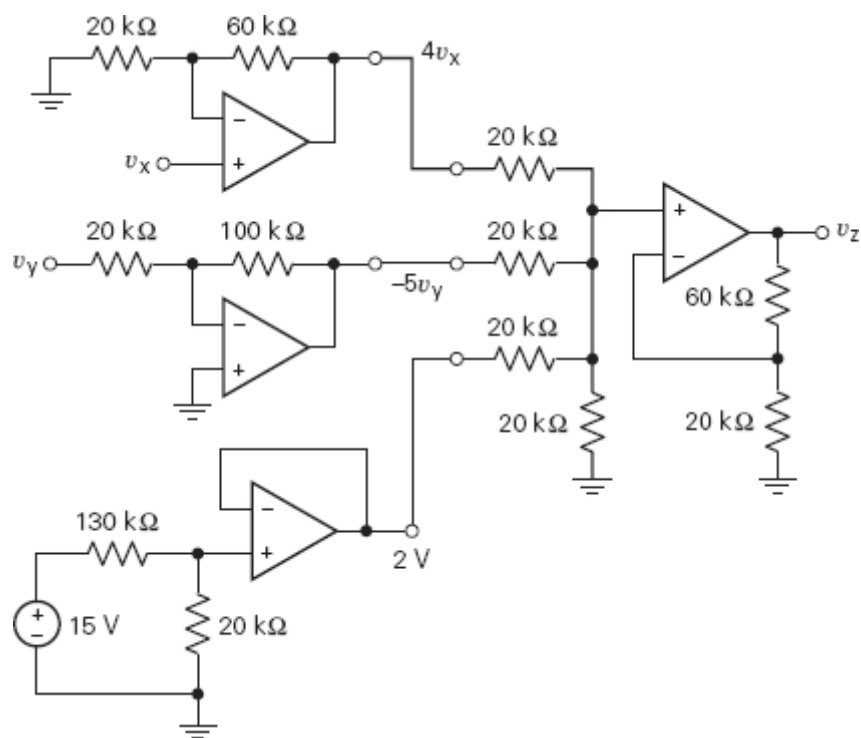



FIGURA 6.6-7 Circuito melhorado com amplificadores operacionais para implantar a Eq. 6.6-2.

Esta codificação é conveniente, já que, por exemplo, v_z = 4,5 V indica que z = 4,5. Entretanto, usando a Eq. 6.6-3 para substituir v_x, v_y e v_z na Eq. 6.6-4 por x, y e z, obtemos:

$$|x| \le 3{,}75, \quad |y| \le 3{,}0 \quad \text{e} \quad |z| \le 15$$

Se essas condições restringem demais os valores que x, y e z podem assumir, a relação entre os sinais v_x, v_y e v_z e as variáveis x, y e z pode ser alterada. Suponha, por exemplo, que

$$v_x = \frac{x}{10}, \quad v_y = \frac{y}{10} \quad \text{e} \quad v_z = \frac{z}{10} \tag{6.6-6}$$

Nesse caso, precisamos multiplicar por 10 a tensão v_z para obter o valor de z. Se v_z = 4,5 V, por exemplo,z = 45. Em compensação, o circuito pode acomodar valores maiores de x, y e z. De acordo com as Equações 6.6-4 e 6.6-6, temos:

$$|x| \le 37{,}5, \quad |y| \le 30{,}0 \quad \text{e} \quad |z| \le 150{,}0$$

EXERCÍCIO 6.6-1 Especifique os valores de R_1 e R_2 na Figura E 6.6-1 para que v_3 esteja relacionada a v_1 e v_2 pela equação $v_3 = (4)v_1 - \left(\frac{1}{5}\right)v_2$.

Resposta: R_1 = 10 kΩ e R_2 = 2,5 kΩ.

EXERCÍCIO 6.6-2 Especifique os valores de R_1 e R_2 na Figura E 6.6-1 para que v_3 esteja relacionada a v_1 e v_2 através da equação $v_3 = (6)v_1 - \left(\frac{4}{5}\right)v_2$.

Resposta: R_1 = 20 kΩ e R_2 = 40 kΩ.

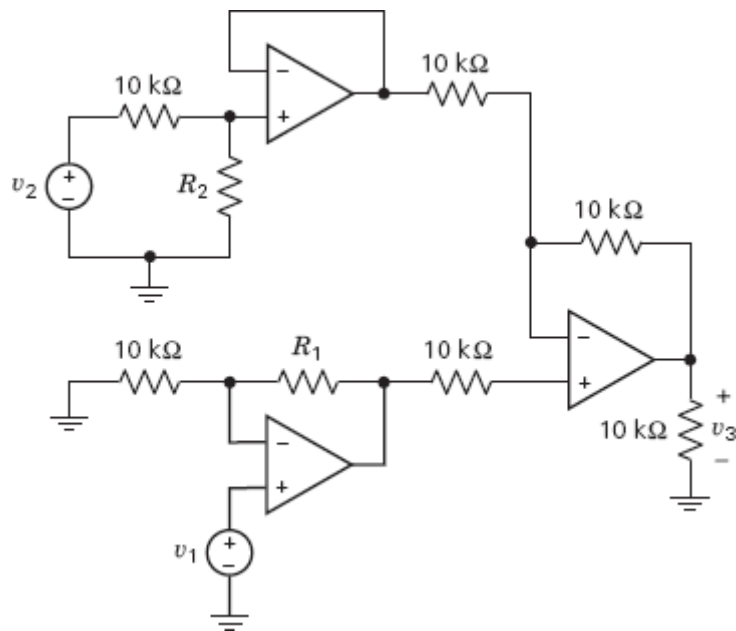



FIGURA E 6.6-1

6.7 Características de Amplificadores Operacionais Reais

O amplificador operacional ideal é um modelo simples do amplificador operacional, mas essa simplicidade é conseguida ignorando certas imperfeições dos amplificadores operacionais reais. Nesta seção são discutidas algumas dessas imperfeições e são apresentados modelos mais realistas dos amplificadores operacionais.

Considere o amplificador operacional da Figura 6.7-1*a*. Se o amplificador operacional é ideal, temos

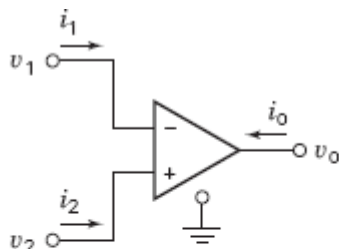
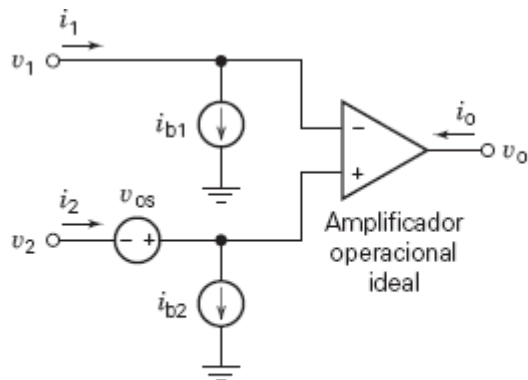
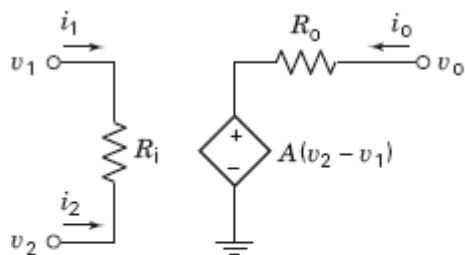
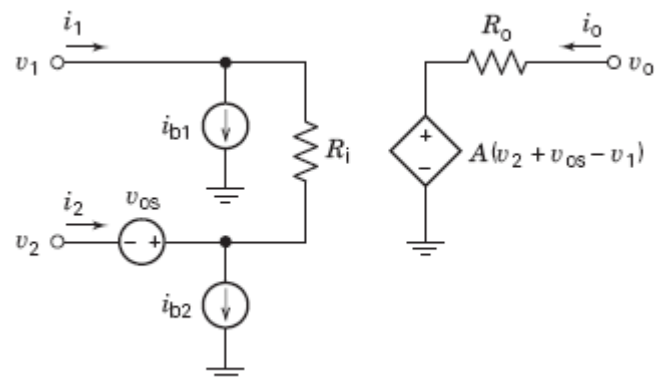
$$i_1 = 0, \quad i_2 = 0 \quad \text{e} \quad v_1 - v_2 = 0 \tag{6.7-1}$$

(*a*) (*b*)

(*c*) (*d*)

FIGURA 6.7-1 (*a*) Amplificador operacional. (*b*) Modelo de resíduos de um amplificador operacional. (*c*) Modelo de ganho finito de um amplificador operacional. (*d*) Modelo de resíduos e de ganho finito de um amplificador operacional.

Por outro lado, o modelo de amplificador operacional da Figura 6.7-1*d* leva em conta vários parâmetros não ideais dos amplificadores operacionais reais, a saber:

- Correntes de polarização diferentes de zero
- Tensão residual de entrada diferente de zero
- Resistência de entrada finita
- Resistência de saída diferente de zero
- Ganho de tensão finito

Este modelo descreve os amplificadores operacionais reais com mais precisão que o amplificador operacional ideal. Infelizmente, o modelo da Figura 6.7-1*d* é muito mais complexo e muito mais difícil de usar que o amplificador operacional ideal. Os modelos das Figuras 6.7-1*b* e 6.7-1*c* constituem soluções de compromisso. Esses modelos são mais precisos que o amplificador operacional ideal e mais fáceis de usar que o modelo da Figura 6.7-1*d*. O modelo da Figura 6.7-1*b* é chamado de "modelo de resíduos" do amplificador operacional. O modelo da Figura 6.7-1*c* é chamado de "modelo de ganho finito" e o modelo da Figura 6.7-1*d* é chamado de "modelo de resíduos e ganho finito" do amplificador operacional.

O modelo de amplificador operacional da Figura 6.7-1*b* leva em conta as correntes de polarização e a tensão residual de entrada, mas não leva em conta a resistência de entrada, a resistência de saída e o ganho. O modelo, que é composto de três fontes independentes e um amplificador operacional ideal, pode ser descrito pelas equações

$$i_1 = i_{b1}, \quad i_2 = i_{b2} \quad \text{e} \quad v_1 - v_2 = v_{os} \tag{6.7-2}$$

A tensão v_{os} é uma pequena tensão constante conhecida como tensão residual de entrada. As correntes i_{b1} e i_{b2} são pequenas correntes constantes conhecidas como correntes de polarização do amplificador operacional. A diferença entre as correntes de polarização é a corrente residual de entrada i_{os} do amplificador:

$$i_{os} = i_{b1} - i_{b2}$$

Observe que a Eq. 6.7-2 se reduz à Eq. 6.7-1 quando anulamos as correntes de polarização e a tensão residual de entrada. Em outras palavras, o modelo de resíduos coincide com o modelo com amplificador operacional ideal quando as correntes de polarização e a tensão residual de entrada são nulas.

Frequentemente, as correntes de polarização e a tensão residual de entrada são tão pequenas que podem ser desprezadas. Quando, porém, o sinal de entrada do circuito é muito pequeno, as correntes de polarização e a tensão residual de entrada podem se tornar importantes.

Os fabricantes especificam valores máximos para as correntes de polarização, para a corrente residual de entrada e para a tensão residual de entrada. No caso do amplificador operacional μA741, a corrente de polarização máxima é 500 nA, a corrente de entrada residual máxima é 200 nA e a tensão residual de entrada máxima é 5 mV. Estas especificações garantem que

$$\left|i_{b1}\right| \le 500 \text{ nA} \quad \text{e} \quad \left|i_{b2}\right| \le 500 \text{ nA}$$
$$\left|i_{b1} - i_{b2}\right| \le 200 \text{ nA}$$
$$\left|v_{os}\right| \le 5 \text{ mV}$$

A Tabela 6.7-1 mostra valores *típicos* das correntes de polarização, da corrente residual de entrada, da tensão residual de entrada e de outros parâmetros para vários modelos de amplificadores operacionais.

Tabela 6.7-1 Parâmetros Típicos de Alguns Modelos de Amplificador Operacional

PARÂMETRO	UNIDADE	µA741	LF351	TL051C	OPA101	OP-

					AM	07E
Tensão de saturação, v_{sat}	V	13	13,5	13,2	13	13
Corrente de saturação, i_{sat}	mA	2	15	6	30	6
Taxa de variação da tensão de saída, SR	V/μS	0,5	13	23,7	6,5	0,17
Corrente de polarização, i_b	nA	80	0,05	0,03	0,012	1,2
Corrente residual, i_{os}	nA	20	0,025	0,025	0,003	0,5
Tensão residual de entrada, v_{os}	mV	1	5	0,59	0,1	0,03
Resistência de entrada, R_i	MΩ	2	10^6	10^6	10^6	50
Resistência de saída, R_o	Ω	75	1000	250	500	60
Ganho diferencial, A	V/mV	200	100	105	178	5000
Razão de rejeição do modo comum, CMRR	V/mv	31,6	100	44	178	1413
Produto ganho-banda passante, B	MHz	1	4	3,1	20	0,6

Exemplo 6.7-1 Tensão Residual e Correntes de Polarização

O amplificador inversor da Figura 6.7-2*a* utiliza um amplificador operacional μA741. Esse amplificador, projetado no Exemplo 6.5-2, tem um ganho de –5, ou seja,

$$v_o = -5 \cdot v_{in}$$

O projeto do amplificador inversor foi feito com base no modelo do amplificador operacional ideal e, portanto, não levou em conta as correntes de polarização e a tensão residual de entrada do amplificador operacional μA741. Neste exemplo, o modelo de resíduos de um amplificador operacional será usado para analisar o circuito. A análise nos dirá qual é a influência das correntes de polarização e da tensão residual da entrada no desempenho do circuito.

Solução

Na Figura 6.7-2*b*, o amplificador operacional foi substituído pelo modelo de resíduos de um amplificador operacional. Observe que o amplificador operacional mostrado na Figura 6.7-2*b* é um amplificador operacional ideal. O circuito da Figura 6.7-2*b* possui quatro entradas, que correspondem a quatro fontes independentes: v_{in}, i_{b1}, i_{b2} e v_{os}. (A entrada v_{in} provém de uma fonte de tensão externa, enquanto as outras “entradas”, i_{b1}, i_{b2} e v_{os}, representam imperfeições, ou seja, fazem parte do próprio amplificador operacional.) O princípio de superposição pode ser usado para analisar o circuito; as Figuras 6.7-2*c* a 6.7-2*f* ilustram o processo. Em cada figura, apenas uma entrada é mantida e a saída correspondente a essa entrada é calculada.

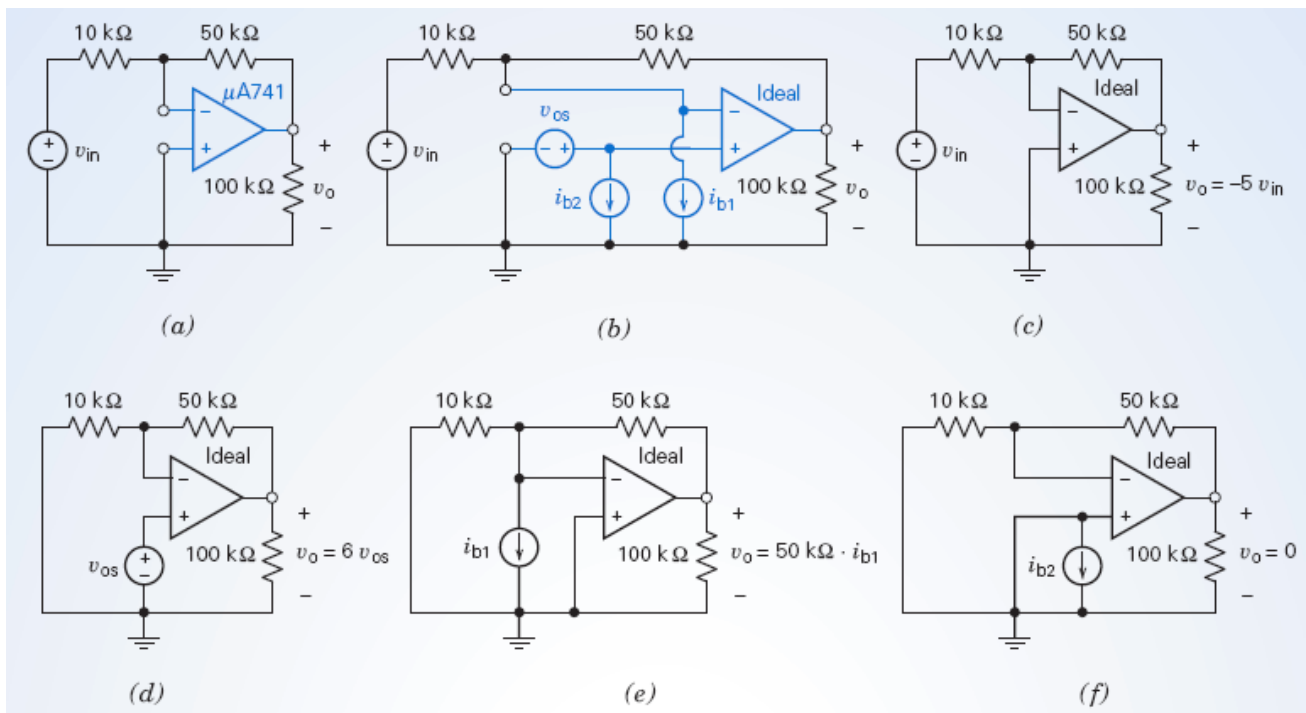



FIGURA 6.7-2 (*a*) Amplificador inversor. (*b*) Circuito equivalente que leva em conta a tensão residual de entrada e as correntes de polarização do amplificador operacional. (*c*) a (*f*) Análise do circuito usando o princípio de superposição.

A Figura 6.7-2*c* mostra o circuito usado para calcular a resposta a v_{in}. As outras entradas, i_{b1}, i_{b2} e v_{os}, foram anuladas. Como fontes de corrente desativadas se comportam como circuitos abertos e fontes de tensão desativadas se comportam como curtos-circuitos, a Figura 6.7-2*c* foi obtida a partir da Figura 6.7-2*b* substituindo as fontes de corrente i_{b1} e i_{b2} por circuitos abertos e a fonte de tensão v_{os} por um curto-circuito. O amplificador operacional da Figura 6.7-2*c* é um amplificador operacional ideal. A análise do amplificador inversor na Figura 6.7-2*c* nos dá

$$v_o = -5 \cdot v_{in}$$

Considere agora a Figura 6.7-2*d*. Este circuito é usado para calcular a resposta a v_{os}. As outras entradas, v_{in}, i_{b1} e i_{b2}, foram anuladas. A Figura 6.7-2*d* foi obtida a partir da Figura 6.7-2*b* substituindo as fontes de corrente i_{b1} e i_{b2} por circuitos abertos e a fonte de tensão v_{in} por um curto-circuito. Mais uma vez, o amplificador operacional é um amplificador operacional ideal. O circuito da Figura 6.7-2*d* já foi visto anteriormente; é o amplificador não inversor (Figura 6.5-1*b*). Analisando este amplificador não inversor, obtemos:

$$v_o = \left(1 + \frac{50.000}{10.000}\right) \cdot v_{os} = 6\ v_{os}$$

Considere agora a Figura 6.7-2*e*. Este circuito é usado para calcular a resposta a i_{b1}. As outras entradas, v_{in}, i_{b2} e v_{os}, foram anuladas. A Figura 6.7-2*e* foi obtida a partir da Figura 6.7-2*b* substituindo a fonte de corrente i_{b2} por um circuito aberto e as fontes de tensão v_{in} e v_{os} por curtos-circuitos. Observe que a tensão entre os terminais do resistor de 10 kΩ é zero porque o resistor está ligado entre os terminais de entrada do amplificador operacional ideal. De acordo com a lei de Ohm, a corrente no resistor de 10 kΩ é zero e, portanto, a corrente no resistor de 50 kΩ é i_{b1}. Assim, levando em conta os sentidos de referência, temos:

$$v_o = 50.000 \cdot i_{bl}$$

A Figura 6.7-2*f* é usada para calcular a resposta a i_{b2}. As outras entradas, v_{in}, i_{b1} e v_{os}, foram anuladas. A Figura 6.7-2*f* foi obtida a partir da Figura 6.7-2*b* substituindo a fonte de corrente i_{b1} por um circuito aberto e as fontes de tensão v_{in} e v_{os} por curtos-circuitos. Quando v_{os} é substituída por um curto-circuito, a fonte de corrente i_{b2} fica em curto-circuito. A tensão entre os terminais do resistor de 10 kΩ é zero e, portanto, a corrente no resistor de 10 kΩ é zero. De acordo com a lei de Kirchhoff para correntes, a corrente no resistor de 50 kΩ também é zero. Assim,

$$v_o = 0$$

A saída produzida pelas quatro entradas agindo simultaneamente é a soma das saídas produzidas pelas entradas agindo separadamente. Assim,

$$v_o = -5 \cdot v_{in} + 6 \cdot v_{os} + (50.000)i_{b1}$$

Quando a entrada do amplificador inversor, v_{in}, é zero, a saída v_o, deveria ser zero. Entretanto, v_o é diferente de zero se v_{os} e/ou i_{b1} for diferente de zero. Vamos fazer

$$\text{tensão residual de saída} = 6 \cdot v_{os} + (50.000)i_{b1}$$

Nesse caso,

$$v_o = -5 \cdot v_{in} + \text{tensão residual de saída}$$

Lembre-se de que, quando o amplificador operacional é modelado como um amplificador operacional ideal, a análise do amplificador inversor nos dá

$$v_o = -5 \cdot v_{in}$$

Comparando as duas últimas equações, vemos que a corrente de polarização e a tensão residual de entrada dão origem a uma tensão residual de saída. Modelar o amplificador operacional como um amplificador operacional ideal equivale a supor que a tensão residual de saída não é importante e pode ser desprezada. O uso de um modelo para o amplificador operacional que inclui as tensões residuais leva a resultados mais precisos, mas torna os cálculos mais complicados.

Qual é a tensão residual de saída deste amplificador inversor? Como a tensão residual de entrada do amplificador operacional μA741 é no máximo 5 mV e a correntes de polarização é no máximo 500 nA, temos:

$$\text{tensão residual de saída} \le 6(0{,}005) + (50 \times 10^3)\,(500 \times 10^{-9}) = 55\text{ mV}$$

Assim, exigindo que a tensão de saída seja pelo menos 10 vezes maior que a tensão residual de saída para que a última possa ser desprezada, podemos ignorar o efeito da tensão residual se $|5v_{in}| > 550$ mV ou $|v_{in}| > 110$ mV. O erro causado pela tensão residual pode ser reduzido usando um amplificador operacional de melhor qualidade, ou seja, um amplificador operacional com valores menores de corrente de polarização e tensão residual de entrada.

Vamos agora voltar nossa atenção para outros parâmetros dos amplificadores operacionais reais. O modelo de amplificador operacional da Figura 6.7-1*c* leva em conta a resistência de entrada finita, a resistência de saída diferente de zero e o ganho de tensão finito de um amplificador operacional real, mas ignora a influência das correntes de polarização e da tensão residual de entrada. Este modelo é formado por dois resistores e uma FTCT.

O modelo de ganho finito tende para um amplificador operacional ideal quando o ganho *A* tende a infinito. Para mostrar que isso é verdade, basta notar que na Figura 6.7-1*c*

$$v_o = A(v_2 - v_1) + R_o i_o$$

e, portanto,

$$v_2 - v_1 = \frac{v_o - R_o i_o}{A}$$

Os modelos da Figura 6.7-1, como o modelo do amplificador operacional ideal, são válidos apenas quando v_o e i_o satisfazem a Eq. 6.3-1. Assim,

$$|v_o| \le v_{sat} \quad \text{e} \quad |i_o| \le i_{sat}$$

e, portanto,

$$|v_2 - v_1| \le \frac{v_{sat} + R_o i_{sat}}{A}$$

o que nos dá

$$\lim_{A \to \infty} (v_2 - v_1) = 0$$

Além disso, como

$$i_1 = -\frac{v_2 - v_1}{R_i} \quad \text{e} \quad i_2 = \frac{v_2 - v_1}{R_i}$$

concluímos que

$$\lim_{A \to \infty} i_1 = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{A \to \infty} i_2 = 0$$

Assim, i_1, i_2 e $v_2 - v_1$ satisfazem a Eq. 6.7-1. Em outras palavras, o modelo de ganho finito do amplificador operacional se torna equivalente ao amplificador operacional ideal para valores de ganho muito elevados. O ganho dos amplificadores operacionais reais varia de 100.000 a 10^7.

EXEMPLO 6.7-2 Ganho Finito

Na Figura 6.7-3, um seguidor de tensão é usado como amplificador separador. Uma análise baseada no amplificador operacional ideal mostra que o ganho do amplificador separador é

$$\frac{v_o}{v_s} = 1$$

Quais são os efeitos da resistência de entrada, da resistência de saída e de um ganho de tensão finito sobre o desempenho de um amplificador operacional real nesse circuito? Para responder à pergunta, substituímos o amplificador operacional ideal pelo modelo de amplificador operacional que leva em conta o ganho de tensão finito. O resultado é o circuito da Figura 6.7-3*b*.

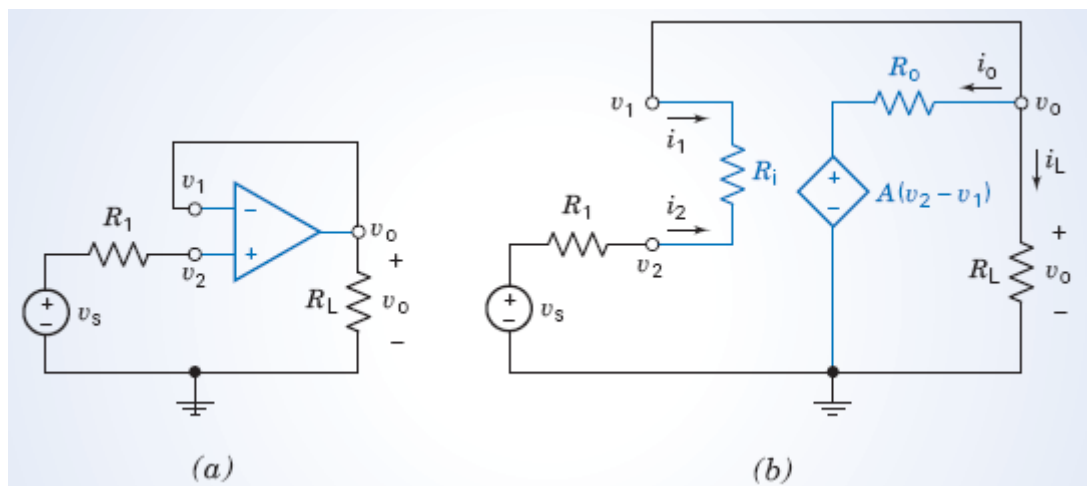



FIGURA 6.7-3 (*a*) Uso do seguidor de tensão como amplificador separador e (*b*) circuito equivalente usando um modelo do amplificador operacional que leva em conta o ganho de tensão finito.

Solução

Para analisar um caso concreto, vamos supor que $R_1 = 1$ kΩ, $R_L = 10$ kΩ e que os parâmetros do amplificador operacional real são $R_i = 100$ kΩ, $R_o = 100$ Ω e $A = 10^5$ V/V.

Suponha que $v_o = 10$ V. A corrente i_L no resistor de saída é dada por

$$i_L = \frac{v_o}{R_L} = \frac{10}{10^4} = 10^{-3} \text{ A}$$

Aplicando a LKC ao nó da extremidade superior de R_L, temos:

$$i_1 + i_o + i_L = 0$$

Acontece que a corrente i_1 em geral é muito menor que i_o e i_L e, portanto, vamos supor que $i_1 = 0$ (depois de analisar o circuito, podemos verificar se a aproximação é razoável). Nesse caso, temos:

$$i_o = -i_L$$

Aplicando a LKT à malha formada pela FTCT, R_o e R_L, obtemos:

$$-A(v_2 - v_1) - i_o R_o + i_L R_L = 0$$

Combinando as duas últimas equações e explicitando $(v_2 - v_1)$, obtemos:

$$v_2 - v_1 = \frac{i_L(R_o + R_L)}{A} = \frac{10^{-3}(100 + 10.000)}{10^5} = 1{,}01 \times 10^{-4} \text{ V}$$

Agora podemos calcular i_1 usando a lei de Ohm:

$$i_1 = \frac{v_1 - v_2}{R_i} = \frac{-1{,}01 \times 10^{-4} \text{ V}}{100.000} = -1{,}01 \times 10^{-9} \text{ A}$$

Este resultado mostra que nossa hipótese de que i_1 é desprezível em comparação com i_o e i_L estava correta.

Aplicando a LKT à malha externa, temos:

$$-v_s - i_1 R_1 - i_1 R_i + v_o = 0$$

Vamos agora calcular o valor de v_s:

$$\begin{aligned} v_s &= v_o - i_1(R_1 + R_i) = v_o + i_2(R_1 + R_i) \\ &= v_o + \frac{v_2 - v_1}{R_i} \times (R_1 + R_i) \\ &= v_o + \frac{i_L(R_o + R_L)}{A} \times \frac{(R_1 + R_i)}{R_i} \\ &= v_o + \frac{v_o}{R_L} \times \frac{(R_o + R_L)}{A} \times \frac{(R_1 + R_i)}{R_i} \end{aligned}$$

O ganho do circuito é

$$\frac{v_o}{v_s} = \frac{1}{1 + \frac{1}{A} \times \frac{R_o + R_L}{R_L} \times \frac{R_i + R_1}{R_i}}$$

Esta equação mostra que o ganho é aproximadamente 1 quando A é muito grande, $R_L >> R_o$ e $R_1 << R_i$. Neste exemplo, para os valores especificados de A, R_o e R_i, temos:

$$\frac{v_o}{v_s} = \frac{1}{1 + \frac{1}{10^5} \times \frac{100 + 10.000}{10.000} \times \frac{10^5 + 1000}{10^5}} = \frac{1}{1,00001} = 0,99999$$

Assim, a resistência de entrada, a resistência de saída e o ganho de tensão de um amplificador operacional real têm um efeito pequeno, quase sempre desprezível, sobre o desempenho do amplificador separador.

A Tabela 6.7-1 mostra dois outros parâmetros dos amplificadores operacionais reais que ainda não foram mencionados: a *razão de rejeição do modo comum* (RRMC[2]) e o *produto ganho-banda passante*. Vejamos primeiro a razão de rejeição do modo comum. No modelo de ganho finito, a tensão da fonte dependente é

$$A(v_2 - v_1)$$

Na prática, uma expressão mais precisa para a tensão da fonte dependente é

$$A(v_2 - v_1) + A_{mc}\left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right)$$

em que

$v_2 - v_1$ é a tensão diferencial de entrada,

$\frac{v_1 + v_2}{2}$ é a tensão de modo comum de entrada

e

A_{mc} é o ganho de modo comum.

O ganho A é às vezes chamado de ganho diferencial para distingui-lo de A_{mc}. A razão de rejeição do modo comum, uma medida do erro introduzido pela tensão de entrada do modo comum, é definida como a razão entre A e A_{mc} (quando maior a razão, menor o erro):

$$\text{RRMC} = \frac{A}{A_{mc}}$$

A tensão da fonte dependente pode ser expressa em termos de A e RRMC:

$$A(v_2 - v_1) + A_{mc}\frac{v_1 + v_2}{2} = A(v_2 - v_1) + \frac{A}{\text{RRMC}}\frac{v_1 + v_2}{2}$$

$$= A\left[\left(1 + \frac{1}{2\text{RRMC}}\right)v_2 - \left(1 - \frac{1}{2\text{RRMC}}\right)v_1\right]$$

A RRMC pode ser introduzida no modelo de ganho finito mudando a tensão da fonte dependente. A mudança consiste em substituir $A(v_2 - v_1)$ por

$$A\left[\left(1 + \frac{1}{2\text{RRMC}}\right)v_2 - \left(1 - \frac{1}{2\text{RRMC}}\right)v_1\right]$$

Essa mudança torna o modelo mais preciso, mas também mais complicado. A Tabela 6.7-1 mostra que a RRMC é em geral muito grande. Usando valores como os de um amplificador operacional LF351 típico, A = 100 V/mV e RRMC = 100 V/mV, obtemos

$$A\left[\left(1+\frac{1}{2\text{RRMC}}\right)v_2-\left(1-\frac{1}{2\text{RRMC}}\right)v_1\right]=100.000,5v_2-99.999,5v_1$$

em vez de

$$A(v_2 - v_1) = 100.000v_2 - 100.000v_1$$

Na maioria dos casos, o erro cometido quando ignoramos a RRMC do amplificador operacional é desprezível. A RRMC não precisa ser levada em consideração, a menos que se deseje realizar medidas precisas de diferenças de tensão muito pequenas.

Vamos agora discutir o produto ganho-banda passante do amplificador operacional. No modelo de ganho finito, o ganho *A* do amplificador operacional é constante. Suponha que

$$v_1 = 0 \quad \text{e} \quad v_2 = M \text{ sen } \omega t$$

o que nos dá

$$v_2 - v_1 = M \text{ sen } \omega t$$

Nesse caso, a tensão da fonte dependente no modelo de ganho finito é

$$A(v_2 - v_1) = A \cdot M \text{ sen } \omega t$$

A amplitude $A \cdot M$ dessa tensão senoidal não depende da frequência ω. Os amplificadores operacionais reais não funcionam assim; o ganho de um amplificador real é uma função da frequência, que podemos chamar de $A(\omega)$. No caso de muitos amplificadores reais, quando as tensões e correntes são representadas por fasores, o ganho $A(\omega)$ é dado por uma expressão da forma

$$A(\omega) = \frac{B}{\omega_0 + j\omega}$$

em que $j = \sqrt{-1}$.

Funções como $A(\omega)$ serão discutidas no Capítulo 13. No momento, basta saber que o parâmetro *B* é usado para descrever a taxa de variação com a frequência do ganho do amplificador operacional. O parâmetro *B* é chamado de produto ganho-banda passante do amplificador operacional.

EXERCÍCIO 6.7-1 A tensão residual de entrada de um amplificador operacional μA741 *típico* é 1 mV e a corrente de polarização é 80 nA. Suponha que o amplificador operacional da Figura 6.7-2*a* é um μA741 típico. Mostre que, nesse caso, a tensão residual de saída do amplificador inversor é, no máximo, 10 mV.

EXERCÍCIO 6.7-2 Suponha que o resistor de 10 kΩ da Figura 6.7-2*a* seja substituído por um resistor de 2 kΩ e o resistor de 50 kΩ seja substituído por um resistor de 10 kΩ. (Essas mudanças não alteram o ganho do amplificador inversor, que continua a ser –5). Mostre que a tensão residual de saída *máxima* diminui para 35 mV. (Use i_b = 500 nA e v_{os} = 5 mV para calcular a tensão residual de saída *máxima* que pode ser produzida pelo amplificador μA741.)

EXERCÍCIO 6.7-3 Suponha que o amplificador operacional μA741 da Figura 6.7-2*a* seja substituído por um amplificador operacional OPA101AM *típico*. Mostre que a tensão residual de saída é, no máximo, 0,6 mV.

EXERCÍCIO 6.7-4

a. Determine a razão de tensões v_o/v_s no circuito da Figura E 6.7-4.

b. Calcule v_o/v_s para um amplificador operacional real com $A = 10^5$, R_o = 100 Ω e R_i = 500 kΩ. Os resistores do circuito são R_s = 10 kΩ, R_f = 50 kΩ e R_a = 25 kΩ.

Resposta: (b) $v_o/v_s = -2$.

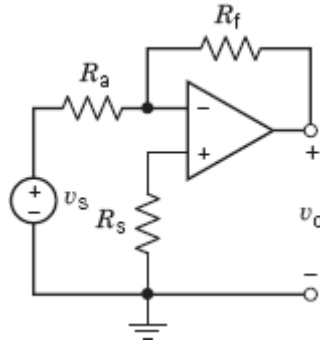



FIGURA E 6.7-4

6.8 *Análise de Circuitos com Amplificadores Operacionais Usando o MATLAB*

A Figura 6.8-1 mostra um amplificador inversor. Se um amplificador operacional ideal é usado para modelar o amplificador operacional, a relação entre a tensão de saída do amplificador inversor e a tensão de entrada é dada pela equação

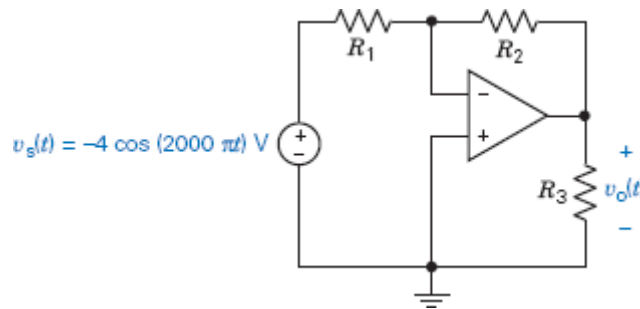



FIGURA 6.8-1 Amplificador inversor.

$$v_o(t) = -\frac{R_2}{R_1} v_s(t) \qquad (6.8\text{-}1)$$

Suponha que R_1 = 2 kΩ, R_2 = 50 kΩ e v_s = – 4 cos(2000πt) V. Usando esses valores na Eq. 6.8-1, obtemos $v_o(t)$ = 100 cos(2000πt) V. Como o valor máximo da tensão de saída é maior que a tensão de saturação de quase todos os amplificadores operacionais, não se trata de uma solução realista. Quando a saturação da tensão é incluída no modelo do amplificador operacional, a tensão de saída do amplificador inversor passa a ser descrita pelas equações

$$v_o(t) = \begin{cases} v_{sat} & \text{para } -\dfrac{R_2}{R_1} v_s(t) > v_{sat} \\ -\dfrac{R_2}{R_1} v_s(t) & \text{para } -v_{sat} < -\dfrac{R_2}{R_1} v_s(t) < v_{sat} \\ -v_{sat} & \text{para } -\dfrac{R_2}{R_1} v_s(t) < -v_{sat} \end{cases} \qquad (6.8\text{-}2)$$

em que v_{sat} é a tensão de saturação do amplificador operacional. A Eq. 6.8-2 é um modelo do amplificador inversor mais preciso, mas mais complicado, que a Eq. 6.8-1. Naturalmente, preferimos usar um modelo mais simples e usamos um modelo mais complicado apenas quanto temos razões para acreditar que as respostas baseadas no modelo mais simples não são realistas.

As Figuras 6.8-2 e 6.8-3 ilustram o uso do MATLAB para analisar o amplificador inversor quando o modelo do amplificador operacional inclui a saturação da tensão. A Figura 6.8-2 mostra o arquivo de entrada do MATLAB; a Figura 6.8-3 mostra o gráfico resultante das tensões de entrada e de saída em função do tempo.

```
% Satura.m simula a saturação de um amplificador operacional
%-----------------------------------------------------------------
% Entrar com os valores dos parâmetros do circuito.
%-----------------------------------------------------------------
                                % parâmetros do circuito
R1=2e3;                         % resistência, ohms
R2=50e3;                        % resistência, ohms
R3=20e3;                        % resistência, ohms

                                % parâmetro do amplificador operacional
vsat=15;                        % tensão de saturação, V

                                % parâmetros da fonte
M=4;                            % amplitude, V
f=1000;                         % frequência, Hz
w=2*pi*f;                       % frequência, rad/s
teta=(pi/180)*180;              % ângulo de fase, rad

%-----------------------------------------------------------------
% Dividir o intervalo de tempo (0, tf) em N incrementos
%-----------------------------------------------------------------
tf=2/f;                         % tempo final
N=200;                          % número de incrementos
t=0:tf/N:tf;                    % tempo, s

%-----------------------------------------------------------------
% Para cada tempo t = k*(tf/N), calcular vo a partir de vs teta
%-----------------------------------------------------------------
vs = M*cos(w*t +teta);          % tensão de entrada

for k=1:length(vs)

      if      (-(R2/R1)*vs(k)  < -vsat)  vo(k)  =  -vsat; % ------
      elseif  (-(R2/R1)*vs(k)  >  vsat)  vo(k)  =   vsat; % eq.
      else    vo(k)  = -(R2/R1)*vs(k);                    % 6.8-2
      end                                                 % ------

end

%-----------------------------------------------------------------
% Plotar vo e vs em função de t
%-----------------------------------------------------------------
plot(t, vo, t, vs)              % plotar a característica de transferência
axis([0  tf  -20  20])
xlabel('tempo   s')
ylabel('vo(t), V')
```

FIGURA 6.8-2 Arquivo de entrada do MATLAB para o circuito da Figura 6.8-1.

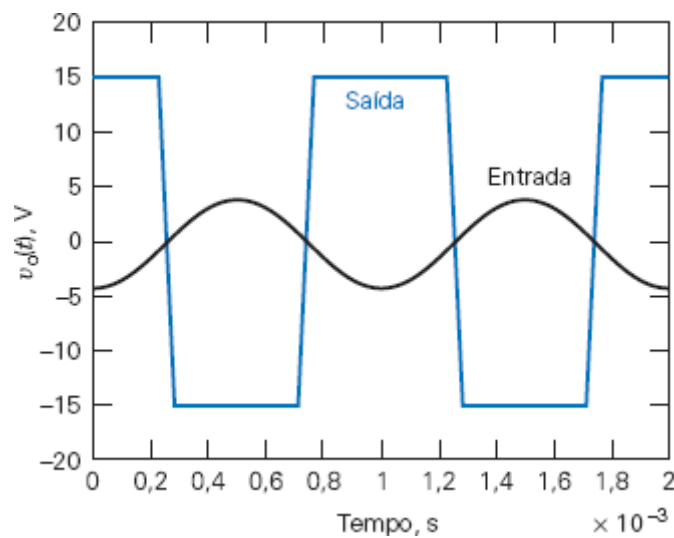



FIGURA 6.8-3 Gráficos das tensões de entrada e de saída do circuito da Figura 6.8-1 em função do tempo, plotados pelo programa MATLAB.

6.9 *Uso do PSpice para Analisar Circuitos com Amplificadores Operacionais*

Considere o circuito de um amplificador operacional com uma entrada, v_i, e uma saída, v_o. Vamos plotar a tensão de saída em função da tensão de entrada usando o programa PSpice. Para isso, fazemos o seguinte:

1. Desenhamos o circuito no espaço de trabalho OrCAD.
2. Especificamos uma simulação do tipo DC Sweep.
3. Executamos a simulação.
4. Plotamos o resultado da simulação.

A simulação DC Sweep permite calcular o parâmetro de saída de um circuito para vários valores do parâmetro de entrada.

EXEMPLO 6.9-1 Uso do PSpice para Analisar o Circuito de um Amplificador Operacional

A entrada do circuito da Figura 6.9-1 é a tensão da fonte de tensão, v_i. A saída é a tensão v_o. Use o programa PSpice para plotar a tensão de saída em função da tensão de entrada.

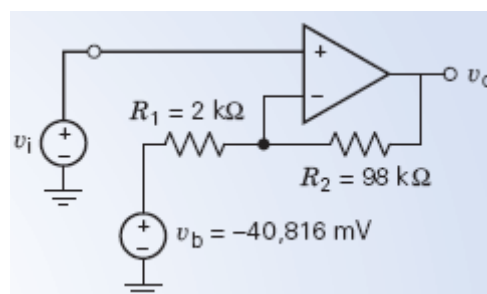



FIGURA 6.9-1 Circuito do Exemplo 6.9-1.

Solução

Começamos por desenhar o circuito no espaço de trabalho OrCAD, como mostra a Figura 6.9-2 (veja o Apêndice A). O amplificador operacional da Figura 6.9-2 é representado no PSpice por um módulo da biblioteca ANALOG denominado OPAMP. A saída do circuito é uma tensão de nó. É conveniente rotular o nó de saída usando um nome do PSpice. Na Figura 6.9-2, um módulo do PSpice chamado Off-Page Connector foi usado para rotular o nó de saída como “o”. Para

isso, basta escolher Place/Off-Page Connector no menu OrCAD Capture para abrir a janela de diálogo Place Off-Page Connector e entrar com "o" na caixa Name. Isso faz com que a tensão do nó de saída seja chamada de V(o) pelo PSpice.

Para executar uma simulação do tipo DC Sweep, selecione PSpice\New Simulation Profile no menu principal do programa OrCAD Capture, escolha um nome para a simulação e, em seguida, selecione DC Sweep na lista Analysis Type da aba Analysis da caixa de diálogo Simulation Settings. Especifique a tensão de entrada como variável independente selecionando Voltage Source na subcaixa de diálogo Sweep Variable e identificando a fonte de tensão como Vi. Na subcaixa de diálogo Sweep tipe, especifique uma varredura linear e escolha valores adequados para o valor inicial (Start value) e final (End value) e para o incremento (Increment) da tensão de entrada. Selecione PSpice\Run no menu principal do OrCad Capture para executar a simulação.

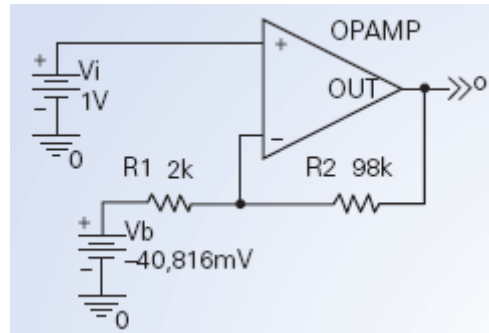



FIGURA 6.9-2 O circuito da Figura 6.9-1, na forma como é desenhado no espaço de trabalho OrCAD.

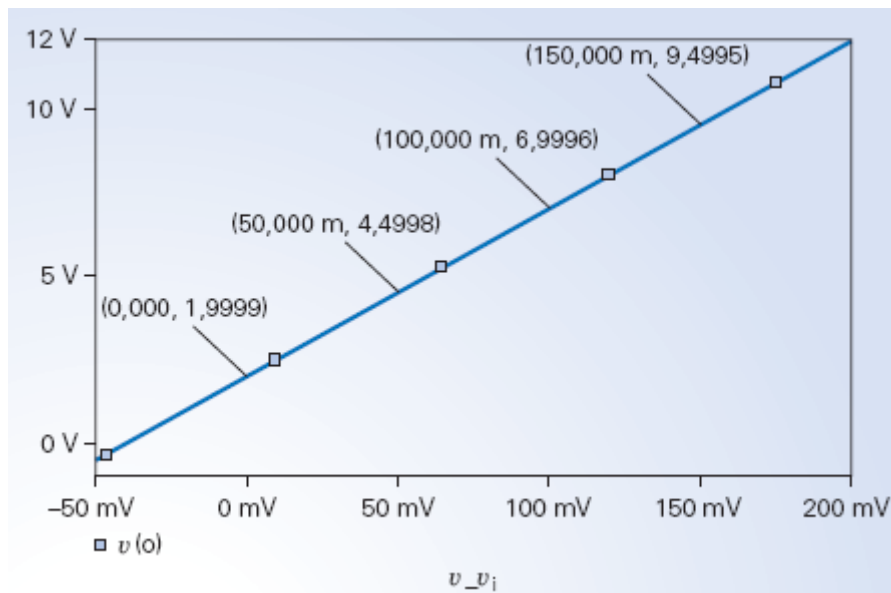



FIGURA 6.9-3 Gráfico da tensão de saída em função da tensão de entrada.

Depois de executar a simulação, o programa abre automaticamente uma janela Schematics. Selecione Trace/Add Trace no menu Schematics para abrir a caixa de diálogo Add Traces. Selecione V(o) na lista Simulation Output Variables. A Figura 6.9-3 mostra o gráfico resultante com a grade removida e alguns pontos rotulados. O gráfico é uma linha reta. Isso significa que a tensão de saída está relacionada à tensão de entrada por uma equação da forma

$$v_o = mv_i + b$$

em que os valores da inclinação *m* e da interseção *b* com o eixo vertical podem ser determinados a partir de dois dos pontos rotulados na Figura 6.9-3. Em particular,

$$m = \frac{6{,}9996 - 4{,}4998}{0{,}100 - 0{,}050} = 49{,}996 \approx 50\ \frac{\text{V}}{\text{V}}$$

e

$$1{,}9999 = 59{,}996(0) + b \ \Rightarrow\ b = 1{,}9999 \approx 2\ \text{V}$$

Assim, a tensão de saída do circuito está relacionada à tensão de entrada pela equação

$$v_o = 50v_i + 2$$

6.10 *Como Podemos Testar . . . ?*

Os engenheiros são frequentemente encarregados de verificar se a solução de um problema está correta. As soluções de problemas de projeto, por exemplo, devem ser verificadas para confirmar que todas as especificações estão sendo atendidas. Além disso, os resultados obtidos com o auxílio de computadores devem ser revistos para evitar possíveis erros na digitação dos dados e as afirmações dos vendedores a respeito dos seus produtos devem ser confirmadas.

Os estudantes de engenharia muitas vezes também precisam verificar se os resultados que obtiveram estão corretos. Às vezes falta muito pouco tempo para terminar um exame e é importante poder identificar rapidamente as questões que precisam ser refeitas.

O exemplo a seguir ilustra algumas técnicas que podem ser usadas para verificar se as soluções de problemas do tipo discutido neste capítulo estão corretas.

EXEMPLO 6.10-1 Como Podemos Testar Circuitos com Amplificadores Operacionais?

O circuito da Figura 6.10-1*a* foi analisado escrevendo e resolvendo o seguinte sistema de equações:

$$\frac{v_6}{10} + i_5 = 0$$

$$10i_5 = v_4$$

$$\frac{v_4}{10} + i_3 = i_2$$

$$3 = 5i_2 + 10i_3$$

$$20i_3 = v_6$$

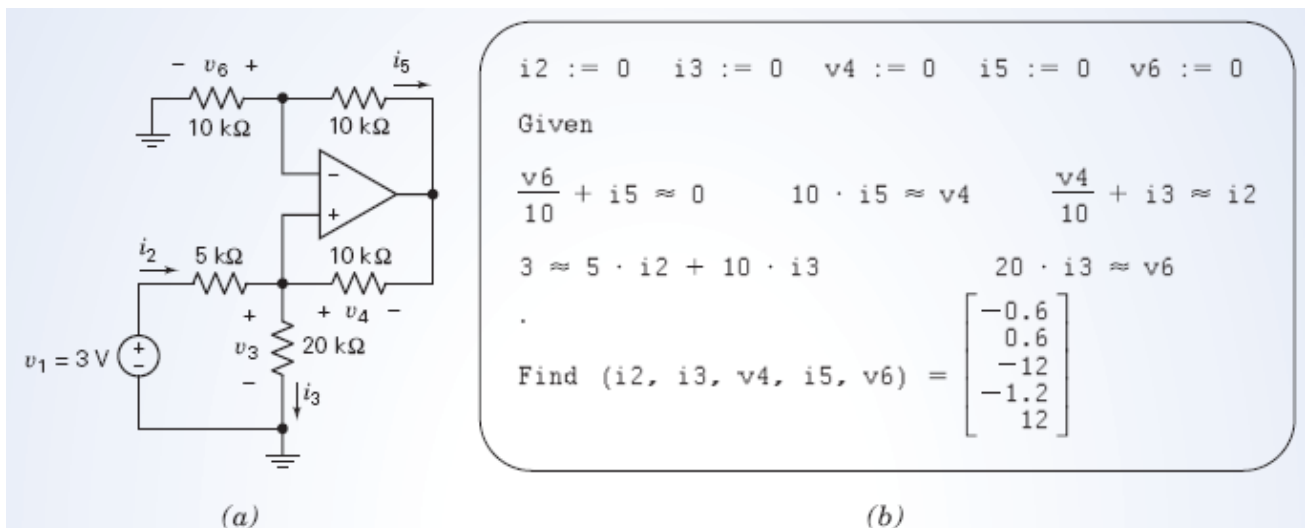



FIGURA 6.10-1 (*a*) Circuito do Exemplo 6.10-1. (*b*) Análise do circuito usando o programa Mathcad.

(Os parâmetros das equações estão em V, mA e kΩ.) O programa Mathcad foi usado para resolver o sistema de equações, como mostra a Figura 6.10-1*b*. A solução é a seguinte:

$$i_2 = -0{,}6 \text{ mA}, \quad i_3 = 0{,}6 \text{ mA}, \quad v_4 = -12 \text{ V}$$
$$i_5 = -1{,}2 \text{ mA} \quad \text{e} \quad v_6 = 12 \text{ V}$$

Como podemos verificar se todos os valores das correntes e tensões estão corretos?

Solução

Considere a tensão v_3. De acordo com a lei de Ohm,

$$v_3 = 20i_3 = 20(0{,}6) = 12 \text{ V}$$

Lembre-se de que as resistências estão em kΩ e as correntes estão em mA. Aplicando a LKT à malha formada pela fonte de tensão e os resistores de 5 kΩ e 20 kΩ, temos:

$$v_3 = 3 - 5i_2 = 3 - 5(-0{,}6) = 6 \text{ V}$$

Como a tensão v_3 não pode ter dois valores diferentes, os valores de i_2, i_3, v_4, i_5 e v_6 não podem estar todos corretos. Revendo o sistema de equações, constatamos que o valor de um dos resistores foi digitado incorretamente. A equação da LKT para a malha constituída pela fonte de tensão e os resistores de 5 kΩ e 20 kΩ deveria ser

$$3 - 5i_2 + 20i_3$$

Observe que o valor $10i_3$ foi usado incorretamente na quarta linha do programa de Mathcad da Figura 6.10-1. Quando esse valor é corrigido para $20i_3$, os valores de i_2, i_3, v_4, i_5 e v_6 se tornam

$$i_2 = -0{,}2 \text{ mA}, \quad i_3 = 0{,}2 \text{ mA}, \quad v_4 = -4 \text{ V}$$
$$i_5 = -0{,}4 \text{ mA} \quad \text{e} \quad v_6 = 4 \text{ V}$$

Agora

$$v_3 = 20i_3 = 20(0{,}2) = 4$$

e

$$v_3 = 3 - 5i_2 = 3 - 5(-0{,}2) = 4$$

Essa concordância sugere que os novos valores de i_2, i_3, v_4, i_5 e v_6 estão corretos. Como teste adicional, considere a tensão v_5. De acordo com a lei de Ohm,

$$v_5 = 10i_5 = 1 - (-0{,}4) = -4$$

Aplicando a LKT à malha formada pelos dois resistores de 10 kΩ e as entradas do amplificador operacional, temos:

$$v_5 = 0 + v_4 = 0 + (-0{,}4) = -4$$

Isso aumenta nossa confiança nos novos valores de i_2, i_3, v_4, i_5 e v_6.

6.11 EXEMPLO DE PROJETO Circuito de Interface de um Transdutor

Um cliente está interessado em automatizar uma medida de pressão. Para isso, é preciso converter o sinal de saída do transdutor de pressão no sinal de entrada de um computador. A conversão pode ser feita usando um circuito integrado conhecido como conversor analógico-digital (ADC[3]). Suponha que a tensão de entrada do ADC escolhido deve variar de 0 V a 10 V, enquanto a saída do transdutor de pressão varia entre –250 mV e 250 mV. Projete um circuito para fazer a interface entre o transdutor de pressão e o ADC. Em outras palavras, projete um circuito que transforme a faixa de tensões de –250 mV a 250 mV para a faixa de 0 V a 10 V.

Descreva a Situação e as Hipóteses

A situação está representada na Figura 6.11-1.

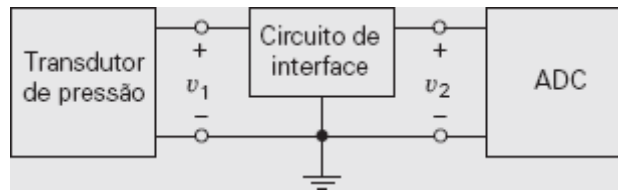



FIGURA 6.11-1 Interface de um transdutor de pressão com um conversor analógico-digital (ADC).

As especificações são as seguintes:

$$-250 \text{ mV} \le v_1 \le 250 \text{ mV}$$
$$0 \text{ V} \le v_2 \le 10 \text{ V}$$

Para tornar mais claras essas especificações, convém estabelecer uma relação entre v_1 e v_2. Para isso, escrevemos uma equação da forma

$$v_2 = a \cdot v_1 + b$$

Os coeficientes a e b podem ser calculados estabelecendo que $v_2 = 0$ para $v_1 = -250$ mV e $v_2 = 10$ V para $v_1 = 250$ mV:

$$0 \text{ V} = a(-250 \text{ mV}) + b$$
$$10 \text{ V} = a(-250 \text{ mV}) + b$$

Resolvendo esse sistema de equações, obtemos $a = 20$ V/V e $b = 5$ V.

Estabeleça a Meta

Projetar um circuito com uma tensão de entrada v_1 e uma tensão de saída v_2 que estejam relacionadas através da equação

$$v_2 = 20\, v_1 + 5 \text{ V} \tag{6.11-1}$$

Formule um Plano

A Figura 6.11-2 mostra um plano (expresso através de um diagrama de blocos) para projetar o circuito da interface. Fontes de alimentação de +15 V e –15 V são usadas para polarizar os amplificadores operacionais. A tensão constante de 5 V é obtida a partir da fonte de alimentação de 15 V usando um amplificador não inversor de ganho 1/3. A tensão de $20v_1$ é obtida a partir do sinal de entrada usando um amplificador não inversor de ganho 20. Um somador é usado para combinar as saídas dos dois amplificadores; a saída do somador é a tensão v_2.

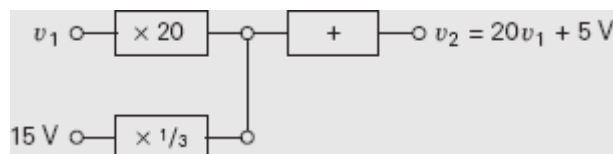



FIGURA 6.11-2 Diagrama de blocos do circuito da interface.

Todos os blocos da Figura 6.12-2 podem ser implementados usando amplificadores operacionais.

Execute o Plano

A Figura 6.11-3 mostra um possível circuito para a interface. Foram feitas algumas correções do plano inicial. O somador foi implementado usando o amplificador somador inversor da Figura 6.5-1*d*. Como se trata de um somador inversor, as entradas devem ser $-20v_1$ e –5 V em vez de $20v_1$ e 5 V. Por essa razão, foi utilizado um amplificador inversor para multiplicar v_1 por –20. Para montar o amplificador de ganho 1/3 necessário para produzir a tensão de –5 V, foi usado um divisor de tensão seguido por um seguidor de tensão para evitar que o somador carregasse o divisor de tensão. Como a tensão necessária passou a ser –5 V, o divisor de tensão foi ligado à fonte de –15 V e não à fonte de 15 V.

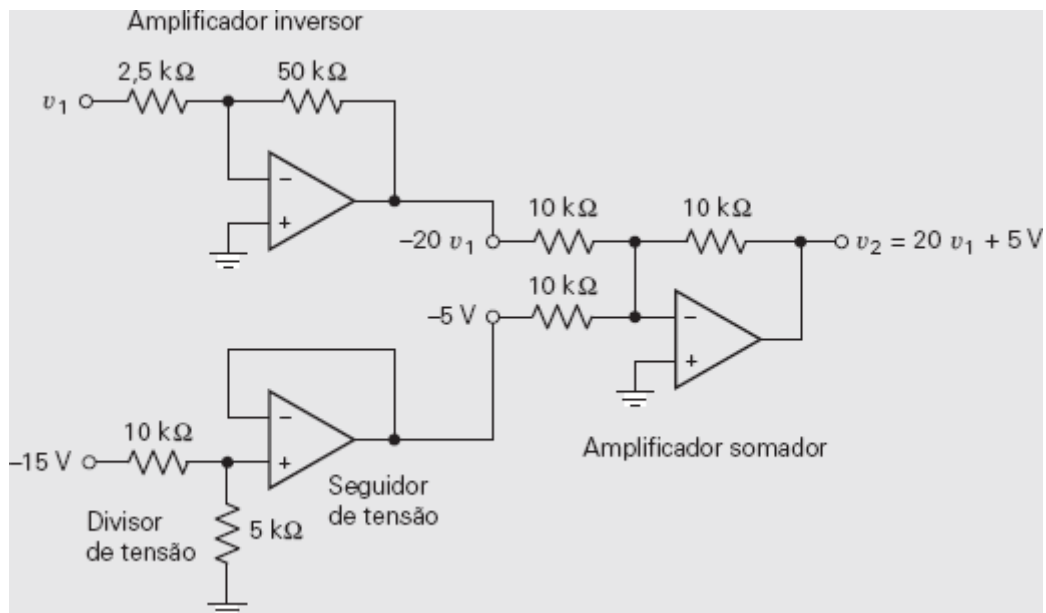



FIGURA 6.11-3 Uma possível implementação do circuito da interface.

O circuito da Figura 6.11-3 não é o único que atende às especificações do projeto. Muitos circuitos podem ser usados para implementar a relação

$$v_2 = 20\,v_1 + 5\text{ V}$$

Vamos nos dar por satisfeitos por haver encontrado um circuito atende às especificações.

Verifique se a Solução Proposta Está Correta

O circuito da Figura 6.11-3 foi simulado usando o programa PSpice. O resultado da simulação é o gráfico de v_2 em função de v_1 que aparece na Figura 6.11-4. Como o gráfico mostra uma linha reta, v_2 está relacionada a v_1 através da equação da forma

$$v_2 = mv_1 + b$$

em que m é a inclinação da reta e b é o ponto de interseção da reta com o eixo vertical. Dois pontos da reta foram assinalados para mostrar que $v_2 = 10{,}002$ V para $v_1 = 0{,}250$ V e $v_2 = 0{,}0047506$ V para $v_1 = -0{,}250$ V. A inclinação m e a interseção b podem ser calculadas a partir desses pontos. A inclinação é dada por

$$m = \frac{10{,}002 - (0{,}0047506)}{0{,}250 - (-0{,}250)} = 19{,}994$$

O ponto de interseção é dado por

$$b = 10{,}002 - 19{,}994 \times 0{,}0250 = 5{,}003$$

Assim,

$$v_2 = 19{,}994v_1 + 5{,}003 \qquad (6.11\text{-}2)$$

Comparando as Eqs. 6.11-1 e 6.11-2, vemos que a solução proposta está correta.

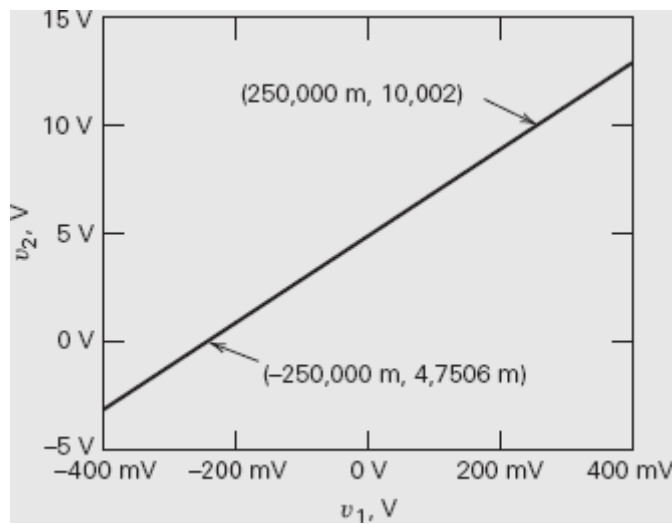



FIGURA 6.11-4 Simulação do circuito da Figura 6.11-3 usando o programa PSpice.

6.12 RESUMO

- Existem vários modelos para os amplificadores operacionais. Os modelos mais simples são menos precisos, mas são mais fáceis de usar; os modelos precisos são mais complicados. O modelo mais simples do amplificador operacional é o amplificador operacional ideal.
- As correntes nos terminais de entrada de um amplificador operacional ideal são nulas e as tensões nos terminais de entrada de um amplificador operacional ideal são iguais.
- É conveniente usar equações de nó para analisar circuitos que contêm amplificadores operacionais ideais.
- Os amplificadores operacionais podem ser usados em circuitos que realizam operações matemáticas. Alguns desses circuitos são tão utilizados que receberam nomes específicos. O amplificador inversor produz uma resposta da forma $v_o = -Kv_i$, em que K é uma constante positiva. O amplificador não inversor produz uma resposta da forma $v_o = Kv_i$, em que K é uma constante positiva maior que 1. Outro circuito muito usado é o do amplificador não inversor de ganho $K = 1$, conhecido como seguidor de tensão ou amplificador separador. A tensão de saída do seguidor de tensão é exatamente igual à tensão de entrada. Esse tipo de circuito é usado para evitar que um circuito carregue outro, isolando o terminal de entrada do primeiro do terminal da saída do segundo.
- A Figura 6.5-1 mostra alguns dos circuitos com amplificadores operacionais mais usados.
- Os amplificadores operacionais reais apresentam algumas propriedades que não são modeladas pelo amplificador operacional ideal, como tensão residual de entrada, correntes de polarização, ganho finito, resistência de entrada finita e resistência de saída diferente de zero. Para levar em conta essas propriedades, é preciso usar modelos mais complexos.
- O programa PSpice pode usado para facilitar a análise de circuitos que utilizam modelos complexos para os amplificadores operacionais.

PROBLEMAS

Seção 6.3 O Amplificador Operacional Ideal

P 6.3-1 Determine o valor da tensão medida pelo voltímetro na Figura P 6.3-1.

Resposta: –4 V.

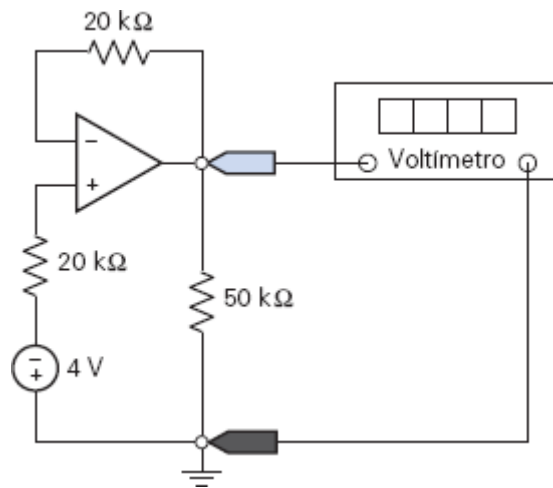



Figura P 6.3-1

P 6.3-2 Determine v_o e i_o no circuito da Figura P 6.3-2.

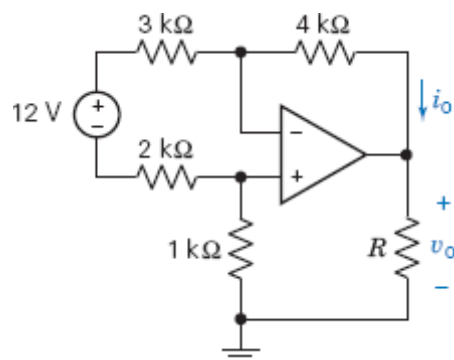



Figura P 6.3-2

P 6.3-3 Determine v_o e i_o no circuito da Figura P 6.3-3.

Resposta: v_o = –30 V e i_o = 3,5 mA.

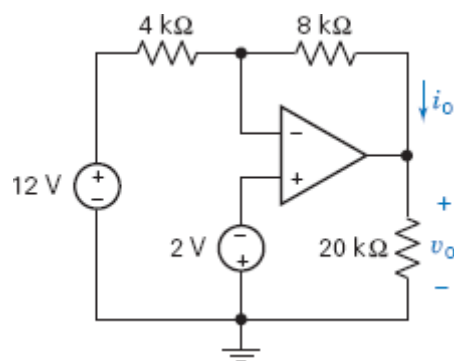



Figura P 6.3-3

P 6.3-4 Determine v e i no circuito da Figura P 6.3-4.

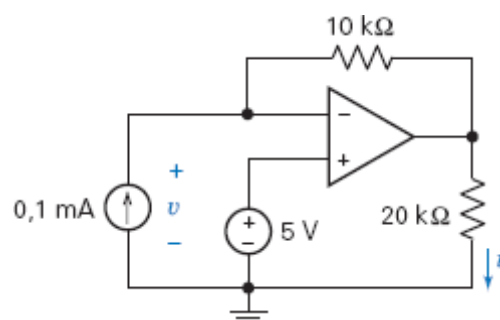



Figura P 6.3-4

P 6.3-5 Determine v_o e i_o no circuito da Figura P 6.3-5.

Resposta: $v_o = -15$ V e $i_o = 7,5$ mA.

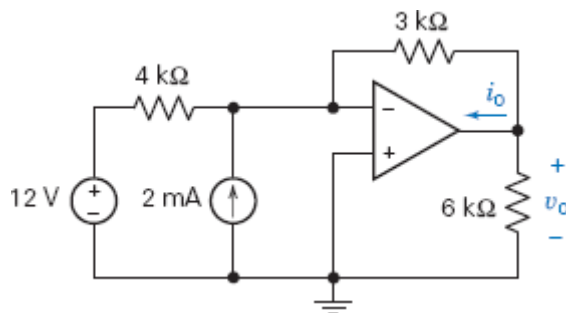



Figura P 6.3-5

P 6.3-6 Determine o valor da tensão medida pelo voltímetro da Figura P 6.3-6.

Resposta: 7,5 V.

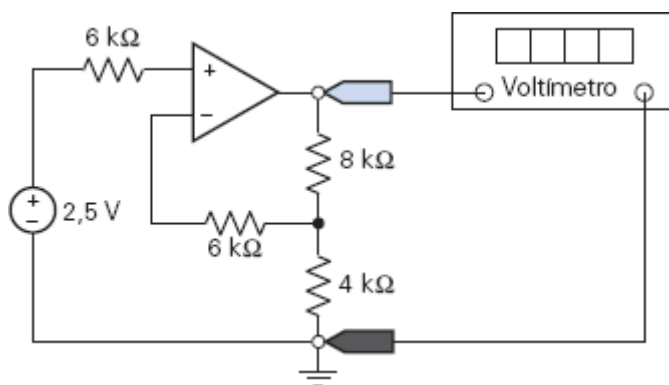



Figura P 6.3-6

P 6.3-7 Determine v_o e i_o no circuito da Figura P 6.3-7.

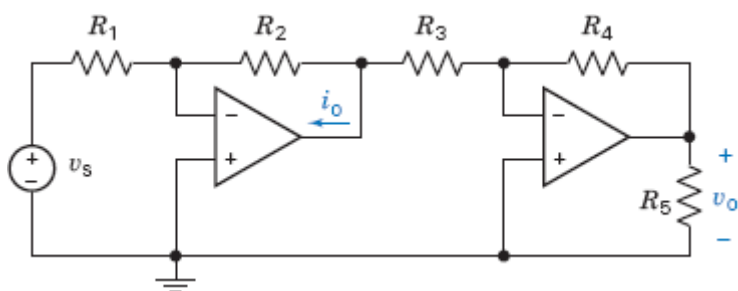



Figura P 6.3-7

P 6.3-8 Determine a corrente i_o no circuito da Figura P 6.3-8.

Resposta: $i_o = 2,5$ mA.

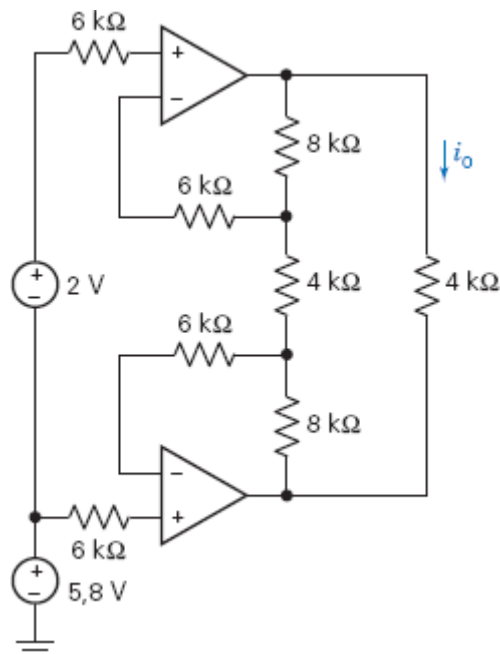



Figura P 6.3-8

P 6.3-9 Determine a tensão v_o no circuito da Figura P 6.3-9.

Resposta: $v_o = -8$ V.

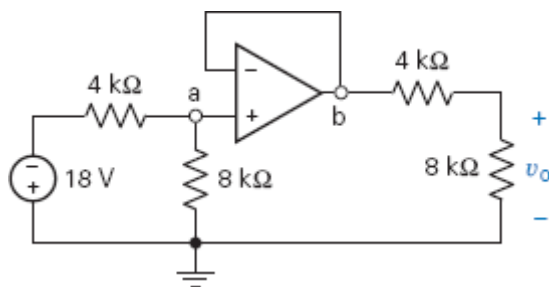



Figura P 6.3-9

P 6.3-10 O circuito da Figura P 6.3-10 possui uma entrada, i_s, e uma saída, v_o. Mostre que a saída é proporcional à entrada. Projete o circuito de tal forma que o ganho v_o/i_s seja 20 V/mA.

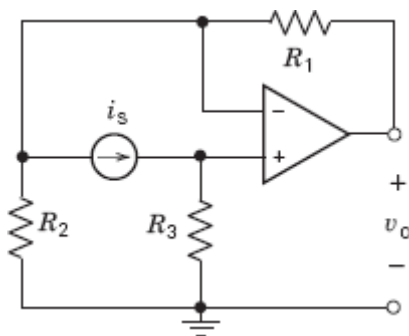



Figura P 6.3-10

P 6.3-11 O circuito da Figura P 6.3-11 possui uma entrada, v_s, e uma saída, v_o. Mostre que a saída é proporcional à entrada. Projete o circuito de tal forma que $v_o = 5v_s$.

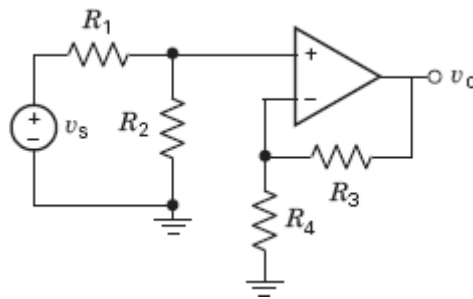



Figura P 6.3-11

P 6.3-12 A entrada do circuito da Figura P 6.3-12 é a tensão v_s e a saída é a tensão v_o. A saída está relacionada à entrada pela equação $v_o = mv_s + b$, em que m e b são constantes. Determine o valor de m e b.

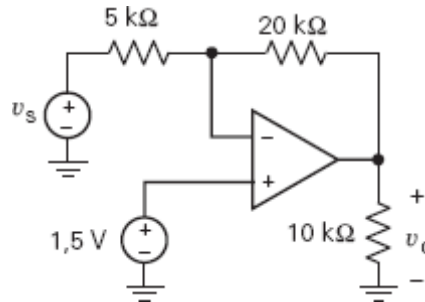



Figura P 6.3-12

P 6.3-13 A saída do circuito da Figura P 6.3-13 é v_o = 3,5 V. Determine o valor (a) da resistência R, (b) da potência fornecida pelas fontes e (c) da potência $p_{ao} = i_{ao} \times v_o$ fornecida pelo amplificador operacional.

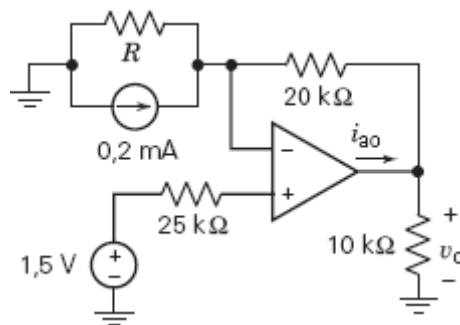



Figura P 6.3-13

P 6.3-14 Determine a tensão dos nós a, b, c e d do circuito da Figura P 6.3-14.

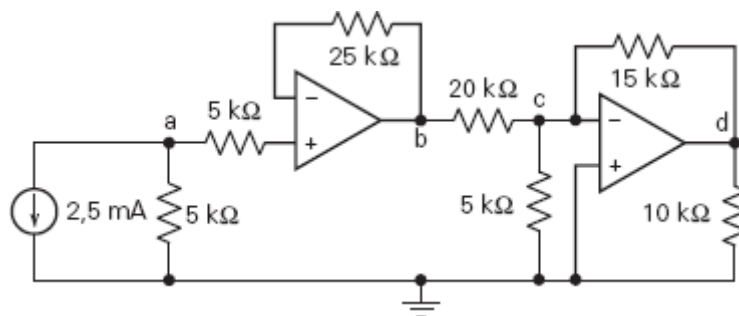



Figura P 6.3-14

P 6.3-15 Determine a tensão dos nós a, b, c e d do circuito da Figura P 6.3-15.

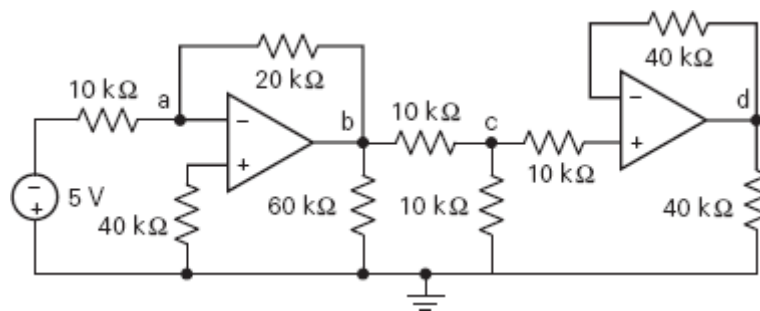



Figura P 6.3-15

P 6.3-16 A Figura P 6.3-16 mostra quatro circuitos do mesmo tipo. As saídas dos circuitos são as tensões v_1, v_2, v_3 e v_4. Determine o valor das quatro tensões.

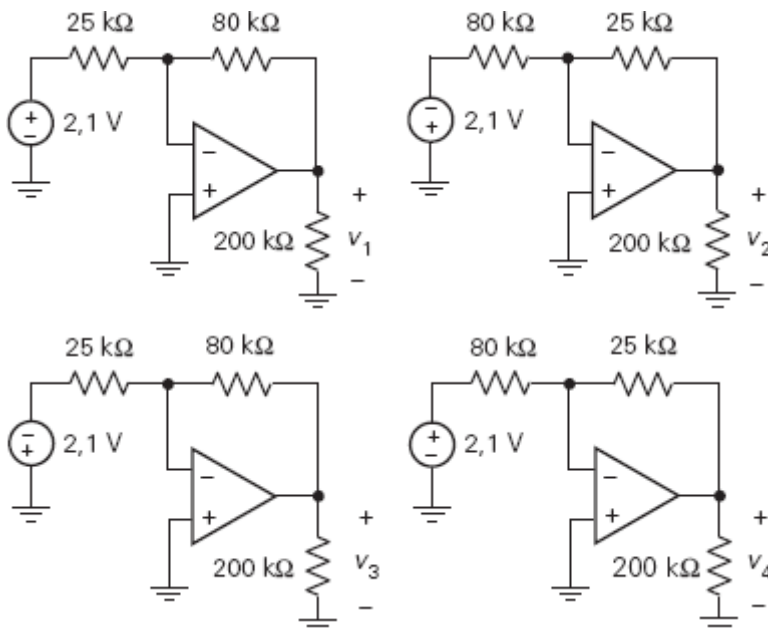



Figura P 6.3-16

P 6.3-17 A Figura P 6.3-17 mostra quatro circuitos do mesmo tipo. As saídas dos circuitos são as tensões v_1, v_2, v_3 e v_4. Determine o valor das quatro tensões.

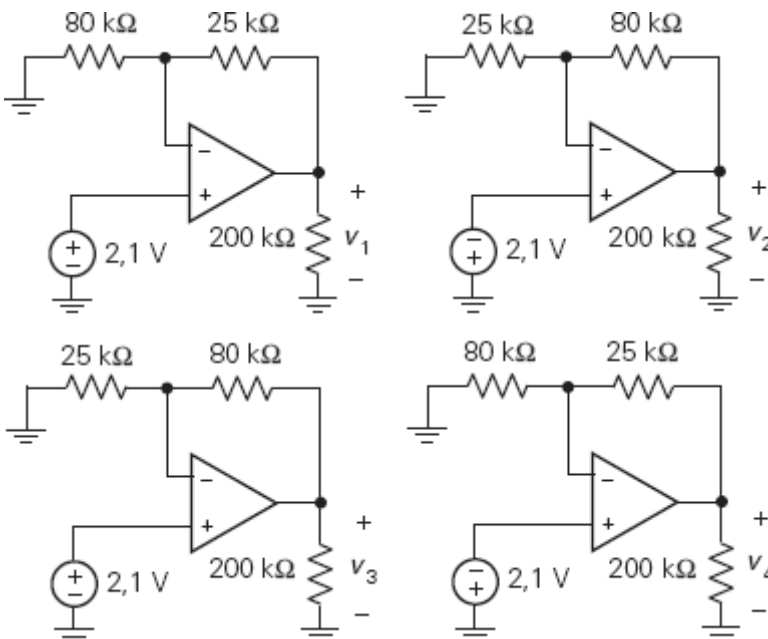



Figura P 6.3-17

Seção 6.4 Análise Nodal de Circuitos com Amplificadores Operacionais Ideais

P 6.4-1 Determine as tensões de nó do circuito da Figura P 6.4-1.

Resposta: $v_a = 2$ V, $v_b = -0{,}25$ V, $v_c = -5$V, $v_d = -2{,}5$ V e $v_e = -0{,}25$ V.

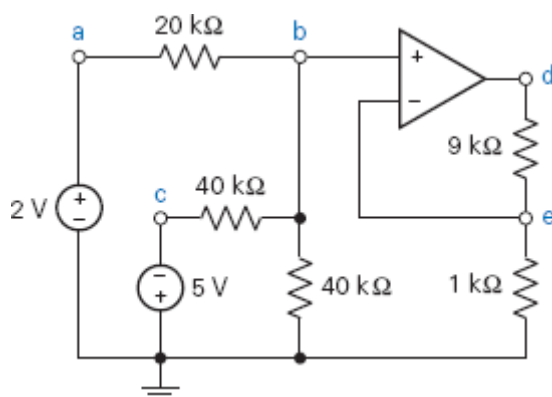



Figura P 6.4-1

P 6.4-2 Determine v_o e i_o no circuito da Figura P 6.4-2.

Resposta: $v_o = -4$ V e $i_o = 1{,}33$ mA.

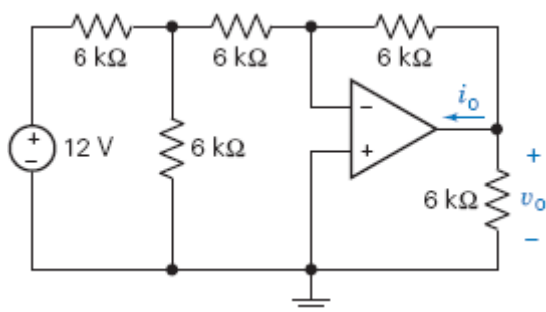



Figura P 6.4-2

P 6.4-3 Determine o valor das tensões de nó, v_a e v_o, no circuito da Figura P 6.4-3.

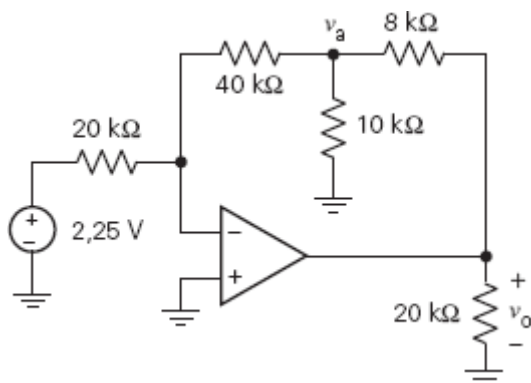



Figura P 6.4-3

P 6.4-4 A saída do circuito da Figura P 6.4-4 é v_o. As entradas são v_1 e v_2. Expresse a saída em função das entradas e da resistência dos resistores.

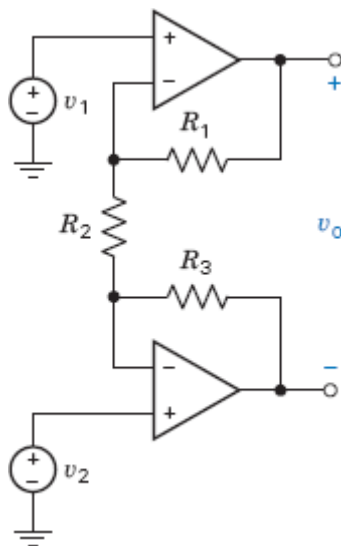



Figura P 6.4-4

P 6.4-5 As saídas dos circuitos da Figura P 6.4-5 são v_o e i_o. As entradas são v_1 e v_2. Expresse as saídas em função das entradas e da resistência dos resistores.

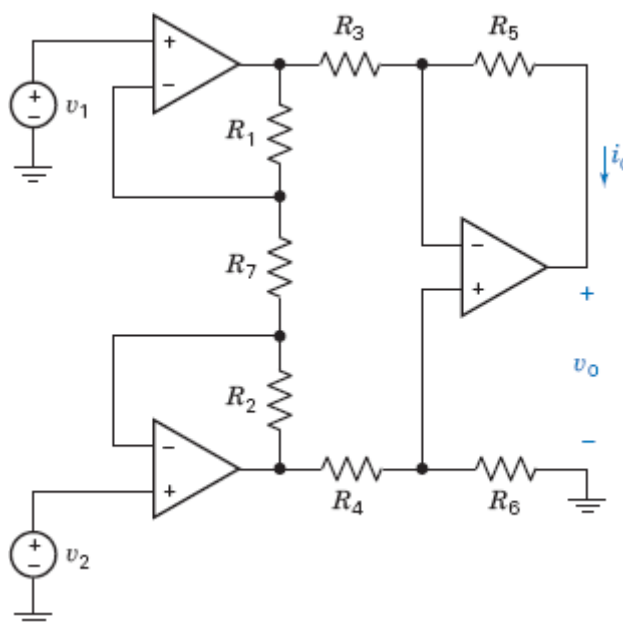



Figura P 6.4-5

P 6.4-6 Determine as tensões de nó no circuito da Figura P 6.4-6.

Resposta: v_a = –0,75 V, v_b = 0 V e v_c = –0,9375 V.

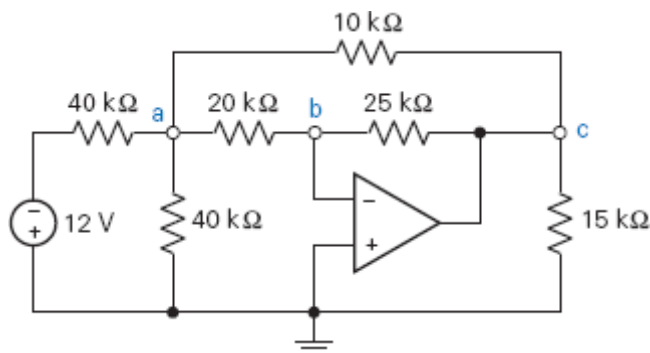



Figura P 6.4-6

P 6.4-7 Determine v_o e i_o no circuito da Figura P 6.4-7.

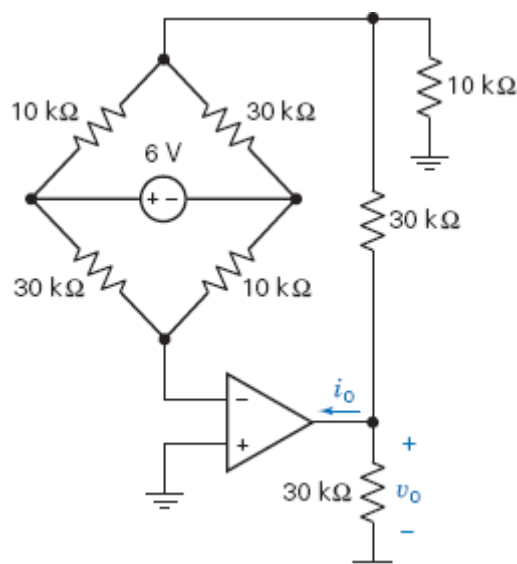



Figura P 6.4-7

P 6.4-8 Determine v_o e i_o no circuito da Figura P 6.4-8.

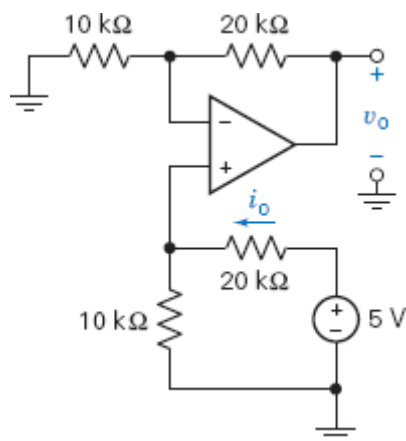



Figura P 6.4-8

P 6.4-9 Determine as tensões de nó do circuito da Figura P 6.4-9.

Resposta: $v_a = -12$ V, $v_b = -4$ V, $v_c = -4$ V, $v_d = -4$ V, $v_e = -3{,}2$ V, $v_f = -4{,}8$ V e $v_g = -3{,}2$ V.

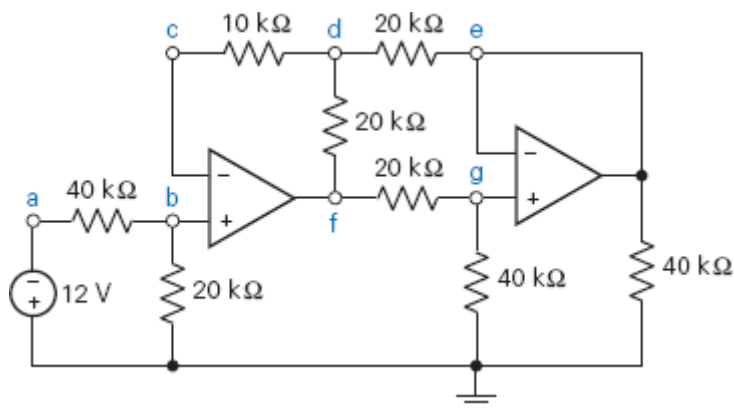



Figura P 6.4-9

P 6.4-10 O circuito da Figura P 6.4-10 contém um extensômetro simples, cuja resistência R muda de ΔR quando o extensômetro é torcido ou entortado. Escreva uma expressão para o ganho de tensão v_o/v_s e mostre

que o ganho é proporcional à variação relativa de R, $\Delta R/R_o$.

Resposta: $v_o = \dfrac{R_o}{R_o + R_1}\dfrac{\varnothing R}{R_o}$

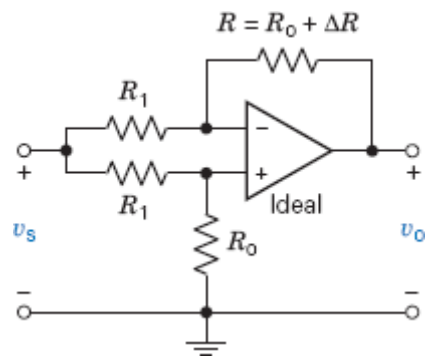



Figura P 6.4-10 Circuito de um extensômetro.

P 6.4-11 Determine v_o no circuito da Figura P 6.4-11.

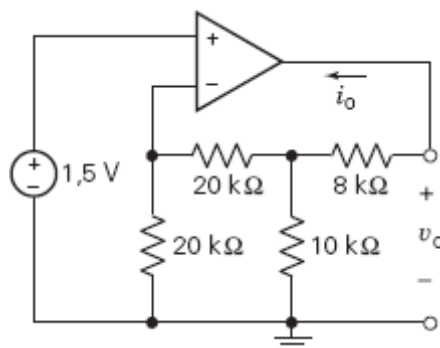



Figura P 6.4-11

P 6.4-12 O circuito da Figura P 6.4-12 possui uma saída, v_o, e duas entradas, v_1 e v_2. Mostre que se $R_3/R_4 = R_6/R_5$, a saída é proporcional à diferença entre as entradas, $v_1 - v_2$. Especifique os valores das resistências para que $v_o = 5(v_1 - v_2)$.

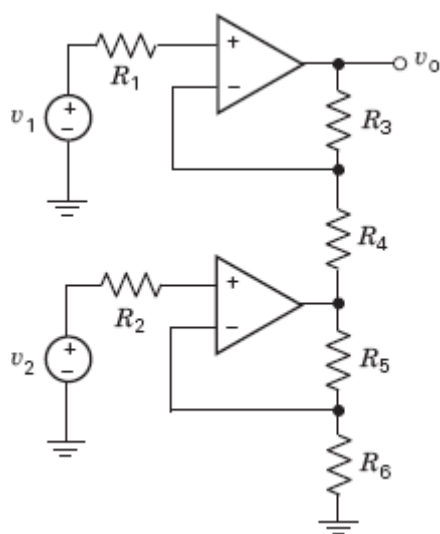



Figura P 6.4-12

P 6.4-13 O circuito da Figura P 6.4-13 possui uma saída, v_o, e uma entrada, v_i. Mostre que a saída é proporcional à entrada. Especifique o valor das resistências para que $v_o = 20v_i$.

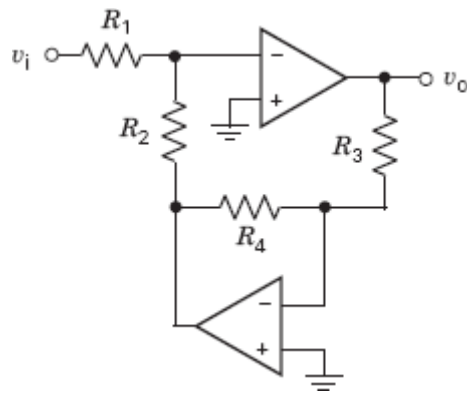



Figura P 6.4-13

P 6.4-14 O circuito da Figura P 6.4-14 possui uma entrada, v_s, e uma saída, v_o. Mostra que a saída é proporcional à entrada. Projete o circuito para que $v_o = 20v_s$.

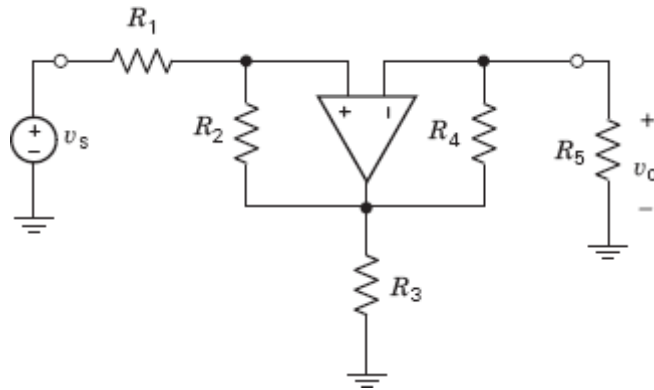



Figura P 6.4-14

P 6.4-15 O circuito da Figura P 6.4-15 possui uma entrada, v_s, e uma saída, v_o. O circuito contém sete resistores, todos de resistência R. Expresse o ganho do circuito, v_o/v_s, em termos da resistência R.

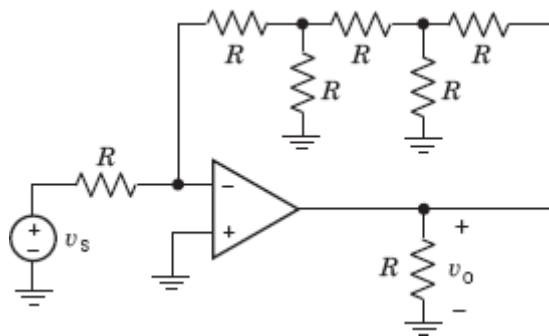



Figura P 6.4-15

P 6.4-16 O circuito da Figura 6.4-16 possui uma entrada, v_s, e uma saída, v_o. Expresse o ganho, v_o/v_s, em termos das resistências R_1, R_2, R_3, R_4 e R_5. Projete o circuito para que $v_o = -20v_s$.

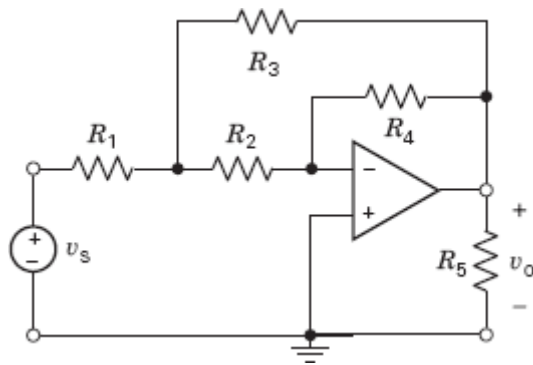



Figura P 6.4-16

P 6.4-17 O circuito da Figura P 6.4-17 possui uma entrada, v_s, e uma saída, v_o. Expresse o ganho do circuito, v_o/v_s, em termos das resistências R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 e R_6. Projete o circuito para que $v_o = -20v_s$.

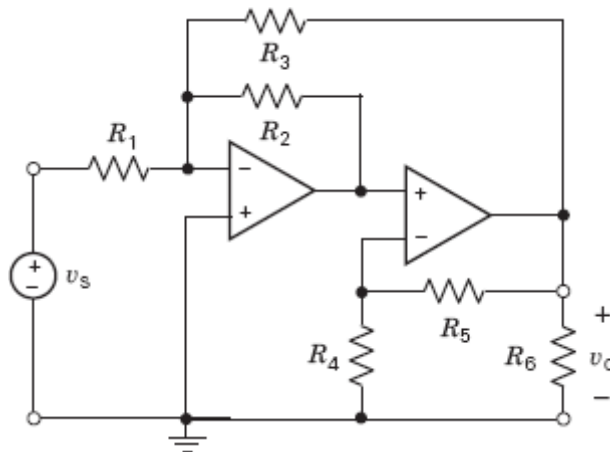



Figura P 6.4-17

P 6.4-18 O circuito da Figura P 6.4-18 possui uma entrada, v_s, e uma saída, i_o. Expresse o ganho do circuito, i_o/v_s, em termos das resistências R_1, R_2, R_3 e R_o. (Este circuito contém um par de resistores de resistência R_1 e outro par de resistência R_2.) Projete o circuito para que $i_o = 0{,}02v_s$.

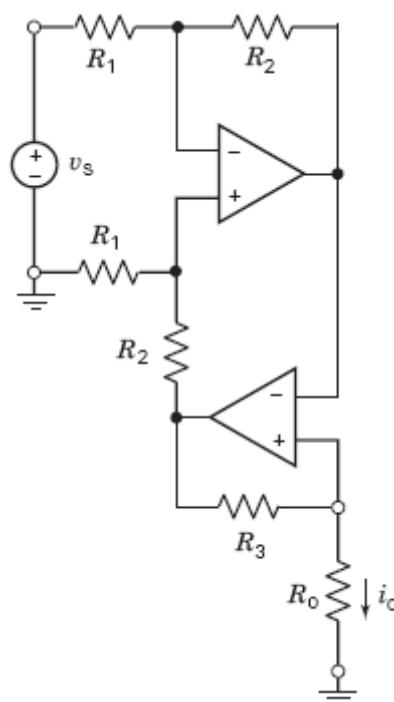



Figura P 6.4-18

P 6.4-19 O circuito da Figura P 6.4-19 possui uma entrada, v_s, e uma saída, v_o. O circuito contém uma resistência a ser especificada, R.

(a) Expresse o ganho do circuito, v_o/v_s, em termos da resistência R.

(b) Determine entre que valores o ganho do circuito pode variar, dependendo do valor da resistência R.

(c) Projete o circuito para que $v_o = -3v_s$.

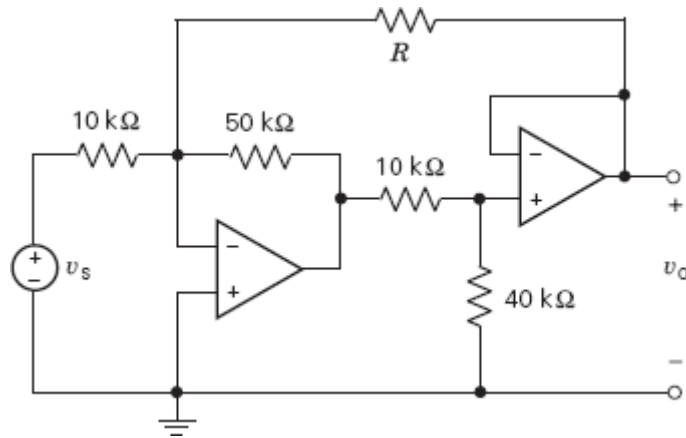



Figura P 6.4-19

P 6.4-20 O circuito da Figura P 6.4-20 possui uma entrada, v_s, e uma saída, v_o. O circuito contém uma resistência a ser especificada, R.

(a) Expresse o ganho do circuito, v_o/v_s, em termos da resistência R.

(b) Determine entre que valores o ganho do circuito pode variar, dependendo do valor da resistência R.

(c) Projete o circuito para que $v_o = -5v_s$.

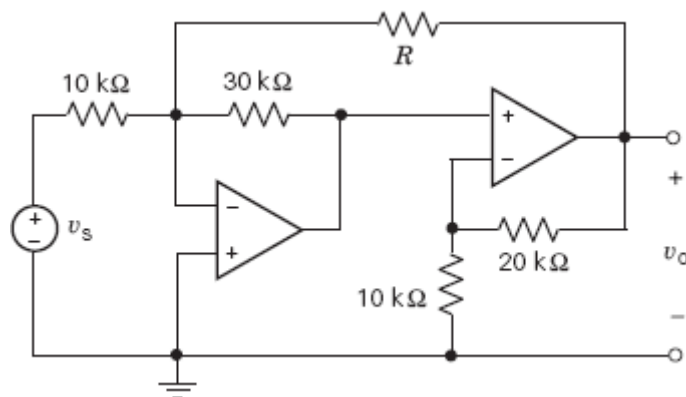



Figura P 6.4-20

P 6.4-21 O circuito da Figura P 6.4-21 possui três entradas: v_1, v_2 e v_3. A saída do circuito é v_o. A saída está relacionada às entradas através da equação

$$v_o = av_1 + bv_2 + cv_3$$

em que a, b e c são constantes. Determine o valor de a, b e c.

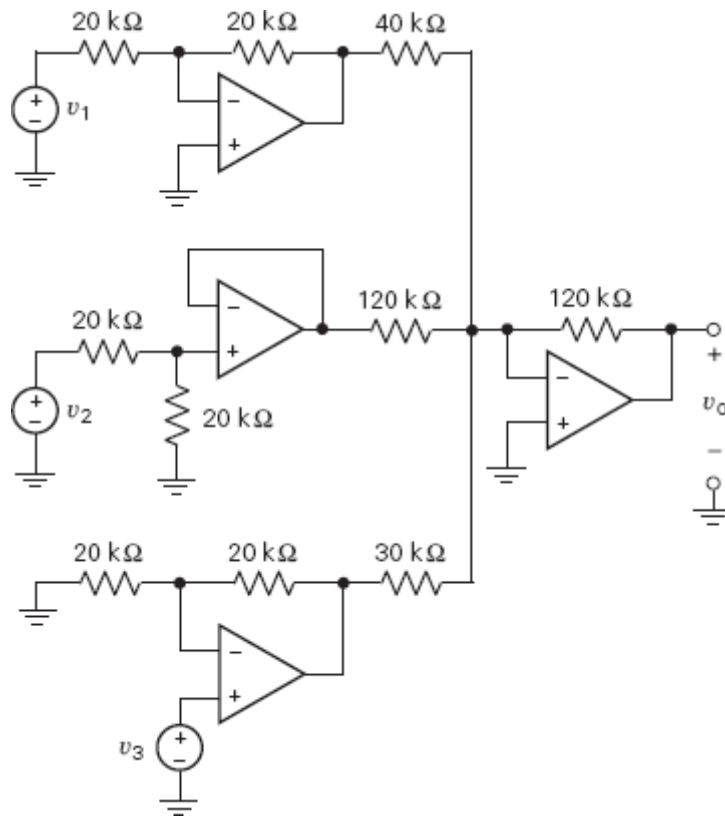



Figura P 6.4-21

P 6.4-22 O circuito da Figura P 6.4-22 possui duas entradas: v_1 e v_2. A saída do circuito v_o. A saída está relacionada às entradas através da equação

$$v_o = av_1 + bv_2$$

em que a e b são constantes. Determine o valor de a e b.

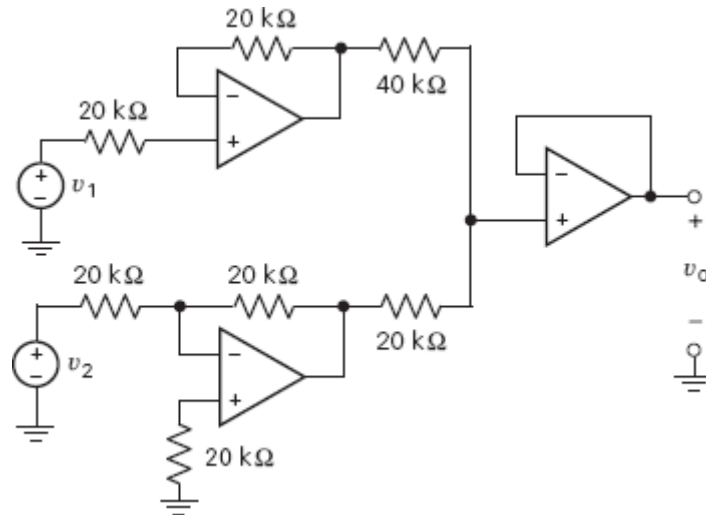



Figura P 6.4-22

P 6.4-23 A entrada do circuito da Figura P 6.4-23 é a tensão v_s da fonte de tensão. A saída é a tensão de nó v_o. A saída está relacionada à entrada através da equação $v_o = kv_s$, em que $k = v_o/v_s$ é o ganho do circuito. Determine o valor de k.

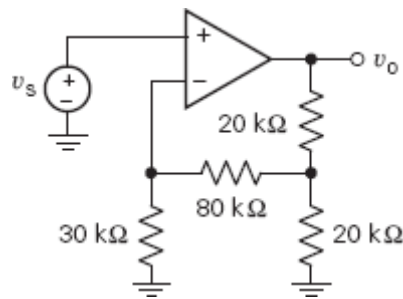



Figura P 6.4-23

P 6.4-24 A entrada do circuito da Figura P 6.4-24 é a corrente i_s da fonte de corrente. A saída é a tensão de nó v_o. A saída está relacionada à entrada através da equação $v_o = mi_s + b$, em que m e b são constantes. Determine o valor de m e b.

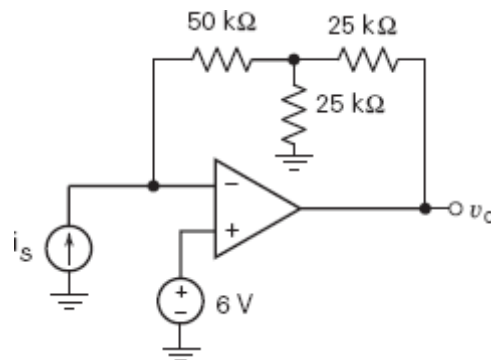



Figura P 6.4-24

P 6.4-25 A entrada do circuito da Figura P 6.4-25 é a tensão de nó v_s. A saída é a tensão de nó v_o. A saída está relacionada à entrada através da equação $v_o = kv_s$, em que $k = v_o/v_s$ é o ganho do circuito. Determine o valor de k.

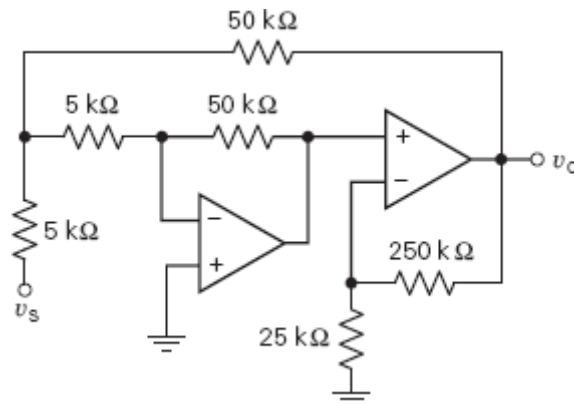



Figura P 6.4-25

P 6.4-26 O valor das tensões de nó v_1, v_2 e v_o na Figura P 6.4-26 é v_1 = 6,25 V, v_2 = 3,75 V e v_o = –15 V. Determine o valor das resistências R_1, R_2 e R_3.

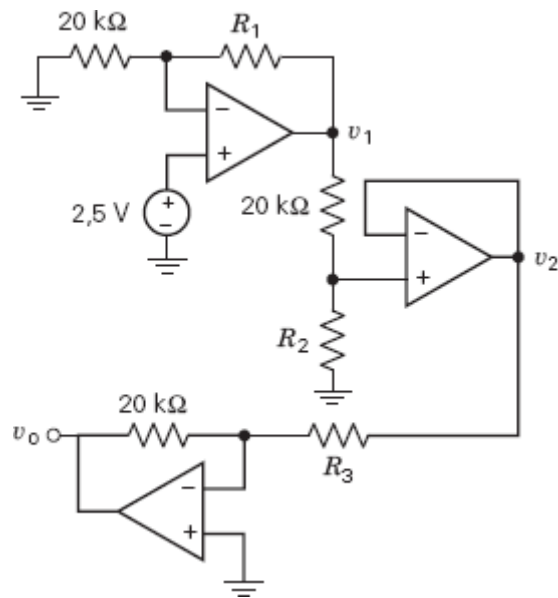



Figura P 6.4-26

P 6.4-27 A entrada do circuito da Figura P 6.4-27 é a tensão v_i da fonte de tensão. A saída é a tensão de nó v_o. A saída está relacionada à entrada através da equação $v_o = kv_i$, em que $k = v_o/v_i$ é o ganho do circuito. Determine o valor de k.

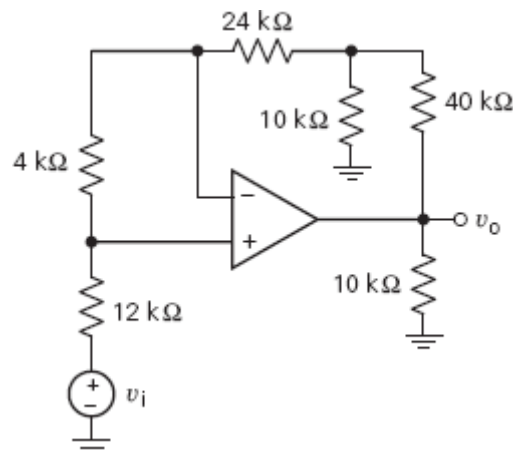



Figura P 6.4-27

Seção 6.5 Projeto de Circuitos com Amplificadores Operacionais

P 6.5-1 Projete o circuito com um amplificador operacional da Figura P 6.5-1 para que

$$v_{out} = r \cdot i_m$$

em que

$$r = 20 \frac{\text{V}}{\text{mA}}$$

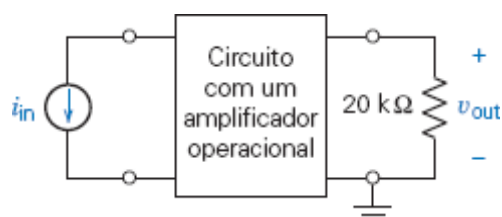



Figura P 6.5-1

P 6.5-2 Projete o circuito com um amplificador operacional da Figura P 6.5-2 para que

$$i_{out} = g \cdot v_{in}$$

em que

$$g = 2 \frac{\text{mA}}{\text{V}}$$

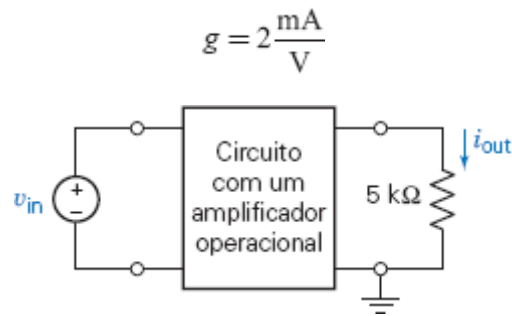



Figura P 6.5-2

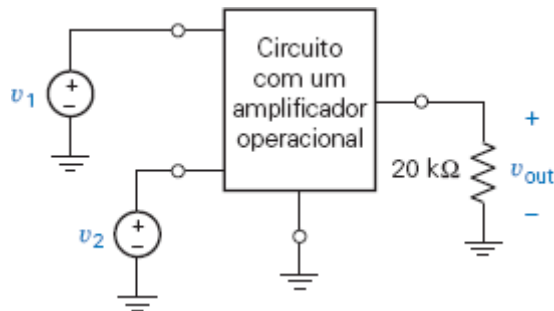
P 6.5-3 Projete o circuito com um amplificador operacional da Figura P 6.5-3 para que

$$v_{out} = 5 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2$$

Figura P 6.5-3

P 6.5-4 Projete o circuito com um amplificador operacional da Figura P 6.5-3 para que

$$v_{out} = 5 \cdot (v_1 - v_2)$$

P 6.5-5 Projete o circuito com um amplificador operacional da Figura P 6.5-3 para que

$$v_{out} = 5 \cdot v_1 - 2 \cdot v_2$$

P 6.5-6 O divisor de tensão da Figura P 6.5-6 tem um ganho de

$$\frac{v_{out}}{v_{in}} = \frac{-10 \text{ k}\Omega}{5 \text{ k}\Omega + (-10 \text{ k}\Omega)} = 2$$

Projete um circuito com um amplificador operacional para implementar o resistor de –10 kΩ.

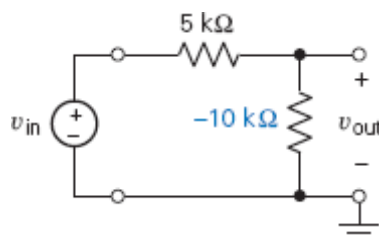



Figura P 6.5-6 Circuito com uma resistência negativa.

P 6.5-7 Projete o circuito com um amplificador operacional da Figura P 6.5-7 para que

$$i_{in} = 0 \text{ e } v_{out} = 3 \cdot v_{in}$$

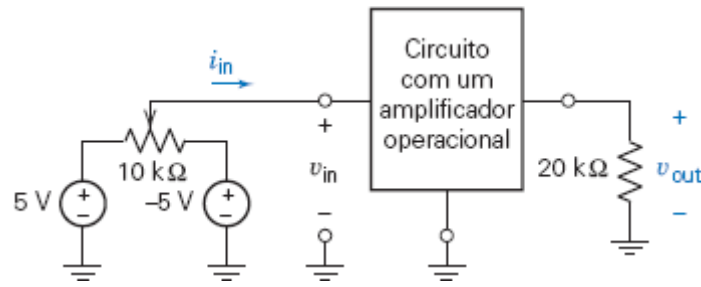



Figura P 6.5-7

P 6.5-8 Projete um circuito com um amplificador operacional cuja saída seja $v_o = 6v_1 = 2v_2$, em que v_1 e v_2 são as tensões de entrada.

P 6.5-9 Determine a tensão v_o no circuito da Figura P 6.5-9. Suponha que o amplificador operacional é ideal.

Sugestão: Use o princípio da superposição.

Resposta: $v_o = 7$ V

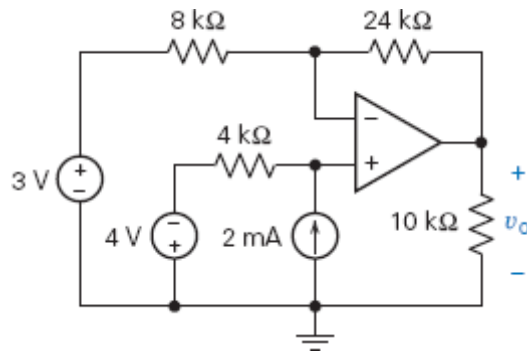



Figura P 6.5-9

P 6.5-10 No circuito com um amplificador operacional na Figura P 6.5-10, faça uma lista de todos os ganhos de tensão que podem ser obtidos ligando os terminais dos resistores ao terminal de entrada ou ao terminal de saída do circuito.

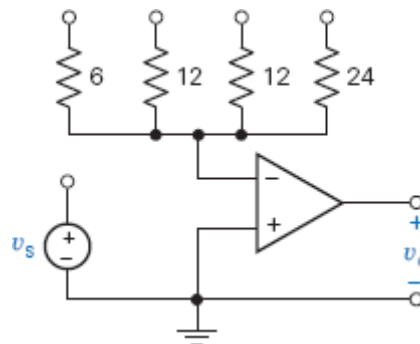



Figura P 6.5-10 As resistência estão em kW.

P 6.5-11 O circuito da Figura P 6.5-11, conhecido como fonte de corrente de Howland, possui uma entrada, v_{in}, e uma saída, i_{out}. Mostre que se resistências forem escolhidas de tal forma que $R_2R_3 = R_1R_4$, a saída estará relacionada à entrada através da equação

$$i_{out} = \frac{v_{in}}{R_1}$$

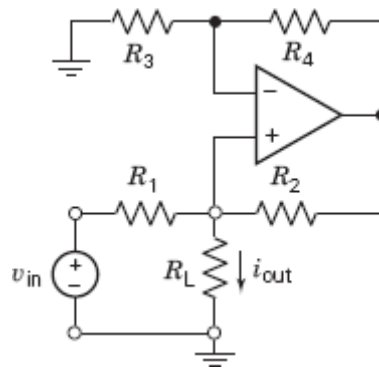



Figura P 6.5-11

P 6.5-12 A entrada do circuito da Figura P 6.5-12*a* é a tensão v_s. A saída é a tensão v_o. A tensão v_b é usada para ajustar a relação entre a entrada e a saída.

(a) Mostre que a saída do circuito está relacionada à entrada através da equação

$$v_o = av_s + b$$

em que a e b são constantes que dependem de R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 e v_b.

(b) Projete o circuito para que a relação entre a entrada e a saída seja a que está representada pelo gráfico da Figura P 6.5-12*b*.

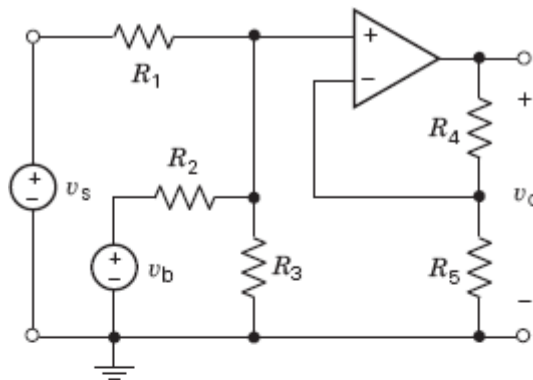
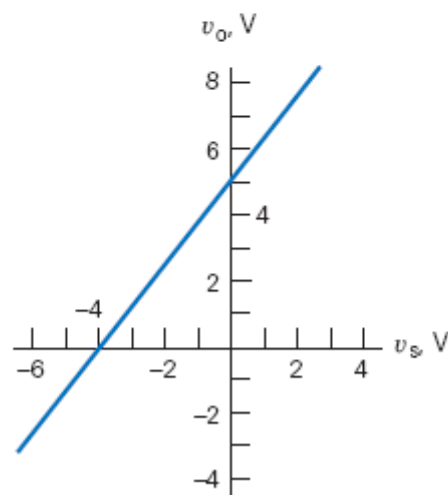



Figura P 6.5-12

P 6.5-13 A entrada do circuito da Figura P 6.5-13*a* é a tensão v_s. A saída é a tensão v_o. A tensão v_b é usada para ajustar a relação entre a entrada e a saída.

(a) Mostre que a saída do circuito está relacionada à entrada através da equação

$$v_o = av_s + b$$

em que a e b são constantes que dependem de R_1, R_2, R_3, R_4 e v_b.

(b) Projete o circuito para que a relação entre a entrada e a saída seja a que está representada pelo gráfico da Figura P 6.5-13*b*.

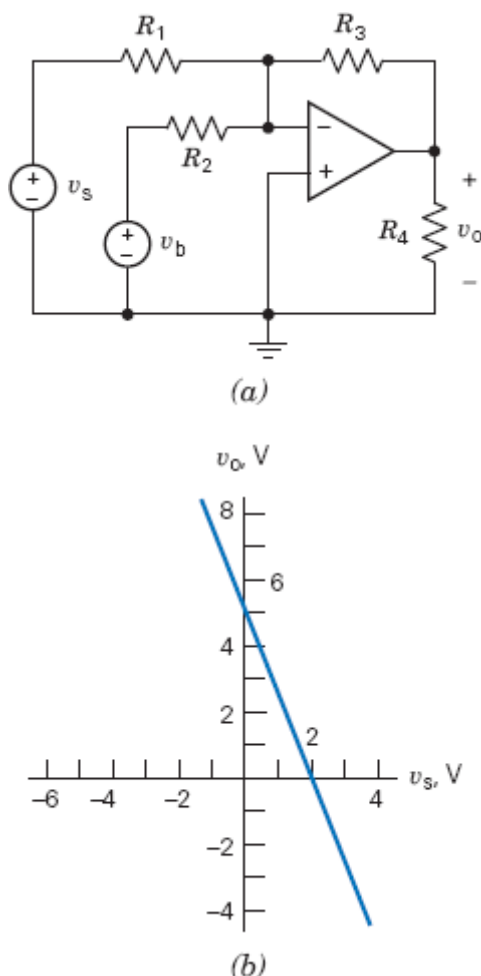



Figura P 6.5-13

P 6.5-14 A entrada do circuito da Figura P 6.5-14 é a tensão v_s da fonte de tensão e a saída é a tensão de nó v_o. A saída está relacionada à entrada através da equação $v_o = mv_s + b$, em que m e b são constantes. (a) Especifique valores de R_3 e v_a para que a saída esteja relacionada à entrada através da equação $v_o = 4v_s + 7$. (b) Determine os valores de m e b para $R_3 = 20$ kΩ e $v_a = 2{,}5$ V.

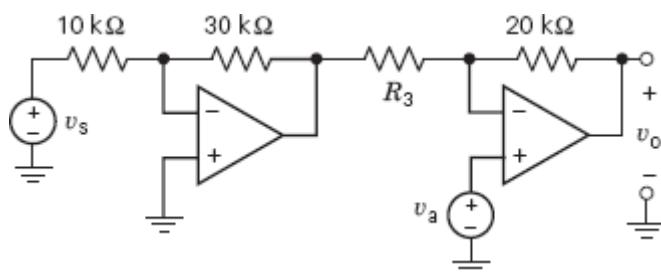



Figura P 6.5-14

P 6.5-15 O circuito da Figura P 6.5-15 utiliza um potenciômetro para implementar um resistor variável com uma resistência R que pode ser ajustada no intervalo

$$0 < R < 200\ \text{k}\Omega$$

O ganho do circuito é $G = v_o/v_s$. Quando a resistência R varia entre 0 e 200 kΩ, o ganho G varia no intervalo

$$G_{min} \leq \frac{v_o}{v_s} \leq G_{max}$$

Determine o valor do ganho máximo, G_{max}, e do ganho mínimo, G_{min}.

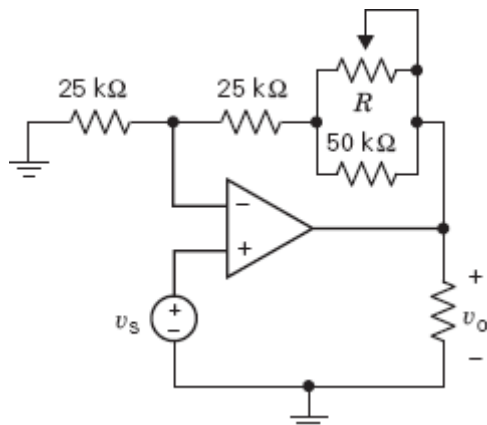



Figura P 6.5-15

P 6.5-16 A entrada do circuito da Figura P 6.5-16*a* é a tensão v_s e a saída é a tensão v_o. A tensão v_b é usada para ajustar a relação entre a entrada e a saída. Determine o valor de v_b e R_4 para que a relação entre a entrada e a saída seja a que aparece no gráfico da Figura P 6.5-16*b*.

Resposta: $v_b = 1{,}62$ V e $R_4 = 62{,}5$ kΩ

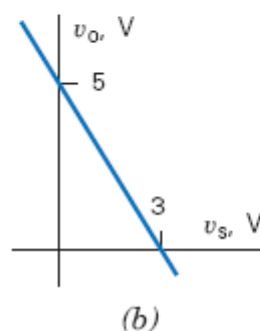
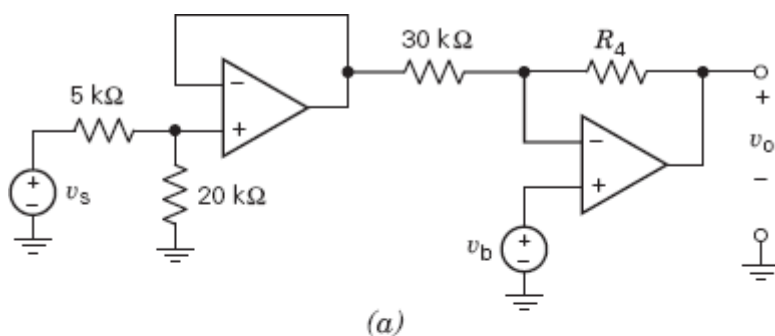



Figura P 6.5-16

P 6.5-17 A Figura P 6.5-17 mostra três circuitos do mesmo tipo. As saídas dos circuitos são as tensões v_1, v_2 e v_3. Determine o valor das três tensões.

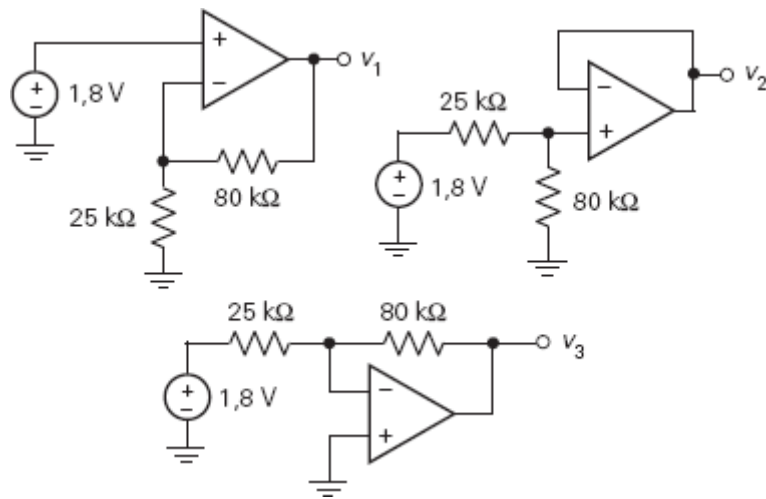



Figura P 6.5-17

P 6.5-18 A entrada do circuito da Figura P 6.5-18 é a tensão v_s. A saída é a tensão do resistor de 25 kΩ, v_o. A saída está relacionada à entrada pela equação $v_o = gv_i$, onde g é o ganho do circuito. Determine o valor de g.

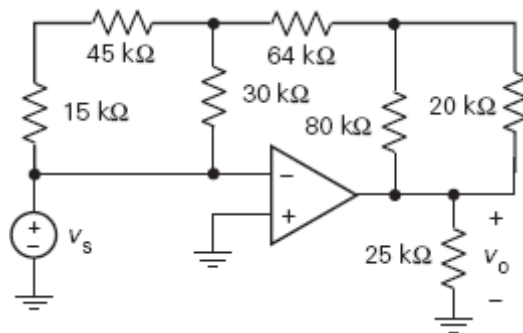



Figura P 6.5-18

Seção 6.6 Circuitos com Amplificadores Operacionais e Equações Algébricas Lineares

P 6.6-1 Projete um circuito para implementar a equação

$$z = 4w + \frac{x}{4} - 3y$$

O circuito deve ter uma entrada, correspondente a z, e três saídas, correspondentes a w, x e y.

P 6.6-2 Projete um circuito para implementar a equação

$$0 = 4w + x + 10 - (6y + 2z)$$

A saída do circuito deve corresponder a z.

Seção 6.7 Características de Amplificadores Operacionais Reais

P 6.7-1 Considere o amplificador inversor da Figura P 6.7-1. O amplificador operacional é um OP-07E típico (veja a Tabela 6.7-1). Use o modelo de resíduos do amplificador operacional para calcular a tensão residual de saída. (Lembre-se de que a entrada, v_{in}, é tomada como zero para efeito do cálculo da tensão residual de saída.)

Resposta: 0,45 mV.

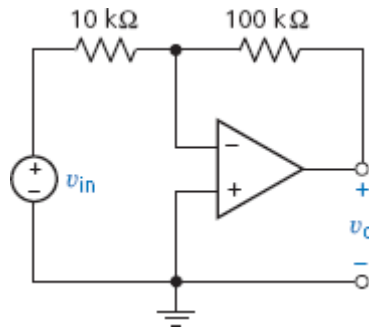



Figura P 6.7-1

P 6.7-2 Considere o amplificador não inversor da Figura P 6.7-2. O amplificador operacional é um LF351 típico (veja a Tabela 6.7-1). Use o modelo de resíduos do amplificador operacional para calcular a tensão residual de saída. (Lembre-se de que a entrada, v_{in}, é tomada como zero para efeito do cálculo da tensão residual de saída.)

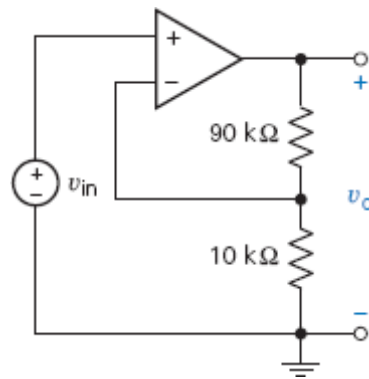



Figura 6.7-2

P 6.7-3 Considere o amplificador inversor na Figura P 6.7-3. Use o modelo de ganho finito do amplificador operacional (Figura 6.7-1*c*) para calcular o ganho do amplificador inversor. Mostre que

$$\frac{v_o}{v_{in}} = \frac{R_{in}(R_o - AR_2)}{(R_1 + R_{in})(R_o + R_2) + R_1 R_{in}(1 + A)}$$

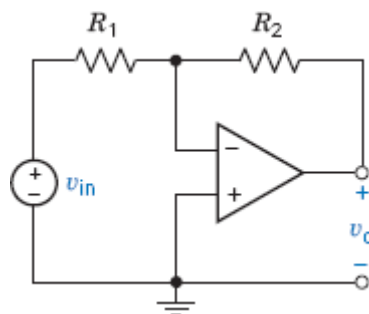



Figura P 6.7-3

P 6.7-4 Considere o amplificador inversor da Figura P 6.7-3. Suponha que o amplificador operacional é ideal, que $R_1 = 5$ kΩ e que $R_2 = 50$ kΩ. Nesse caso, o ganho do amplificador inversor é

$$\frac{v_o}{v_{in}} = -10$$

Use o resultado do Problema P 6.7-3 para determinar o ganho do amplificador inversor nos seguintes casos:

(a) O amplificador operacional é ideal, mas são usados resistores de 2 % e, na verdade, $R_1 = 5{,}1$ kΩ e $R_2 = 49$ kΩ.

(b) O amplificador operacional é representado usando o modelo de ganho finito com A = 200.000, R_i = 2 MΩ e R_o = 75 Ω; R_1 = 5 kΩ e R_2 = 50 kΩ.

(c) O amplificador operacional é representado usando o modelo de ganho finito com A = 200.000, R_i = 2 MΩ e R_o = 75 Ω; R_1 = 5,1 kΩ e R_2 = 49 kΩ.

P 6.7-5 O circuito da Figura P 6.7-5 é chamado de amplificador diferença e usado em instrumentos de medição. As saídas do circuito são o sinal de modo comum v_{mc} e o sinal diferença $v_o = v_n + v_p$. Supondo que o amplificador operacional é ideal, mostre que

$$v_o = -\frac{R_4}{R_1}(v_n + v_p)$$

para

$$\frac{R_4}{R_1} = \frac{R_3}{R_2}$$

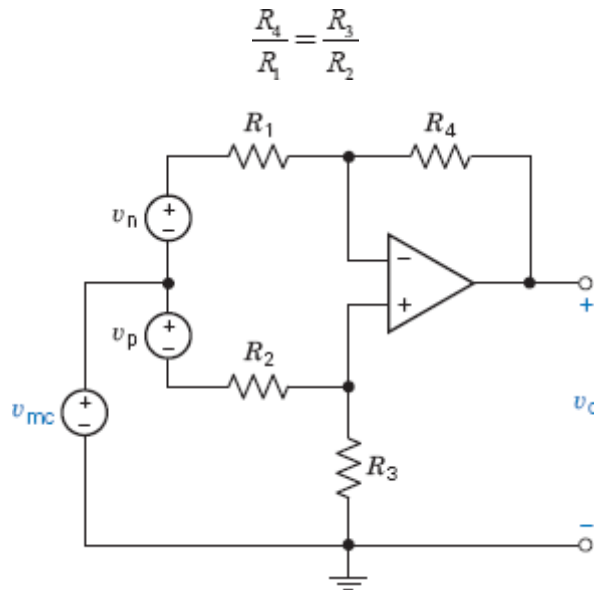



Figura P 6.7-5

Seção 6.10 Como Podemos Testar . . . ?

P 6.10-1 A análise do circuito da Figura P 6.10-1 mostra que i_o = –1 mA e v_o = 7 V. A análise está correta?

Sugestão: A LKC é satisfeita para o nó de saída do amplificador operacional?

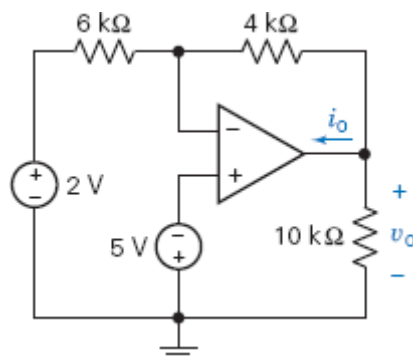



Figura P 6.10-1

P 6.10-2 Seu colega de laboratório mediu a tensão de saída do circuito da Figura P 6.10-2 e encontrou o valor v_o = 9,6 V. Esse valor é razoável?

Sugestão: Peça ao seu colega para verificar a polaridade da tensão que ele mediu.

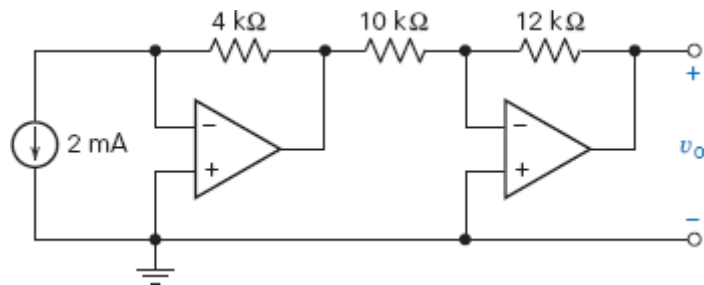



Figura P 6.10-2

P 6.10-3 A análise nodal do circuito da Figura P 6.10-3 mostra que $v_o = -12$ V. O resultado está correto?

Sugestão: Desenhe o circuito de outra forma, para poder identificar um amplificador inversor e um amplificador não inversor.

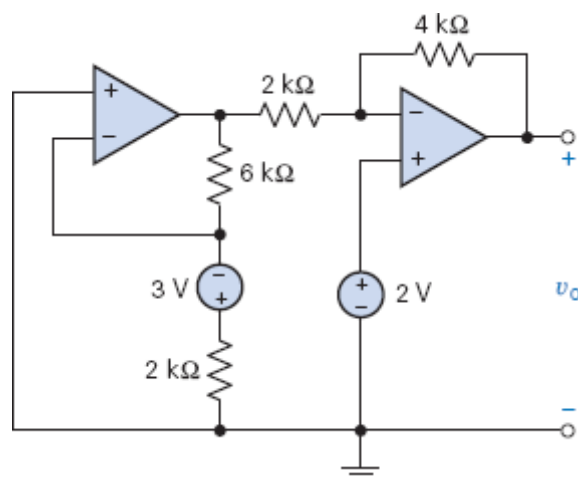



Figura P 6.10-3

P 6.10-4 A análise em computador do circuito da Figura P 6.10-4 indica que as tensões dos nós são $v_a = -5$V, $v_b = 0$ V, $v_c = 2$ V, $v_d = 5$ V, $v_e = 2$ V, $v_f = 2$ V e $v_g = 11$ V. A análise está correta? Justifique sua resposta. Suponha que o amplificador operacional é ideal.

Sugestão: Verifique se as correntes nos resistores satisfazem a LKC para os nós b, c, d e f.

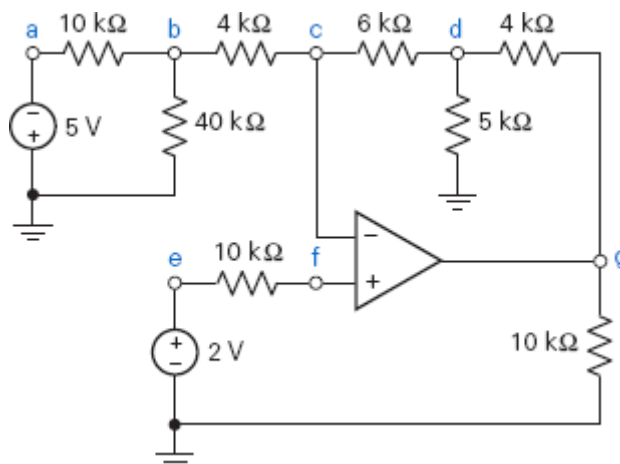



Figura P 6.10-4

P 6.10-5 A análise em computador do amplificador somador não inversor da Figura P 6.10-5 mostra que as tensões de nó são $v_a = 2$ V, $v_b = -0{,}25$ V, $v_c = -5$ V, $v_d = -2{,}5$ V e $v_e = -0{,}25$ V.

(a) A análise está correta?

(b) A análise mostra que o circuito é um amplificador somador não inversor? Justifique suas respostas. Suponha que o amplificador operacional seja ideal.

1ª Sugestão: Verifique se as correntes nos resistores satisfazem a LKC para os nós b e c.

2ª Sugestão: Compare o circuito com o da Figura 6.5-1*e* para constatar que $R_a = 10$ kΩ e $R_b = 1$ kΩ. Determine K_1, K_2 e K_4 a partir dos valores das resistências. Mostre que $v_d = K_4(K_1 v_a + K_2 v_c)$.

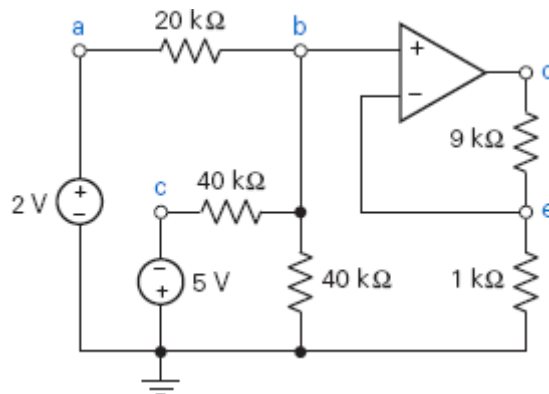



Figura P 6.10-5

Problemas com o PSpice

PS 6-1 O circuito da Figura PS 6-1 possui três entradas, v_w, v_x e v_y, e uma saída, v_z. A equação

$$v_z = av_w + bv_x + cv_y$$

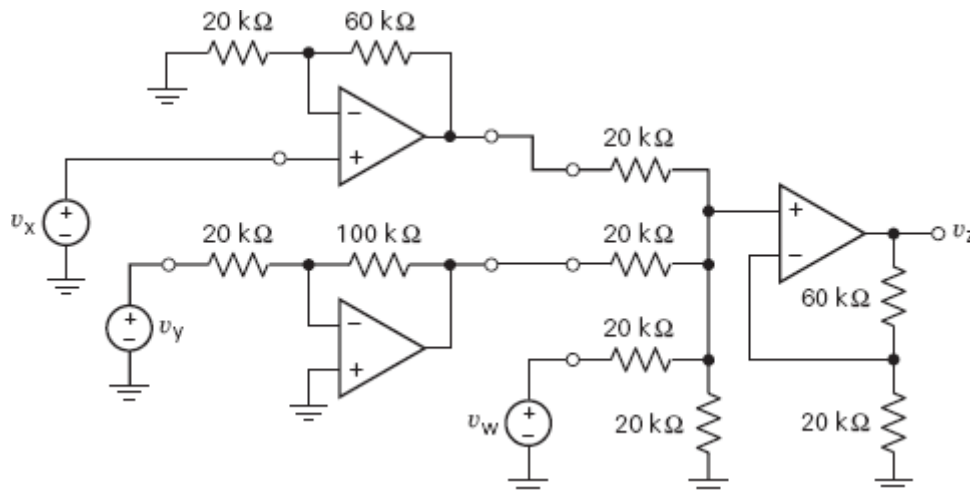



Figura PS 6-1

expressa a saída em função das entradas. Os coeficientes *a*, *b* e *c* são constantes reais.

(a) Use o PSpice e o princípio da superposição para determinar os valores de *a*, *b* e *c*.

(b) Suponha que $v_w = 2$ V, $v_x = x$, $v_y = y$ e que queremos que a saída seja $v_z = z$. Expresse *z* em função de *x* e *y*.

Sugestão: A saída é dada por $v_z = a$ se $v_w = 1$ V, $v_x = 0$ V e $v_y = 0$ V.

Resposta: (a) $v_z = v_w + 4v_x - 5v_y$; (b) $z = 4x - 5y + 2$.

PS 6-2 A entrada do circuito da Figura SP 6-2 é v_s e a saída é v_o. (a) Use o princípio da superposição para expressar v_o em função de v_s. (b) Use o comando DC Sweep do PSpice para plotar v_o em função de v_s. (c) Mostre que os resultados dos itens (a) e (b) são coerentes.

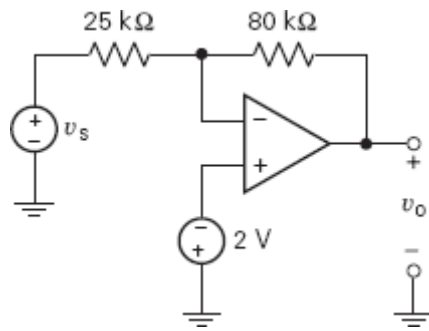



Figura PS 6-2

PS 6-3 A Figura PS 6-3 mostra um circuito ponte com os nós identificados. Determine v_{34}, v_{23}, v_{50} e i_o.

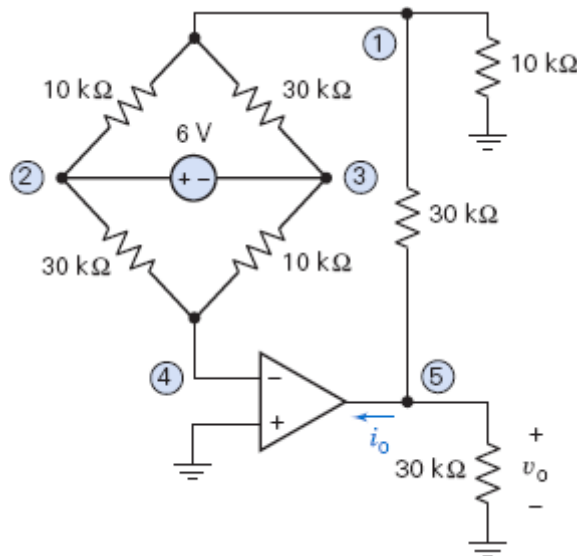



Figura PS 6-3 Circuito ponte.

PS 6-4 Use o PSpice para analisar a FCCT da Figura PS 6-4. Considere dois casos:

(a) O amplificador operacional é ideal.

(b) O amplificador operacional é um μA741 típico representado pelo modelo de resíduos e ganho finito.

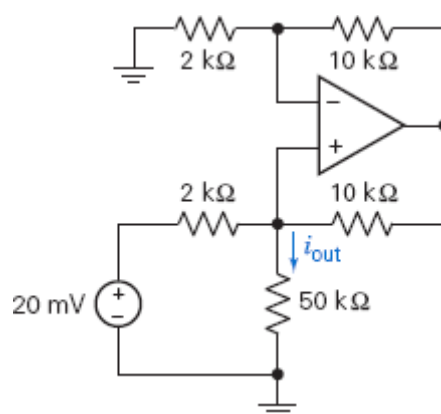



Figura PS 6-4 Uma FCCT.

Problemas de Projeto

PP 6-1 Projete o circuito com um amplificador operacional da Figura PP 6-1 para que

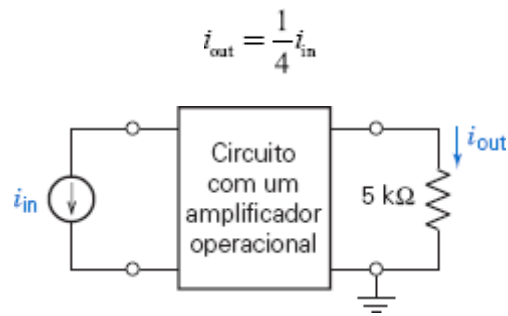



Figura PP 6-1

PP 6-2 A Figura PP 6-2*a* mostra um circuito que possui uma entrada, v_i, e uma saída, v_o. A Figura PP 6-2*b* mostra um gráfico que especifica uma relação entre v_o e v_i. Projete um circuito com uma entrada v_i e uma saída v_o entre as quais existe a relação dada pelo gráfico da Figura PP 6-2*b*.

Sugestão: É necessária uma entrada constante; suponha que uma fonte de 5 V esteja disponível.

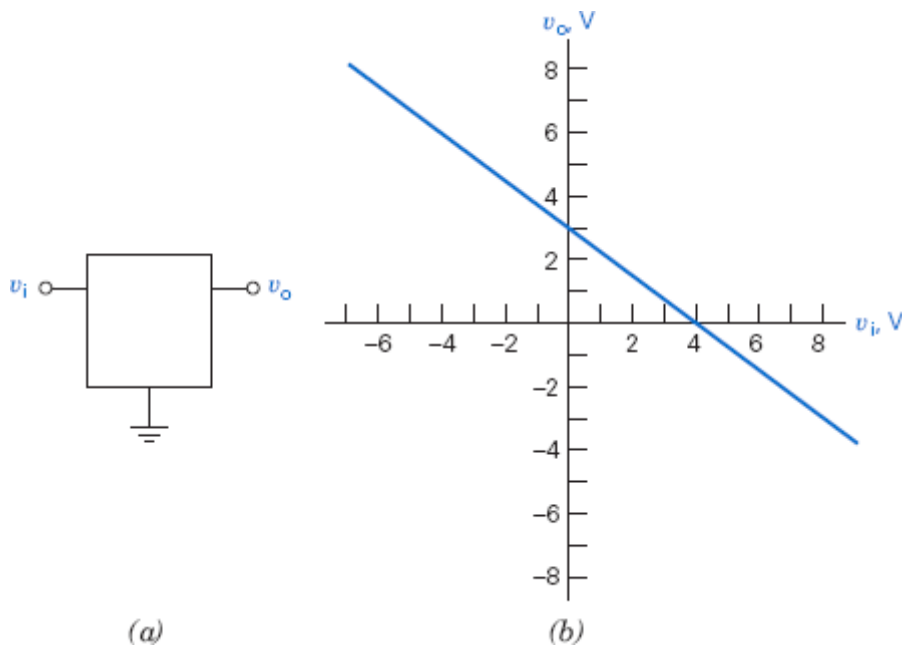



Figura PP 6-2

PP 6-3 Projete circuitos com uma entrada, v_i, e uma saída, v_o, que estejam relacionados pelas equações (a) $v_o = 12v_i + 6$; (b) $v_o = 12v_i - 6$; (c) $v_o = -12v_i + 6$; (d) $-12v_i - 6$.

Sugestão: É necessária uma entrada constante; suponha que uma fonte de 5 V esteja disponível.

PP 6-4 Projete um circuito com três entradas, v_1, v_2 e v_3, e duas saídas, v_a e v_b, que estejam relacionadas pela equação matricial

$$\begin{bmatrix} v_a \\ v_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 3 & -2 \\ 8 & -6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Sugestão: É necessária uma entrada constante; suponha que uma fonte de 5 V esteja disponível.

PP 6-5 Um microfone produz uma tensão sem carga $v_s = 20$ mV, como mostra a Figura PP 6-5*a*. Um amplificador operacional como o da Figura PP 6-5*b* está disponível. Deseja-se obter uma tensão de saída de 4 V. Use o circuito da Figura PP 6-5*b* para projetar um amplificador inversor e um amplificador não inversor e compare as resistências de entrada dos dois amplificadores do ponto de vista dos terminais x e y do microfone. Qual é a configuração que permite um bom desempenho a despeito de mudanças da resistência R_s do microfone?

Sugestão: É possível ligar o terminal a ao terminal x e o terminal b ao terminal y ou vice-versa.

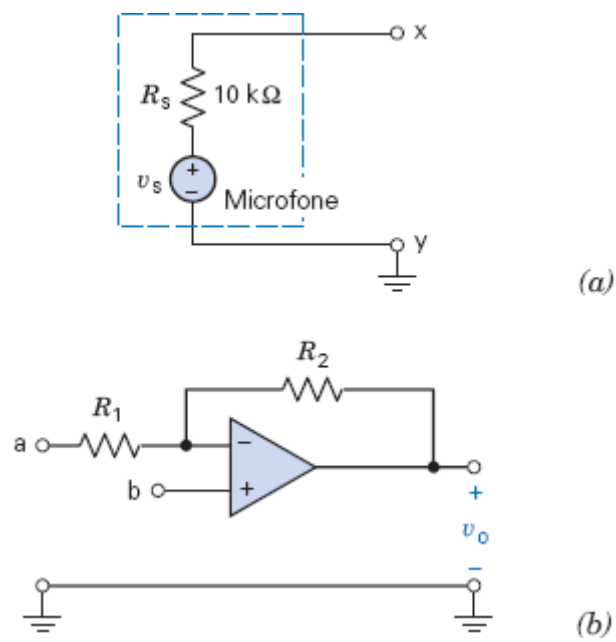



Figura PP 6-5 Circuito com um microfone e um amplificador operacional.

[1] Do inglês slew rate. (N.T.)

[2] Este parâmetro também é chamado de CMRR, do inglês common mode rejection ratio. (N.T.)

[3] Do inglês analog-to-digital converter. (N.T.)

CAPÍTULO 7 Componentes que Armazenam Energia

NESTE CAPÍTULO

7.1 *Introdução*

Neste capítulo são introduzidos mais dois componentes dos circuitos, o capacitor e o indutor. As relações constitutivas desses componentes envolvem integrais ou derivadas. Em consequência:

- Os circuitos elétricos que contêm capacitores e/ou indutores são representados por equações diferenciais. Os circuitos que não contêm capacitores e indutores são representados por equações algébricas. Dizemos que os circuitos que contêm capacitores e/ou indutores são circuitos **dinâmicos**, enquanto os circuitos que não contêm capacitores e indutores são circuitos **estáticos**.
- Os circuitos que contêm capacitores e/ou indutores são capazes de armazenar energia.
- Os circuitos que contêm capacitores e/ou indutores possuem memória. As tensões e correntes em um dado instante dependem não só de outras tensões e correntes no mesmo instante de tempo, mas de valores anteriores dessas tensões e correntes.

Além disso, vamos ver que:

- Na ausência de correntes e tensões infinitas, as tensões nos capacitores e as correntes nos indutores são funções contínuas do tempo.
- Nos circuitos de corrente contínua, os capacitores se comportam como circuitos abertos e os indutores se comportam como curtos-circuitos.

- Capacitores ligados em série ou em paralelo podem ser substituídos por um capacitor equivalente. Indutores ligados em série ou em paralelo podem ser substituídos por um indutor equivalente. Essas substituições não mudam os valores das correntes e tensões nos outros componentes do circuito.
- Um amplificador operacional e um capacitor podem ser usados para montar circuitos que realizam as operações matemáticas de integração e derivação. Esses importantes circuitos são chamados, respectivamente, de circuito integrador e circuito diferenciador.
- As tensões e correntes nos componentes de um circuito que contém capacitores e indutores podem ser funções complicadas do tempo. O programa MATLAB pode ser usado para plotar essas funções.

7.2 Capacitores

O capacitor é um componente dos circuitos elétricos que armazena energia na forma de um campo elétrico criado por cargas elétricas de sinais opostos. Um capacitor pode ser construído usando duas placas paralelas condutoras separadas por uma distância d, como mostra a Figura 7.2-1. Quando uma tensão é aplicada às placas do capacitor, cargas elétricas positivas e negativas são armazenadas nas placas e um campo elétrico é criado na região entre as placas. O espaço entre as placas é ocupado por um material dielétrico (isolante), que pode ser papel, mica, cerâmica ou, simplesmente, ar. Uma propriedade do dielétrico, que recebeu o nome de permissividade, descreve a relação entre o valor do campo elétrico e a tensão entre as placas do capacitor. Os capacitores são caracterizados por um parâmetro conhecido como *capacitância*. A capacitância de um capacitor é diretamente proporcional à permissividade do dielétrico e à área das placas e inversamente proporcional à distância entre as placas; a capacitância C de um capacitor como o da Figura 7.2-1 é dada por

$$C = \frac{\in A}{d}$$

em que $\in$ é a permissividade do dielétrico, A é a área das placas e d é a distância entre as placas. A unidade de capacitância é chamada de farad (F) em homenagem ao físico inglês Michael Faraday.

Uma tensão $v(t)$ aplicada a um capacitor deposita uma carga $+q(t)$ em uma das placas e uma carga $-q(t)$ na outra placa. Quando isso acontece, dizemos que uma carga $q(t)$ está armazenada no capacitor. A carga armazenada em um capacitor é dada pela equação

$$q(t) = Cv(t) \tag{7.2-1}$$

em que C é a capacitância do capacitor e $v(t)$ é a tensão aplicada.

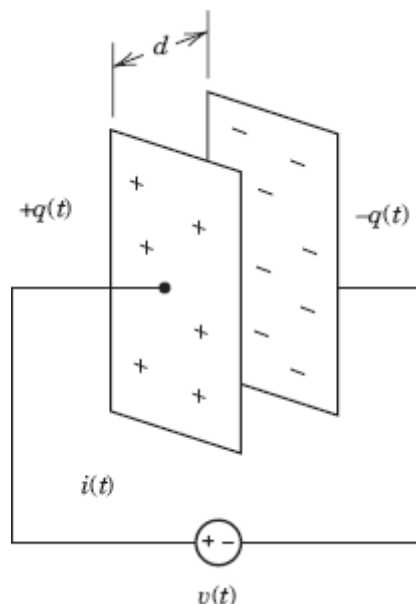



FIGURA 7.2-1 Capacitor ligado a uma fonte de tensão.

Capacitância é uma medida da capacidade de um componente de armazenar energia na forma de um campo elétrico criado por cargas elétricas positivas e negativas.

Quando a tensão v de um capacitor varia com tempo, a carga q armazenada no capacitor também varia com o tempo. A variação com o tempo da carga do capacitor constitui uma corrente elétrica, $i(t)$, dada por

$$i(t) = \frac{d}{dt}q(t)$$

Derivando a Eq. 7.2-1 em relação ao tempo e substituindo $\frac{d}{dt}q(t)$ por $i(t)$, obtemos

$$i(t) = C\frac{d}{dt}v(t) \qquad (7.2\text{-}2)$$

A Eq. 7.2-2 expressa a relação entre a corrente e a tensão de um capacitor se o sentido da corrente e a polaridade da tensão estiverem de acordo como a convenção passiva, como na Figura 7.22, que mostra dois símbolos usados para representar capacitores nos diagramas de circuitos elétricos.

Considere o que acontece quando um capacitor é submetido a uma tensão que varia linearmente, da forma mostrada na Figura 7.2-3, de uma tensão $v = 0$ para uma tensão $v = 1$ V em um intervalo de tempo Δt. Matematicamente, a tensão é dada por

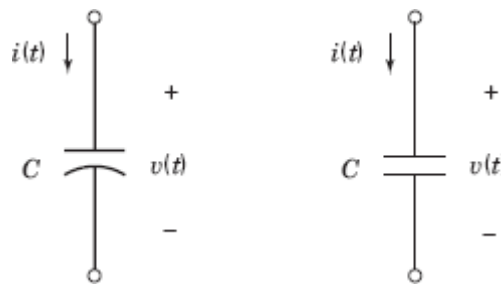



FIGURA 7.2-2 Símbolos usados para representar um capacitor.

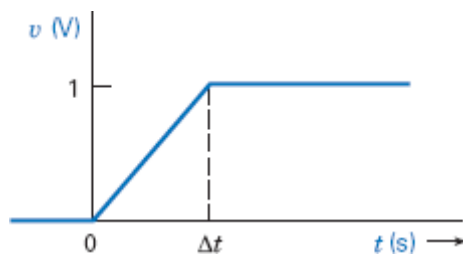



FIGURA 7.2-3 Variação linear da tensão em um intervalo de tempo Δt.

$$v(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \dfrac{t}{\Delta t} & 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & t > 1 \end{cases}$$

Assim, a tensão produz um pulso de corrente de amplitude $C/\Delta t$ no capacitor. Quanto menor o valor de Δt, maior a corrente. Para $\Delta t = 0$, teríamos $i(t) = C/\Delta t = \infty$, o que é fisicamente impossível. Isso significa o seguinte:

A tensão em um **capacitor** não pode variar bruscamente.

Vamos agora calcular a tensão $v(t)$ em função da corrente $i(t)$ integrando ambos os membros da Eq, 7.2-2. Temos:

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau \quad (7.2\text{-}3)$$

De acordo com a Eq. 7.2-3, a tensão do capacitor, $v(t)$, pode ser obtida integrando a corrente no capacitor do instante $-\infty$ até o instante t. Para isso, seria necessário conhecer o valor da corrente no capacitor desde o instante $\tau = -\infty$ até o instante $\tau = t$. Na prática, conhecemos a corrente no capacitor apenas a partir de um instante t_0. Por isso, separamos a integral em duas partes:

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_0} i(\tau)d\tau = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau + v(t_0) \quad (7.2\text{-}4)$$

De acordo com a Eq. 7.2-4, podemos calcular a tensão do capacitor $v(t)$ integrando a corrente no capacitor do instante $\tau = t_0$ até o instante $\tau = t$, contanto que seja conhecida a tensão do capacitor no instante t_0. O instante t_0 é chamado de instante inicial e a tensão $v(t_0)$ é chamada de condição inicial. O instante $t_0 = 0$ é frequentemente escolhido como instante inicial.

Vários tipos de capacitores, com diferentes valores de capacitância, são produzidos comercialmente. Os tipos de capacitores são descritos em termos do material do dielétrico e da técnica de fabricação. A Figura 7.2-4 mostra alguns capacitores miniatura de filme de metal, enquanto alguns capacitores miniatura de policarbonato hermeticamente selados podem ser vistos na Figura 7.2-5. Os valores mais usados de capacitância vão de picofarads (pF) a microfarads (μF). Dois pedaços de fio isolado com cerca de 2,5 cm de comprimento, quando torcidos juntos, apresentam uma capacitância da ordem de 1 pF. Por outro lado, um capacitor de fonte de alimentação com cerca de 2,5 cm de diâmetro e alguns centímetros de altura pode ter uma capacitância de 0,01 F.

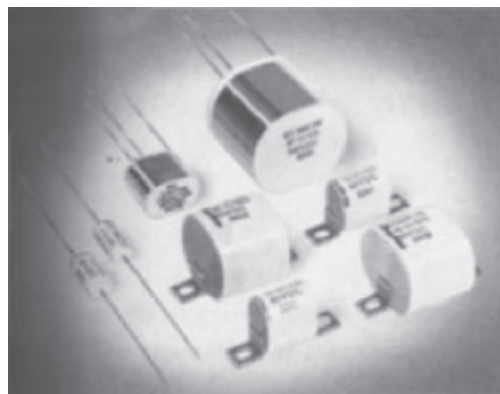
Na prática, o dielétrico que separa as placas dos capacitores não é um isolante perfeito e, portanto, existe uma pequena corrente entre as placas de um capacitor carregado. Esse fenômeno pode ser modelado por uma resistência de valor elevado em paralelo com o capacitor, conhecida como resistência de fuga. Nos capacitores comerciais, a resistência de fuga é normalmente desprezada porque é da ordem de centenas de megohms, muito maior, portanto, que todas as resistências normalmente presentes nos circuitos.

Cortesia de Electronic Concepts Inc.

FIGURA 7.2-4 Capacitores miniatura de poliéster metalizado, com valores de 1 μF a 50 μF.

FIGURA 7.2-5 Capacitores miniatura de policarbonato hermeticamente selados, com valores de 1 μF a 50 μF.

EXEMPLO 7.2-1 Corrente e Tensão em um Capacitor

Determine a corrente em um capacitor de capacitância $C = 1$ mF se a tensão entre os terminais do capacitor varia com o tempo da forma mostrada na Figura 7.2-6.

Solução

De acordo com a Figura 7.2.6, a tensão (em volts) é dada por

$$v(t) = \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ 10t & 0 \le t \le 1 \\ 20 - 10t & 1 \le t \le 2 \\ 0 & t \ge 2 \end{cases}$$

Como $i = C dv/dt$, em que, neste caso, $C = 10^{-3}$ F, temos:

$$i(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 10^{-2} & 0 < t < 1 \\ -10^{-2} & 1 < t < 2 \\ 0 & t > 2 \end{cases}$$

Assim, a corrente é uma série de dois pulsos de valores 10^{-2} A e -10^{-2} A, como mostra a Figura 7.2-7.

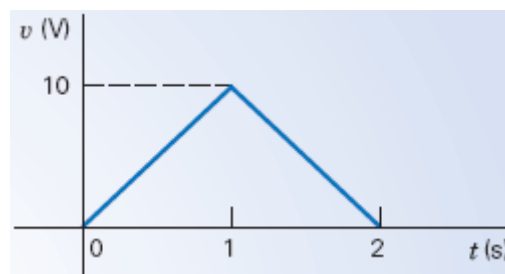



FIGURA 7.2-6 Tensão no capacitor do Exemplo 7.2-1.

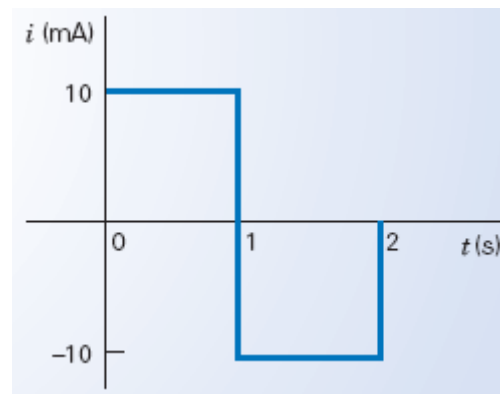



FIGURA 7.2-7 Corrente do Exemplo 7.2-1.

EXEMPLO 7.2-2 Corrente e Tensão em um Capacitor

Determine a tensão v em um capacitor de capacitância $C = 0{,}5$ F se a corrente no capacitor varia com o tempo da forma mostrada na Figura 7.2-8 e $v(0) = 0$.

Solução

Para começar, escrevemos a equação de $i(t)$

$$i(t) = \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ t & 0 \le t \le 1 \\ 1 & 1 \le t \le 2 \\ 0 & 2 < t \end{cases}$$

Em seguida, como $v(0) = 0$,

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau + v(0) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau$$

e $C = 0{,}5$, temos

$$v(t) = \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ 2\int_0^t \tau d\tau & 0 \le t \le 1 \\ 2\int_1^t (1)d\tau + v(1) & 1 \le t \le 2 \\ v(2) & 2 \le t \end{cases}$$

em que v está em volts. Assim, para $0 < t \le 1$, temos

$$v(t) = t^2$$

Para o período $1 \le t \le 2$, note que $v(1) = 1$ e, portanto,

$$v(t) = 2(t - 1) + 1 = (2t - 1) \text{ V}$$

A Figura 7.2-9 mostra a tensão no capacitor em função do tempo. A tensão é proporcional a t^2 durante o primeiro segundo, é proporcional a t entre 1 e 2 segundos e permanece constante, com o valor de 3 V, após 2 segundos.

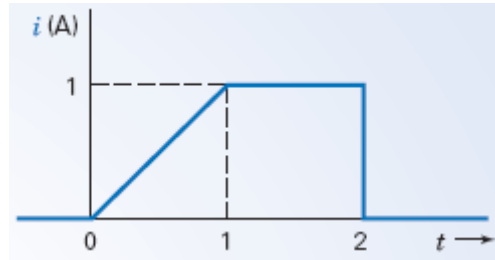



FIGURA 7.2-8 Corrente no capacitor do Exemplo 7.2-2. O tempo está em segundos.

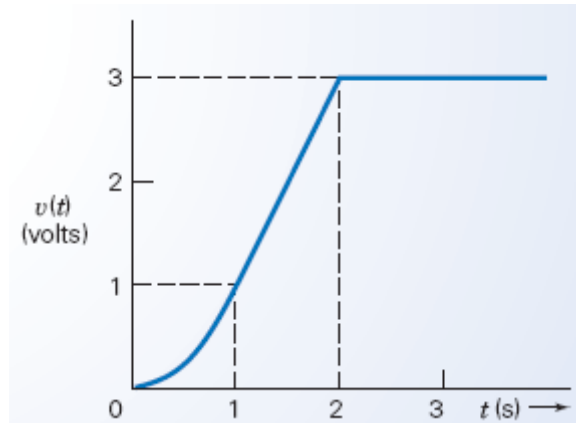



FIGURA 7.2-9 Tensão no capacitor do exemplo 7.2-2.

EXEMPLO 7.2-3 Corrente e Tensão em um Capacitor

A Figura 7.2-10 mostra um circuito e dois gráficos, que representam a variação com o tempo da corrente e da tensão no capacitor do circuito. Determine o valor da capacitância do capacitor.

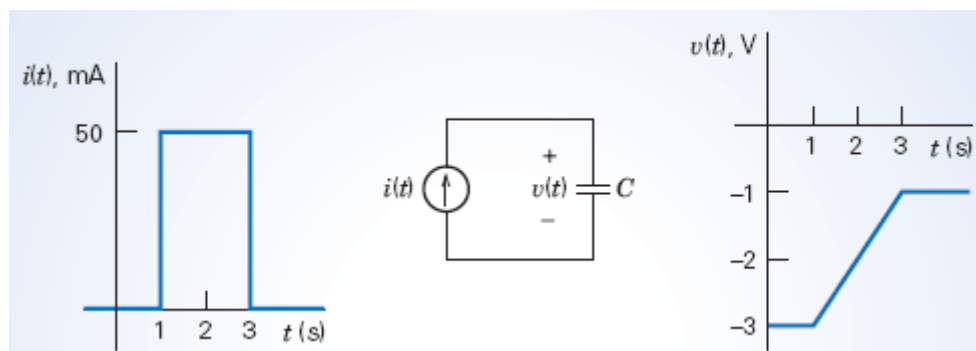



FIGURA 7.2-10 Circuito e gráficos do Exemplo 7.2-3.

Solução

A corrente e a tensão no capacitor estão relacionadas através da equação

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)\, d\tau + v(t_0) \qquad (7.2\text{-}5)$$

$$v(t) - v(t_0) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)\, d\tau \qquad (7.2\text{-}6)$$

Como $i(t)$ e $v(t)$ estão representadas graficamente e não através de equações, é interessante interpretar a Eq. 7.2-6 da seguinte forma:

$v(t) - v(t_0)$ é a diferença entre os valores da tensão nos instantes t e t_0

e

$\int_{t_0}^{t} i(\tau)\, d\tau$ é a área sob a curva de $i(t)$ em função de t entre os instantes t_0 e t.

Escolhendo valores convenientes para t e t_0, como $t_0 = 1$ s e $t = 3$ s, obtemos:

$$v(t) - v(t_0) = -1 - (-3) = 2\ \text{V}$$

$$\int_{t_0}^{t} i(\tau)\, d\tau = \int_{1}^{3} 0{,}05\, d\tau = (0{,}05)(3 - 1) = 0{,}1\ \text{A}\cdot\text{s}$$

De acordo com a Eq. 7.2-6,

$$2 = \frac{1}{C}(0{,}1) \quad \Rightarrow \quad C = 0{,}05\frac{\text{A}\cdot\text{s}}{\text{V}} = 0{,}05\ \text{F} = 50\ \text{mF}$$

EXEMPLO 7.2-4 Corrente e Tensão em um Capacitor

A Figura 7.2-11 mostra um circuito e dois gráficos, que representam a variação com o tempo da corrente e da tensão no capacitor do circuito. Determine o valor das constantes a e b que aparecem no gráfico da corrente no capacitor.

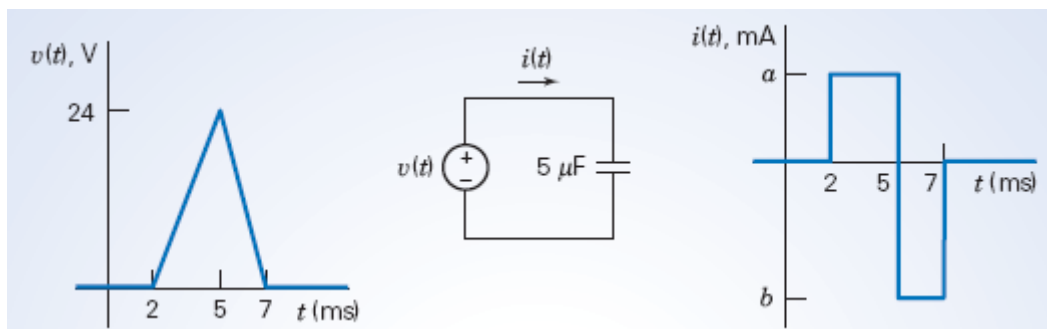



FIGURA 7.2-11 Circuito e gráficos do Exemplo 7.2-4.

Solução

A corrente e a tensão no capacitor estão relacionadas através da equação

$$i(t) = C\frac{d}{dt}v(t) \qquad (7.2\text{-}7)$$

Como $i(t)$ e $v(t)$ estão representadas graficamente e não através de equações, é interessante interpretar a Eq. 7.27 da seguinte forma:

o valor de $i(t)$ é dado por C vezes a inclinação da curva de $v(t)$

Para determinar o valor de a, escolhemos um instante no qual $i(t) = a$ e a inclinação da curva de $v(t)$ é fácil de calcular. Por exemplo: no instante $t = 3$ ms,

$$\frac{d}{dt}v(0,003) = \frac{0-24}{0,002-0,005} = 8000\frac{\text{V}}{\text{s}}$$

(A notação $\frac{d}{dt}v(0,003)$ indica que se trata do valor da derivada $\frac{d}{dt}v(t)$ no instante $t = 0,003$ s.) De acordo com a Eq. 7.2-7, temos

$$a = (5 \times 10^{-6})\,(8000) = 40 \text{ mA}$$

Para determinar o valor de b, fazemos $t = 6$ ms:

$$\frac{d}{dt}v(0,006) = \frac{24 - 0}{0,005 - 0,007} = 12 \times 10^{3}\frac{\text{V}}{\text{s}}$$

De acordo com a Eq. 7.2-7, temos:

$$b = (5 \times 10^{-6})\,(12 \times 10^{-3}) = 60 \text{ mA}$$

EXEMPLO 7.2-5 Corrente e Tensão em um Capacitor

A entrada do circuito da Figura 7.2-12 é a corrente

$$i(t) = 3{,}75e^{-1{,}2t} \text{ A} \quad \text{para} \quad t > 0$$

A saída é a tensão no capacitor

$$v(t) = 4 - 1{,}25e^{-1{,}2t} \text{ V} \quad \text{para} \quad t > 0$$

Determine o valor da capacitância C.

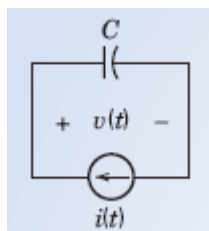



FIGURA 7.2-12 Circuito do Exemplo 7.2-5.

Solução

A tensão do capacitor está relacionada à corrente através da equação

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau + v(0)$$

Assim,

$$4 - 1{,}25e^{-1{,}2t} = \frac{1}{C}\int_0^t 3{,}75e^{-1{,}2t}d\tau + v(0) = \frac{3{,}75}{C(-1{,}2)}e^{-1{,}2t}\bigg|_0^t + v(0) = \frac{-3{,}125}{C}(e^{-1{,}2t} - 1) + v(0)$$

Igualando os coeficientes de $e^{-1{,}2t}$, obtemos:

$$1{,}25 = \frac{3{,}125}{C} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{3{,}125}{1{,}25} = 2{,}5 \text{ F}$$

EXERCÍCIO 7.2-1 Determine a corrente $i(t)$ para $t > 0$ no circuito da Figura E 7.21*b* se $v_s(t)$ varia com o tempo da forma mostrada na da Figura E 7.2-1*a*.

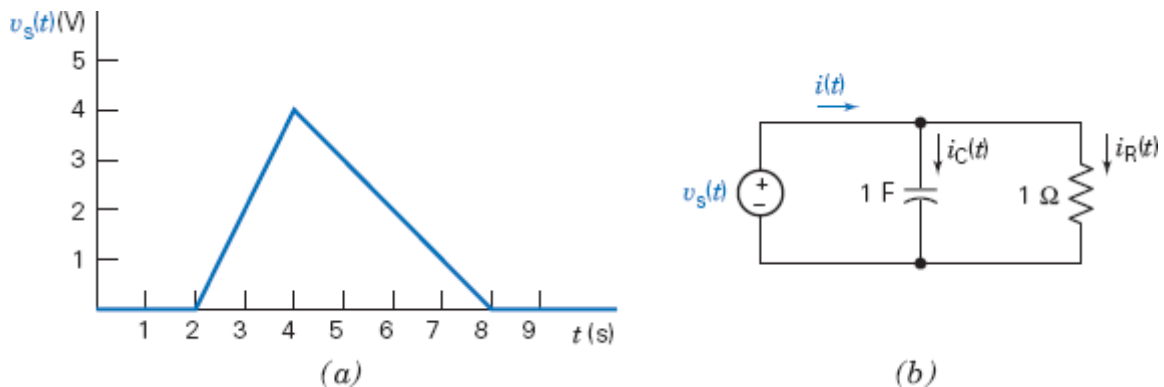



FIGURA E 7.2-1 (a) Tensão da fonte de tensão. (b) Circuito.

Sugestão: Determine $i_C(t)$ e $i_R(t)$ separadamente e use a LKC.

Resposta: $v(t) = \begin{cases} 2t - 2 & 2 < t < 4 \\ 7 - t & 4 < t < 8 \\ 0 & \text{p.q.o.v.} \end{cases}$

7.3 *Armazenamento de Energia em um Capacitor*

Quando um capacitor é ligado a uma bateria, uma corrente circula e uma carga se acumula nas placas do capacitor, como mostra a Figura 7.3-1. Depois de algum tempo, a tensão no capacitor se torna igual à tensão da bateria e a corrente no capacitor se anula. A existência de cargas nas placas do capacitor faz com que haja uma certa energia armazenada no capacitor. Essas cargas estão submetidas a uma força elétrica.

As forças que agem sobre as cargas armazenadas em um capacitor podem ser consideradas como o resultado da ação de um campo elétrico. O *campo elétrico* em qualquer ponto do espaço é definido a partir da força que age sobre uma carga positiva unitária situada nesse ponto do espaço. Como as cargas estão submetidas a uma força na direção perpendicular às placas do capacitor, podemos dizer que a energia usada inicialmente para separar as cargas ficou armazenada no campo elétrico do capacitor.

A energia armazenada em um capacitor é dada por

$$w_c(t) = \int_{-\infty}^{t} vi\,d\tau$$

Nessa equação, v e i são funções do tempo e poderiam ser escritas na forma $v(t)$ e $i(t)$.

Como

$$i = C\frac{dv}{dt}$$

Temos

$$w_c = \int_{-\infty}^{t} vC\frac{dv}{dt}d\tau = C\int_{v(-\infty)}^{v(t)} v\,dv = \frac{1}{2}Cv^2\Big|_{v(-\infty)}^{v(t)}$$

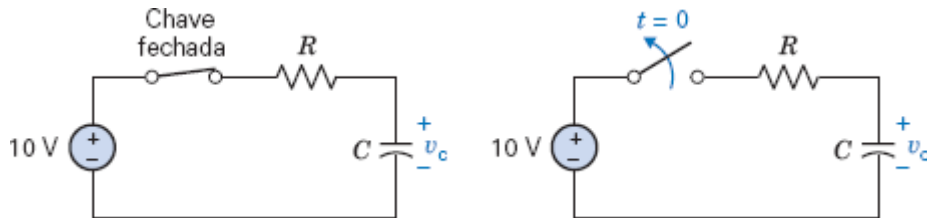



FIGURA 7.3-1 Circuito (a) com o capacitor carregado e v_C = 10 V; (b) após a chave ser aberta em t = 0.

Como o capacitor estava descarregado em $t = -\infty$, $v(-\infty) = 0$ e, portanto,

$$w_c(t) = \frac{1}{2}Cv^2(t)\ \text{J} \qquad (7.3\text{-}1)$$

Assim, enquanto o capacitor está sendo carregado e $v(t)$ está variando, a energia armazenada, w_C, também varia. Observe que $w_C \geq 0$ para qualquer valor de $v(t)$, o que é uma característica dos componentes passivos.

Como $q = Cv$, a Eq. 7.3-1 pode ser pode ser escrita na forma

$$w_c = \frac{1}{2C}q^2(t)\ \text{J} \qquad (7.3\text{-}2)$$

O capacitor é um componente que armazena energia, mas não a dissipa. Considere, por exemplo, um capacitor de 100 mF carregado por uma tensão de 100 V. A energia armazenada é

$$w_c = \frac{1}{2}Cv^2 = \frac{1}{2}(0{,}1)(100)^2 = 500\ \text{J}$$

Enquanto o capacitor não é ligado a outro componente, a energia de 500 J continua armazenada. Quando o capacitor é ligado aos terminais de um resistor, uma corrente circula pelo conjunto até que toda a energia seja dissipada pelo resistor, transformando-se em calor. Depois que toda a energia é dissipada, a corrente é zero e a tensão entre as placas do capacitor também é zero.

Como vimos na seção anterior, *a tensão de um capacitor não pode variar bruscamente*. Essa afirmação pode ser representada matematicamente através da equação

$$v(0^+) = v(0^-)$$

em que 0^- é o instante imediatamente anterior a $t = 0$ e 0^+ é o instante imediatamente posterior a $t = 0$. Como o intervalo de tempo entre $t = 0^-$ e $t = 0^+$ é infinitamente pequeno, isso assegura que a tensão não varie de forma abrupta.

Para ilustrar a continuidade da tensão de um capacitor, considere o circuito da Figura 7.3-1. No circuito da Figura 7.3-1*a*, a chave permaneceu fechada por um longo tempo e a tensão do capacitor se estabilizou em v_c = 10 V. No instante t = 0, a chave é aberta, como mostra a Figura 7.3-1*b*. Como a tensão do capacitor não pode variar bruscamente,

$$v_c(0^+) = v_c(0^-) = 10 \text{ V}$$

EXEMPLO 7.3-1 Energia Armazenada em um Capacitor

Um capacitor de 10 mF é carregado até atingir a tensão de 100 V, como mostra o circuito da Figura 7.3-2. A chave é aberta no instante $t = 0$. Determine a energia armazenada no capacitor e a tensão do capacitor no instante $t = 0^+$.

Solução

A tensão do capacitor é $v = 100$ V em $t = 0^-$. Como a tensão em $t = 0^+$ tem que ser igual à tensão em $t = 0^-$, temos

$$v(0^+) = v(0^-) = 100 \text{ V}$$

A energia armazenada no capacitor em $t = 0^+$ é

$$w_c \frac{1}{2}Cv^2 = \frac{1}{2}(10^{-2})\,(100)^2 = 50 \text{ J}$$

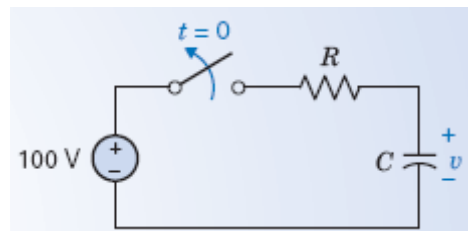



FIGURA 7.3-2 Circuito do Exemplo 7.3-1, em que $C = 10$ mF.

EXEMPLO 7.3-2 Potência e Energia de um Capacitor

A tensão de um capacitor de 5 mF varia com o tempo da forma mostrada na Figura 7.3-3. Determine e plote a corrente, a potência e a energia do capacitor em função do tempo.

Solução

A corrente pode ser calculada usando a equação $i_c = C\,dv/dt$ e o resultado aparece na Figura 7.3-4*a*. A potência é dada pelo produto $v(t)i(t)$, da curva da corrente (Figura 7.3-4*a*) pela curva da tensão (Figura 7.3-3), e é mostrada na Figura 7.3-4*b*. O capacitor recebe energia durante os primeiros dois segundos e cede energia no intervalo $2 \text{ s} < t < 3 \text{ s}$.

FIGURA 7.3-3 Tensão do capacitor do Exemplo 7.3-2.

A energia é dada pela equação $\omega = \int p\,dt$ e corresponde à área sob a curva da função $p(t)$. A Figura 7.3-4*c* mostra a energia em função do tempo. Note que o capacitor armazena uma energia cada vez maior entre $t = 0$ s e $t = 2$ s, atingindo uma energia máxima de 25 J. Em seguida, o capacitor fornece uma

energia de 18,75 J ao circuito externo no intervalo de $t = 2$ a $t = 3$ s. Por fim, a energia armazenada no capacitor se mantém constante em 6,25 J a partir do instante $t = 3$ s.

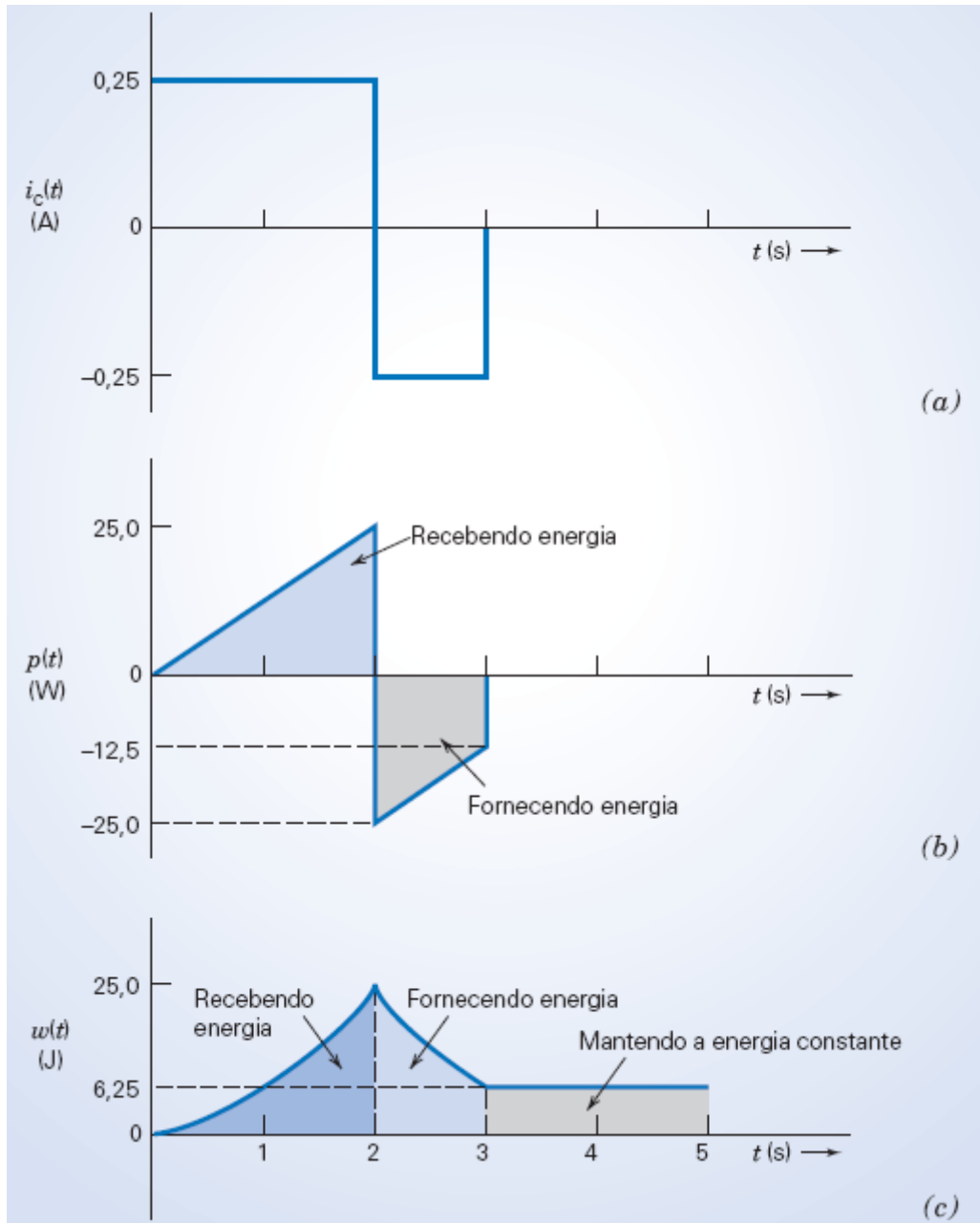



FIGURA 7.3-4 Corrente, potência e energia do capacitor do Exemplo 7.3-2.

EXERCÍCIO 7.3-1 Determine a energia armazenada em um capacitor de 200 μF se a tensão do capacitor é 100 V. Determine a tensão do capacitor no instante $t = 0^+$ se $v(0^-) = 100$ V.

Resposta: $w(1) = 1$ J e $v(0^+) = 100$ V.

EXERCÍCIO 7.3-2 Uma corrente constante $i = 2$ A atravessa um capacitor de 100 μF depois que uma chave é fechada no instante $t = 0$. A tensão do capacitor é igual a zero no instante $t = 0^-$. Determine a energia armazenada (a) em $t = 1$ s e (b) em $t = 100$ s.

Resposta: $w(1) = 20$ kJ e $w(100) = 200$ MJ.

7.4 *Capacitores em Série e em Paralelo*

Considere um conjunto de N capacitores ligados em paralelo, como na Figura 7.4-1. Estamos interessados em determinar um valor de capacitância, C_p, tal que os N capacitores possam ser substituídos por um único capacitor equivalente, como na Figura 7.4-2.

De acordo com a LKC, temos

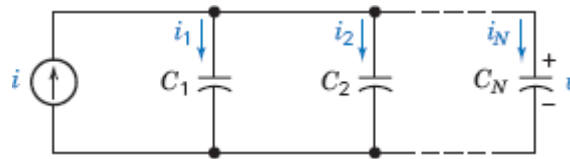



FIGURA 7.4-1 N capacitores ligados em paralelo.

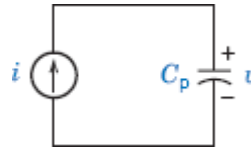



FIGURA 7.4-2 Circuito equivalente de N capacitores ligados em paralelo.

$$i = i_1 + i_2 + i_3 + \ldots + i_N$$

Como

$$i_n = C_n \frac{dv}{dt}$$

e todos os capacitores estão submetidos à mesma tensão v, temos

$$\begin{aligned} i &= C_1 \frac{dv}{dt} + C_2 \frac{dv}{dt} + C_3 \frac{dv}{dt} + \ldots + C_N \frac{dv}{dt} \\ &= (C_1 + C_2 + C_3 + \ldots + C_N) \frac{dv}{dt} \\ &= \left(\sum_{n=1}^{N} C_n \right) \frac{dv}{dt} \end{aligned} \qquad (7.4\text{-}1)$$

No caso do circuito equivalente da Figura 7.4-2,

$$i = C_p \frac{dv}{dt} \qquad (7.4\text{-}2)$$

Igualando as Eqs. 7.4-1 e 7.4-2, temos

$$C_p = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots + C_N = \sum_{n=1}^{N} C_n$$

Assim, a capacitância equivalente de uma combinação de N capacitores em paralelo é simplesmente a soma das capacitâncias. Observe que todos os capacitores em paralelo têm necessariamente a mesma condição inicial $v(0)$.

Vamos agora determinar a capacitância equivalente C_s de uma combinação de N capacitores em série, como na Figura 7.4-3. O circuito equivalente da combinação de capacitores aparece na Figura 7.4-4.

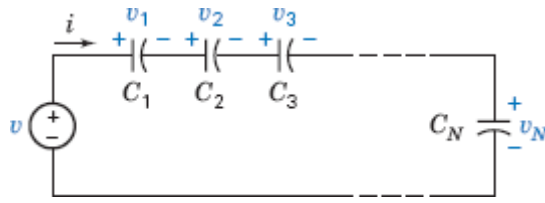



FIGURA 7.4-3 *N* capacitores ligados em série.

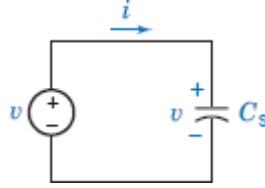



FIGURA 7.4-4 Circuito equivalente de *N* capacitores em série.

Aplicando a LKT à malha da Figura 7.4-3, temos

$$v = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_N \tag{7.4-3}$$

Como

$$v_n(t) = \frac{1}{C_n} \int_{t_0}^{t} i \, d\tau + v_n(t_0)$$

em que a corrente i é a mesma em todos os capacitores, temos

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{C_1} \int_{t_0}^{t} i \, d\tau + v_1(t_0) + \ldots + \frac{1}{C_N} \int_{t_0}^{t} i \, d\tau + v_N(t_0) \\ &= \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_N} \right) \int_{t_0}^{t} i \, d\tau + \sum_{n=1}^{N} v_n(t_0) \\ &= \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{C_n} \right) \int_{t_0}^{t} i \, d\tau + \sum_{n=1}^{N} v_n(t_0) \end{aligned} \tag{7.4-4}$$

De acordo com a Eq. 7.4-3, no instante $t = t_0$,

$$v(t_0) = v_1(t_0) + v_2(t_0) + \ldots + v_N(t_0) = \sum_{n=1}^{N} v_n(t_0) \tag{7.4-5}$$

Substituindo a Eq. 7.4-5 na Eq. 7.4-4, obtemos

$$v = \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{C_n} \right) \int_{t_0}^{t} i \, d\tau + v(t_0) \tag{7.4-6}$$

Aplicando a LKT à malha do circuito equivalente da Figura 7.4-4, temos

$$v = \frac{1}{C_s} \int_{t_0}^{t} i \, d\tau + v(t_0) \tag{7.4-7}$$

Igualando as Eqs. 7.4-6 e 7.4-7, obtemos

$$\frac{1}{C_s} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{C_n} \tag{7.4-8}$$

No caso de dois capacitores em série, a Eq. 7.4-8 se torna

$$\frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$C_s = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \tag{7.4-9}$$

EXEMPLO 7.4-1 Capacitores em Paralelo e em Série

Determine a capacitância equivalente do circuito da Figura 7.4-5 para $C_1 = C_2 = C_3 = 2$ mF, $v_1(0) = 10$ V e $v_2(0) = v_3(0) = 20$ V.

Solução

Como C_2 e C_3 estão em paralelo, podem ser substituídos por C_p, cuja capacitância é dada por

$$C_p = C_2 + C_3 = 4 \text{ mF}$$

A tensão em $t = 0$ do capacitor equivalente C_p é igual à tensão em C_2 e C_3, que é $v_2(0) = v_3(0) = 20$ V. Substituindo C_2 e C_3 por C_p, obtemos o circuito da Figura 7.4-6.

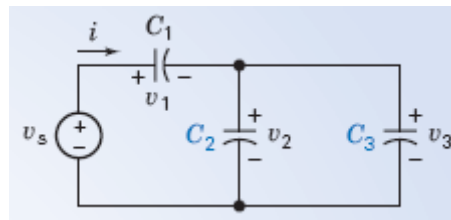



FIGURA 7.4-5 Circuito do Exemplo 7.4-1.

Agora estamos interessados em substituir os dois capacitores em série, C_1 e C_p, por um capacitor equivalente. De acordo com a Eq. 7.4-9, temos

$$C_s = \frac{C_1 C_p}{C_1 + C_p} = \frac{(2 \times 10^{-3})(4 \times 10^{-3})}{(2 \times 10^{-3}) + (4 \times 10^{-3})} = \frac{8}{6} \text{ mF}$$

A tensão de C_s no instante $t = 0$ é

$$v(0) = v_1(0) + v_p(0)$$

em que $v_p(0) = 20$ V, a tensão do capacitor C_p em $t = 0$. Assim, temos

$$v(0) = 10 + 20 = 30 \text{ V}$$

O circuito equivalente é, portanto, o que aparece na Figura 7.4-7.

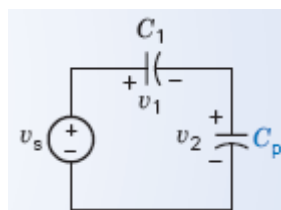



FIGURA 7.4-6 Circuito obtido substituindo C_2 e C_3 por C_p no circuito da Figura 7.4-5.

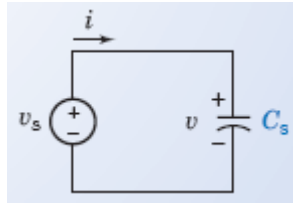



FIGURA 7.4-7 Circuito equivalente do circuito do Exemplo 7.4-1.

EXERCÍCIO 7.4-1 Determine o capacitor equivalente do circuito da Figura E 7.4-1.

Resposta: $C_{eq} = 4$ mF

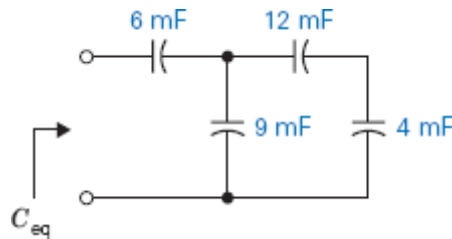



FIGURA E 7.4-1

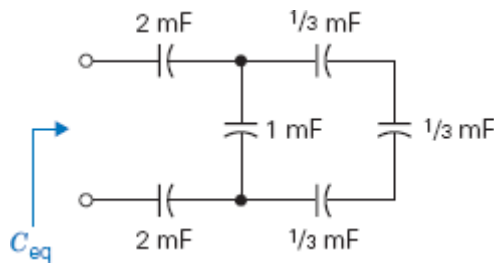



FIGURA E 7.4-2

EXERCÍCIO 7.4-2 Determine a capacitância equivalente C_{eq} do circuito da Figura E 7.4-2.

Resposta: 10/19 mF

7.5 *Indutores*

O indutor é um componente dos circuitos elétricos que armazena energia na forma de um campo magnético criado por uma corrente elétrica. Um indutor pode ser construído enrolando um fio para formar uma bobina, como mostra a Figura 7.5-1. Quando uma corrente atravessa o fio, um campo magnético é criado no interior da bobina. O interior da bobina, conhecido como núcleo, pode ser feito de um material magnético, como o ferro, ou consistir simplesmente de ar. Uma propriedade do material do núcleo, que recebeu o nome de permeabilidade, descreve a relação entre o valor do campo magnético e a corrente do indutor. Os indutores são caracterizados por um parâmetro conhecido como *indutância*. A indutância de um indutor é diretamente proporcional à permeabilidade do núcleo e ao número e área das espiras e inversamente proporcional ao comprimento do indutor; a indutância L de um indutor como o da Figura 7.5-1 é dada por

$$L = \frac{\mu N^2 A}{l}$$

em que μ é a permeabilidade do núcleo, N é o número de espiras (número de voltas do fio), A é a área das espiras e l é o comprimento do indutor. A unidade de indutância é chamada de henry (H) em homenagem ao físico americano Joseph Henry. Vários tipos de indutores com diferentes valores de indutância são produzidos comercialmente, como mostra a Figura 7.5-2. Os valores mais usados de indutância vão de 1 microhenry (1 μH) a 10 henrys (10 H).

Indutância é uma medida da capacidade de um componente de armazenar energia na forma de um campo magnético criado por uma corrente elétrica.

Na Figura 7.5-1, uma fonte de corrente foi usada para produzir uma corrente em um indutor. A tensão *v*(*t*) do indutor é proporcional à taxa de variação da corrente, ou seja,

$$v(t) = L\frac{d}{dt}i(t) \tag{7.5-1}$$

em que L é a indutância do indutor e $i(t)$ é a corrente no indutor.

Integrando ambos os membros da Eq. 7.5-1, obtemos

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v(\tau)\,d\tau \tag{7.5-2}$$

De acordo com a Eq. 7.5-2, a corrente no indutor, *i*(*t*), pode ser obtida integrando a tensão do indutor do instante $-\infty$ até o instante *t*. Para isso, seria necessário conhecer o valor da tensão do indutor desde o instante $\tau = -\infty$ até o instante $\tau = t$. Na prática, conhecemos a tensão do indutor apenas a partir de um certo instante t_0. Por isso, separamos a integral em duas partes:

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t_0} v(\tau)\,d\tau + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(\tau)\,d\tau = i(t_0) + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(\tau)\,d\tau \tag{7.5-3}$$

De acordo com a Eq. 7.5-3, podemos calcular a corrente no indutor $i(t)$ integrando a tensão do indutor do instante $\tau = t_0$ até o instante $\tau = t$, contanto que seja conhecida a corrente no indutor no instante t_0. O instante t_0 é chamado de **instante inicial** e a corrente $i(t_0)$ é chamada de **condição inicial**. O instante $t_0 = 0$ é frequentemente escolhido como instante inicial.

As Eqs. 7.5-1 e 7.5-2 expressam a relação entre a corrente e a tensão de um indutor. A corrente e a tensão nessas equações estão de acordo com a convenção passiva. A Figura 7.5-3 mostra o símbolo usado para representar indutores nos diagramas de circuitos elétricos. Na Figura 7.5-3, o sentido da corrente e a polaridade da tensão estão de acordo com a convenção passiva.

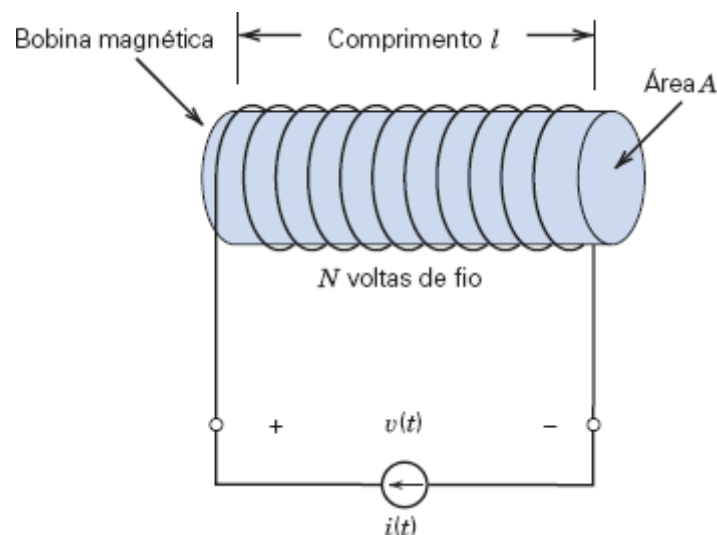



FIGURA 7.5-1 Indutor ligado a uma fonte de corrente.

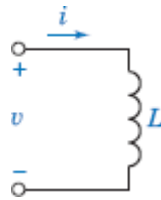



FIGURA 7.5-2 Símbolo usado para representar um indutor.

Considere o que acontece quando um indutor de 1 H é submetido a uma corrente que varia linearmente da forma mostrada na Figura 7.5-4, de uma corrente i = 0 para uma corrente i = 1 A em um intervalo de tempo Δt. Vamos calcular a tensão do indutor. Matematicamente, a corrente (em amperes) é dada por

$$i(t) = \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ \dfrac{t}{\Delta t} & 0 \le t \le 1 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

De acordo com a Eq. 7.5-1, temos:

$$v(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \dfrac{1}{\Delta t} & 0 \le t \le \Delta t \\ 0 & t > \Delta t \end{cases}$$

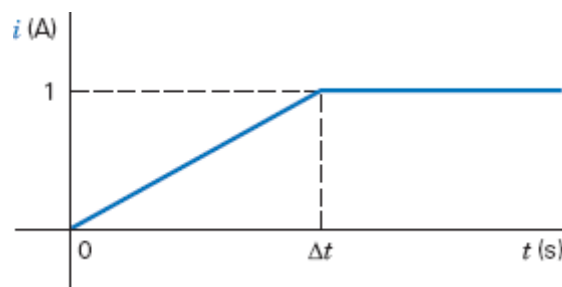



FIGURA 7.5-3 Variação linear da corrente em um intervalo de tempo Δt.

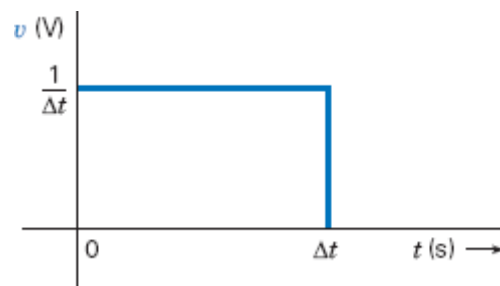



FIGURA 7.5-4 Tensão produzida em um indutor de 1 H pela corrente da Figura 7.5-3.

Assim, a corrente produz um pulso de tensão de amplitude $1/\Delta t$ no indutor (Figura 7.5-5). Quanto menor o valor de Δt, maior a tensão. Para $\Delta t = 0$, teríamos $v(t) = L/\Delta t = \infty$, o que é fisicamente impossível. Isso significa o seguinte:

Cortesia de Vishay Intertechnology, Inc.

FIGURA 7.5-5 Vários tipos de indutores.

A corrente de um **indutor** não pode variar bruscamente.

Na prática, o fio de um indutor não é um condutor perfeito e, portanto, existe uma pequena queda de tensão entre os terminais de um indutor, mesmo que a corrente seja constante. Esse efeito pode ser modelado por uma resistência de pequeno valor em série com o indutor.

EXEMPLO 7.5-1 Corrente e Tensão em um Indutor

Determine a tensão em um indutor de indutância $L = 0{,}1$ mH se a corrente no indutor é

$$i(t) = 20te^{-2t}\ \text{A}$$

para $t > 0$, sabendo que $i(0) = 0$.

Solução

A tensão para $t \geq 0$ é

$$v(t) = L\frac{di}{dt} = (0{,}1)\frac{d}{dt}(20te^{-2t}) = 2(-2te^{-2t} + e^{-2t}) = 2e^{-2t}(1-2t)\ \text{V}$$

A corrente no indutor aparece na Figura 7.5-6*a* e a tensão na Figura 7.5-6*b*. Observe que a tensão é 2 V no instante $t = 0$ e se anula em $t = 0{,}5$ s, o instante em que a corrente atinge o valor máximo.

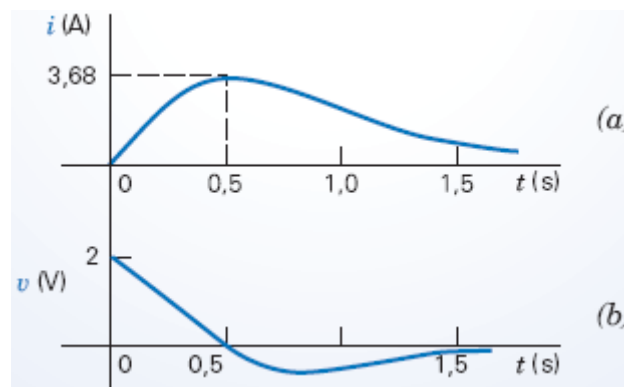



FIGURA 7.5-6 Tensão e corrente do Exemplo 7.5-1.

EXEMPLO 7.5-2 Corrente e Tensão em um Indutor

EXEMPLO 7.5-2 Corrente e Tensão em um Indutor

EXEMPLO INTERATIVO

A Figura 7.5-7 mostra um circuito com um indutor e os gráficos da corrente e da tensão do indutor em função do tempo. Determine o valor da indutância do indutor.

Solução

A corrente e a tensão do indutor estão relacionadas pela equação

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(\tau)\,d\tau + i(t_0) \qquad (7.5\text{-}4)$$

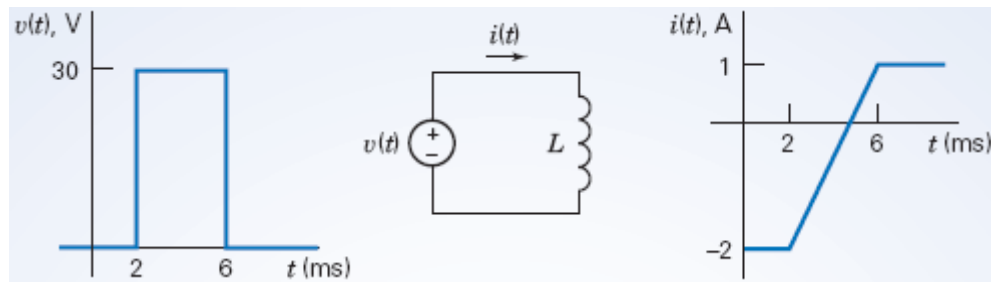



FIGURA 7.5-7 Circuito e gráficos do Exemplo 7.5-2.

ou

$$i(t) - i(t_0) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(\tau)\,d\tau \qquad (7.5\text{-}5)$$

Como $i(t)$ e $v(t)$ estão representadas graficamente e não através de equações, é interessante interpretar a Eq. 7.5-5 da seguinte forma:

$i(t) - i(t_0)$ é a diferença entre os valores da corrente nos instantes t e t_0

$\int_{t_0}^{t} v(\tau)\,d\tau$ é a área sob a curva de $v(t)$ em função de t entre t_0 e t

Escolhendo valores convenientes para t e t_0, como $t_0 = 2$ ms e $t = 6$ ms, temos:

$$i(t) - i(t_0) = 1 - (-2) = 3 \text{ A}$$

e

$$\int_{t_0}^{t} v(\tau)\,d\tau = \int_{0,002}^{0,006} 30\,d\tau = (30)\,(0,006 - 0,002) = 0,12 \text{ V} \cdot \text{s}$$

De acordo com a Eq. 7.5-5,

$$3 = \frac{1}{L}(0,12) \quad \Rightarrow \quad L = 0,040\,\frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A}} = 0,040 \text{ H} = 40 \text{ mH}$$

EXEMPLO 7.5-3 Corrente e Tensão em um Indutor

A entrada do circuito da Figura 7.5-8 é a tensão

$$v(t) = 4e^{-20t}\text{ V} \quad \text{para} \quad t > 0$$

A saída é a corrente

$$i(t) = -1{,}2e^{-20t} - 1{,}5\text{ A} \quad \text{para} \quad t > 0$$

A corrente inicial do indutor é $i_L = -3{,}5$ A. Determine o valor da indutância L e da resistência R.

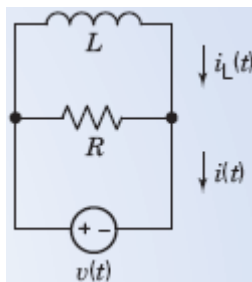



FIGURA 7.5-8 Circuito do Exemplo 7.5-3.

Solução

Aplicando a LKT a um dos nós do circuito, temos

$$i(t) = \frac{v(t)}{R} + i_L(t) = \frac{v(t)}{R} + \left[\frac{1}{L}\int_0^t v(\tau)\,d\tau + i(0)\right]$$

e, portanto,

$$-1{,}2e^{-20t} - 1{,}5 = \frac{4e^{-20t}}{R} + \frac{1}{L}\int_0^t 4e^{-20t}\,d\tau - 3{,}5 = \frac{4e^{-20t}}{R} + \frac{4}{l(-20)}(e^{-20t} - 1) - 3{,}5$$
$$= \left(\frac{4}{R} - \frac{1}{5L}\right)e^{-20t} + \frac{1}{5L} - 3{,}5$$

Igualando os coeficientes, obtemos

$$-1{,}5 = \frac{1}{5L} - 3{,}5 \quad \Rightarrow \quad L = 0{,}1\text{ H}$$

e

$$-1{,}2 = \frac{4}{R} - \frac{1}{5L} = \frac{4}{R} - \frac{1}{5(0{,}1)} = \frac{4}{R} - 2 \quad \Rightarrow \quad R = 5\ \Omega$$

EXERCÍCIO 7.5-1 Determine a tensão $v(t)$ para $t > 0$ no circuito da Figura E 7.5-1b, em que $i_s(t)$ é a corrente da Figura E 7.5-1a.

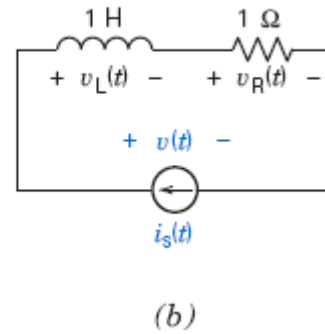
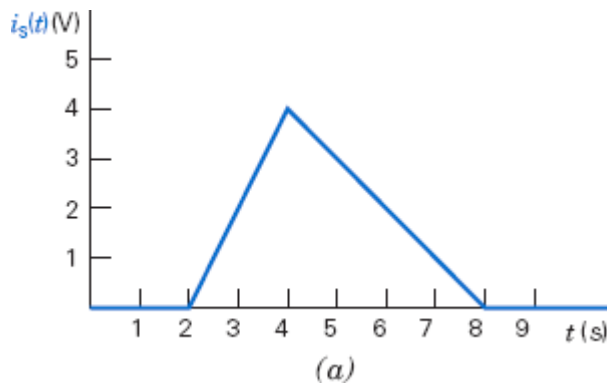



FIGURA E 7.5-1 (*a*) Corrente da fonte de corrente. (*b*) Circuito.

Sugestão: Determine $v_L(t)$ e $v_R(t)$ separadamente e use a LKT.

Resposta: $v(t) = \begin{cases} 2t - 2 & 2 < t < 4 \\ 7 - t & 4 < t < 8 \\ 0 & \text{p.q.o.v.} \end{cases}$

7.6 Armazenamento de Energia em um Indutor

A potência em um indutor é

$$p = vi = \left(L\frac{di}{dt}\right)i \tag{7.6-1}$$

A energia associada a um indutor está armazenada no campo magnético criado pela corrente que atravessa o indutor. A energia armazenada no indutor durante o intervalo de tempo de t_0 a t é dada por

$$w = \int_{t_0}^{t} p\, d\tau = L\int_{i(t_0)}^{i(t)} i\, di$$

Integrando a corrente de t_0 a t, obtemos

$$w = \frac{L}{2}\left[i^2(t)\right]_{i(t_0)}^{i(t)} = \frac{L}{2}i^2(t) - \frac{L}{2}i^2(t_0) \tag{7.6-2}$$

Supondo que $i(t_0) = 0$, obtemos:

$$w = \frac{1}{2}Li^2 \tag{7.6-3}$$

Observe que $w \geq 0$ para qualquer valor de i, o que é uma característica dos componentes passivos. Da mesma forma que o capacitor, o indutor é um componente que armazena energia, mas não a dissipa. É importante notar que o fato de os indutores e capacitores armazenarem energia e, portanto, possuírem memória os torna fundamentalmente diferentes dos componentes que foram discutidos em capítulos anteriores.

EXEMPLO 7.6-1 Corrente e Tensão de um Indutor

Determine a corrente de um indutor com $L = 0{,}1$ H se a tensão do indutor é dada por

$$v = 10te^{-5t}\ \text{V}$$

Suponha que a corrente é zero para $t \le 0$.

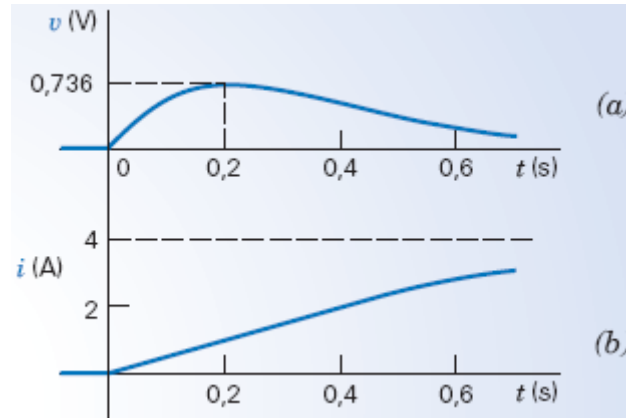



FIGURA 7.6-1 Tensão e corrente do Exemplo 7.6-1.

Solução

A Figura 7.6-1*a* mostra a tensão do indutor em função do tempo. Observe que a tensão passa por um máximo no instante $t = 0{,}2$ s. A corrente é dada por

$$i = \frac{1}{L}\int_0^t v\, d\tau + i(t_0)$$

Como a tensão é zero para $t < 0$, a corrente no indutor no instante $t = 0$ é $i(0) = 0$. Assim, temos

$$i = 10\int_0^t 10\,\tau e^{-5t}\, d\tau = 100\left[\frac{-e^{-5t}}{25}(1+5\tau)\right]_0^t = 4\left(1-e^{-5t}(1+5t)\right)\ \text{A}$$

A Figura 7.6-1*b* mostra a corrente do indutor em função do tempo.

EXEMPLO 7.6-2 Potência e Energia em um Indutor

Determine a potência e energia em um indutor de 0,1 H se a corrente e a tensão variam com o tempo da forma mostrada nas Figuras 7.6-2*a* e 7.6-2*b*.

Solução

Para começar, escrevemos expressões matemáticas para a corrente e a tensão. A corrente é dada por

$$i = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 20t\ \text{A} & 0 \le t \le 1 \\ 20\ \text{A} & t > 1 \end{cases}$$

e tensão é dada por

$$v = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 2\ \text{V} & 0 \le t \le 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$$

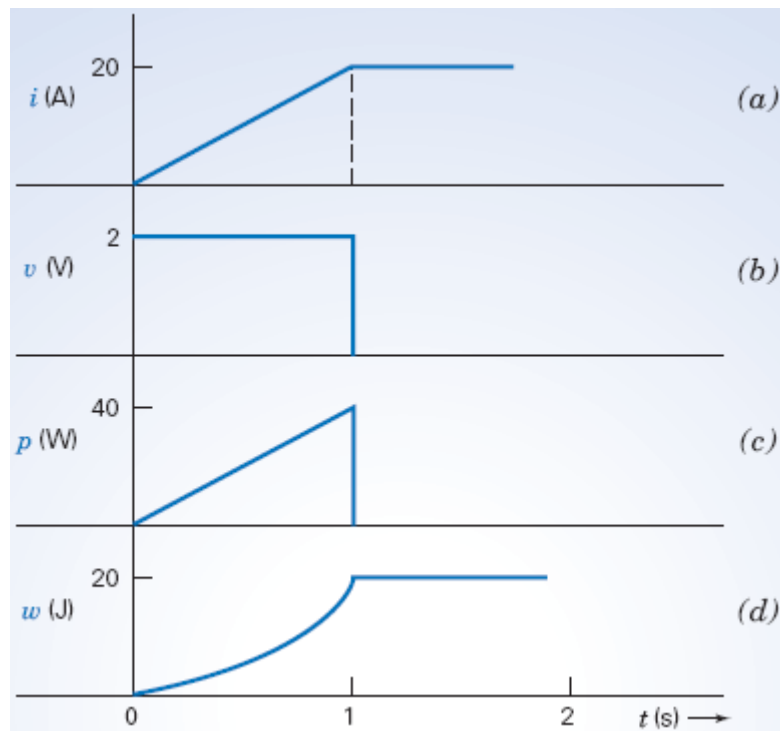



FIGURA 7.6-2 Corrente, tensão, potência e energia do Exemplo 7.6-2.

Naturalmente, as duas grandezas estão relacionadas pela equação $v = L di/dt$. A potência $p = vi$ é dada por

$$p = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 40t \text{ W} & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$$

e a energia $w = Li^2/2$ é dada por

$$w = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 20t^2 \text{ J} & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$$

As Figuras 7.6-2*c* e 7.6-2*d* mostram a variação com o tempo da potência e da energia, respectivamente.

EXEMPLO 7.6-3 Potência e Energia em um Indutor

Determine a potência e energia em um indutor de 0,1 H se a corrente e a tensão são dadas por $i = 20te^{-2t}$ A e $v = 2e^{-2t}(1 - 2t)$ V para $t \geq 0$ e $i = 0$ para $t < 0$. (Veja o Exemplo 7.5-1.)

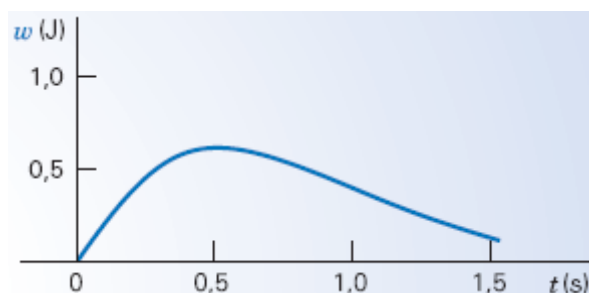



FIGURA 7.6-3 Energia armazenada no indutor do Exemplo 7.6-3.

Solução

A potência é dada por

$$p = iv = (20te^{-2t})[2e^{-2t}(1 - 2t)] = 40te^{-4t}(1 - 2t) \text{ W} \quad t > 0$$

A energia é dada por

$$w = \frac{1}{2}Li^2 = 0,05(20te^{-2t})^2 = 20t^2e^{-4t} \text{ J} \quad t > 0$$

Observe que w é positiva para todos os valores de $t > 0$. A Figura 7.6-3 mostra a energia armazenada no indutor em função do tempo.

7.7 *Indutores em Série e em Paralelo*

Combinações de indutores em série e em paralelo podem ser reduzidas a um único indutor equivalente. Considere N indutores ligados em série, como na Figura 7.7-1. A tensão entre os terminais do conjunto de indutores é dada por

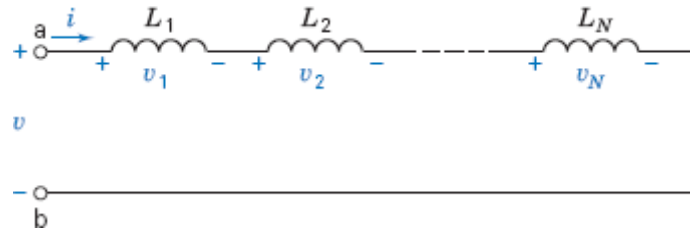



FIGURA 7.7-1 N indutores ligados em série.

$$\begin{aligned} v &= v_1 + v_2 + \ldots + v_N \\ &= L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + \ldots + L_N \frac{di}{dt} \\ &= \left(\sum_{n=1}^{N} L_N \right) \frac{di}{dt} \end{aligned}$$

Como a tensão entre os terminais do resistor equivalente L_s, mostrado na Figura 7.7-2, é dada por

$$v = L_s \frac{di}{dt}$$

deveremos ter

$$L_s = \sum_{n=1}^{N} L_n \qquad (7.7\text{-}1)$$

Assim, a indutância do indutor equivalente de N indutores ligados em série é a soma das indutâncias dos N indutores.

Considere agora N indutores ligados em paralelo, como na Figura 7.7-3. **A corrente i é igual à soma das correntes dos N indutores:**

$$i = \sum_{n=1}^{N} i_n$$

Como

$$i_n = \frac{1}{L_n}\int_{t_0}^{t} v\,d\tau + i_n(t_0)$$

podemos obter a expressão

$$i = \left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{L_n}\right)\int_{t_0}^{t} v\,d\tau + \sum_{n=1}^{N} i_n(t_0) \qquad (7.7\text{-}2)$$

A corrente do indutor equivalente L_p, que aparece na Figura 7.7-4, é dada pela equação

$$i = \frac{1}{L_p}\int_{t_0}^{t} v\,d\tau + i(t_0) \qquad (7.7\text{-}3)$$

Igualando as Eqs. 7.7-2 e 7.7-3, obtemos

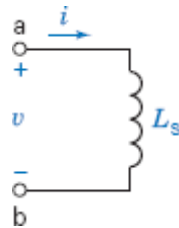



FIGURA 7.7-2 Circuito equivalente de *N* indutores em série.

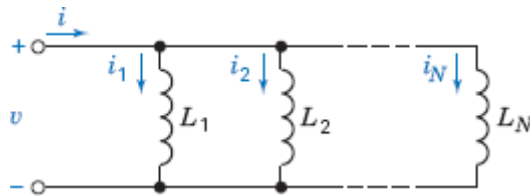



FIGURA 7.7-3 *N* indutores ligados em paralelo.

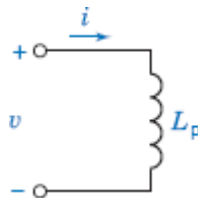



FIGURA 7.7-4 Circuito equivalente de *N* indutores em paralelo.

$$\frac{1}{L_p} = \sum_{n=1}^{N}\frac{i}{L_n} \qquad (7.7\text{-}4)$$

e

$$i(t_0) = \sum_{n=1}^{N} i_n(t_0) \qquad (7.7\text{-}5)$$

EXEMPLO 7.7-1 Indutores em Série e em Paralelo

Determine a indutância equivalente do circuito da Figura 7.7-5.

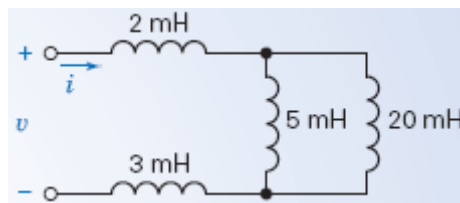



FIGURA 7.7-5 Circuito do Exemplo 7.7-1.

Solução

Em primeiro lugar, determinamos a indutância equivalente dos indutores de 5 mH e 20 mH ligados em paralelo. De acordo com a Eq. 7.7-4, temos

$$\frac{1}{L_p} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$$

$$L_p = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} = \frac{5 \times 20}{5 + 20} = 4 \text{ mH}$$

Esse indutor equivalente está em série com os indutores de 2 mH e 3 mH. Assim, de acordo com a Eq. 7.7-1,

$$L_{eq} = \sum_{n=1}^{N} L_n = 2 + 3 + 4 = 9 \text{ mH}$$

EXERCÍCIO 7.7-1 Determine a indutância equivalente do circuito da Figura E 7.7-1.

Resposta: $L_{eq} = 14$ mH

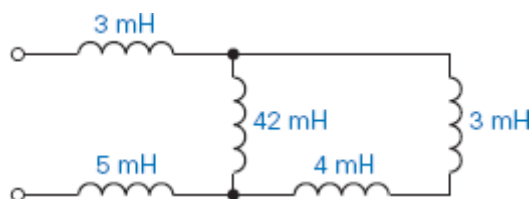



FIGURA E 7.7-1

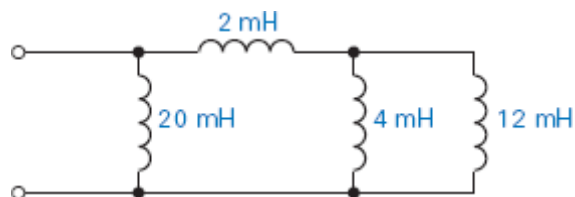



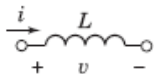
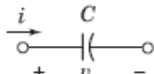
FIGURA E 7.7-2

EXERCÍCIO 7.7-2 Determine a indutância equivalente do circuito da Figura E 7.7-2.

Resposta: $L_{eq} = 4$ mH

7.8 *Circuitos de Comutação*

Nesta seção, vamos discutir os circuitos de comutação. Esses circuitos apresentam as seguintes características:

1. Todas as entradas do circuito, ou seja, todas as fontes de tensão independentes e todas as fontes de corrente independentes, são constantes.
2. O circuito possui uma ou mais chaves que são abertas ou fechadas no instante t_0. O instante que precede o fechamento da(s) chave(s) é chamado de t^-_0 e o instante que se segue ao fechamento da(s) chave(s) é chamado de t^+_0. Em geral, supomos que $t_0 = 0$.
3. O circuito dispõe pelo menos de um capacitor ou indutor.
4. Supomos que o instante $t = t_0$, ou seja, o instante da comutação, acontece depois que todas as chaves do circuito permaneceram por um longo tempo na posição em que encontram. Isso equivale a dizer que o circuito atingiu o *regime estacionário* em um instante $t < t_0$. Um circuito que contém apenas fontes constantes e se encontra no regime estacionário é chamado de *circuito de cc*. Em um circuito de cc, todas as correntes e tensões são constantes até que a(s) chave(s) seja(m) aberta(s) ou fechada(s).

Estamos particularmente interessados na variação das correntes e das tensões dos componentes que armazenam energia quando uma chave é acionada, já que são essas correntes e tensões, juntamente com as correntes e tensões das fontes, que determinam o comportamento do circuito para $t > t_0$. (Como vimos na Seção 2.9, as chaves abertas se comportam como circuitos abertos e as chaves fechadas se comportam como curtos-circuitos.) A Tabela 7.8-1 mostra as principais características do comportamento de um indutor e de um capacitor. Note, em particular, que a tensão de um capacitor e a corrente de um indutor não podem variar bruscamente. (Vimos nas Seções 7.2 e 7.5 que isso exigiria que a corrente no primeiro caso e a tensão no segundo fosse infinita, algo que não é fisicamente possível.) Por outro lado, nada impede que a corrente de um capacitor e a tensão de um indutor variem bruscamente.

Suponha que um circuito de cc contenha um indutor. A corrente no indutor, com todas as outras correntes e tensões de um circuito de cc, é constante. Como, de acordo com a Eq. 7.5-1, $v = Ldi/dt$, a tensão do indutor é proporcional à derivada da corrente no indutor, e a corrente do indutor é constante, a tensão do indutor é zero. Isso significa que o indutor se comporta como um curto-circuito.

Nos **circuitos de cc**, um **indutor** se comporta como um **curto-circuito**.

Suponha que um circuito de cc contenha um capacitor. Como, de acordo com a Eq. 7.2-2, $i = Cdv/dt$, a corrente no capacitor é proporcional à derivada da tensão do capacitor e a tensão do capacitor é constante, a corrente no capacitor é zero. Isso significa que o capacitor se comporta como um circuito aberto.

Tabela 7.8-1 Características dos Componentes que Armazenam Energia

CARACTERÍSTICA	INDUTOR	CAPACITOR
Convenção passiva	i L $+\ v\ -$	i C $+\ v\ -$
Tensão	$v = L\dfrac{di}{dt}$	$v = \dfrac{1}{C}\int_0^t i\,d\tau + v(0)$
Corrente	$i = \dfrac{1}{L}\int_0^t v\,d\tau + i(0)$	$i = C\dfrac{dv}{dt}$
Potência	$i = Li\dfrac{di}{dt}$	$p = Cv\dfrac{dv}{dt}$
Energia	$w = \dfrac{1}{2}Li^2$	$w = \dfrac{1}{2}Cv^2$
Não pode variar bruscamente	Corrente	Corrente
Pode variar bruscamente	Tensão	Tensão
Comporta-se como um (veja a nota abaixo)	Curto-circuito para uma corrente constante	Circuito aberto para uma tensão constante

Nota: Supondo que o circuito se encontra no regime estacionário.

Nos circuitos de cc, um capacitor se comporta como um circuito aberto.

A análise de circuitos de comutação pode ser executada em duas etapas:

1. Estudar o circuito de cc antes do instante $t = t_0$ para determinar as tensões nos capacitores e as correntes nos indutores, levando em conta o fato de que, nos circuitos de cc, os capacitores se comportam como circuitos abertos e os indutores se comportam como curtos-circuitos.
2. Reconhecer que, como as tensões dos capacitores e as correntes nos indutores não podem variar bruscamente, as tensões dos capacitores e as correntes dos indutores no instante t_0^+ têm o mesmo valor que no instante t_0^-.

O método será ilustrado nos exemplos a seguir.

EXEMPLO 7.8-1 Condições Iniciais em um Circuito de Comutação

Considere o circuito da Figura 7.8-1. A chave permaneceu fechada por um longo tempo antes do instante $t = 0$. Determine o valor da tensão do capacitor e da corrente no indutor imediatamente após a chave ser fechada no instante $t = 0$.

Solução

1. Para determinar $v_c(0^-)$ e $i_L(0^-)$, consideramos o circuito antes que a chave seja aberta, ou seja, para $t < 0$. A entrada do circuito, a tensão da fonte de tensão, é constante. Além disso, sabemos que o circuito se encontra no regime estacionário, ou seja, se comporta como um circuito de cc. Como, nos circuitos de cc, o capacitor pode ser substituído por um circuito aberto e o indutor pode ser substituído por um curto-circuito, substituímos o capacitor por um circuito aberto com um tensão $v_c(0^-)$ e o indutor por um curto-circuito com uma corrente $i_L(0^-)$, o que nos dá o circuito da Figura 7.8-2. Examinando o circuito da Figura 7.8-2, vemos que

$$i_L(0^-) = \frac{10}{5} = 2 \text{ A}$$

Usando o método da divisão de tensão, temos

$$v_c(0^-) = \left(\frac{3}{5}\right)10 = 6 \text{ V}$$

2. Como a tensão do capacitor e a corrente no indutor não podem variar bruscamente,

$$v_c(0^+) = v_c(0^-) = 6 \text{ V}$$

e

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 2 \text{ A}$$

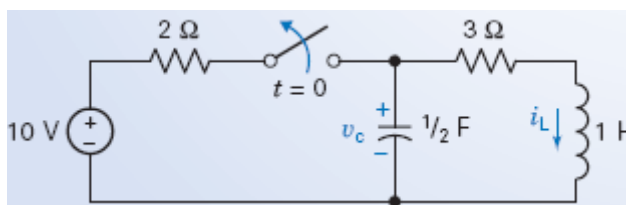



FIGURA 7.8-1 Circuito com um indutor e um capacitor. A chave permaneceu fechada por um longo tempo antes de ser aberta no instante $t = 0$.

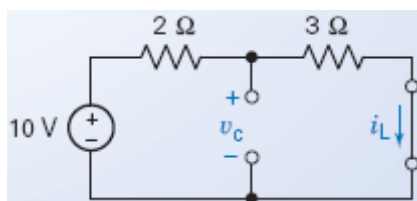



FIGURA 7.8-2 Circuito da Figura 7.8-1 para $t < 0$.

EXEMPLO 7.8-2 Condições Iniciais em um Circuito de Comutação

Determine $i_L(0^+)$, $v_c(0^+)$, $dv_c(0^+)/dt$ e $di_L(0^+)/dt$ no circuito da Figura 7.8-3, usando a notação $dv_c(0^+)/dt$ para designar $\left. dv_c(t)\,/\,dt \right|_{t=0^+}$.

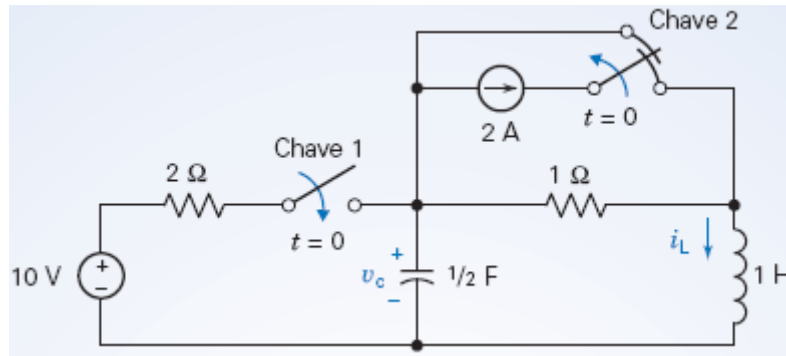



FIGURA 7.8-3 Circuito do Exemplo 7.8-2. A chave 1 é fechada em $t = 0$ e a chave 2 é aberta em $t = 0$.

Suponha que a chave 1 permaneceu aberta e a chave 2 permaneceu fechada por um longo tempo e que, portanto, o circuito se encontra no regime estacionário em $t = 0^-$.

Solução

Para começar, desenhamos o circuito no instante $t = 0^-$ substituindo o indutor por um curto-circuito e o capacitor por um circuito aberto, como mostra a Figura 7.8-4. Em seguida, observamos que

$$i_L(0^-) = 0$$

e

$$v_c(0^-) = -2 \text{ V}$$

Assim temos

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$$

e

$$v_c(0^+) = v_c(0^-) = -2 \text{ V}$$

Para calcular $dv_c(0^+)/dt$ e $di_L(0^+)/dt$, consideramos que as chaves do circuito da Figura 7.8-3 foram acionadas, o que nos dá o circuito da Figura 7.8-5. (Não é necessário desenhar a fonte de corrente, já que ela foi desligada do circuito.)

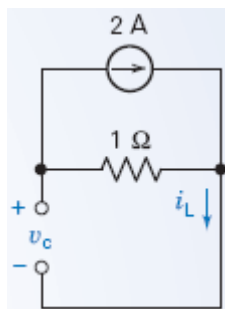



FIGURA 7.8-4 Circuito de Figura 7.8-3 no instante $t = 0^-$.

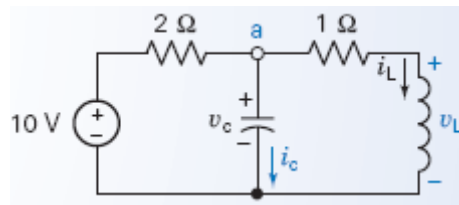



FIGURA 7.8-5 Circuito da Figura 7.8-3 no instante $t = 0^+$ com a chave 1 fechada e a fonte de corrente desligada.

Para calcular $dv_c(0^+)/dt$, usamos a relação

$$i_c = C\frac{dv_c}{dt}$$

e, portanto,

$$\frac{dv_c(0^+)}{dt} = \frac{i_c(0^+)}{C}$$

Como, para o indutor,

$$v_L = L\frac{di_L}{dt}$$

obtemos

$$\frac{di_L(0^+)}{dt} = \frac{v_L(0^+)}{L}$$

Aplicando a LKT à malha da direita da Figura 7.8-5, obtemos

$$v_L - v_c + 1i_L = 0$$

Assim, em $t = 0^+$,

$$v_L(0^+) = v_c(0^+) - i_L(0^+) = -2 - 0 = -2 \text{ V}$$

e, portanto,

$$\frac{di_L(0^+)}{dt} = -2 \text{ A/s}$$

Para calcular i_c, aplicamos a LKC ao nó a para obter

$$i_c + i_L + \frac{v_c - 10}{2} = 0$$

Assim, em $t = 0^+$,

$$i_c(0^+) = \frac{10 - v_c(0^+)}{2} - i_L(0^+) = 6 - 0 = 6 \text{ A}$$

e

$$\frac{dv_c(0^+)}{dt} = \frac{i_c(0^+)}{C} = \frac{6}{1/2} = 12 \text{ V/s}$$

Observe que, no instante em que as chaves foram acionadas, $t = 0$, a corrente no indutor e a tensão no capacitor permaneceram constantes. Por outro lado, a tensão do indutor variou bruscamente de $v_L(0^-) = 0$ para $v_L(0^+) = -2$ V e a corrente no capacitor variou bruscamente de $i_c(0^-) = 0$ para $i_c(0^+) = 6$ A. Imediatamente após o fechamento da chave, a corrente no indutor estava variando a uma taxa $di_L(0^+)/dt = -2$ A/s e a tensão no capacitor estava variando a uma taxa $dv_c(0^+)/dt = 12$ V/s.

7.9 Circuitos com Amplificadores Operacionais e Equações Diferenciais Lineares

Nesta seção é apresentado um método para projetar circuitos com amplificadores operacionais que implementam equações diferenciais lineares como, por exemplo,

$$2\frac{d^3}{dt^3}y(t) + 5\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 4\frac{d}{dt}y(t) + 3y(t) = 6x(t) \qquad (7.9\text{-}1)$$

A solução dessa equação é uma função, $y(t)$, que depende da função $x(t)$ e das condições iniciais. É conveniente usar as condições iniciais:

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) = 0, \quad \frac{d}{dt}y(t) = 0 \quad \text{e} \quad y(t) = 0 \qquad (7.9\text{-}2)$$

Depois de especificar as condições iniciais, esperamos que uma função única $y(t)$ corresponda a qualquer função dada $x(t)$. Em consequência, vamos tratar $x(t)$ como a entrada da equação diferencial e $y(t)$ como a saída.

Na Seção 6.6 foi apresentada a ideia de representar operações matemáticas por blocos e equações matemáticas por diagramas de blocos. Os blocos que representam as operações de adição e multiplicação por uma constante também foram apresentados na Seção 6.6. A Figura 7.9-1 mostra outros dois blocos, que representam as operações de integração e derivação.

Suponha que o valor de $\frac{d^3}{dt^3}y(t)$ seja conhecido. Nesse caso, podemos integrar três vezes para obter $\frac{d^2}{dt^2}y(t)$, $\frac{d}{dt}y(t)$ e $y(t)$, como mostra a Figura 7.9-2.

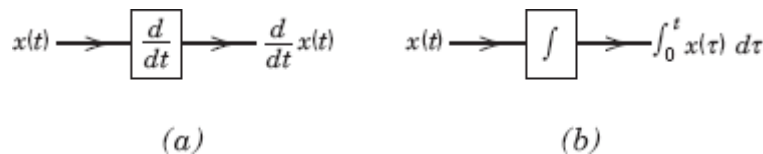



FIGURA 7.9-1 Blocos usados para representar (a) derivação e (b) integração.

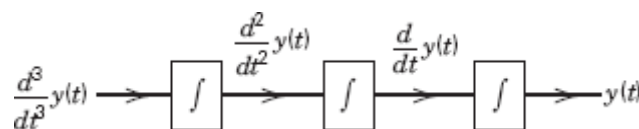



FIGURA 7.9-2 Diagrama de blocos que representa o processo para obter $y(t)$ a partir de $\frac{d^3}{dt^3}y(t)$.

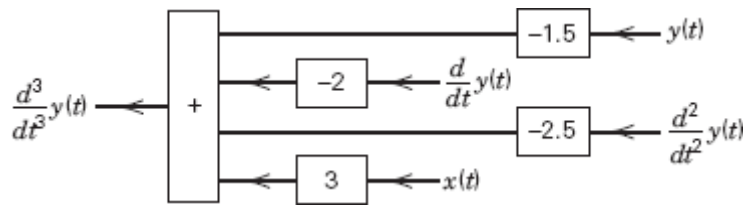



FIGURA 7.9-3 Diagrama de blocos que representa a Eq. 7.9-3.

Agora precisamos obter $\frac{d^3}{dt^3}y(t)$. Para isso, explicitamos $\frac{d^3}{dt^3}y(t)$ na Eq. 7.9-1, obtendo

$$\frac{d^3}{dt^3}y(t) = 3x(t) - \left[2{,}5\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 2\frac{d}{dt}y(t) + 1{,}5y(t)\right] \tag{7.9-3}$$

Em seguida, representamos a Eq. 7.9-3 por um diagrama de blocos como o que aparece na Figura 7.9-3. Finalmente, combinamos os diagramas de blocos das Figuras 7.9-2 e 7.9-3 para formar o diagrama de blocos da Figura 7.9-4, que é uma representação da Eq. 7.9-1.

A tarefa seguinte consiste em implementar o diagrama de blocos usando um circuito com amplificadores operacionais. A Figura 7.9-5 mostra circuitos com amplificadores que realizam as operações de derivação e integração. Para compreender o funcionamento de um circuito integrador, considere a Figura 7.9-6. Os nós do integrador da Figura 7.9-6 foram rotulados para facilitar a formulação das equações de nó. Sejam v_1, v_2 e v_3 as tensões nos nós 1, 2 e 3, respectivamente.

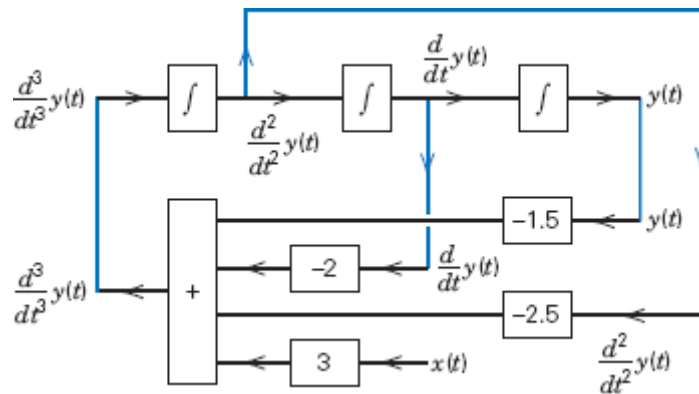



FIGURA 7.9-4 Diagrama de blocos que representa a Eq. 7.9-1.

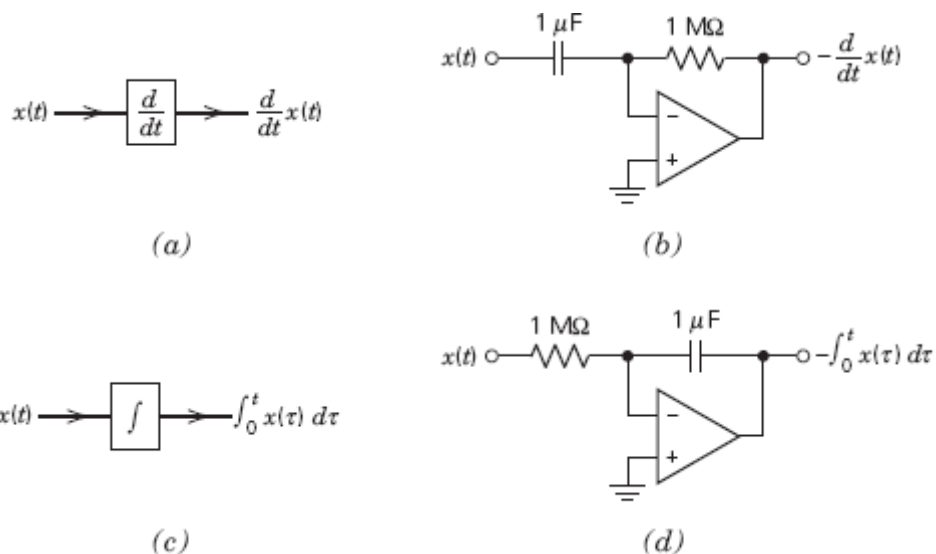



FIGURA 7.9-5 Blocos usados para representar (*a*) derivação e (*c*) integração.

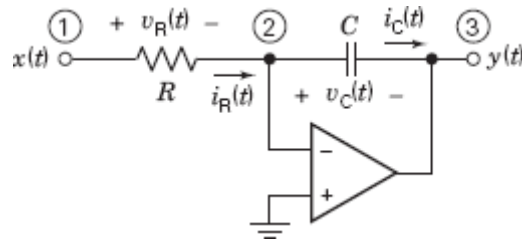



FIGURA 7.9-6 Circuito integrador.

Circuitos com amplificadores operacionais para executar as operações (*b*) de derivação e (*d*) de integração.

A entrada do integrador é *x*(*t*), a tensão do nó 1. Assim, $v_1 = x(t)$. A saída do integrador é *y*(*t*), a tensão do nó 3. Assim, $v_3 = y(t)$. A entrada não inversora do amplificador operacional ideal está ligada ao nó de referência e a saída inversora está ligada ao nó 2. Como as tensões nas duas entradas de um amplificador operacional ideal são iguais, $v_2 = 0$.

A tensão do resistor está relacionada às tensões dos nós 1 e 2 através da equação

$$v_R(t) = v_1(t) - v_2(t) = x(t) - 0 = x(t)$$

De acordo com a lei de Ohm, a corrente do resistor é

$$i_R(t) = \frac{v_R(t)}{R} = \frac{x(t)}{R}$$

Como a corrente em qualquer entrada de um amplificador operacional ideal é zero, a aplicação da LKC ao nó 2 nos dá

$$i_C(t) = i_R(t) = \frac{x(t)}{R}$$

A tensão do capacitor está relacionada às tensões dos nós 2 e 3 através da equação

$$v_C(t) = v_2(t) - v_3(t) = 0 - y(t) = -y(t) \qquad (7.9\text{-}4)$$

A tensão do capacitor está relacionada à corrente do capacitor através da equação

$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i_C(\tau)\,d\tau + v_C(0)$$

Como $y(0) = 0$, $v_C(0) = 0$ e

$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i_C(\tau)\,d\tau = \frac{1}{C}\int_0^t \frac{x(\tau)}{R}\,d\tau = \frac{1}{RC}\int_0^t x(\tau)\,d\tau$$

Finalmente, usando a Eq. 7.9-4 obtemos

$$y(t) = -\frac{1}{RC}\int_0^t x(\tau)\,d\tau = -k\int_0^t x(\tau)\,d\tau \qquad (7.9\text{-}5)$$

em que $k = 1/RC$.

De acordo com a Eq. 7.9-5, o circuito da Figura 7.9-6 faz três coisas. Em primeiro lugar, a entrada é multiplicada por uma constante *k*. Em segundo lugar, o resultado é integrado. Em terceiro lugar, a integral é multiplicada por −1. Multiplicar uma função do tempo por −1 significa inverter o sentido do eixo que mede a amplitude da função. Como essa operação é chamada de inversão, o circuito integrador da Figura 7.9-6

também é chamado de integrador inversor. Normalmente, porém, é conhecido simplesmente como circuito integrador, a menos que se queira chamar atenção para a inversão.

A análise do circuito integrador somador da Figura 7.9-7 é semelhante à análise do circuito integrador. As entradas do circuito integrador somador são $x_1(t)$, a tensão do nó 1, e $x_2(t)$, a tensão do nó 2. A saída do circuito é $y(t)$, a tensão do nó 4. A tensão do nó 3 é zero. Assim,

$$v_1(t) = x_1(t), \quad v_2(t) = x_2(t), \quad v_3(t) = 0 \quad \text{e} \quad v_4(t) = y(t)$$

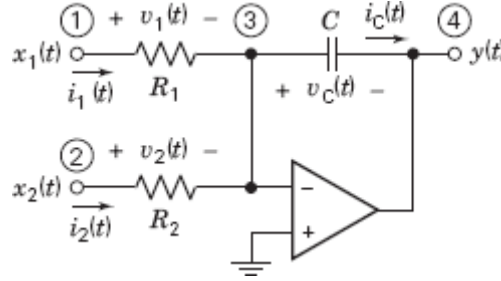



FIGURA 7.9-7 Circuito integrador somador.

De acordo com a lei de Ohm, as correntes nos resistores são

$$i_1(t) = \frac{v_1(t)}{R_1} = \frac{x_1(t)}{R_1} \quad \text{e} \quad i_2(t) = \frac{v_2(t)}{R_2} = \frac{x_2(t)}{R_2}$$

Como a corrente em qualquer entrada de um amplificador operacional ideal é zero, a aplicação da LKC ao nó 3 nos dá

$$i_C(t) = i_1(t) + i_2(t) = \frac{x_1(t)}{R_1} + \frac{x_2(t)}{R_2}$$

A tensão no capacitor está relacionada às tensões dos nós 3 e 4 pela equação

$$v_C(t) = v_3(t) - v_4(t) = 0 - y(t) = -y(t) \qquad (7.9\text{-}6)$$

A tensão no capacitor está relacionada à corrente no capacitor pela equação

$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i_C(\tau)\,d\tau + v_C(0)$$

Como $y(0) = 0$, $v_C(0) = 0$ e

$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i_C(\tau)\,d\tau = \frac{1}{C}\int_0^t \left(\frac{x_1(\tau)}{R_1} + \frac{x_2(\tau)}{R_2}\right) d\tau = \int_0^t \left(\frac{x_1(\tau)}{R_1 C} + \frac{x_2(\tau)}{R_2 C}\right) d\tau$$

Finalmente, usando a Eq. 7.9-6, obtemos

$$y(t) = -\int_0^t \left(\frac{x_1(\tau)}{R_1 C} + \frac{x_2(\tau)}{R_2 C}\right) d\tau = -\int_0^t (k_1 x_1(\tau) + k_2 x_2(\tau))\,d\tau \qquad (7.9\text{-}7)$$

em que $k_1 = 1/R_1C$ e $k_2 = 1/R_2C$.

De acordo com a Eq. 7.9-7, o circuito integrador somador faz quatro coisas. Em primeiro lugar, cada entrada é multiplicada por uma constante diferente: x_1 é multiplicada por k_1 e x_2 é multiplicada por k_2. Em segundo lugar, os produtos são somados. Em terceiro lugar, a soma é integrada. Em quarto lugar, a integral é multiplicada por −1. (Como no caso do circuito integrador inversor, a saída do circuito integrador somador é

invertida em relação à entrada, de modo que o nome completo é circuito integrador somador inversor. Em geral, porém, é chamado simplesmente de circuito integrador somador.)

O circuito integrador somador da Figura 7.9-7 dispõe de apenas duas entradas. Para aumentar o número de entradas disponíveis, basta ligar um número maior de resistores à entrada inversora do amplificador operacional. (Para implementar a Eq. 7.9-1, será preciso usar um integrador somador com quatro entradas.)

Para projetar um circuito com amplificadores operacionais para implementar a Eq. 7.9-1, é preciso substituir os blocos do diagrama de blocos da Figura 7.9-1 por circuitos com amplificadores operacionais. O processo fica mais fácil se modificarmos o diagrama de blocos para levar em conta o fato de que estamos usando circuitos integradores *inversores*. As Figuras 7.9-8 e 7.9-9 mostram versões modificadas dos diagramas de blocos das Figuras 7.9-2 e 7.9-3. Substituindo todos os circuitos integradores da Figura 7.9-2 por circuitos integradores inversores, obtemos o diagrama de blocos da Figura 7.9-8. Observe que é necessário fazer a entrada igual a $\frac{d^3}{dt^3}y(t)$ em vez de $\frac{d^3}{dt^3}y(t)$ para que a saída seja $y(t)$ e não $-y(t)$.

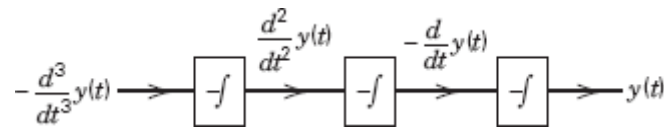



FIGURA 7.9-8 Diagrama de blocos da Figura 7.9-2, ajustado para acomodar circuitos integradores inversores.

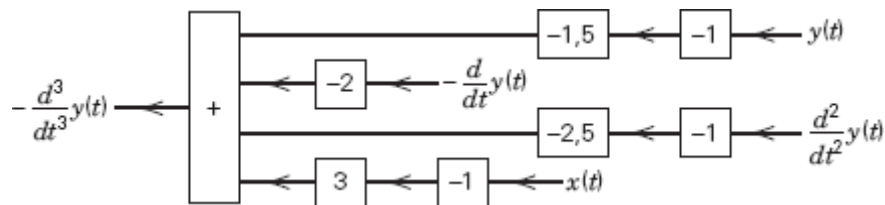



FIGURA 7.9-9 Diagrama de blocos da Figura 7.9-3, ajustado para acomodar as consequências do uso de circuitos integradores inversores.

O diagrama de blocos da Figura 7.9-9 produz $\frac{d^3}{dt^3}y(t)$ a partir de $\frac{d^2}{dt^2}y(t)$, $-\frac{d}{dt}y(t)$ e $y(t)$. Os diagramas de blocos das Figuras 7.9-8 e 7.9-9 podem ser combinados, como mostra a Figura 7.9-10, para produzir um diagrama de blocos que representa a Eq. 7.9-1.

Um circuito integrador somador pode multiplicar cada entrada por uma constante diferente, somar os produtos e integrar a soma. O diagrama de blocos da Figura 7.9-11 destaca os blocos que podem ser implementados usando um único integrador somador de quatro entradas.

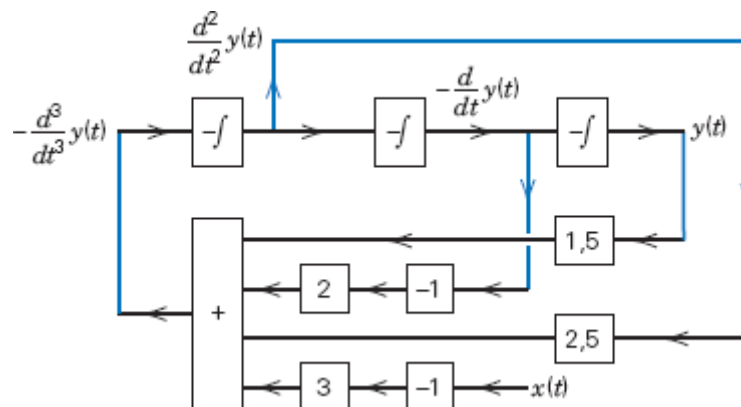



FIGURA 7.9-10 Diagrama de blocos que representa a Eq. 7.9-1, ajustado para acomodar circuitos integradores inversores.

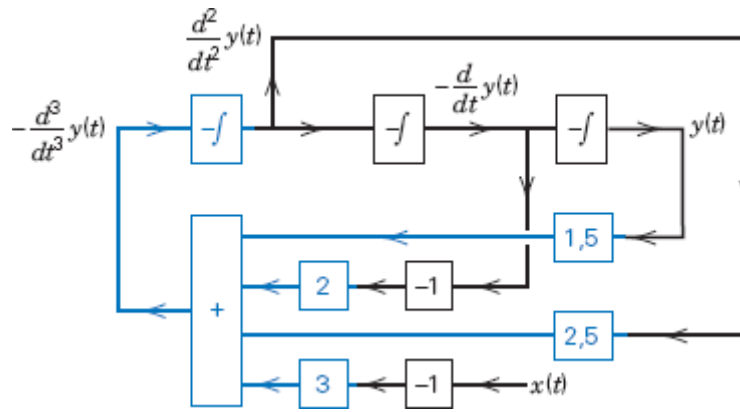



FIGURA 7.9-11 Diagrama de blocos que representa a Eq. 7.9-1, destacando os blocos que podem ser implementados usado um circuito integrador somador.

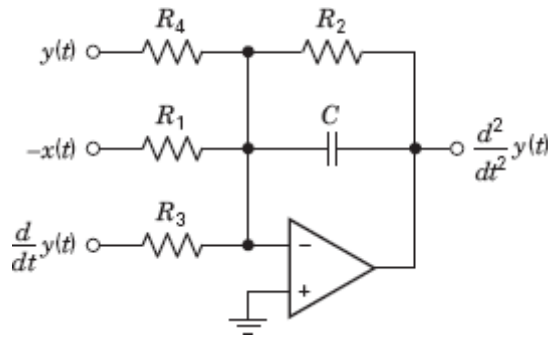



FIGURA 7.9-12 Circuito integrador somador.

A Figura 7.9-12 mostra o integrador somador de quatro entradas. O sinal $\frac{d^2}{dt^2}y(t)$ é a saída e também uma das entradas do circuito, já que o resistor R_2 está ligado entre a saída e a entrada inversora do amplificador operacional. O circuito integrador somador representa a equação

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) = -\int_0^t \left(\frac{1}{R_1C}[-x(t)] + \frac{1}{R_2C}\frac{d^2}{dt^2}y(t) + \frac{1}{R_3C}\left[\frac{d}{dt}y(t)\right] + \frac{1}{R_4C}y(t) \right) d\tau \qquad (7.9\text{-}8)$$

Integrando ambos os membros da Eq. 7.9-3, obtemos

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) = -\int_0^t \left(3[-x(t)] + 2{,}5\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 2\left[\frac{d}{dt}y(t)\right] + 1{,}5y(t) \right) d\tau \qquad (7.9\text{-}9)$$

Por conveniência, vamos fazer $C = 1\ \mu$F. Comparando as Eqs. 7.9-8 e 7.9-9, obtemos

$$R_1 = 333\ \text{k}\Omega, \quad R_2 = 400\ \text{k}\Omega, \quad R_3 = 500\ \text{k}\Omega \quad \text{e} \quad R_4 = 667\ \text{k}\Omega$$

O circuito integrador somador implementa a maior parte do diagrama de blocos, deixando apenas quatro outros blocos para serem implementados. Esses quatro blocos são implementados usando dois circuitos integradores inversores e dois circuitos amplificadores inversores. O circuito completo aparece na Figura 7.9-13.

FIGURA 7.9-13 Circuito com amplificadores operacionais que implementa a Eq. 7.9-1.

7.10 *Uso do MATLAB para Plotar a Tensão e a Corrente em Capacitores e Indutores*

Suponha que a corrente em um capacitor de 2 F seja

$$i(t) = \begin{cases} 4 & t \le 2 \\ t+2 & 2 \le t \le 6 \\ 20-2t & 6 \le t \le 14 \\ -8 & t \ge 4 \end{cases} \qquad (7.10\text{-}1)$$

em que as correntes estão em ampères e os tempos em segundos. Se a tensão inicial do capacitor é $v(0) = -5$ V, a tensão do capacitor em função do tempo pode ser calculada usando a equação

$$v(t) = \frac{1}{2}\int_0^t i(\tau)\, d\tau - 5 \qquad (7.10\text{-}2)$$

De acordo com a Eq. 7.10-1, $i(t) = 4$ A para $t < 2$ s. Substituindo essa corrente na Eq. 7.10-2, obtemos

$$v(t) = \frac{1}{2}\int_0^t 4d\tau - 5 - 2t - 5 \qquad (7.10\text{-}3)$$

para $t < 2$ s. Ainda de acordo com a Eq. 7.10-1, $i(t) = t + 2$ A para $2 < t < 6$ s. Substituindo essa corrente na Eq. 7.10-2, obtemos

$$v(t) = \frac{1}{2}\left(\int_2^t (t+2)d\tau + \int_0^2 4\, d\tau\right) - 5 = \frac{1}{2}\int_2^t (t+2)d\tau - 1 = \frac{t^2}{4} + t - 4 \qquad (7.10\text{-}4)$$

para $2 < t < 6$ s. Continuando da mesma forma, calculamos

$$v(t) = \frac{1}{2}\left(\int_6^t (20 - 2t)\, d\tau + \int_2^6 (t + 2)\, d\tau + \int_0^2 4\, d\tau \right) - 5$$
$$= \frac{1}{2}\int_6^t (20 - 2t)\, d\tau + 11 = \frac{t^2}{2} + 10t - 31 \qquad (7.10\text{-}5)$$

para $6 < t < 14$ s e

$$v(t) = \frac{1}{2}\left(\int_{14}^t -8\, d\tau + \int_6^{14} (20 - 2t)\, d\tau + \int_2^6 (t + 2)\, d\tau + \int_0^2 4\, d\tau \right) - 5$$
$$= \frac{1}{2}\int_{14}^t -8\, d\tau + 11 = 67 - 4t \qquad (7.10\text{-}9)$$

para $t > 14$ s.

De acordo com as Eqs. 7.10-3 a 7.10-6, temos:

$$v(t) = \begin{cases} 2t - 5 & t \le 2 \\ \dfrac{t^2}{4} + t - 4 & 2 \le t \le 6 \\ -\dfrac{t^2}{2} + 10t - 31 & 6 \le t \le 14 \\ 67 - 4t & t \ge 14 \end{cases} \qquad (7.10\text{-}7)$$

```
function i =CorCap(t);
  if t<2
    i=4;
  elseif t<6
    i=t+2;
  elseif t<14
    i=20 -2*t;
  else
    i = -8;
  end
```

(*a*)

```
function v=TenCap(t);
  if t<2
    v=2*t-5;
  elseif t<6
    v=0.25*t*t+t-4;
  elseif t<14
    v=-.5*t*t+10*t-31;
  else
    v=67 -4*t;
  end
```

(*b*)

```
t=0:1:20;
for k=1:1:length(t)
  i(k) =CorCap(k-1);
  v(k) =TenCap(k-1);
end
plot(t,i,t,v)
text(12,10,'v(t), V')
text(10, -5,'i(t), A')
title('Tensão e corrente no capacitor')
xlabel('tempo, s')
```

(*c*)

FIGURA 7.10-1 Arquivos de entrada do MATLAB usados (*a*) para calcular a corrente no capacitor, (*b*) para calcular a tensão do capacitor, (*c*) para plotar a corrente e a tensão em função do tempo.

As Eqs. 7.10-1 e 7.10-7 expressam matematicamente a corrente e a tensão do capacitor. O programa MATLAB pode ser usado para representar graficamente as duas grandezas. As Figuras 7.10-1*a* e 7.10-1*b* mostram arquivos de entrada do MATLAB que calculam a corrente e a tensão no capacitor em vários instantes de tempo. Observe que o arquivo de entrada do MATLAB que calcula a corrente, Figura 7.10-1*a*, é muito parecido com a Eq. 7.10-1, enquanto o arquivo de entrada do MATLAB que calcula a tensão, Figura 7.10-1*b*, é muito parecido com a Eq. 7.10-

7. A Figura 7.10-1*c* mostra o arquivo de entrada do MATLAB que plota a corrente e a tensão no capacitor em função do tempo. A Figura 7.10-2 mostra as curvas obtidas.

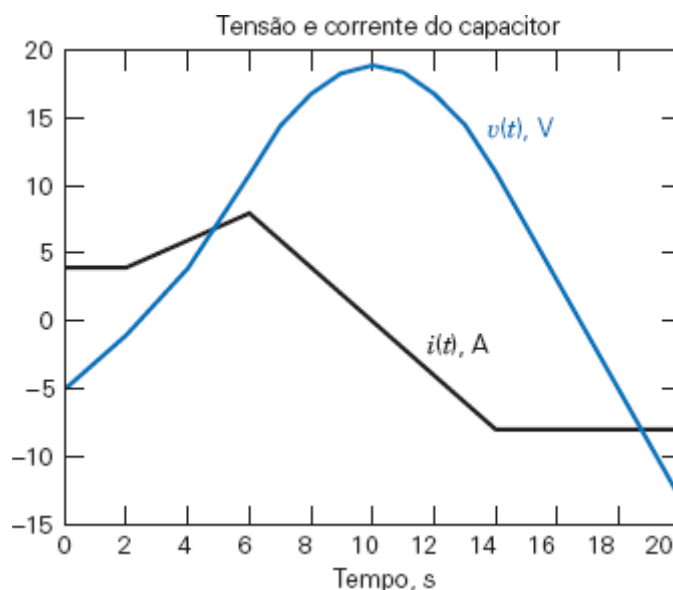



FIGURA 7.10-2 Gráfico da tensão e da corrente em um capacitor em função do tempo, plotado usando o programa MATLAB.

7.11 *Como Podemos Testar . . . ?*

Os engenheiros são frequentemente encarregados de verificar se a solução de um problema está correta. As soluções de problemas de projeto, por exemplo, devem ser verificadas para confirmar que todas as especificações estão sendo atendidas. Além disso, os resultados obtidos com o auxílio de computadores devem ser revistos para evitar possíveis erros na digitação dos dados e as afirmações dos vendedores a respeito dos seus produtos devem ser confirmadas.

Os estudantes de engenharia muitas vezes também precisam verificar se os resultados que obtiveram estão corretos. Às vezes falta muito pouco tempo para terminar um exame e é importante poder identificar rapidamente as questões que precisam ser refeitas.

O exemplo a seguir ilustra algumas técnicas que podem ser usadas para verificar se as soluções de problemas do tipo discutido neste capítulo estão corretas.

EXEMPLO 7.11-1 Como Podemos Testar a Tensão e a Corrente em um Capacitor?

A solução de um dever de casa mostra que a corrente e a tensão em um capacitor de 2 F são

$$i(t) = \begin{cases} 4 & t < 2 \\ t+2 & 2 < t < 6 \\ 20 - 2t & 6 < t < 14 \\ -8 & t > 14 \end{cases} \qquad (7.11\text{-}1)$$

e

$$v(t) = \begin{cases} 2t-5 & t<2 \\ \dfrac{t^2}{4}+t-4 & 2<t<6 \\ -\dfrac{t^2}{2}+10t-21 & 6<t<14 \\ 67-4t & t>14 \end{cases} \quad (7.11\text{-}2)$$

em que as correntes estão em ampères, as tensões, em volts e os tempos, em segundos. **Como podemos testar** se a solução está correta?

Solução

A tensão de um capacitor não pode variar bruscamente. A tensão do capacitor é dada por

$$v(t) = 2t-5 \quad (7.11\text{-}3)$$

para $t < 2$ s e

$$v(t) = \frac{t^2}{4}+t-4 \quad (7.11\text{-}4)$$

para $2 < t < 6$ s. Como a tensão do capacitor não pode variar bruscamente, as Eqs. 7.11-3 e 7.11-4 devem fornecer o mesmo valor de $v(2)$, a tensão do capacitor no instante $t = 2$ s. Resolvendo a Eq. 7.11-3, obtemos

$$v(2) = 2(2) - 5 = -1 \text{ V}$$

Resolvendo a Eq. 7.11-4, obtemos

$$v(2) = \frac{2^2}{4}+2-4 = -1 \text{ V}$$

Como os dois valores são iguais, os resultados parecem estar corretos. Vamos agora verificar qual é o valor de $v(6)$, a tensão do capacitor no instante $t = 6$ s. A tensão do capacitor é dada por

$$v(t) = -\frac{t^2}{2}+10t-21 \quad (7.11\text{-}5)$$

para $6 < t < 14$ s. As Eqs. 7.11-4 e 7.11-5 devem fornecer o mesmo valor de $v(6)$. Resolvendo a Eq. 7.11-4, obtemos

$$v(6) = -\frac{6^2}{4}+6-4 = 11 \text{ V}$$

e resolvendo a Eq. 7.11-5 obtemos

$$v(6) = -\frac{6^2}{4}+10(6)-21 = 21 \text{ V}$$

Os dois valores são diferentes. Isso significa que $v(t)$ varia bruscamente no instante $t = 6$ s, o que não pode acontecer com a tensão de um capacitor. Assim, a solução proposta não pode estar correta.

7.12 EXEMPLO DE PROJETO Integrador e Chave

Este projeto envolve um circuito integrador e uma chave controlada por tensão.

Circuito integrador é um circuito que realiza a operação matemática de integração. A saída de um circuito integrador, $v_o(t)$, está relacionada à entrada, $v_s(t)$, pela equação

$$v_o(t_2) = K \cdot \int_{t_1}^{t_2} v_s(t)dt + v_o(t_1) \quad (7.12\text{-}1)$$

A constante K é chamada de ganho do circuito integrador.

Os circuitos integradores têm muitas aplicações; uma delas é medir intervalos de tempo. Suponha que $v_s(t)$ seja uma tensão constante V_s. Nesse caso,

$$v_o(t_2) = K \cdot (t_2 - t_1) \cdot V_s + v_o(t_1) \quad (7.12\text{-}2)$$

Essa equação mostra que a saída do integrador no instante t_2 é uma medida do intervalo de tempo $t_2 - t_1$.

As chaves podem ser controladas eletronicamente. A Figura 7.12-1 mostra uma chave unipolar de uma posição (SPST) controlada eletronicamente. O símbolo que aparece na figura às vezes é usado para mostrar que a chave é controlada eletronicamente. A tensão $v_c(t)$ é chamada de tensão de controle. A Figura 7.12-1*b* mostra uma tensão de controle típica. A chave controlada por tensão permanece fechada se $v_c(t) = v_A$ e permanece aberta se $v_c(t) = v_B$. A chave da Figura 7.12-1 está inicialmente aberta, é fechada no instante t_1 e permanece fechada até o instante t_2. A chave é aberta no instante t_2 e permanece aberta desse instante em diante.

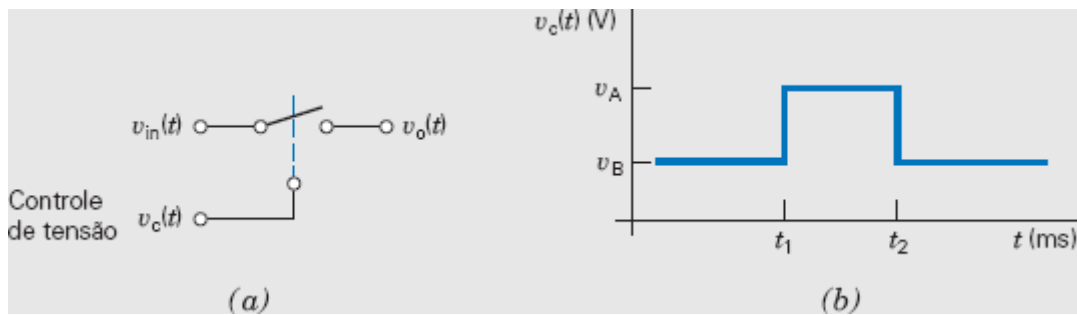



FIGURA 7.12-1 Chave controlada por tensão. (*a*) Símbolo da chave. (*b*) Tensão de controle típica.

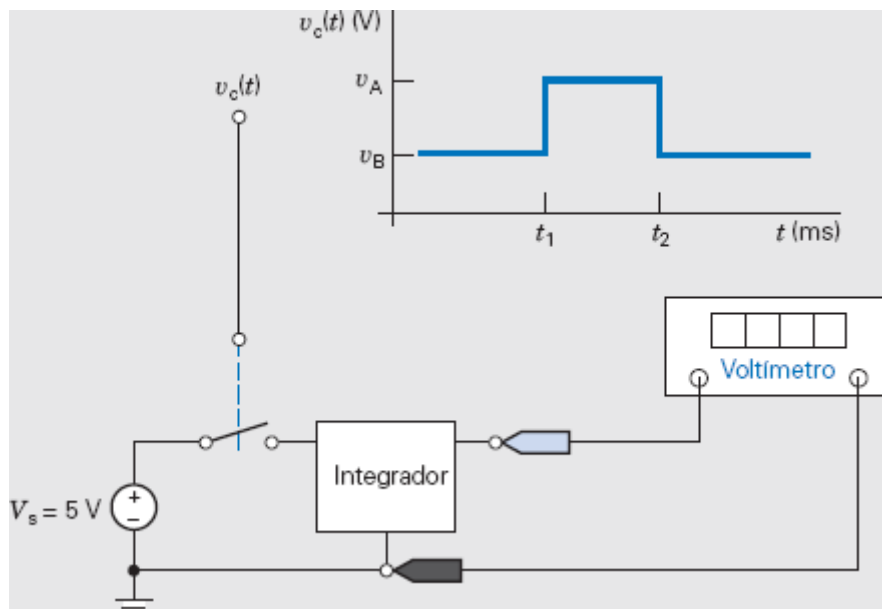



FIGURA 7.12-2 Uso de um circuito integrador para medir um intervalo de tempo.

Considere a Figura 7.12-2. A tensão $v_c(t)$ é usada para controlar a chave. O circuito integrador converte o intervalo de tempo $t_2 - t_1$ em uma tensão que é mostrada por um voltímetro. O intervalo de tempo a ser medido pode variar de 5 ms a 200 ms. O objetivo é projetar o circuito integrador para que a leitura do voltímetro indique qual foi o intervalo de tempo durante o qual a chave permaneceu fechada. Os componentes disponíveis são os seguintes:

- Resistores comerciais de 2% (veja o Apêndice D)

- Capacitores de 1 μF, 0,2 μF e 0,1 μF
- Amplificadores operacionais
- Fontes de alimentação de +15 V e −15 V
- Potenciômetros de 1 kΩ, 10 kΩ e 100 kΩ
- Chaves SPST controladas por tensão

Descreva a Situação e as Hipóteses

É conveniente fazer a saída do circuito integrador igual a zero no instante t_1. Deve haver uma relação simples entre a tensão de saída do circuito integrador e o intervalo de tempo. Vamos projetar o circuito para que

$$v_o(t_2) = \frac{10\ \text{V}}{200\ \text{ms}} \cdot (t_2 - t_1) \qquad (7.12\text{-}3)$$

Na Figura 7.12-2, $V_s = 5$ V. Comparando as Eqs. 7.12-2 e 7.12-3, temos:

$$K \cdot V_s = \frac{10\ \text{V}}{200\ \text{ms}}\ \text{e, portanto,}\ K = 10\frac{1}{\text{s}} \qquad (7.12\text{-}4)$$

Estabeleça a Meta

Projetar um circuito integrador tal que

$$K = 10\frac{1}{\text{s}} \quad \text{e} \quad v_o(t_1) = 0 \qquad (7.12\text{-}5)$$

Formule um Plano

Vamos usar o circuito integrador descrito na Seção 7.9. Acrescentando uma chave, como na Figura 7.12-3, podemos assegurar que $v_o(t_1) = 0$. A análise realizada na Seção 7.9 mostrou que

$$v_o(t_2) = -\frac{1}{RC} \cdot \int_{t_1}^{t_2} v_s(t)\, dt \qquad (7.12\text{-}6)$$

e, portanto, R e C devem satisfazer a relação

$$\frac{1}{RC} = K = 10\frac{1}{\text{s}} \qquad (7.12\text{-}7)$$

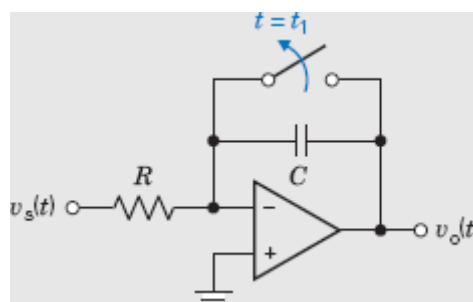



FIGURA 7.12-3 Circuito integrador baseado em um amplificador operacional.

Execute o Plano

Qualquer um dos capacitores disponíveis pode ser usado. Vamos escolher $C = 1\ \mu$F. Nesse caso,

$$R = \frac{1}{10\frac{\text{V}}{\text{s}} \cdot 1\ \mu\text{F}} = 100\ \text{k}\Omega \qquad (7.12\text{-}8)$$

O projeto final aparece na Figura 7.12-4.

Verifique se a Solução Proposta Está Correta

A tensão de saída do circuito integrador é dada por

$$v_o(t) = -\frac{1}{RC}\int_{t_1}^{t} v_s(\tau)\,d\tau + v_o(0) = \frac{-1}{(100\cdot 10^3)(10^{-6})}\int_{t_1}^{t} 5\,d\tau = -50\,(t-t_1)$$

em que as tensões estão em volts e os tempos em segundos. O intervalo de tempo pode ser calculado a partir da tensão de saída usando a relação

$$-(t-t_1) = \frac{v_o(t)}{50}$$

Assim, por exemplo, uma tensão de saída de −4 V indica um intervalo de tempo de 4/50 s = 80 ms.

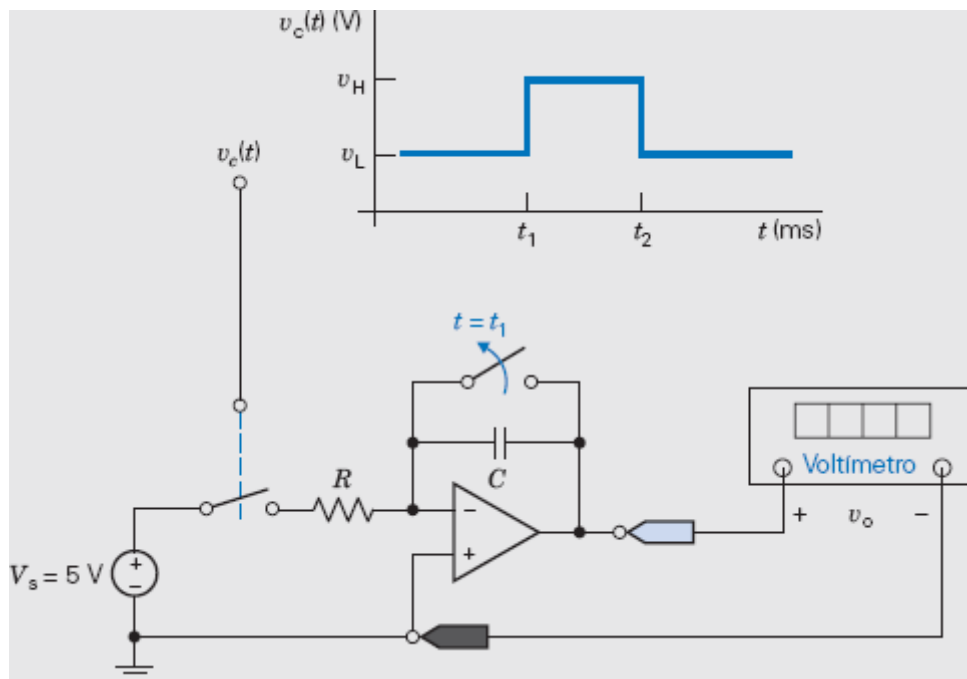
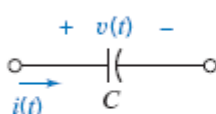
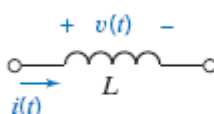
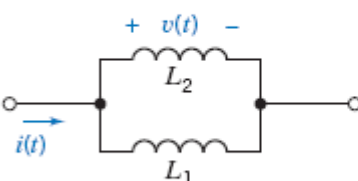
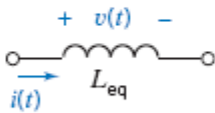
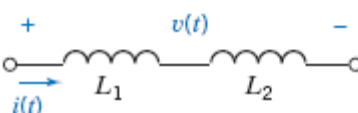
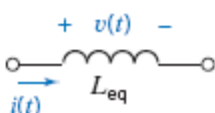
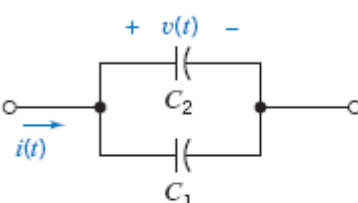
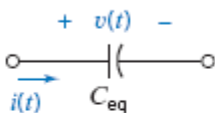
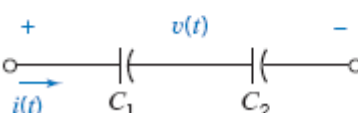
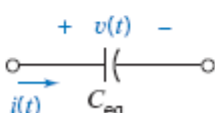



FIGURA 7.12-4 Uso de um circuito integrador baseado em um amplificador operacional para medir um intervalo de tempo.

7.13 RESUMO

- A Tabela 7.13-1 mostra as equações constitutivas dos capacitores e indutores. (Observe que as tensões e correntes nestas equações estão de acordo com a convenção passiva.) As equações constitutivas dos capacitores e indutores envolvem derivadas e integrais, o que não acontecia com as equações dos componentes que foram discutidos nas seções anteriores.
- Os circuitos que contêm capacitores e/ou indutores podem armazenar energia. A energia armazenada no campo elétrico de um capacitor é dada por $\frac{1}{2}Cv^2(t)$, em que $v(t)$ é a tensão do capacitor. A energia armazenada no campo magnético de um indutor é dada por $\frac{1}{2}Li^2(t)$, em que $i(t)$ é a corrente no indutor.
- Os circuitos que contêm capacitores e/ou indutores possuem memória. Isso significa que as tensões e correntes no circuito em um certo instante não dependem apenas de outras tensões e correntes no mesmo instante, mas também em valores anteriores dessas tensões e correntes. Assim, por exemplo, a tensão em um capacitor em um instante t_1 depende da tensão no capacitor em um instante anterior t_0 e também do valor da corrente no capacitor entre os instantes t_0 e t_1.

- Capacitores ligados em série ou em paralelo podem ser substituídos por um capacitor equivalente. Indutores ligados em série ou em paralelo podem ser substituídos por um indutor equivalente. A Tabela 7.13-2 mostra as equações correspondentes.

Tabela 7.13-1 Equações Constitutivas de Capacitores e Indutores

CAPACITOR	INDUTOR
+ $v(t)$ – ; $i(t)$; C	+ $v(t)$ – ; $i(t)$; L
$i(t) = C\dfrac{d}{dt}v(t)$	$i(t) = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau + i(t_0)$
$v(t) = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau + v(t_0)$	$v(t) = L\dfrac{d}{dt}i(t)$

Tabela 7.13-2 Capacitores e Indutores em Série e em Paralelo

CIRCUITO	CIRCUITO EQUIVALENTE	EQUAÇÃO
+ $v(t)$ – ; $i(t)$; L_2 ; L_1	+ $v(t)$ – ; $i(t)$; L_{eq}	$L_{eq} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{L_1} + \dfrac{1}{L_2}}$
+ $v(t)$ – ; $i(t)$; L_1 ; L_2	+ $v(t)$ – ; $i(t)$; L_{eq}	$L_{eq} = L_1 + L_2$
+ $v(t)$ – ; $i(t)$; C_2 ; C_1	+ $v(t)$ – ; $i(t)$; C_{eq}	$C_{eq} = C_1 + C_2$
+ $v(t)$ – ; $i(t)$; C_1 ; C_2	+ $v(t)$ – ; $i(t)$; C_{eq}	$C_{eq} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}}$

- A tensão em um capacitor não pode variar bruscamente e a corrente em um indutor não pode variar bruscamente. Por outro lado, a corrente em um capacitor e a tensão em um indutor podem variar bruscamente.
- Nos circuitos que contêm apenas fontes constantes, todas as correntes e tensões são constantes no regime estacionário. Nesse caso, uma vez atingido o regime estacionário, todos os capacitores se comportam como circuitos abertos e todos os indutores se comportam como curtos-circuitos.
- Um amplificador operacional e um capacitor podem ser usados para montar circuitos que realizam as operações matemáticas de integração e derivação. Esses importantes circuitos são chamados de circuito integrador e circuito diferenciador.
- Frequentemente, as tensões e correntes nos componentes de um circuito que contém capacitores e indutores são funções complicadas do tempo. O programa MATLAB pode ser usado para plotar essas funções.

PROBLEMAS

Seção 7.2 Capacitores

P 7.2-1 Um capacitor de 15 μF possui uma tensão de 5 V no instante t = 0. Se uma corrente constante de 25 mA atravessa o capacitor, qual é o tempo necessário para que o capacitor acumule uma carga de 150 μC?

Resposta: t = 3 ms

P 7.2-2 A tensão $v(t)$ em um capacitor e a corrente $i(t)$ no mesmo capacitor estão de acordo com a convenção passiva. Determine a corrente $i(t)$ se a capacitância do capacitor é C = 0,125 F e a tensão é $v(t)$ = 12 cos(2t + 30º) V.

Sugestão:

$$\frac{d}{dt}A\cos(\omega t+\theta) = -A \operatorname{sen} \omega t+\theta)\cdot\frac{d}{dt}(\omega t+\theta)$$
$$= -A\omega \operatorname{sen}(\omega t+\theta)$$
$$= A\omega\cos\left(\omega t+\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Resposta: $i(t)$ = 3 cos(2t + 120º) A

P 7.2-3 A tensão $v(t)$ em um capacitor e a corrente $i(t)$ no mesmo capacitor estão de acordo com a convenção passiva. Determine a capacitância do capacitor se a tensão é $v(t)$ = 12 cos(500t −45º) V e a corrente é $i(t)$ = 3 cos(500t + 45º) mA.

Resposta: C = 0,5 μF

P 7.2-4 Determine $v(t)$ no circuito da Figura P 7.2-4*a* se a corrente $i_s(t)$ varia com o tempo da forma mostrada na Figura P 7.2-4*b* e $v_0(0^-) = -1$ mV.

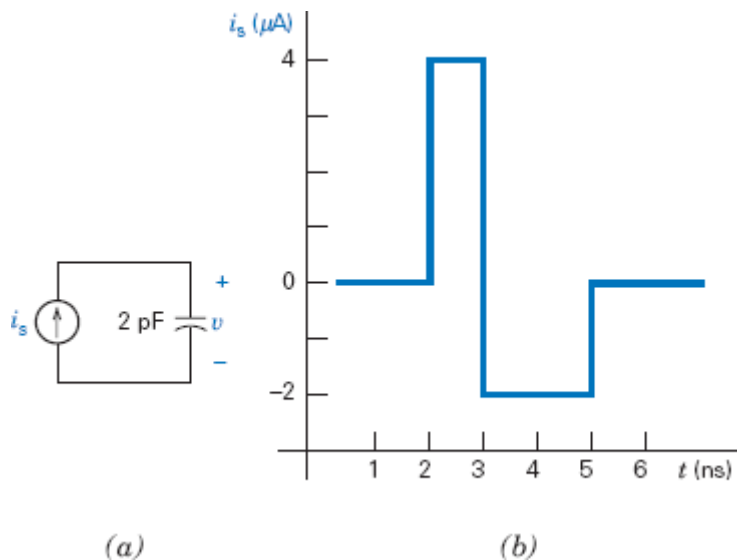



Figura P 7.2-4 (a) Circuito e (b) corrente da fonte de corrente em função do tempo.

P 7.2-5 A tensão $v(t)$ e a corrente $i(t)$ em um capacitor de 1 F estão de acordo com a convenção passiva. Além disso, $v(0)$ = 0 V e $i(0)$ = 0 A. (a) Determine $v(t)$ para $i(t) = x(t)$, onde $x(t)$ é a função representada na Figura P 7.2-5 e $i(t)$ está em ampères. (b) Determine $i(t)$ para $v(t) = x(t)$, em que $x(t)$ é a função representada na Figura P 7.2-5 e $v(t)$ está em volts.

Sugestão: $x(t) = 4t - 4$ para $1 < t < 2$ e $x(t) = -4t + 12$ para $2 < t < 3$

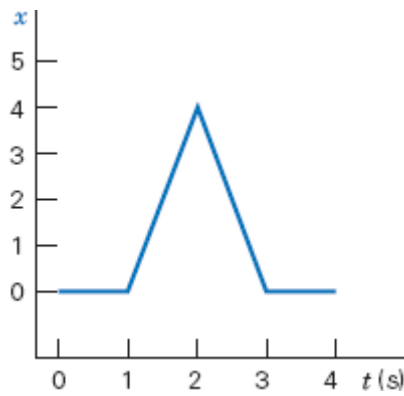



Figura P 7.2-5

P 7.2-6 A tensão $v(t)$ e a corrente $i(t)$ em um capacitor de 0,5 F estão de acordo com a convenção passiva. Além disso, $v(0) = 0$ V e $i(0) = 0$ A. (a) Determine $v(t)$ para $i(t) = x(t)$, em que $x(t)$ é a função representada na Figura P 7.2-6 e $i(t)$ está em ampères. (b) Determine $i(t)$ para $v(t) = x(t)$, em que $x(t)$ é a função representada na Figura P 7.2-6 e $v(t)$ está em volts.

Sugestão: $x(t) = 0{,}2t - 0{,}4$ para $2 < t < 6$

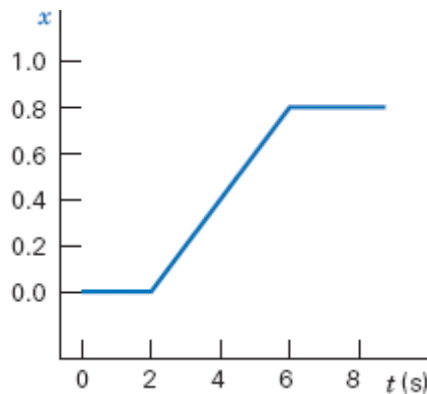



Figura P 7.2-6

P 7.2-7 A tensão em um capacitor de 40 μF é 25 V no instante $t_0 = 0$. Se a corrente no capacitor em função do tempo é dada por $i(t) = 6e^{-6t}$ mA para $t > 0$, determine $v(t)$ para $t > 0$.

Resposta: $v(t) = 50 - 25e^{-6t}$ V

P 7.2-8 Determine o valor de i no circuito da Figura P 7.2-8 se $v = 5(1 - 2e^{-2t})$ V.

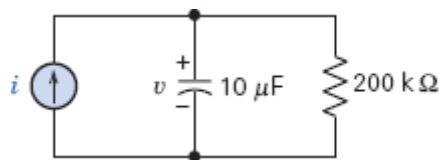



Figura P 7.2-8

P 7.2-9 Determine $v(t)$ para $t \geq 0$ no circuito da Figura P 7.2-9*a* se $i_s(t)$ é a corrente da Figura P 7.2-9*b* e $v(0) = 1$ V.

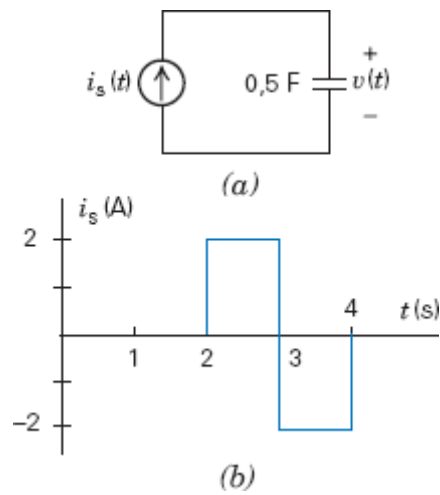



Figura P 7.2-9

P 7.2-10 Determine $v(t)$ para $t \geq 0$ no circuito da Figura P 7.2-10*a* se $v(0) = -4$ V e $i_s(t)$ é a corrente da Figura P 7.2-10*b*.

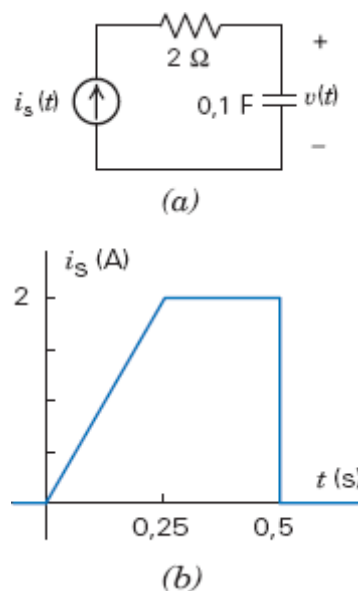



Figura P 7.2-10

P 7.2-11 Determine $i(t)$ para $t \geq 0$ no circuito da Figura P 7.2-11*a* se $v_s(t)$ é a tensão da Figura P 7.2-11*b*.

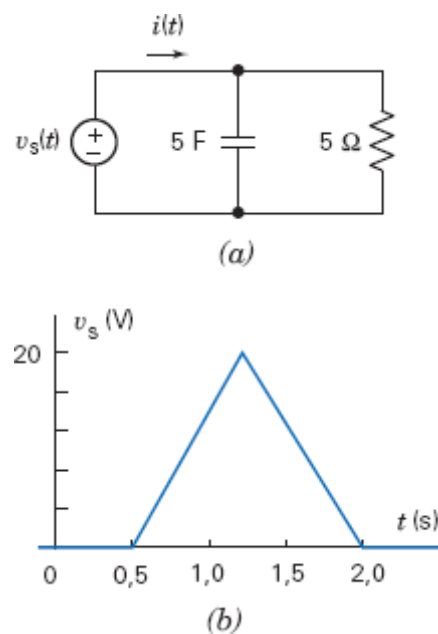



Figura P 7.2-11

P 7.2-12 A tensão no capacitor da Figura P 7.2-12 é dada por

$$v(t) = 12 - 10e^{-2t}\ \text{V} \quad \text{para} \quad t \geq 0$$

Determine $i(t)$ para $t > 0$.

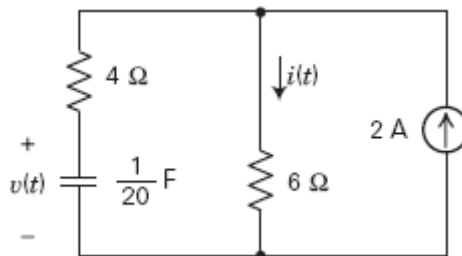



Figura P 7.2-12

P 7.2-13 A tensão no capacitor do circuito da Figura P 7.2-13 é dada por

$$v(t) = 2{,}4 + 5{,}6e^{-5t}\ \text{V} \quad \text{para} \quad t \geq 0$$

Determine $i(t)$ para $t > 0$.

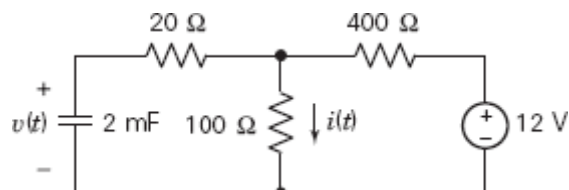



Figura P 7.2-13

P 7.2-14 A tensão no capacitor da Figura P 7.2-14 é dada por

$$v(t) = 10 - 8e^{-5t}\ \text{V} \quad \text{para} \quad t \geq 0$$

Determine $i(t)$ para $t > 0$.

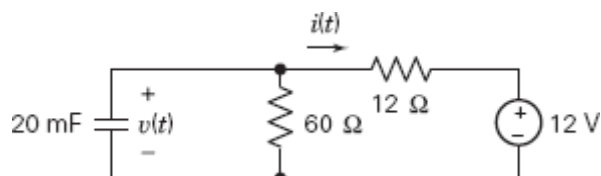



Figura P 7.2-14

P 7.2-15 Determine a tensão $v(t)$ para $t > 0$ no circuito da Figura P 7.2-15*b*, em que $i_s(t)$ é a corrente da Figura P 7.2-15*a*. A tensão do capacitor no instante $t = 0$ é $v(0) = -12$ V.

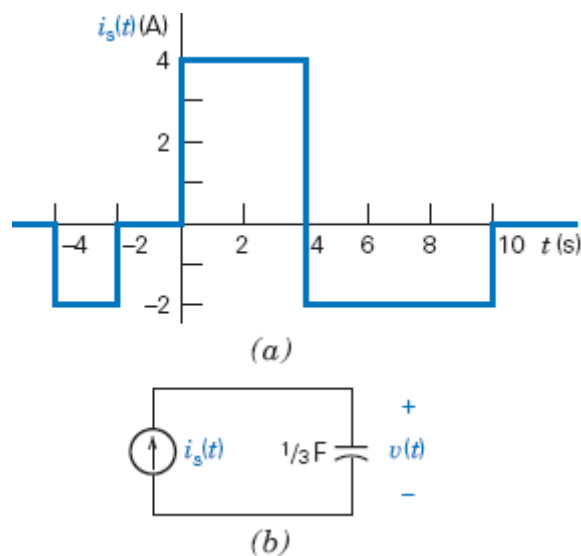



Figura P 7.2-15 (a) A tensão da fonte de tensão. (b) O circuito.

P 7.2-16 A entrada do circuito da Figura P 7.2-16 é a corrente

$$i(t) = 3{,}75e^{-1{,}2t} \quad \text{para} \quad t > 0$$

A saída é a tensão do capacitor,

$$v(t) = 4 - 1{,}25e^{-1{,}2t} \text{ V} \quad \text{para} \quad t > 0$$

Determine o valor da capacitância, C.

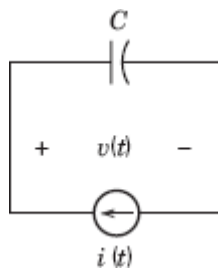



Figura P 7.2-16

P 7.2-17 A entrada do circuito da Figura P 7.2-17 é a corrente

$$i(t) = 3e^{-25t} \text{ A} \quad \text{para} \quad t > 0$$

A tensão inicial do capacitor é $v_C(0) = -2$ V. Determine a tensão da fonte de corrente, $v(t)$, para $t > 0$.

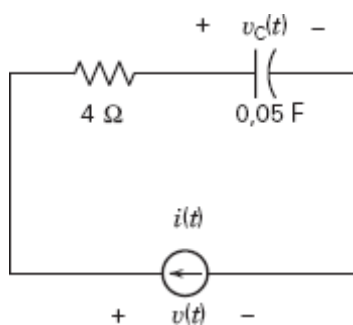



Figura P 7.2-17

P 7.2-18 A entrada do circuito da Figura P 7.2-18 é a corrente

$$i(t) = 3e^{-25t} \text{ A} \quad \text{para} \quad t > 0$$

A saída é a tensão

$$v(t) = 9{,}6e^{-25t} + 0{,}4 \text{ V} \quad \text{para} \quad t > 0$$

A tensão inicial do capacitor é $v_C(0) = -2$ V. Determine o valor da capacitância, C, e da resistência, R.

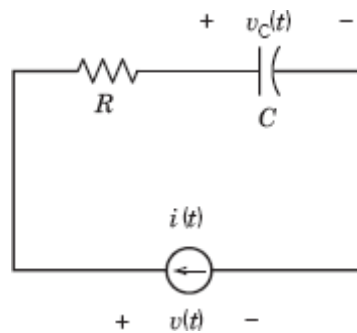



Figura P 7.2-18

P 7.2-19 A entrada do circuito da Figura P 7.2-19 é a tensão

$$v(t) = 8 + 5e^{-10t} \; V \quad para \quad t > 0$$

Determine a corrente $i(t)$ para $t > 0$.

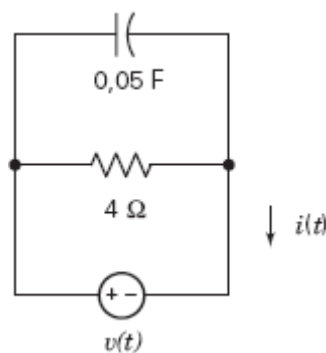



Figura P 7.2-19

P 7.2-20 A entrada do circuito da Figura P 7.2-20 é a tensão

$$v(t) = 3 + 4e^{-2t} \text{ A} \quad \text{para} \quad t > 0$$

A saída é a corrente

$$i(t) = 0{,}3 - 1{,}6e^{-2t} \text{ V} \quad \text{para} \quad t > 0$$

Determine o valor da resistência e da capacitância.

Resposta: $R = 10\ \Omega$ e $C = 0{,}25$ F

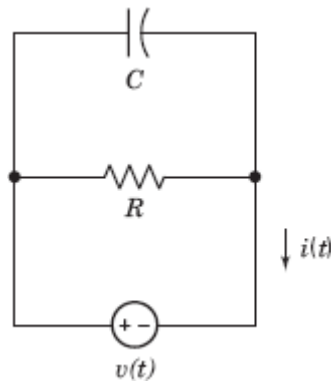



Figura P 7.2-20

P 7.2-21 Considere o capacitor da Figura P 7.2-21. A corrente e a tensão são dadas por

$$i(t)=\begin{cases}0{,}5 & 0<t<0{,}5\\ 2 & 0{,}5<t<1{,}5\\ 0 & t>1{,}5\end{cases}$$

e

$$v(t)=\begin{cases}2t+8{,}6 & 0\le t\le 0{,}5\\ at+b & 0{,}5\le t\le 1{,}5\\ c & t\ge 1{,}5\end{cases}$$

em que a, b e c são constantes reais. (A corrente está em ampères, a tensão em volts e o tempo em segundos.) Determine o valor de a, b e c.

Resposta: a = 8 V/s, b = 5,6 V e c = 17,6 V

i(t)
+
v(t) C = 0,25 F
−

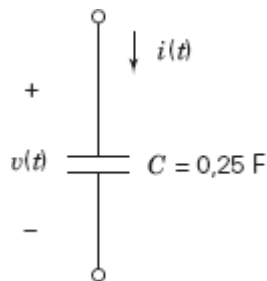



Figura P 7.2-21

P 7.2-22 No instante t = 0, a tensão do capacitor da Figura P 7.7-22 é $v(0)$ = −20 V. Determine o valor da tensão do capacitor nos instantes t = 1 ms, 3 ms e 7 ms.

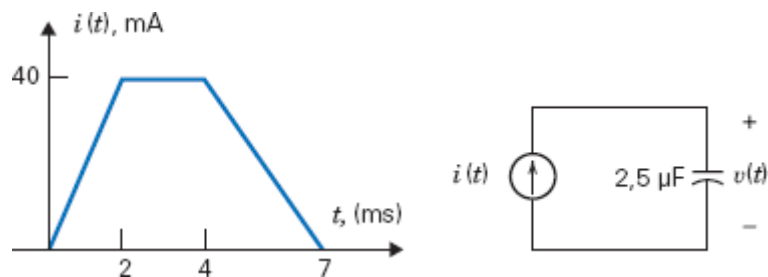



Figura P 7.2-22

Seção 7.3 Armazenamento de Energia em um Capacitor

P 7.3-1 A Figura P 7.3-1 mostra a corrente i em um capacitor. Sabendo que $v(0) = 0$ e $C = 0{,}5$ F, determine e plote $v(t)$, $p(t)$ e $w(t)$ para $0 < t < 6$ s.

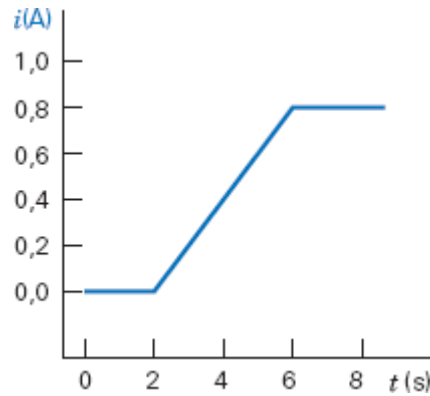



Figura P 7.3-1

P 7.3-2 Em um circuito, a tensão de um capacitor de 10 μF é zero para $t < 0$ e

$$v = 5\,(1 - e^{-4000t})\text{ V} \quad t \quad \geq 0$$

Determine a corrente no capacitor e a energia armazenada no capacitor em $t = 0$ e $t = 10$ ms.

P 7.3-3 Se a tensão em um capacitor de 1 mF é a tensão $v_c(t)$ da Figura P 7.3-3, plote a corrente, a potência e a energia no capacitor para $-1 \text{ s} \leq t \leq 2$ s.

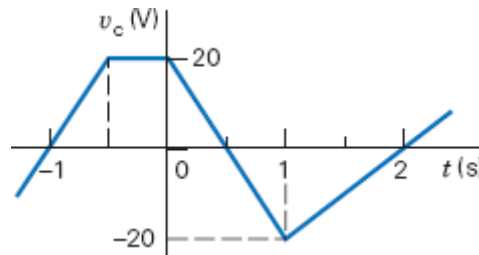



Figura P 7.3-3

P 7.3-4 A corrente em um capacitor de 2 μF é $50 \cos(10t + \pi/6)$ μA para qualquer valor de t. A tensão média no capacitor é zero. Qual é o valor máximo da energia armazenada no capacitor? Qual é o primeiro valor não negativo de t para o qual a energia armazenada é máxima?

P 7.3-5 Um capacitor é usado no circuito de flash eletrônico de uma máquina fotográfica. Uma pequena bateria com uma tensão constante de 6 V é usada para carregar o capacitor com uma corrente constante de 10 μA. Se $C = 10$ μF, quanto tempo é necessário para carregar o capacitor? Qual é a energia armazenada?

P 7.3-6 A tensão inicial no capacitor do circuito da Figura P 7.3-6 é $v_c(0^-) = 3$ V. Determine (a) a tensão $v(t)$; (b) a energia armazenada no capacitor em $t = 0{,}2$ s e $t = 0{,}8$ s se

$$i(t) = \begin{cases} 3e^{5t}\text{ A} & 0 < t < 1 \\ 0 & t \geq 1\text{ s} \end{cases}$$

Respostas:

(a) $18e^{5t}$ V para $0 \leq t \leq 1$; 2,67 kV para $t > 1$

(b) $w(0{,}2) = 6{,}65$ J e $w(0{,}8) = 2{,}68$ kJ

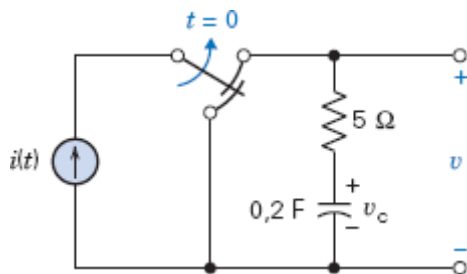



Figura P 7.3-6

P 7.3-7 (a) Determine a energia armazenada no capacitor do circuito da Figura P 7.3-7 quando a chave está fechada e o circuito se encontra no regime estacionário. (b) Determine a energia armazenada no capacitor quando a chave está aberta e o circuito se encontra no regime estacionário.

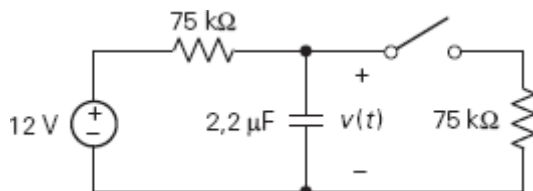



Figura P 7.3-7

Seção 7.4 **Capacitores em Série e em Paralelo**

P 7.4-1 Determine a corrente $i(t)$ no circuito da Figura P 7.4-1.

Resposta: $i(t) = -1{,}2$ sen $100t$ mA

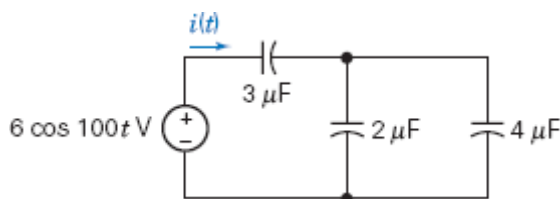



Figura P 7.4-1

P 7.4-2 Determine a corrente $i(t)$ no circuito da Figura P 7.4-2.

Resposta: $i(t) = -1{,}5e^{-250t}$ mA

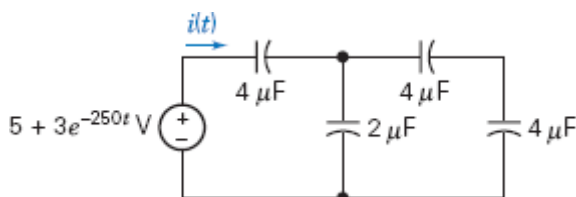



Figura P 7.4-2

P 7.4-3 O circuito da Figura P 7.4-3 contém cinco capacitores iguais. Determine o valor da capacitância C.

Resposta: $C = 10\ \mu$F

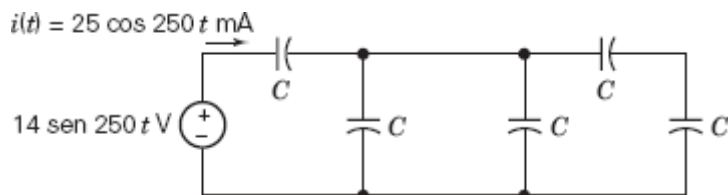



Figura P 7.4-3

P 7.4-4 O circuito da Figura P 7.4-4 contém sete capacitores, todos com a mesma capacitância C. A tensão da fonte é dada por

$$v(t) = 4 \cos (3t) \text{ V}$$

Determine a corrente $i(t)$ para $C = 1$ F.

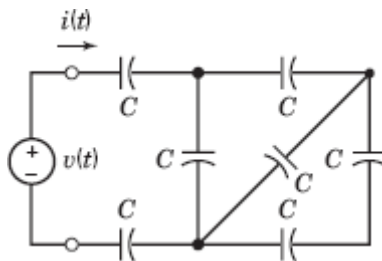



Figura P 7.4-4

P 7.4-5 Determine o valor da capacitância C no circuito da Figura P 7.4-5, sabendo que $C_{eq} = 8$ F.

Resposta: $C = 20$ F

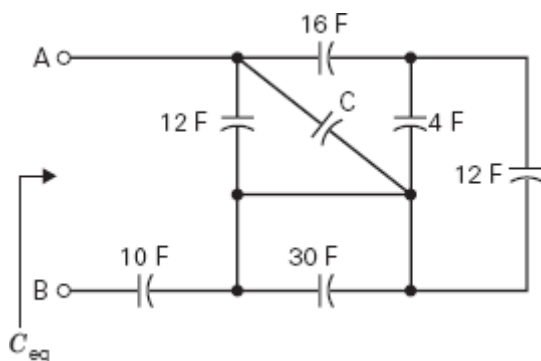



Figura P 7.4-5

P 7.4-6 Determine o valor da capacitância equivalente, C_{eq}, no circuito da Figura P 7.4-6.

Resposta: $C_{eq} = 10$ F

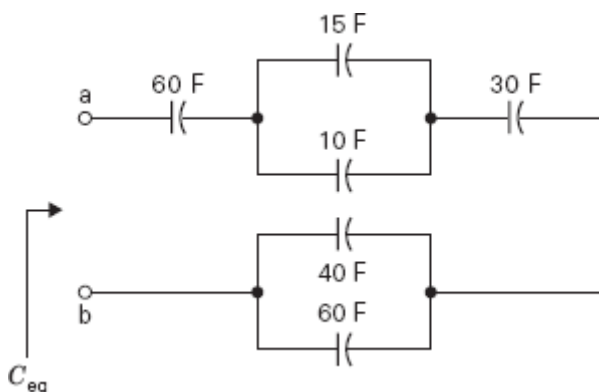



Figura P 7.4-6

P 7.4-7 O circuito da Figura P 7.4-7 é formado por nove capacitores, todos com a mesma capacitância C. Determine o valor da capacitância C, sabendo que $C_{eq} = 50$ mF.

Resposta: $C = 90$ mF

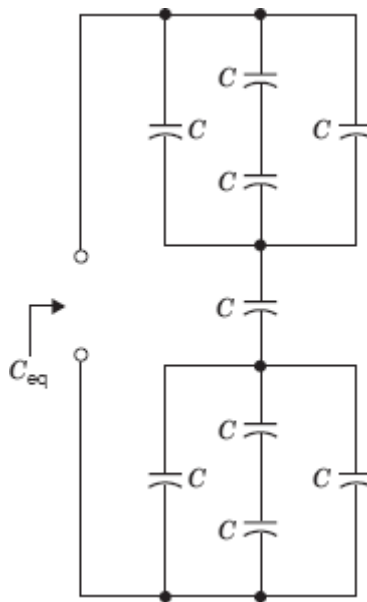



Figura P 7.4-7

P 7.4-8 O circuito da Figura P 7.4-8 está no regime estacionário quando a chave é aberta no instante $t = 0$. A tensão $v(t)$ é dada por

$$v(t) = \begin{cases} 3{,}6 \text{ V} & \text{para } t \leq 0 \\ 3{,}6e^{-2{,}5t} \text{ V} & \text{para } t \geq 0 \end{cases}$$

(a) Determine a energia armazenada em cada capacitor antes que a chave seja aberta.

(b) Determine a energia armazenada em cada capacitor 1 s após a chave ser aberta.

Suponha que os capacitores em paralelo sejam substituídos por um capacitor equivalente.

(c) Determine a energia armazenada pelo capacitor equivalente antes que a chave seja aberta.

(d) Determine a energia armazenada pelo capacitor equivalente 1 s após a chave ser aberta.

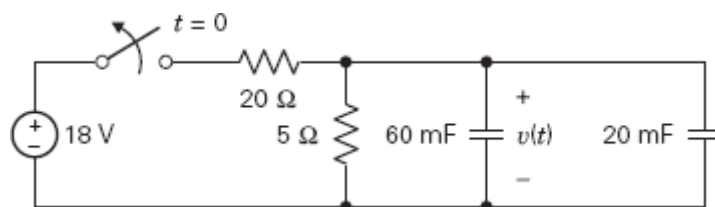



Figura P 7.4-8

P 7.4-9 O circuito da Figura P 7.4-9 está no regime estacionário no momento em que a chave é fechada, ou seja, os dois capacitores estão descarregados $[v_1(0^-) = v_2(0^-) = 0]$. A corrente $i(t)$ é dada por

$$i(t) = \begin{cases} 0 \text{ A} & \text{para } t < 0 \\ 2{,}4e^{-30t} \text{ A} & \text{para } t > 0 \end{cases}$$

(a) Determine as tensões dos capacitores, $v_1(t)$ e $v_2(t)$, para $t \geq 0$.

(b) Determine a energia armazenada em cada capacitor 20 ms após a chave ser fechada.

Suponha que os capacitores em série sejam substituídos por um capacitor equivalente.

(c) Determine a tensão no capacitor equivalente para $t \geq 0$, tomando como polaridade de referência para a tensão o sinal positivo na placa de cima.

(d) Determine a energia armazenada pelo capacitor equivalente 20 ms após a chave ser fechada.

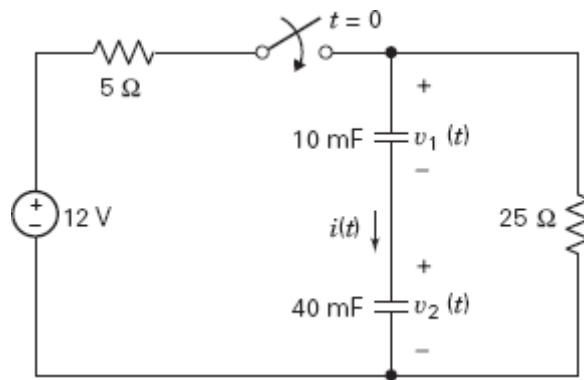



Figura P 7.4-9

P 7.4-10 Determine as correntes i_1 e i_2 no circuito da Figura P 7.4-10 em função da corrente i, usando o método da divisão de corrente.

Resposta: $i_1 = iC_1/(C_1 + C_2)$ e $i_2 = iC_2/(C_1 + C_2)$

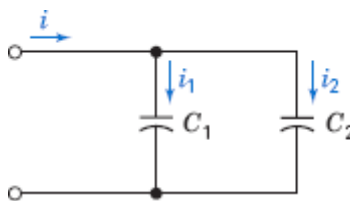



Figura P 7.4-10

Seção 7.5 **Indutores**

P 7.5-1 Nikola Tesla (1857-1943) foi um engenheiro elétrico sérvio-americano que realizou muitas experiências de indução elétrica. Tesla construiu a grande bobina, de indutância muito elevada, que aparece na Figura P 7.5-1. A bobina foi ligada a uma fonte de corrente

$$i_5 = 100 \text{ sen } 400t \text{ A}$$

de modo que a corrente no indutor, i_L, era igual a i_s. Determine a tensão no indutor e explique a descarga elétrica que aparece na fotografia. Suponha que L = 200 H e que a distância média de uma descarga é 2 m. Lembre-se de que a rigidez dielétrica do ar é 3×10^6 V/m.

P 7.5-2 O modelo de um motor elétrico consiste em uma associação em série de um resistor e um indutor. Uma corrente $i(t) = 4te^{-t}$ A atravessa a associação em série de um resistor de 10 Ω e um indutor de 0,1 H. Determine a tensão nos terminais do motor.

Resposta: $v(t) = 0{,}4e^{-t} + 39{,}6te^{-t}$ V

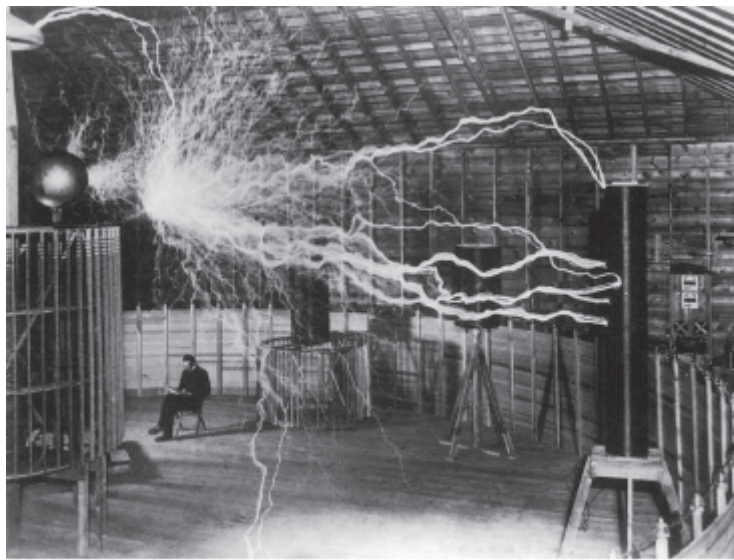



Figura P 7.5-1 Nesta fotografia, tirada por volta de 1910, Nikola Tesla permanece sentado, impassível, enquanto bobinas de indução de corrente alternada produzem descargas de milhões de volts, com um ruído que podia ser ouvido a 16 quilômetros de distância.

P 7.5-3 A tensão $v(t)$ e a corrente $i(t)$ em um indutor de 1 H estão de acordo com a convenção passiva. Além disso, $v(0) = 0$ V e $i(0) = 0$ A.

(a) Determine $v(t)$ se $i(t) = x(t)$, em que $x(t)$ é a função da Figura P 7.5-3 e $i(t)$ está em ampères.

(b) Determine $i(t)$ se $v(t) = x(t)$, em que $x(t)$ é a função da Figura P 7.5-3 e $v(t)$ está em volts.

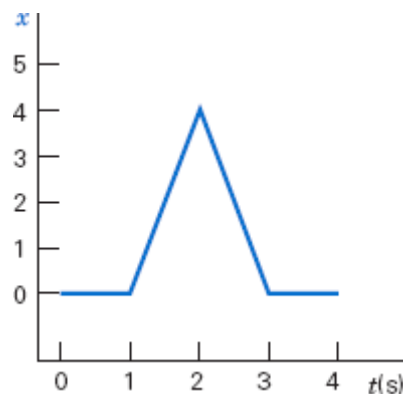



Figura P 7.5-3

Sugestão: $x(t) = 4t - 4$ para $1 < t < 2$ e $x(t) = -4t + 12$ para $2 < t < 3$.

P 7.5-4 A tensão $v(t)$ e a corrente $i(t)$ em um indutor estão de acordo com a convenção passiva. Determine a tensão $v(t)$ sabendo que a indutância do indutor é $L = 250$ mH e que a corrente é $i(t) = 120 \operatorname{sen}(500t - 30^\circ)$ mA.

Sugestão:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} A \operatorname{sen}(\omega t + \theta) &= A \cos(\omega t + \theta) \cdot \frac{d}{dt}(\omega t + \theta) \\ &= A\varpi \cos(\omega t + \theta) \\ &= A\omega \operatorname{sen}\left(\omega t + \left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right)\end{aligned}$$

P 7.5-5 Determine $i_L(t)$ para $t > 0$ no circuito da Figura P 7.5-5*a* sabendo que $i_L(0) = -2\ \mu$A e $v_s(t)$ é a função da Figura P 7.5-5*b*.

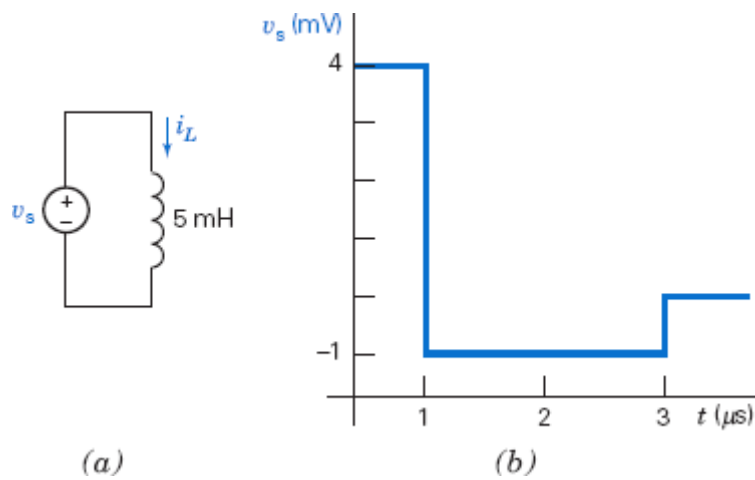



Figura P 7.5-5

P 7.5-6 Determine $v(t)$ para $t > 0$ no circuito da Figura P 7.5-6*a* sabendo que $i_L(0) = 0$ e $i_s(t)$ é a função da Figura P 7.5-6*b*.

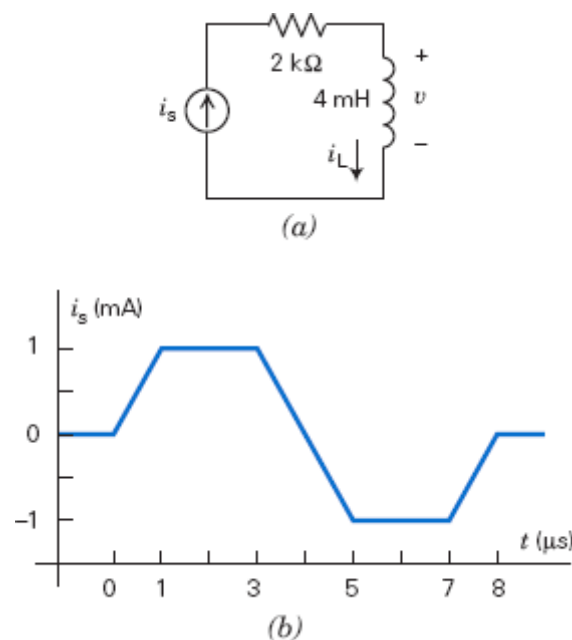



Figura P 7.5-6

P 7.5-7 A tensão $v(t)$ e a corrente $i(t)$ em um indutor de 0,5 H estão de acordo com a convenção passiva. Além disso, $v(0) = 0$ V e $i(0) = 0$ A.

(a) Determine $v(t)$ se $i(t) = x(t)$, em que $x(t)$ é a função representada na Figura P 7.5-7 e $i(t)$ está em ampères.

(b) Determine $i(t)$ se $v(t) = x(t)$, em que $x(t)$ é a função representada na Figura P 7.5-7 e $v(t)$ está volts.

Sugestão: $x(t) = 0{,}2t - 0{,}4$ para $2 < t < 6$

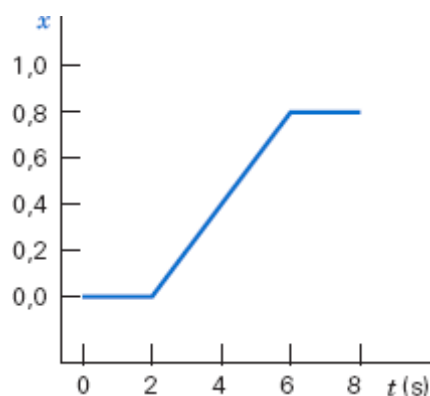



Figura P 7.5-7

P 7.5-8 Determine $i(t)$ para $t \geq 0$ no circuito da Figura P 7.5-8*a* se $i(0) = 25$ mA e $v_s(t)$ é a tensão representada na Figura P 7.5-8*b*.

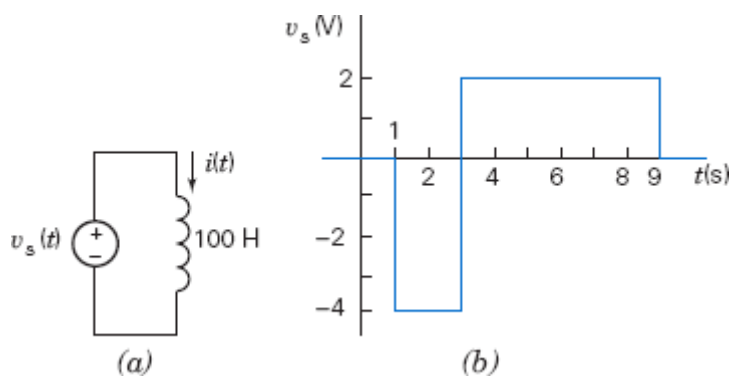



Figura P 7.5-8

7.5-9 Determine $i(t)$ para $t \geq 0$ no circuito da Figura P 7.5-9*a* se $i(0) = -2$ A e $v_s(t)$ é a tensão representada na Figura P 7.5-9*b*.

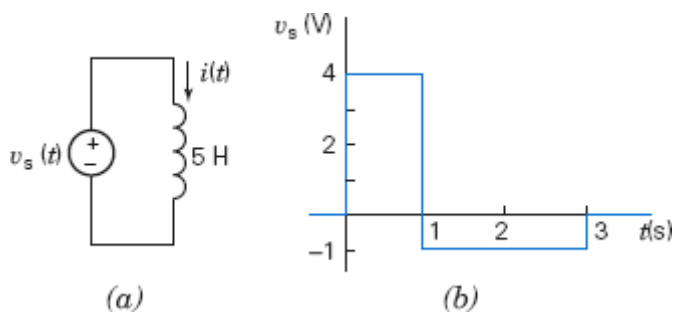



Figura P 7.5-9

P 7.5-10 Determine $i(t)$ para $t \geq 0$ no circuito da Figura P 7.5-10*a* se $i(0) = 1$ A e $v_s(t)$ é a tensão representada na Figura P 7.5-10*b*.

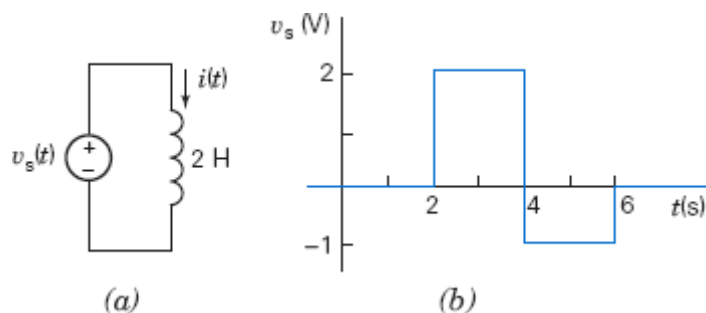



Figura P 7.5-10

P 7.5-11 Determine $i(t)$ para $t \geq 0$ no circuito da Figura P 7.5-11*a* se $i(0) = 25$ mA e $v_s(t)$ é a tensão representada na Figura P 7.5-11*b*.

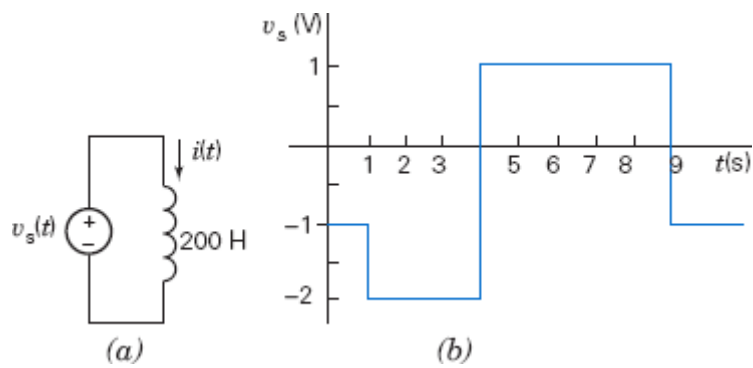



Figura P 7.5-11

P 7.5-12 A corrente no indutor do circuito da Figura P 7.5-12 é dada por

$$i(t) = 6 + 4e^{-8t} \text{ A} \quad \text{para} \quad t \geq 0$$

Determine $v(t)$ para $t > 0$.

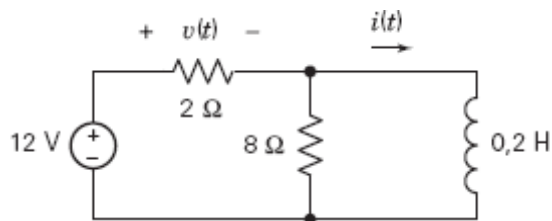



Figura P 7.5-12

P 7.5-13 A corrente no indutor do circuito da Figura P 7.5-13 é dada por

$$i(t) = 5 - 3e^{-4t} \text{ A} \quad \text{para} \quad t \geq 0$$

Determine $v(t)$ para $t > 0$.

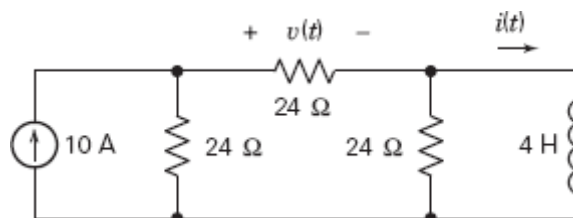



Figura P 7.5-13

P 7.5-14 A corrente no indutor do circuito da Figura P 7.5-14 é dada por

$$i(t) = 3 + 2e^{-3t} \text{ A} \quad \text{para} \quad t \geq 0$$

Determine $v(t)$ para $t > 0$.

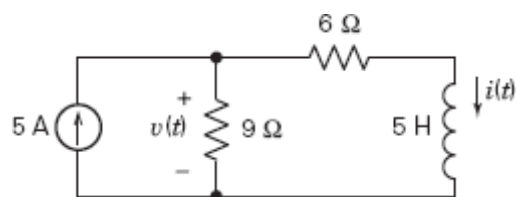



Figura P 7.5-14

P 7.5-15 Determine a corrente $i(t)$ para $t > 0$ no circuito da Figura P 7.5-15b, sabendo que $v_s(t)$ é a tensão da Figura P 7.5-15a. A corrente no indutor no instante $t = 0$ é $i(0) = -12$ A.

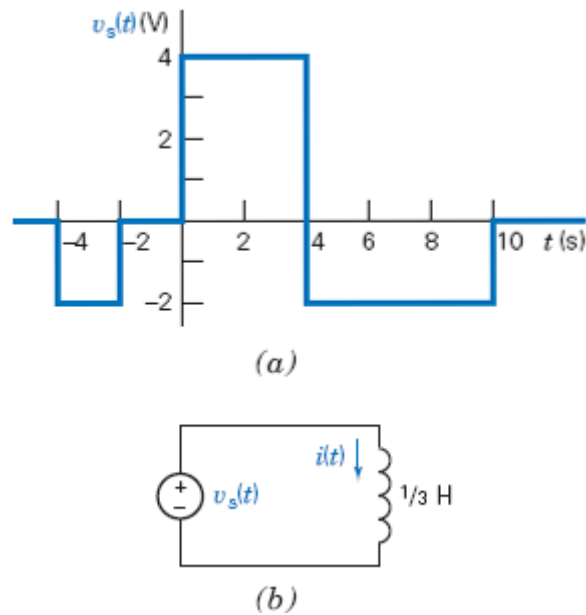



Figura P 7.5-15 (a) A tensão da fonte. (b) O circuito.

P 7.5-16 A entrada do circuito da Figura P 7.5-16 é a tensão

$$v(t) = 15e^{-4t} \text{ V} \quad \text{para} \quad t > 0$$

A corrente inicial no indutor é $i(0) = 2$ A. Determine a corrente no indutor, $i(t)$, para $t > 0$.

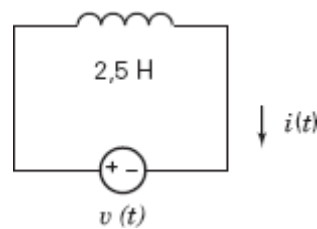



Figura P 7.5-16

P 7.5-17 A entrada do circuito da Figura P 7.5-17 é a tensão

$$v(t) = 4e^{-20t} \text{ V} \quad \text{para} \quad t > 0$$

A saída é a corrente

$$i(t) = -1{,}2e^{-20t} - 1{,}5 \text{ A} \quad \text{para} \quad t > 0$$

A corrente inicial no indutor é $i_L(0) = -3{,}5$ A. Determine o valor da indutância, L, e da resistência, R.

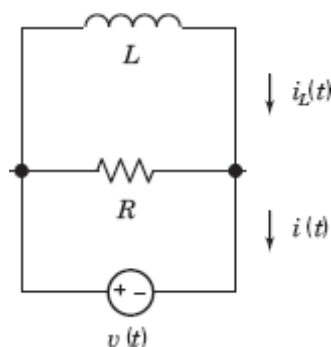



Figura P 7.5-17

P 7.5-18 A tensão da fonte do circuito da Figura P 7.5-18 é $v(t) = 8e^{-400t}$ V para $t > 0$. A corrente inicial do indutor é $i_L(0) = 210$ mA. Determine a corrente $i(t)$ da fonte para $t > 0$.

Resposta: $i(t) = 360e^{-400t}$ V − 190 mA para $t > 0$

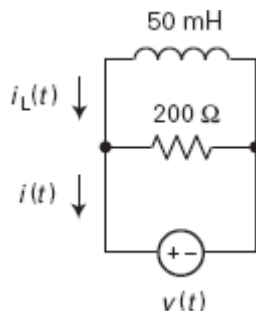



Figura P 7.5-18

P 7.5-19 A entrada do circuito da Figura P 7.5-19 é a corrente

$$i(t) = 5 + 2e^{-7t} \text{ A} \quad \text{para} \quad t > 0$$

A saída é a tensão

$$v(t) = 75 - 82e^{-7t} \text{ V} \quad \text{para} \quad t > 0$$

Determine o valor da resistência e da indutância.

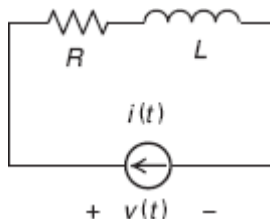



Figura P 7.5-19

P 7.5-20 Considere o indutor da Figura P 7.5-20. A corrente e a tensão são dadas por

$$i(t) = \begin{cases} 5t - 4{,}6 & 0 \le t \le 0{,}2 \\ at + b & 0{,}2 \le t \le 0{,}5 \\ c & t \ge 0{,}5 \end{cases}$$

e

$$v(t) = \begin{cases} 12{,}5 & 0 < t < 0{,}2 \\ 25 & 0{,}2 < t < 0{,}5 \\ 0 & t > 0{,}5 \end{cases}$$

em que a, b e c são constantes reais. (A corrente está em ampères, a tensão em volts e o tempo em segundos.) Determine o valor de a, b e c.

Resposta: $a = 10$ A/s, $b = -5{,}6$ A e $c = -0{,}6$ A

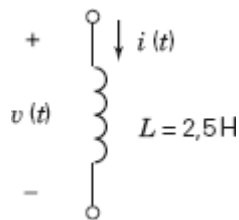



Figura P 7.5-20

P 7.5-21 No instante $t = 0$, a corrente no indutor da Figura P 7.5-21 é $i(0) = 45$ mA. Determine o valor da corrente no indutor nos instantes $t = 1$, 4 e 6 ms.

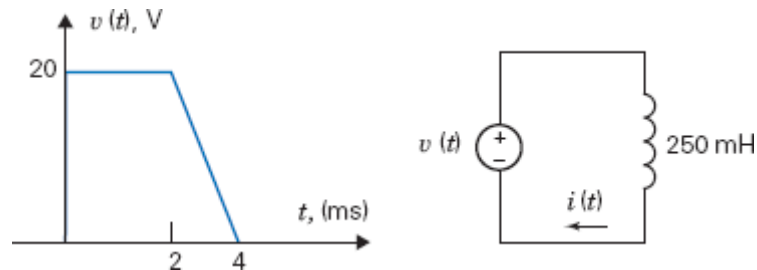



Figura P 7.5-21

P 7.5-22 Um dos três componentes que aparecem na Figura P 7.5-22 é um resistor, outro é um capacitor e outro é um indutor. Dado que

$$i(t) = 0{,}25 \cos(2t) \text{ A},$$

e $v_a(t) = -10 \text{ sen}(2t)$ V, $v_b(t) = 10 \text{ sen}(2t)$ V e $v_c(t) = 10 \cos(2t)$ V, determine a resistência R do resistor, a capacitância C do capacitor e a indutância L do indutor. (Todos os valores devem ser positivos.)

Resposta: $R = 40\ \Omega$, $C = 0{,}0125$ F e $L = 20$ H

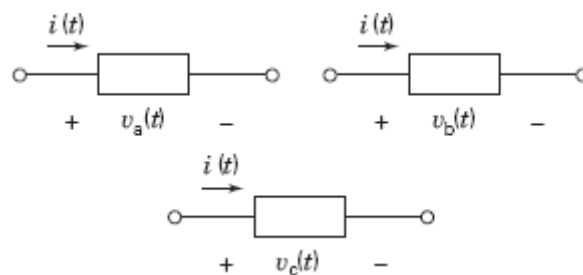
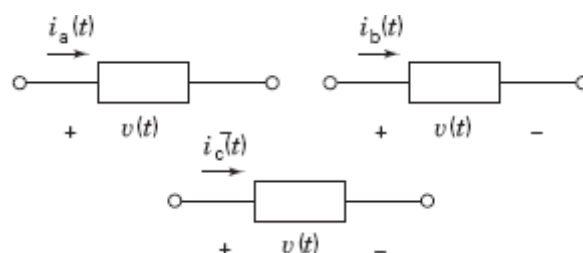



Figura P 7.5-22

P 7.5-23 Um dos três componentes que aparecem na Figura P 7.5-23 é um resistor, outro é um capacitor e outro é um indutor. Dado que

$$v(t) = 24 \cos(5t) \text{ V}$$

e $i_a(t) = 3 \cos(5t)$ A, $i_b(t) = 12 \text{ sen}(5t)$ V e $i_c(t) = -1{,}8 \text{ sen}(5t)$ V, determine a resistência R do resistor, a capacitância C do capacitor e a indutância L do indutor. (Todos os valores devem ser positivos.)

Figura P 7.5-23

Seção 7.6 **Armazenamento de Energia em um Indutor**

P 7.6-1 A corrente $i(t)$ em um indutor de 100 mH que faz parte do circuito de um telefone é dada por

$$i(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 4t & 0 \leq t \leq 1{,}5 \\ 4 & t \geq 1 \end{cases}$$

em que o tempo está em segundos e a corrente está em ampères. Determine a potência $p(t)$ absorvida pelo indutor e a energia $w(t)$ armazenada no indutor.

Respostas:

$$p(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1{,}6t & 0 < t < 1 \\ 0 & t \geq 1 \end{cases} \quad \text{e}$$

$$w(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 0{,}8t^2 & 0 < t < 1 \\ 0{,}8 & t \geq 1 \end{cases}$$

em que a potência $p(t)$ está em watts e a energia $w(t)$ está em joules.

P 7.6-2 A corrente $i(t)$ em um indutor de 5 H é dada por

$$i(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 4 \text{ sen } 2t & t \geq 0 \end{cases}$$

em que o tempo está em segundos e a corrente em ampères. Determine a potência $p(t)$ absorvida pelo indutor e a energia $w(t)$ armazenada no indutor.

Sugestão: 2 (cos A)(sen B) = sen (A + B) + sen (A – B)

P 7.6-3 A tensão $v(t)$ em um indutor de 25 mH usado em um experimento de fusão nuclear é dada por

$$v(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 6 \cos 100t & t \geq 0 \end{cases}$$

em que o tempo está em segundos e a tensão em volts. A corrente no indutor é zero antes que a tensão seja aplicada em $t = 0$. Determine a potência $p(t)$ absorvida pelo indutor e a energia $w(t)$ armazenada no indutor.

Sugestão: 2 (cos A)(sen B) = sen (A + B) + sen (A – B)

Resposta: $p(t) = 7{,}2 \text{ sen } 200t$ W e $w(t) = 3{,}6\,(1 - \cos 200t)$ mJ

P 7.6-4 A corrente em um indutor de indutância $L = 1/4$ H é $i = 4te^{-t}$ A para $t \geq 0$ e $i = 0$ para $t < 0$. Determine a tensão, potência e energia do indutor.

Resposta Parcial: $w = 2t^2e^{-2t}$ J

P 7.6-5 A Figura P 7.6-5 mostra a corrente no indutor do circuito de deflexão do tubo de imagem de um aparelho de TV. Determine a tensão, potência e energia do indutor, sabendo que a indutância é $L = 1/2$ H.

Resposta Parcial:

$$p = \begin{cases} 2t & 0 \leq t < 1 \\ 2(t-2) & 1 < t < 2 \\ 0 & \text{p.q.o.v.} \end{cases}$$

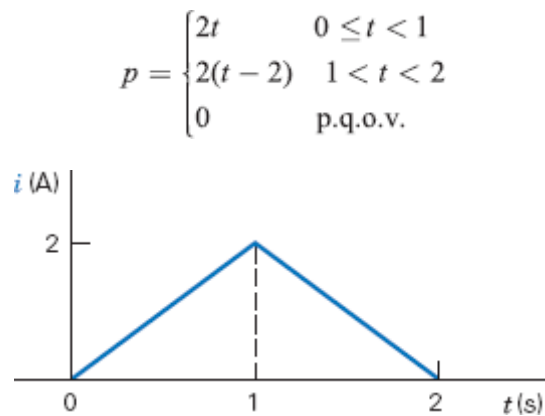



Figura P 7.6-5

Seção 7.7 **Indutores em Série e em Paralelo**

P 7.7-1 Determine a corrente $i(t)$ no circuito da Figura P 7.7-1.

Resposta: $i(t) = 15$ sen $100t$ mA

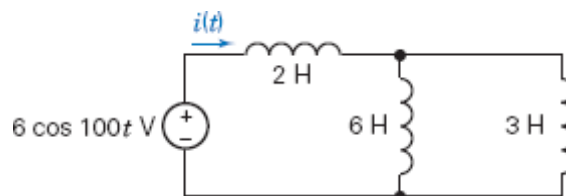



Figura P 7.7-1

P 7.7-2 Determine a tensão $v(t)$ no circuito da Figura P 7.7-2.

Resposta: $v(t) = -6e^{-250t}$ mV

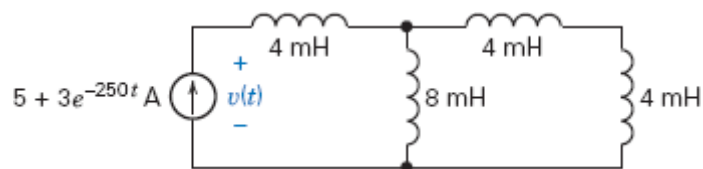



Figura P 7.7-2

P 7.7-3 O circuito da Figura P 7.7-3 contém quatro indutores iguais. Determine o valor da indutância L.

Resposta: $L = 2{,}86$ H

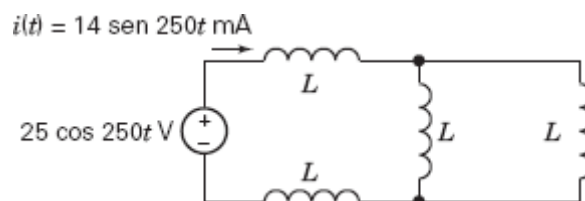



Figura P 7.7-3

P 7.7-4 O circuito da Figura P 7.7-4 contém sete indutores, todos de indutância L. A tensão da fonte é dada por

$$v(t) = 4\cos(3t) \text{ V}$$

Determine a corrente $i(t)$ para $L = 4$ H.

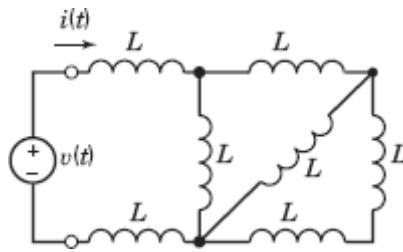



Figura P 7.7-4

P 7.7-5 Determine o valor da indutância L no circuito da Figura P 7.7-5, dado que $L_{eq} = 18$ H.

Resposta: $L = 20$ H

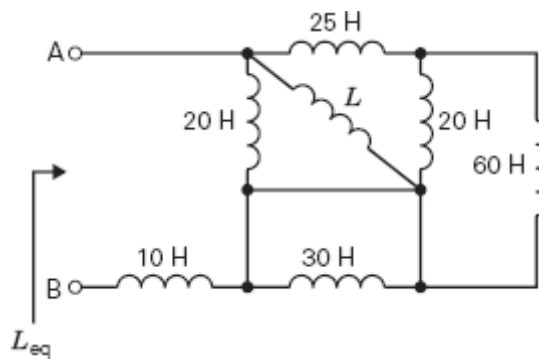



Figura P 7.7-5

P 7.7-6 Determine o valor da resistência equivalente L_{eq} no circuito da Figura P 7.7-6.

Resposta: $L_{eq} = 120$ H

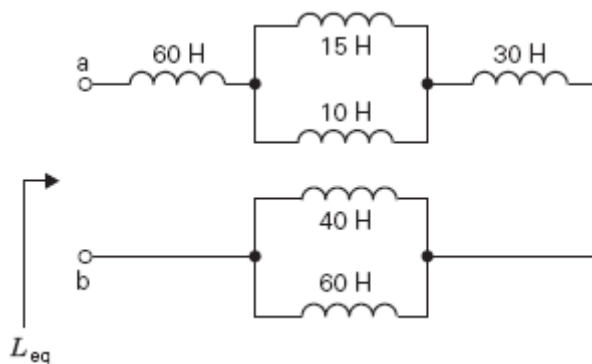



Figura P 7.7-6

P 7.7-7 O circuito da Figura P 7.7-7 é formado por 10 indutores, todos de indutância L. Determine o valor da indutância L, dado que $L_{eq} = 12$ mH.

Resposta: $L = 35$ mH

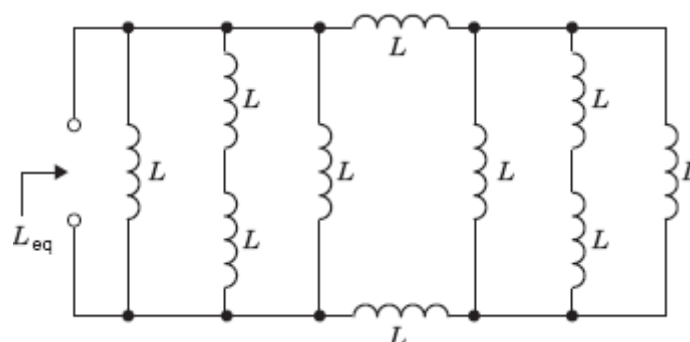



Figura P 7.7-7

P 7.7-8 O circuito da Figura P 7.7-8 está no regime estacionário antes do fechamento da chave e, portanto, as correntes nos dois indutores são nulas [$i_1(0^-) = i_2(0^-) = 0$]. A tensão $v(t)$ é dada por

$$v(t) = \begin{cases} 0 \text{ V} & \text{para } t < 0 \\ 4e^{-5t} \text{ V} & \text{para } t > 0 \end{cases}$$

(a) Determine as correntes nos indutores, $i_1(t)$ e $i_2(t)$, para $t \geq 0$.

(b) Determine a energia armazenada em cada indutor 200 ms após o fechamento da chave.

Se os indutores forem substituídos por um indutor equivalente.

(c) Determine a corrente no indutor equivalente, tomando como referência o sentido de cima para baixo, para $t \geq 0$.

(d) Determine a energia armazenada pelo indutor equivalente 200 ms após o fechamento da chave.

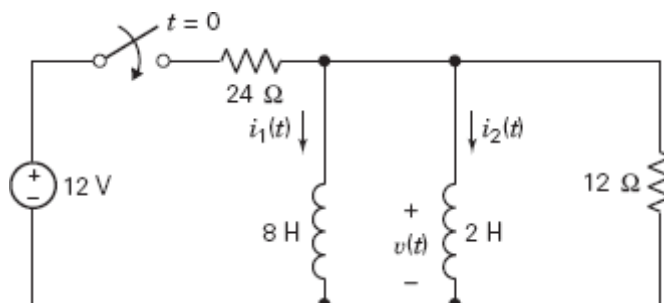



Figura P 7.7-8

P 7.7-9 O circuito da Figura P 7.7-9 está no regime estacionário antes que a chave seja fechada no instante t = 0. A corrente $i(t)$ é dada por

$$i(t) = \begin{cases} 0,8 \text{ A} & \text{para } t \leq 0 \\ 0,8e^{-2t} \text{ A} & \text{para } t \geq 0 \end{cases}$$

(a) Determine a energia armazenada em cada indutor antes que a chave seja aberta.

(b) Determine a energia armazenada em cada indutor 200 ms após a abertura da chave.

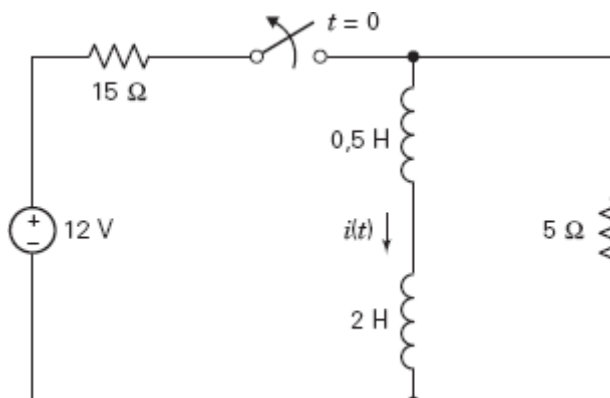



Figura P 7.7-9

Se os indutores forem substituídos por um indutor equivalente.

(c) Determine a energia armazenada pelo indutor equivalente antes que a chave seja aberta.

(d) Determine a energia armazenada pelo indutor equivalente 200 ms após a abertura da chave.

P 7.7-10 Determine a razão i_1/i no circuito da Figura P 7.7-10. Suponha que as correntes iniciais são nulas.

Resposta: $\dfrac{i_1}{i} = \dfrac{L_1}{L_1 + L_2}$

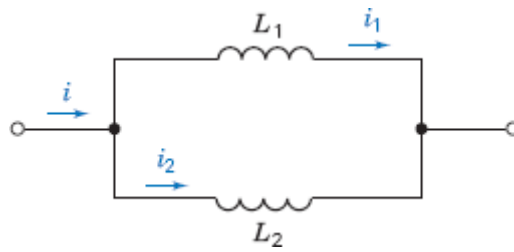



Figura P 7.7-10

P 7.7-11 Considere a combinação de componentes da Figura P 7.7-11.

(a) Se o componente A é um capacitor de 20 μF, o componente B é um capacitor de 5 μF e o componente C é um capacitor de 20 μF, determine a capacitância equivalente.

(b) Se o componente A é um indutor de 50 mH, o componente B é um indutor de 30 mH e o componente C é um indutor de 20 mH, determine a indutância equivalente.

(c) Se o componente A é um resistor de 9 kΩ, o componente B é um resistor de 6 kΩ e o componente C é um resistor de 10 kΩ, determine a resistência equivalente.

Respostas: **(a)** $C_{eq} = 20\ \mu$F, **(b)** $L_{eq} = 16$ mH e **(c)** $R_{eq} = 6$ kΩ

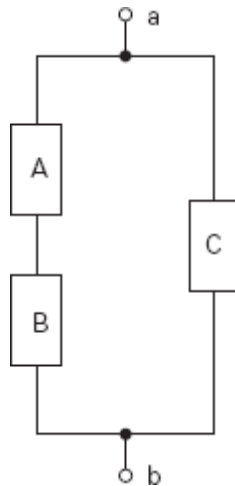



Figura 7.7-11

P 7.7-12 Considere a combinação de componentes da Figura P 7.7-12.

(a) Se o componente A é um capacitor de 8 μF, o componente B é um capacitor de 16 μF e o componente C é um capacitor de 12 μF, determine a capacitância equivalente.

(b) Se o componente A é um indutor de 20 mH, o componente B é um indutor de 5 mH e o componente C é um indutor de 8 mH, determine a indutância equivalente.

(c) Se o componente A é um resistor de 20 kΩ, o componente B é um resistor de 30 kΩ e o componente C é um resistor de 16 kΩ, determine a resistência equivalente.

Respostas: **(a)** $C_{eq} = 8\ \mu$F, **(b)** $L_{eq} = 12$ mH e **(c)** $R_{eq} = 28$ kΩ

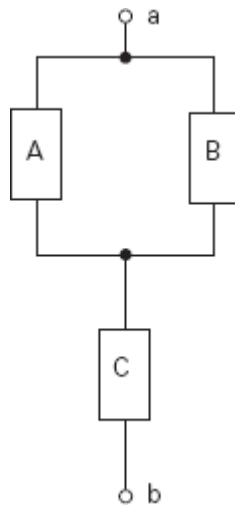



Figura P 7.7-12

Seção 7.8 **Circuitos de Comutação**

P 7.8-1 A chave da Figura P 7.8-1 permaneceu aberta por um longo tempo antes de ser fechada no instante $t = 0$. Determine $v_c(0^+)$ e $i_L(0^+)$, os valores da tensão do capacitor e da corrente do indutor imediatamente após a chave ser fechada. Sejam $v_C(\infty)$ e $i_L(\infty)$ os valores da tensão do capacitor e da corrente do indutor depois de a chave permanecer fechada por um longo tempo. Determine $v_c(\infty)$ e $i_L(\infty)$.

Resposta: $v_c(0^+) = 12$ V, $i_L(0^+) = 0$, $v_c(\infty) = 4$ V e $i_L(\infty) = 1$ mA

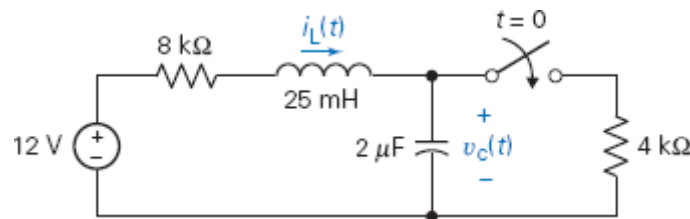



Figura P 7.8-1

P 7.8-2 A chave da Figura P 7.8-2 permaneceu aberta por um longo tempo antes de ser fechada no instante $t = 0$. Determine $v_c(0^+)$ e $i_L(0^+)$, os valores da tensão do capacitor e da corrente do indutor imediatamente após a chave ser fechada. Sejam $v_c(\infty)$ e $i_L(\infty)$ os valores da tensão do capacitor e da corrente do indutor depois de a chave permanecer fechada por um longo tempo. Determine $v_c(\infty)$ e $i_L(\infty)$.

Resposta: $v_c(0^+) = 6$ V, $i_L(0^+) = 1$ mA, $v_c(\infty) = 3$ V e $i_L(\infty) =1,5$ mA

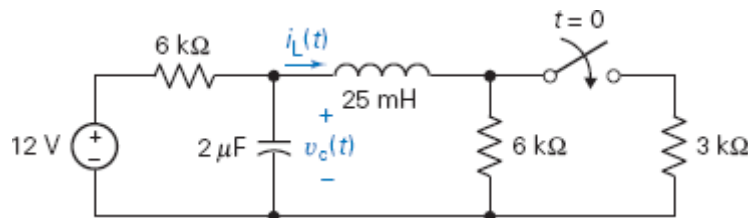



Figura P 7.8-2

P 7.8-3 A chave da Figura P 7.8-3 permaneceu aberta por um longo tempo antes de ser fechada no instante $t = 0$. Determine $v_c(0^+)$ e $i_L(0^+)$, os valores da tensão do capacitor e da corrente do indutor imediatamente após o fechamento da chave. Sejam $v_c(\infty)$ e $i_L(\infty)$ os valores da tensão do capacitor e da corrente do indutor depois de a chave permanecer fechada por um longo tempo. Determine $v_c(\infty)$ e $i_L(\infty)$.

Resposta: $v_c(0^+) = 0$ V, $i_L(0^+) = 0$, $v_c(\infty) = 8$ V e $i_L(\infty) = 0,5$ mA

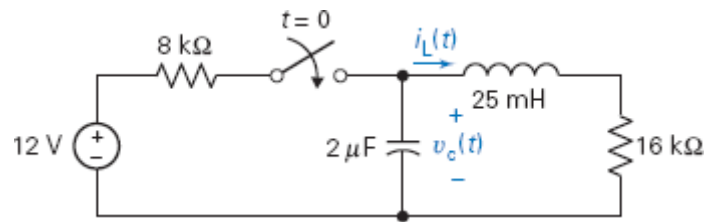



Figura P 7.8-3

P 7.8-4 A chave da Figura P 7.8-4 permaneceu fechada por um longo tempo antes de ser aberta no instante $t = 0$. Determine $v_R(0^-)$ e $v_L(0^-)$, os valores da tensão do resistor de 4 Ω e da tensão no indutor imediatamente antes da abertura da chave, e $v_R(0^+)$ e $v_L(0^+)$, os valores da tensão do resistor de 4 Ω e da tensão do indutor imediatamente após a abertura da chave.

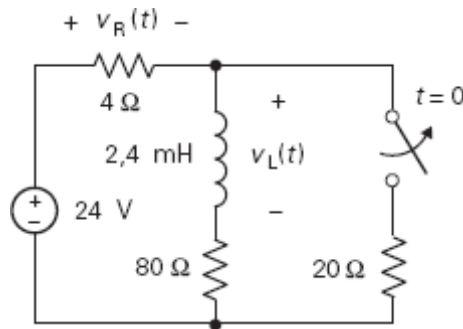



Figura P 7.8-4

P 7.8-5 A chave da Figura P 7.8-5 permaneceu aberta por um longo tempo antes de ser fechada no instante $t = 0$. Determine $i_R(0^-)$ e $i_L(0^-)$, os valores da corrente de um dos resistores de 20 Ω e da corrente do capacitor imediatamente antes do fechamento da chave, e $i_R(0^+)$ e $i_c(0^+)$, os valores da tensão de um dos resistores de 20 Ω e da corrente do capacitor imediatamente após o fechamento da chave.

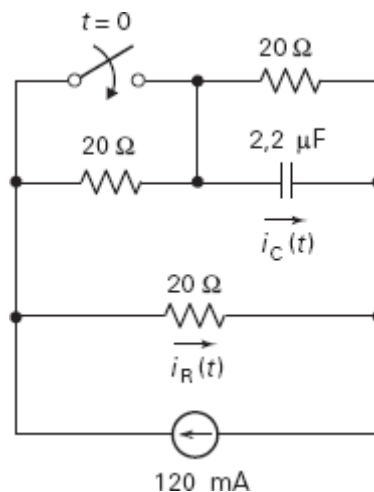



Figura P 7.8-5

P 7.8-6 A chave da Figura P 7.8-6 permaneceu aberta por um longo tempo antes de ser fechada no instante $t = 0$. Determine $v_L(0^-)$, o valor da tensão do indutor imediatamente antes do fechamento da chave, e $v_L(0^+)$, o valor da tensão do indutor imediatamente após o fechamento da chave.

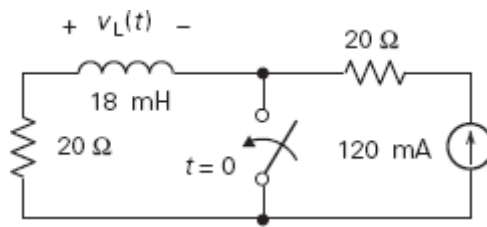



Figura P 7.8-6

P 7.8-7 A chave da Figura P 7.8-7 permaneceu fechada por um longo tempo antes de ser aberta no instante $t = 0$. Determine $i_C(0^-)$, o valor da corrente do capacitor imediatamente antes do fechamento da chave, e $i_C(0^+)$, o valor da corrente do capacitor imediatamente após a abertura da chave.

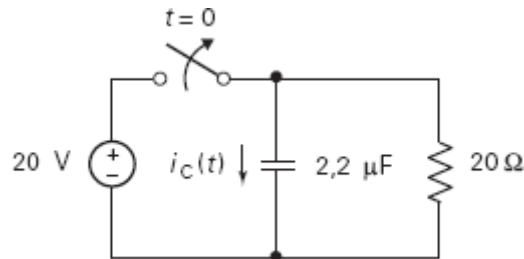



Figura P 7.8-7

P 7.8-8 O circuito da Figura P 7.8-8 está no regime estacionário quando a chave é aberta no instante $t = 0$. Determine $v_1(0^-)$, $v_1(0^+)$, $i_2(0^-)$, $i_2(0^+)$, $i_3(0^-)$, $i_3(0^+)$, $v_4(0^-)$ e $v_4(0^+)$.

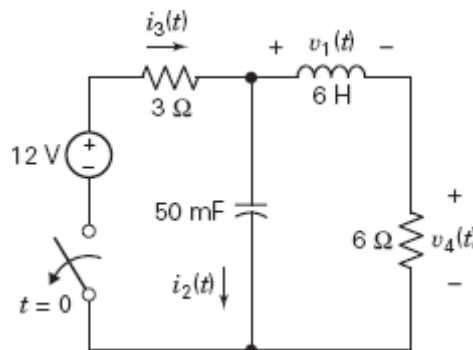



Figura P 7.8-8

P 7.8-9 O circuito da Figura P 7.8-9 está no regime estacionário quando a chave é aberta no instante $t = 0$. Determine $v_1(0^-)$, $v_1(0^+)$, $i_2(0^-)$ e $i_2(0^+)$.

Sugestão: Se modelarmos a chave aberta usando um circuito aberto, chegaremos à conclusão de que a corrente no indutor variou bruscamente, o que não é permitido. Assim, é necessário usar um modelo mais realista da chave aberta, um resistor de valor elevado, para contornar essa dificuldade.

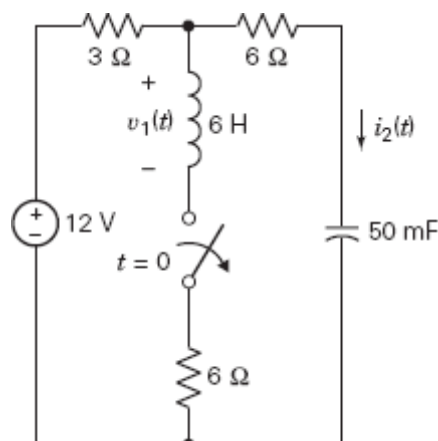



Figura P 7.8-9

P 7.8-10 O circuito da Figura P 7.8-10 está no regime estacionário quando a chave é fechada no instante $t = 0$. Determine $v_1(0^-)$, $v_1(0^+)$, $i_2(0^-)$ e $i_2(0^+)$.

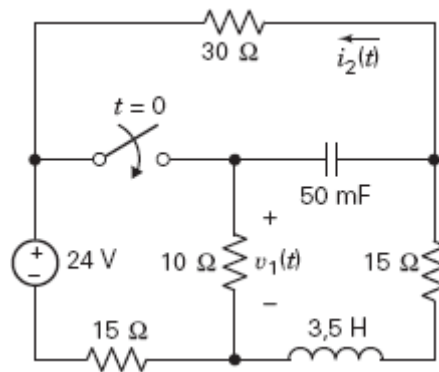



Figura P 7.8-10

P 7.8-11 O circuito da Figura P 7.8-11 está no regime estacionário quando a chave é aberta no instante $t = 0$. Determine $i_L(t)$, $v_c(t)$ e $v_R(t)$ imediatamente antes que a chave seja aberta e $v_R(t)$ imediatamente após a abertura da chave.

Resposta: $i_L(0^-) = 1{,}25$ A, $v_c(0^-) = 20$ V, $v_R(0^-) = -5$ V e $v_R(0^+) = -4$ V

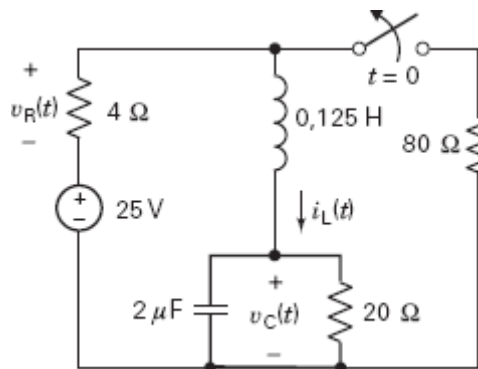



Figura P 7.8-11

P 7.8-12 O circuito da Figura P 7.8-12 está no regime estacionário quando a chave é fechada no instante $t = 0$.

(a) Determine $i_L(t)$, $v_C(t)$ e $v_R(t)$ imediatamente antes de a chave ser fechada.

(b) Determine $v_R(t)$ imediatamente após o fechamento da chave.

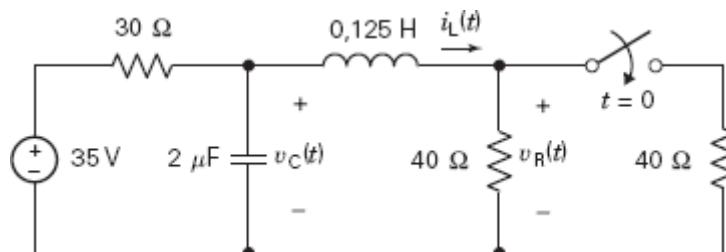



Figura P 7.8-12

P 7.8-13 O circuito da Figura P 7.8-13 está no regime estacionário quando a chave é aberta no instante $t = 0$. Determine $i_L(t)$, $v_C(t)$ e $v_R(t)$ imediatamente antes de a chave ser fechada e $v_R(t)$ imediatamente após o fechamento da chave.

Resposta: $i_L(0^-) = 0{,}4$ A, $v_C(0^-) = 16$ V, $v_R(0^-) = 0$ V e $v_R(0^+) = -12$ V

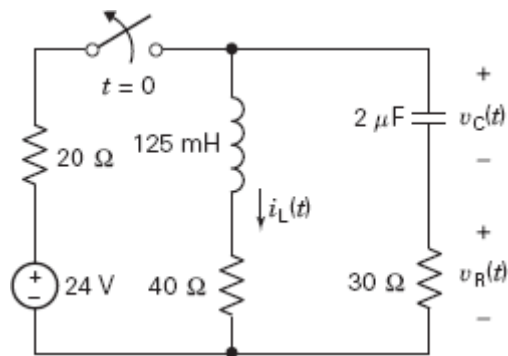



Figura P 7.8-13

Seção 7.9 Circuitos com Amplificadores Operacionais e Equações Diferenciais Lineares

P 7.9-1 Projete um circuito com uma entrada, $x(t)$, e uma saída, $y(t)$, que estejam relacionadas pela equação diferencial

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}y(t)+4\frac{d}{dt}y(t)+y(t)=\frac{5}{2}x(t)$$

P 7.9-2 Projete um circuito com uma entrada, $x(t)$ e uma saída, $y(t)$, que estejam relacionadas pela equação diferencial

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}y(t)+y(t)=-\frac{5}{2}x(t)$$

P 7.9-3 Projete um circuito com uma entrada, $x(t)$ e uma saída, $y(t)$, que estejam relacionadas pela equação diferencial

$$2\frac{d^3}{dt^3}y(t)+16\frac{d^2}{dt^2}y(t)+8\frac{d}{dt}y(t)+10y(t)=-4x(t)$$

P 7.9-4 Projete um circuito com uma entrada, $x(t)$ e uma saída, $y(t)$, que estejam relacionadas através da seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^3}{dt^3}y(t)+16\frac{d^2}{dt^2}y(t)+8\frac{d}{dt}y(t)+10y(t)=4x(t)$$

Seção 7.11 Como Podemos Testar . . . ?

P 7.11-1 A solução de um dever de casa mostra que a corrente e a tensão em um indutor de 100 H são dadas por

$$i(t)=\begin{cases}0{,}025 & t<1\\ -\dfrac{t}{25}+0{,}065 & 1<t<3\\ \dfrac{t}{50}-0{,}115 & 3<t<9\\ 0{,}065 & t<9\end{cases}$$

e

$$v(t)=\begin{cases}0 & t<1\\ -4 & 1<t<3\\ 2 & 3<t<9\\ 0 & t>9\end{cases}$$

em que a corrente está em ampères, a tensão em volts e o tempo em segundos. Mostre que a corrente no indutor não varia bruscamente.

P 7.11-2 A solução de um dever de casa mostra que a corrente e a tensão em um indutor de 100 H são dadas por

$$i(t) = \begin{cases} -\dfrac{t}{200} + 0{,}025 & t < 1 \\ -\dfrac{t}{100} + 0{,}03 & 1 < t < 4 \\ \dfrac{t}{100} - 0{,}03 & 4 < t < 9 \\ 0{,}015 & t < 9 \end{cases}$$

e

$$v(t) = \begin{cases} -1 & t < 1 \\ -2 & 1 < t < 4 \\ 1 & 4 < t < 9 \\ 0 & t > 9 \end{cases}$$

em que a corrente está em ampères, a tensão em volts e o tempo em segundos. A solução está correta? Justifique sua resposta.

Problemas de Projeto

PP 7-1 A tensão $v(t)$ e a corrente $i(t)$ em um componente isolado, que pode ser um resistor, um capacitor ou um indutor, estão de acordo com a convenção passiva. Considere os seguintes casos:

(a) $v(t) = 4 + 2e^{-3t}$ V e $i(t) = -3e^{-3t}$ A para $t > 0$

(b) $v(t) = -3e^{-3t}$ V e $i(t) = 4 + 2e^{-3t}$ A para $t > 0$

(c) $v(t) = 4 + 2e^{-3t}$ V e $i(t) = 2 + e^{-3t}$ A para $t > 0$

Em cada caso, verifique se o componente é um resistor, um capacitor ou um indutor e determine o valor da resistência, capacitância ou indutância.

PP 7-2 A Figura PP 7-2 mostra uma fonte de tensão e componentes desconhecidos. Cada componente pode ser um resistor, um capacitor ou um indutor. Considere os seguintes casos:

(a) $i(t) = 1{,}131 \cos(2t + 45°)$ A

(b) $i(t) = 1{,}131 \cos(2t - 45°)$ A

Em cada caso, verifique se o componente é um resistor, um capacitor ou um indutor e determine o valor da resistência, capacitância ou indutância.

Sugestão: $\cos(\theta + \phi) = \cos\theta \cos\phi - \text{sen}\,\theta\, \text{sen}\,\phi$

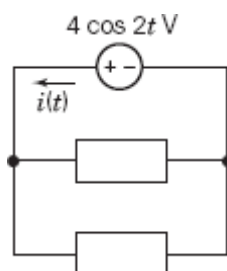



Figura PP 7-2

PP 7-3 A Figura PP 7-3 mostra uma fonte de tensão e componentes desconhecidos. Cada componente pode ser um resistor, um capacitor ou um indutor. Considere os seguintes casos:

(a) $v(t) = 11{,}31 \cos(2t + 45°)$ V

(b) $v(t) = 11{,}31 \cos(2t - 45°)$ V

Em cada caso, verifique se o componente é um resistor, um capacitor ou um indutor e determine o valor da resistência, capacitância ou indutância.

Sugestão: $\cos(\theta + \phi) = \cos\theta \cos\phi - \text{sen}\,\theta\, \text{sen}\,\phi$

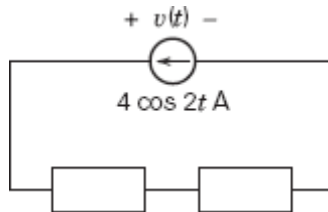



Figura PP 7-3

PP 7-4 Um equipamento de flash de alta velocidade para fotografia esportiva exige uma tensão $v(0^+) = 3$ V e

$$\left.\frac{dv(t)}{dt}\right|_{t=0} = 24 \text{ V/s}$$

O equipamento usa o circuito da Figura PP 7-4. No instante $t = 0$, a chave 1 permaneceu fechada por um longo tempo e a chave 2 permaneceu aberta por um longo tempo. Na verdade, o longo tempo neste caso é 3 s. Determine a tensão da bateria, V_B, sabendo que $C = 1/8$ F.

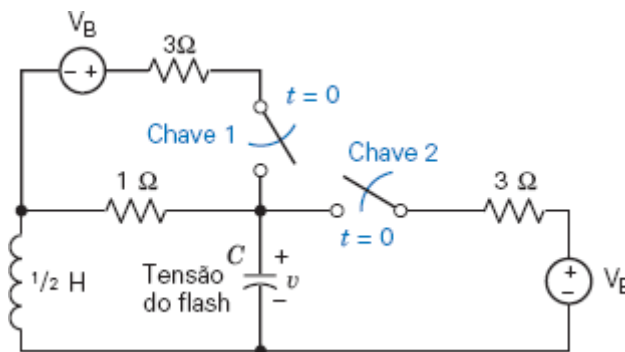



Figura PP 7-4

PP 7-5 No circuito da Figura PP 7-5, escolha o valor de R para que, no regime estacionário, a energia armazenada no indutor seja igual à energia armazenada no capacitor.

Figura PP 7-5

CAPÍTULO 8 A Resposta Completa de Circuitos RL e RC

NESTE CAPÍTULO

8.1 *Introdução*

Neste capítulo, vamos estudar a resposta de circuitos *RL* e *RC* a variações bruscas. A variação brusca pode ser uma mudança no circuito, como a abertura ou fechamento de uma chave, ou uma mudança na entrada do circuito, como a aplicação de uma tensão que varia bruscamente.

Os circuitos *RL* e *RC* são chamados de circuitos de primeira ordem. Neste capítulo vamos fazer o seguinte:

- Apresentar algumas definições que facilitarão o estudo da resposta de circuitos de primeira ordem.
- Analisar circuitos de primeira ordem com entradas que permanecem constantes a partir de um certo instante de tempo t_0.
- Introduzir o conceito de circuito estável e usá-lo para identificar circuitos estáveis de primeira ordem.
- Analisar circuitos de primeira ordem que sofrem mais de uma variação brusca.
- Definir a função degrau e determinar a resposta a um degrau de um circuito de primeira ordem.
- Analisar circuitos de primeira ordem com entradas que não são constantes.

8.2 *Circuitos de Primeira Ordem*

Os circuitos que contêm capacitores e indutores podem ser representados por equações diferenciais. A ordem da equação diferencial em geral é igual à soma do número de capacitores com o número de indutores do circuito.

Os circuitos que contêm apenas um indutor e nenhum capacitor ou apenas um capacitor e nenhum indutor podem ser representados por uma equação diferencial de primeira ordem. Esses circuitos são chamados de **circuitos de primeira ordem**.

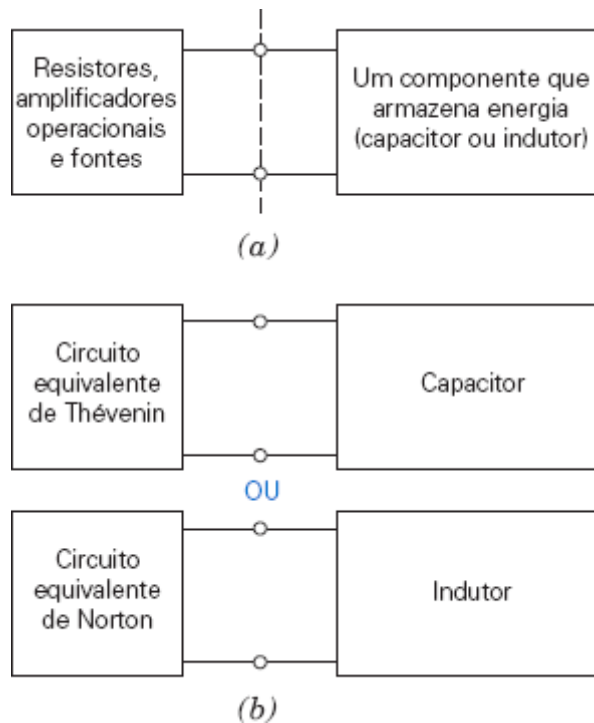



FIGURA 8.2-1 Plano para analisar circuitos de primeira ordem. (*a*) Primeiro, separamos o capacitor ou indutor do resto do circuito. (*b*) Em seguida, substituímos o resto do circuito pelo circuito equivalente de Thévenin se o componente for um capacitor ou pelo circuito equivalente de Norton se o componente for um indutor,

É possível mostrar (Figura 8.2-1), usando circuitos equivalentes de Thévenin e Norton, que qualquer circuito de primeira ordem pode ser reduzido a um ou a outro de dois circuitos simples. Na Figura 8.2-1*a*, um circuito de primeira ordem foi dividido em duas partes. Uma das partes é o único capacitor ou indutor que esperamos encontrar em um circuito de primeira ordem; a outra é o resto do circuito, ou seja, todos os componentes, exceto o capacitor ou indutor. O passo seguinte, mostrado na Figura 8.2-1*b*, depende do tipo de dispositivo de armazenamento de energia que está presente no circuito. No caso de um capacitor, o resto do circuito é substituído pelo circuito equivalente de Thévenin. O resultado é um circuito simples de primeira ordem: um circuito série formado por uma fonte de tensão, um resistor e um capacitor. No caso de um indutor, o resto do circuito é substituído pelo circuito equivalente de Norton. O resultado é outro circuito simples de primeira ordem: um circuito paralelo formado por uma fonte de corrente, um resistor e um indutor. Todos os circuitos de primeira ordem são equivalentes a um dos circuitos simples de primeira ordem que acabamos de descrever.

Considere o circuito de primeira ordem da Figura 8.2-2*a*. A entrada do circuito é a tensão $v_s(t)$. A saída, ou resposta, do circuito é a tensão do capacitor. O circuito está no regime estacionário antes que a chave seja fechada no instante $t = 0$. O fechamento da chave perturba o circuito. Depois de um certo tempo, a perturbação cessa e o circuito volta ao regime estacionário. Na maioria dos casos, a resposta estacionária do circuito depois do fechamento da chave é diferente da resposta estacionária antes do fechamento da chave. A Figura 8.2-2*b* mostra a variação com o tempo da tensão do capacitor.

Quando a entrada de um circuito é senoidal, a resposta estacionária também é senoidal. Além disso, a frequência da resposta é igual à frequência da entrada. Como o circuito da Figura 8.2-2*a* está no regime estacionário antes do fechamento da chave, a tensão do capacitor é

$$v(t) = B\cos(1000t + \phi), \quad t < 0 \qquad (8.2\text{-}1)$$

A chave é fechada no instante $t = 0$. O valor da tensão do capacitor no instante em que a chave é fechada é

$$v(0) = B\cos(\phi),\quad t = 0 \tag{8.2-2}$$

Depois que a chave é fechada, a resposta passa a ter duas partes: uma parte transitória, que se anula a longo prazo, e uma parte estacionária. A parte estacionária da resposta é senoidal e tem a mesma frequência que a entrada. No caso de um circuito de primeira ordem, a parte transitória da resposta é exponencial. Os circuitos de primeira ordem são estudados à parte justamente para tirar vantagem da forma simples da resposta transitória desses circuitos. Depois que a chave é fechada, a tensão do capacitor passa a ser

$$v(t) = Ke^{-t/\tau} + M\cos(1000t + \delta) \tag{8.2-3}$$

Observe que $Ke^{-t/\tau}$ tende a zero quando t tende a infinito. Essa é a parte transitória da resposta. Para grandes valores de t, a parte transitória se torna insignificante e resta apenas a resposta estacionária, $M\cos(1000t + \delta)$.

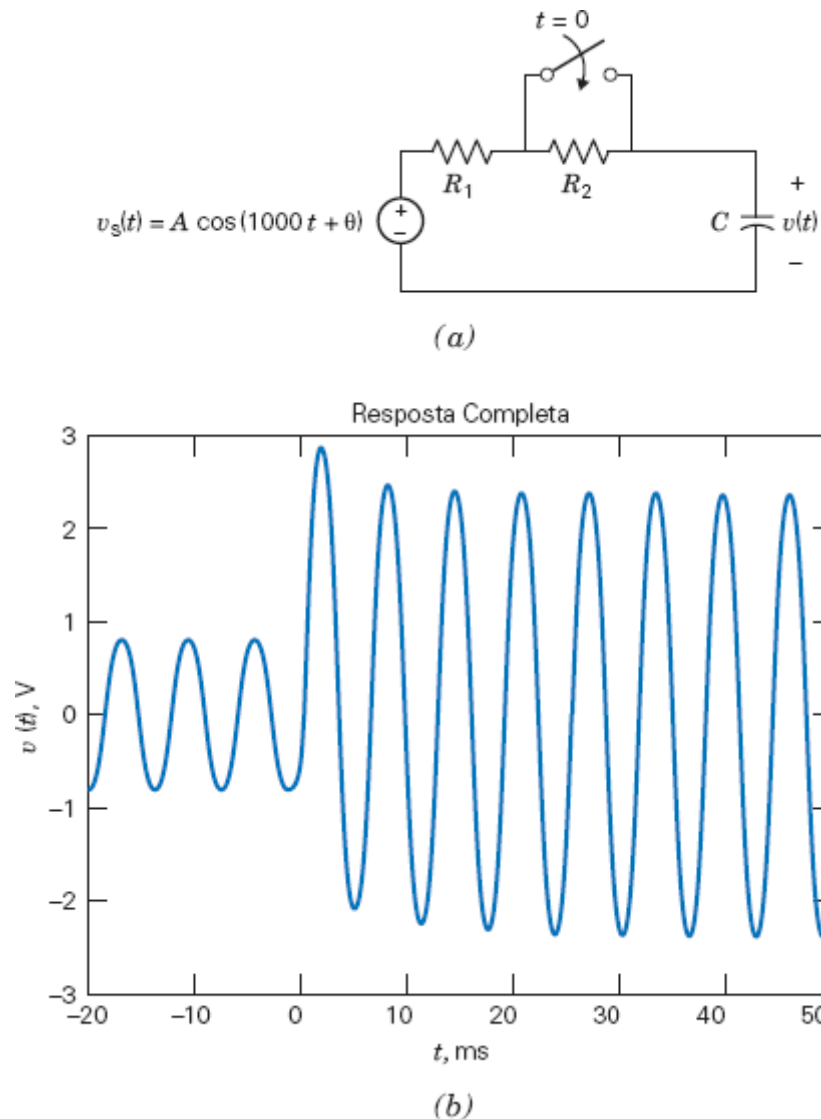



FIGURA 8.2-2 (*a*) Circuito e (*b*) resposta completa do circuito.

Na prática, costuma-se usar a expressão resposta transitória em vez de "parte transitória da resposta" e a expressão resposta estacionária em vez de "parte estacionária da resposta". A resposta $v(t)$, dada pela Eq. 8.2-3, que inclui tanto a parte transitória como a parte estacionária da resposta, é chamada de resposta completa.

$$\text{resposta completa} = \text{resposta transitória} + \text{resposta estacionária}$$

(A expressão *resposta transitória* é usada de duas formas diferentes pelos engenheiros elétricos. Algumas vezes, significa "parte transitória da resposta completa"; outras vezes, significa a resposta completa, que inclui a parte transitória. Em particular, o programa PSpice usa o termo *resposta transitória* para designar a resposta completa. Por essa razão, o termo *resposta transitória* deve ser usado com cautela.)

Em termos matemáticos, a resposta completa de um circuito de primeira ordem pode ser representada como a soma de duas partes, a resposta natural e a resposta forçada:

$$\text{resposta completa} = \text{resposta natural} + \text{resposta forçada}$$

A resposta natural é a solução geral da equação diferencial que representa o circuito quando a entrada é nula. A resposta forçada é uma solução particular da equação diferencial que representa o circuito.

A resposta completa de um circuito de primeira ordem depende de uma condição inicial, como a tensão no capacitor ou a corrente no indutor em um dado instante. Seja t_0 o instante para o qual é dada a condição inicial. A resposta natural de um circuito de primeira ordem é da forma

$$\text{resposta natural} = Ke^{-(t-t_0)/\tau}$$

Para $t_0 = 0$, temos:

$$\text{resposta natural} = Ke^{-t/\tau}$$

A constante K da resposta natural depende da condição inicial, que pode ser, por exemplo, a tensão do capacitor no instante t_0.

Neste capítulo, vamos considerar três casos. A entrada do circuito pode ser:

(1) uma constante, por exemplo,

$$v_s(t) = V_0$$

(2) uma exponencial, por exemplo,

$$v_s(t) = V_0 e^{-t/\tau}$$

(3) uma senoide, por exemplo,

$$v_s(t) = V_0 \cos(\omega t + \theta)$$

Esses três casos são especiais porque a resposta forçada tem a mesma forma que a entrada. Na Figura 8.2-2, por exemplo, a resposta forçada e a entrada são senoidais e a frequência da resposta forçada é igual à frequência da entrada. No caso de outras entradas, a resposta forçada pode não ter a mesma forma que a entrada. Quando a entrada é uma onda quadrada, por exemplo, a resposta forçada não é uma onda quadrada.

Nos casos em que a entrada é uma constante ou uma senoide, a resposta forçada corresponde à resposta estacionária e a resposta natural corresponde à resposta transitória.

Nosso plano para determinar a resposta completa de circuitos de primeira ordem é o seguinte:

1º passo: determinar a resposta forçada antes da perturbação. Calcular essa resposta no instante $t = t_0$ para obter a condição inicial do dispositivo de armazenamento de energia.
2º passo: determinar a resposta forçada depois da perturbação.
3º passo: somar a resposta natural $Ke^{-t/\tau}$ à resposta forçada para obter a resposta completa. Usar a condição inicial para determinar o valor da constante K.

8.3 Resposta de um Circuito de Primeira Ordem a uma Entrada Constante

Nesta seção, vamos determinar a resposta completa de um circuito de primeira ordem quando a entrada do circuito é constante após o instante t_0. Esta situação está ilustrada na Figura 8.3-1. A Figura 8.3-1*a* mostra um circuito de primeira ordem que contém um capacitor. O circuito está no regime estacionário quando a chave é fechada, o que perturba o regime estacionário. O instante em que o regime estacionário é perturbado é chamado de t_0. Na Figura 8.3-1*a*, $t_0 = 0$. O fechamento da chave remove do circuito do resistor R_1. (Uma chave fechada é modelada por um curto-circuito. Um curto-circuito em paralelo com uma resistência é equivalente a um curto-circuito.) Depois que a chave é fechada, o circuito pode ser representado pelo circuito equivalente da Figura 8.3-1*b*. Na Figura 8.3-1*b*, a parte do circuito que está ligada ao capacitor foi substituída pelo circuito equivalente de Thévenin. Assim,

$$V_{oc} = \frac{R_3}{R_2 + R_3} V_s \quad \text{e} \quad R_t = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

Vamos representar o circuito da Figura 8.3-1*b* por uma equação diferencial. A corrente do capacitor é dada por

$$i(t) = C \frac{d}{dt} v(t)$$

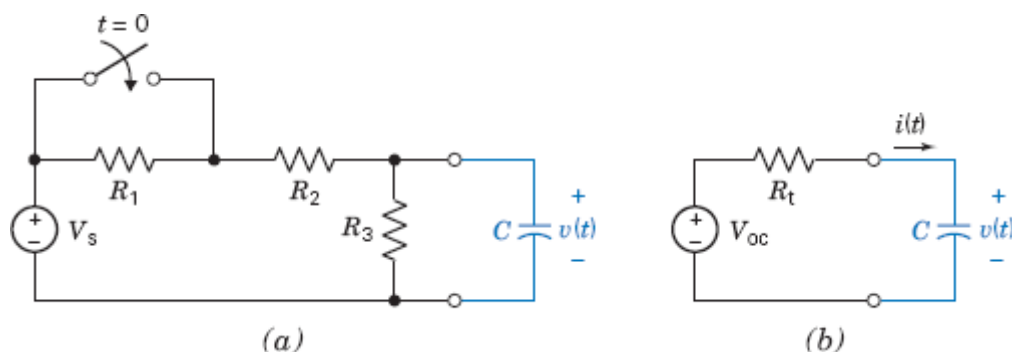



FIGURA 8.3-1 (*a*) Circuito de primeira ordem com um capacitor. (*b*) O circuito ligado ao capacitor, com a chave fechada, foi substituído pelo circuito equivalente de Thévenin.

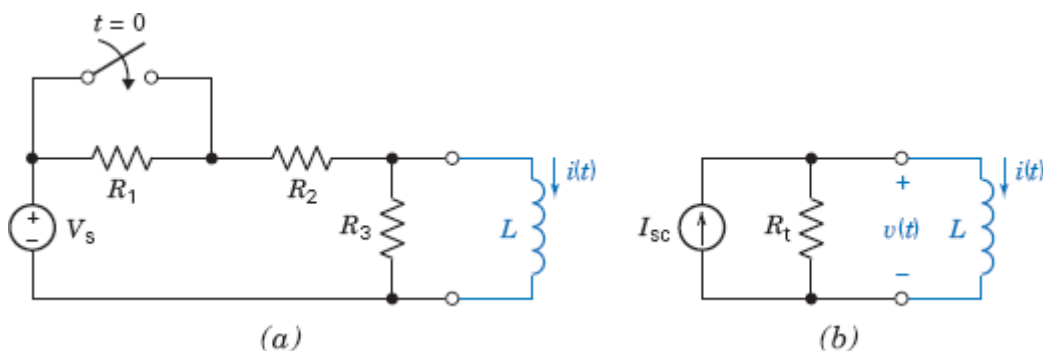



FIGURA 8.3-2 (*a*) Circuito de primeira ordem com um indutor. (*b*) O circuito ligado ao indutor, com a chave fechada, foi substituído pelo circuito equivalente de Norton.

A mesma corrente, $i(t)$ atravessa o resistor. Aplicando a LKT à malha da Figura 8.3-1*b*, obtemos:

$$V_{oc} = R_t i(t) + v(t) = R_t \left(C \frac{d}{dt} v(t) \right) + v(t)$$

o que nos dá

$$\frac{d}{dt} v(t) + \frac{v(t)}{R_t C} = \frac{V_{oc}}{R_t C} \qquad (8.3\text{-}1)$$

Como a derivada de ordem mais alta da Eq. 8.3-1 é uma derivada primeira, trata-se de uma equação diferencial de primeira ordem.

Vamos agora examinar o circuito da Figura 8.3-2*a*, um circuito de primeira ordem que contém um indutor. O circuito está no regime estacionário quando a chave é fechada em $t_0 = 0$, o que perturba o regime estacionário. Depois que a chave é fechada, o circuito pode ser representado pelo circuito equivalente da Figura 8.3-2*b*. Na Figura 8.3-2*b*, a parte do circuito que está ligada ao indutor foi substituída pelo circuito equivalente de Norton. Assim,

$$I_{sc} = \frac{V_s}{R_2} \quad \text{e} \quad R_t = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

Vamos representar o circuito da Figura 8.3-2*b* por uma equação diferencial. A tensão do indutor é dada por

$$v(t) = L\frac{d}{dt}i(t)$$

A tensão do resistor também é $v(t)$. Aplicando a LKC ao nó de cima na Figura 8.3-2*b*, obtemos:

$$I_{sc} = \frac{v(t)}{R_t} + i(t) = \frac{L\frac{d}{dt}i(t)}{R_t} + i(t)$$

o que nos dá

$$\frac{d}{dt}i(t) + \frac{R_t}{L}i(t) = \frac{R_t}{L}I_{sc} \qquad (8.3\text{-}2)$$

Como no caso anterior, trata-se de uma equação diferencial de primeira ordem.

As Eqs. 8.3-1 e 8.3-2 são da forma

$$\frac{d}{dt}x(t) + \frac{x(t)}{\tau} = K \qquad (8.3\text{-}3)$$

em que o parâmetro τ é chamado de constante de tempo. Vamos resolver essa equação diferencial separando as variáveis e integrando membro a membro. Em seguida, usaremos a solução da Eq. 8.3-3 para obter as soluções das Eqs. 8.3-1 e 8.3-2.

A Eq. 8.3-3 pode ser escrita na forma

$$\frac{dx}{dt} = \frac{K\tau - x}{\tau}$$

ou, separando as variáveis

$$\frac{dx}{x - K\tau} = \frac{dt}{\tau}$$

Integrando ambos os membros, obtemos:

$$\int \frac{dx}{x - K\tau} = -\frac{1}{\tau}\int dt + D$$

em que D é uma constante de integração. Realizando a integração, obtemos

$$\ln(x - K\tau) = -\frac{1}{\tau} + D$$

Explicitando x, temos

$$x(t) = K\tau + Ae^{-t/\tau}$$

em que $A = e^D$ é uma constante que depende da condição inicial, $x(0)$. Para determinar o valor de A, vamos fazer t = 0. Nesse caso,

$$x(0) = K\tau + Ae^{-0/\tau} = K\tau + A$$

ou

$$A = x(0) - K\tau$$

Assim,

$$x(t) = K\tau + [x(0) - K\tau]e^{-t/\tau} \qquad (8.3\text{-}4)$$

e como

$$x(\infty) = \lim_{t\to\infty} x(t) = K\tau$$

a Eq. 8.3-4 pode ser escrita na forma

$$x(t) = x(\infty) + [x(0) - x(\infty)]e^{-t/\tau}$$

Um método usado para medir ou calcular a constante de tempo consiste em derivar $x(t)$ em relação a t:

$$\frac{d}{dt}x(t) = -\frac{1}{\tau}[x(0) - x(\infty)]e^{-t/\tau}$$

$$\left.\frac{d}{dt}x(t)\right|_{t=0} = -\frac{1}{\tau}[x(0) - x(\infty)]$$

$$\tau = \frac{x(\infty) - x(0)}{\left.\frac{d}{dt}x(t)\right|_{t=0}} \qquad (8.3\text{-}5)$$

A partir do gráfico de $x(t)$ em função de t (Figura 8.3-3), é possível determinar a inclinação da curva de $x(t)$ no instante $t = 0$, o valor inicial de $x(t)$, o valor final de $x(t)$ e usar a Eq. 8.3-5 para calcular a constante de tempo. A constante de tempo também pode ser medida diretamente no gráfico, como mostra a Figura 8.3-3.

Vamos agora aplicar esses resultados ao circuito *RC* da Figura 8.3-1. Comparando as Eqs. 8.3-1 e 8.3-3, vemos que

$$x(t) = v(t), \ \ \tau = R_t C \text{ e } k = \frac{V_{oc}}{R_1 C}$$

Fazendo essas substituições na Eq. 8.3-4, obtemos

$$v(t) = V_{oc} + (v(0) - V_{oc})e^{-t/(R_t C)} \qquad (8.3\text{-}6)$$

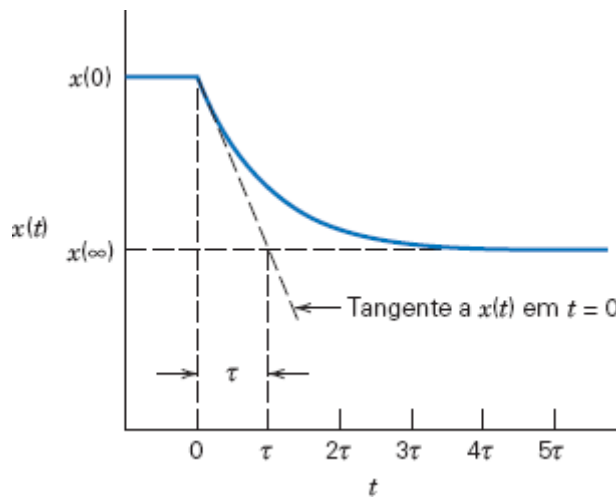



FIGURA 8.3-3 Método gráfico para determinar a constante de tempo de um circuito de primeira ordem.

O segundo termo do lado direito da Eq. 8.3-6 tende a zero quando t tende a infinito. Essa é a resposta transitória ou natural. Como $e^{-0} = 1$, fazendo $t = 0$ na Eq. 8.3-6 obtemos $v(0) = V_{oc} + v(0) - V_{oc} = v(0)$, como era de se esperar. Como $e^{-5} = 0{,}0067$, para $t = 5\tau$ a tensão no capacitor é

$$v(5\tau) = 0{,}9933\ V_{oc} + 0{,}0067\ v(0) \approx V_{oc}$$

Essa é a resposta estacionária ou forçada. A resposta forçada tem a mesma forma, uma constante, que a entrada do circuito. A soma das respostas natural e forçada é a resposta completa:

$$\text{resposta completa} = v(t),\ \text{resposta forçada} = V_{oc}$$

e

$$\text{resposta natural} = (v(0) - V_{oc})e^{-t/(RtC)}$$

Vamos agora comparar as Eqs. 8.3-2 e 8.3-3 para determinar a solução do circuito *RL* da Figura 8.3-2. Vemos que

$$x(t) = i(t), \quad \tau = \frac{L}{R_t} \ \text{ e } \ K = \frac{L}{R_1} I_{sc}$$

Fazendo essas substituições na Eq. 8.3-4, obtemos

$$i(t) = I_{sc} + (i(0) - I_{sc})e^{-(R_t/L)t} \qquad (8.3\text{-}7)$$

Mais uma vez, a resposta completa é a soma da resposta forçada (estacionária) e da resposta transitória (natural):

$$\text{resposta completa} = i(t),\ \text{resposta forçada} = I_{sc}$$

$$\text{resposta natural} = (i(0) - I_{sc})e^{-(Rt/L)t}$$

EXEMPLO 8.3-1 Circuito de Primeira Ordem com um Capacitor

Determine a tensão do capacitor depois que a chave do circuito da Figura 8.3-4*a* é aberta. Qual é o valor da tensão do capacitor 50 ms após a chave ser aberta?

Solução

A fonte de tensão de 2 V faz com que a tensão do capacitor seja 2 V até a chave ser aberta. Como a tensão do capacitor não pode variar bruscamente, a tensão do capacitor é 2 V imediatamente após a chave ser aberta. Assim, a condição inicial é

$$v(0) = 2\text{ V}$$

A Figura 8.3-4*b* mostra o circuito após a chave ser aberta. Comparando este circuito com o circuito *RC* da Figura 8.3-1*b*, vemos que

$$R_t = 10\text{ k}\Omega \quad \text{e} \quad V_{oc} = 8\text{ V}$$

A constante de tempo deste circuito de primeira ordem com um capacitor é

$$\tau = R_t C = (10 \times 10^3)\,(2 \times 10^{-6}) = 20 \times 10^{-3} = 20\text{ ms}$$

Substituindo esses valores na Eq. 8.3-6, obtemos

$$v(t) = 8 - 6e^{-t/20}\text{ V} \tag{8.3-8}$$

em que *t* está em milissegundos. Para determinar a tensão 50 ms após a chave ser aberta, basta fazer $t = 50$. O resultado é o seguinte:

$$v(50) = 8 - 6e^{-50/20} = 7{,}51\text{ V}$$

A Figura 8.3-4*c* mostra um gráfico da tensão do capacitor em função do tempo.

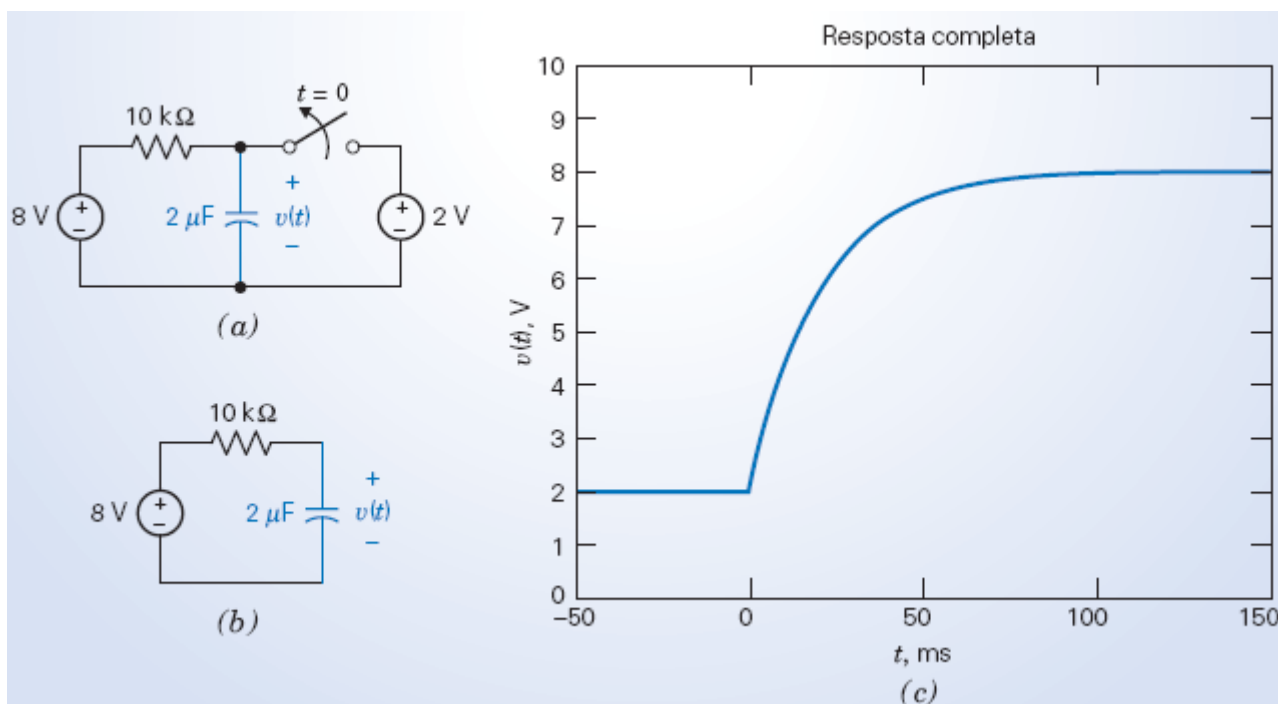



FIGURA 8.3-4 (*a*) Circuito de primeira ordem. (*b*) Circuito equivalente depois que a chave é aberta. (*c*) Gráfico da resposta completa, *v*(*t*), dada pela Eq. 8.3-8.

EXEMPLO 8.3-2 Circuito de Primeira Ordem com um Indutor

Determine a tensão do indutor depois que a chave do circuito da Figura 8.3-5*a* é fechada. Qual é o tempo necessário para que a corrente no indutor atinja o valor de 2 mA?

Solução

A corrente do indutor é zero até a chave ser fechada. Como a corrente do indutor não pode variar bruscamente, ela continua a ser zero imediatamente após a chave ser fechada. Assim, a condição inicial é

$$i(0) = 0$$

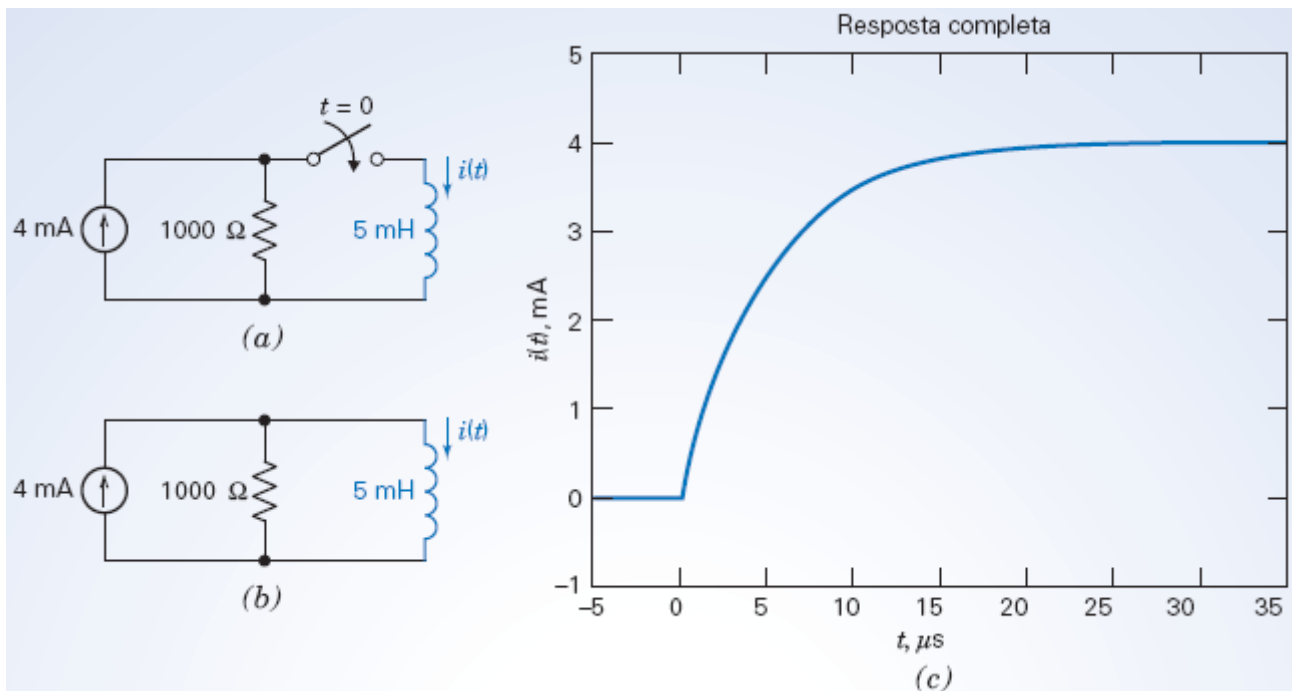



FIGURA 8.3-5 (*a*) Circuito de primeira ordem. (*b*) Circuito equivalente depois que a chave é fechada. (*c*) Gráfico da resposta completa, *i*(*t*), dada pela Eq. 8.3-9.

A Figura 8.3-5*b* mostra o circuito após a chave ser fechada. Comparando o circuito com o circuito *RL* da Figura 8.3-2*b*, vemos que

$$R_t = 1000\ \Omega \quad \text{e} \quad I_{sc} = 4\ \text{mA}$$

A constante de tempo deste circuito de primeira ordem com um indutor é

$$\tau = \frac{L}{R_t} = \frac{5 \times 10^{-3}}{1000} = 5 \times 10^{-6} = 5\ \mu s$$

Substituindo esses valores na Eq. 8.3-7, obtemos

$$i(t) = 4 - 4e^{-t/5}\ \text{mA} \qquad (8.3\text{-}9)$$

em que *t* está em microssegundos. Para determinar o instante em que a corrente no indutor é 2 mA, fazemos *i*(*t*) =2 mA. Nesse caso, temos

$$2 = 4 - 4e^{-t/5}\ \text{mA}$$

o que nos dá

$$t = -5 \times \ln\left(\frac{2-4}{-4}\right) = 3,47\ \mu s$$

A Figura 8.3-5*c* mostra um gráfico da corrente do indutor em função do tempo.

EXEMPLO 8.3-3 Circuito de Primeira Ordem

A chave da Figura 8.3-6*a* permaneceu aberta por um longo tempo e o circuito atingiu o regime estacionário antes que a chave fosse fechada no instante $t = 0$. Determine a tensão do capacitor para $t \geq 0$.

Solução

No enunciado é dito que a chave permaneceu aberta por um longo tempo e o circuito atingiu o regime estacionário antes que a chave fosse fechada no instante $t = 0$. Como a entrada do circuito é uma tensão constante, todas as correntes e tensões do circuito são constantes no regime estacionário. Em particular, a tensão do capacitor é constante. Isso significa que a corrente no capacitor é

$$i(t) = C\frac{d}{dt}v(t) = C\frac{d}{dt}(\text{a constante}) = 0$$

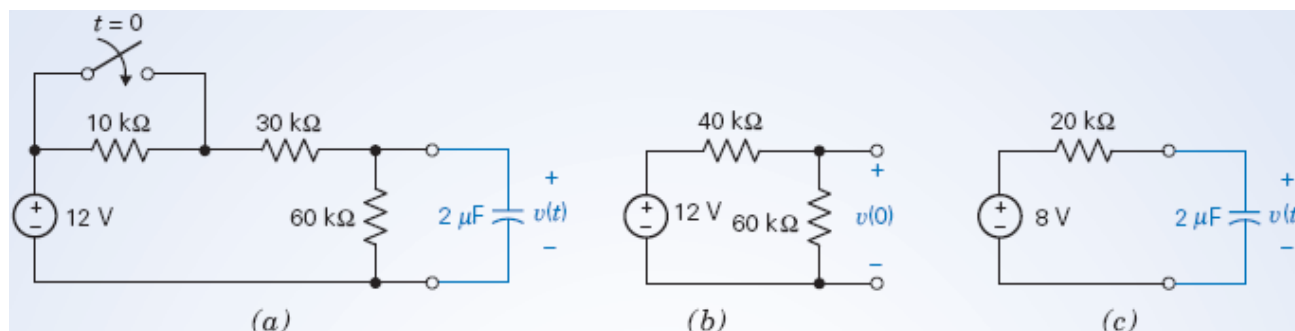



FIGURA 8.3-6 (*a*) Circuito de primeira ordem. (*b*) Circuito equivalente para $t < 0$. (*c*) Circuito equivalente para $t > 0$.

Assim, embora a tensão do capacitor no instante $t = 0^-$ seja desconhecida, sabemos que a corrente é zero. Em outras palavras, o capacitor se comporta como um circuito aberto quando a entrada é constante e o circuito está no regime estacionário. (Através de um raciocínio semelhante, chegamos à conclusão de que um indutor se comporta como um curto-circuito quando a entrada é constante e o circuito está no regime estacionário.)

A Figura 8.3-6*b* mostra o circuito equivalente com a chave aberta. Como uma chave aberta se comporta como um circuito aberto, os resistores de 10 kΩ e 30 kΩ estão em série e foram substituídos por um resistor de 40 kΩ. A entrada do circuito é uma tensão constante (12 V) e o circuito está no regime estacionário; assim, o capacitor se comporta como um circuito aberto. A tensão entre os terminais do circuito aberto é a tensão do capacitor. Como estamos interessados na condição inicial, a tensão do capacitor foi chamada de $v(0)$. Usando o método da divisão de tensão para analisar o circuito da Figura 8.3-6*b*, obtemos

$$v(0) = \frac{60 \times 10^3}{40 \times 10^3 + 60 \times 10^3} 12 = 7{,}2 \text{ V}$$

A Figura 8.3-6*c* mostra o circuito equivalente depois que a chave é fechada. O fechamento da chave coloca um curto-circuito em paralelo com o resistor de 10 kΩ, removendo-o do circuito. (Um curto-circuito em paralelo com um resistor é equivalente a um curto-circuito.) A parte do circuito que está ligada ao capacitor foi substituída pelo circuito equivalente de Thévenin. Depois que a chave é fechada,

$$v_{oc} = \frac{60 \times 10^3}{30 \times 10^3 + 60 \times 10^3} 12 = 8 \text{ V}$$

e

$$R_t = \frac{30 \times 10^3 \times 60 \times 10^3}{30 \times 10^3 + 60 \times 10^3} = 20 \times 10^3 = 20 \text{ k}\Omega$$

e a constante de tempo é

$$\tau = R_t \times C = (20 \times 10^3) \times (20 \times 10^{-6}) = 40 \times 10^{-3} = 40 \text{ ms}$$

Substituindo esses valores na Eq. 8.3-6, obtemos

$$v(t) = 8 - 0{,}8e^{-t/40}\ \text{V}$$

em que t está em milissegundos.

Exemplo 8.3-4 Circuito de Primeira Ordem

A chave da Figura 8.3-7*a* permaneceu aberta por um longo tempo e o circuito atingiu o regime estacionário antes que a chave fosse fechada em $t = 0$. Determine a corrente do indutor para $t \geq 0$.

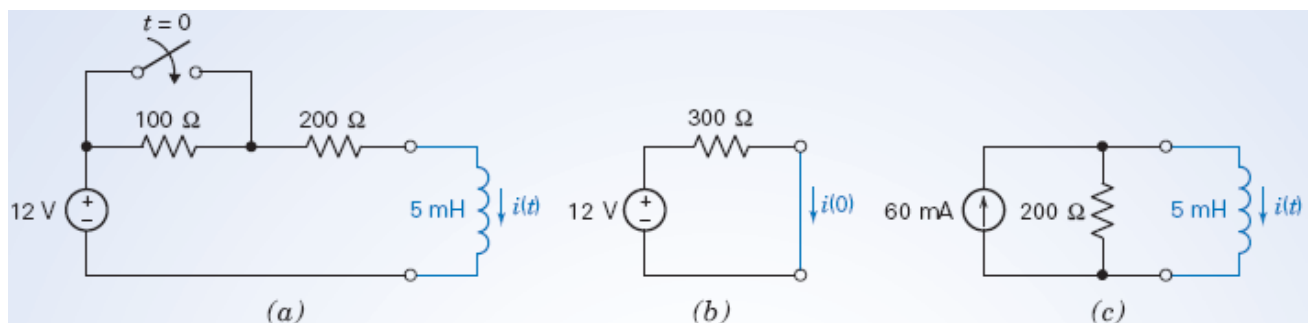



FIGURA 8.3-7 (*a*) Circuito de primeira ordem. (*b*) Circuito equivalente para $t < 0$. (*c*) Circuito equivalente para $t > 0$.

Solução

A Figura 8.3-7*b* mostra o circuito equivalente com a chave aberta. Os resistores de 100 Ω e 200 Ω estão em série e foram substituídos por um resistor equivalente de 300 Ω. Como a entrada do circuito é uma tensão constante (12 V) e o circuito está no regime estacionário, o indutor se comporta como um curto-circuito. A corrente no curto-circuito é a corrente no indutor. Como estamos interessados na condição inicial, a corrente do indutor foi chamada de $i(0)$. Essa corrente pode ser calculada com o auxílio da lei de Ohm:

$$i(0) = \frac{12}{300} = 40\ \text{mA}$$

A Figura 8.3-7*c* mostra o circuito equivalente depois que a chave é fechada. O fechamento da chave coloca um curto-circuito em paralelo com o resistor de 100 Ω, removendo-o do circuito. A parte do circuito que está ligada ao indutor foi substituída pelo circuito equivalente de Norton. Depois que a chave é fechada,

$$I_{sc} = \frac{12}{200} = 60\ \text{mA} \quad \text{e} \quad R_t = 200\ \Omega$$

e a constante de tempo é

$$\tau = \frac{L}{R_t} = \frac{5 \times 10^{-3}}{200} = 25 \times 10^{-6} = 25\ \mu\text{s}$$

Substituindo esses valores na Eq. 8.3-7, obtemos

$$i(t) = 60 - 20e^{-t/25}\ \text{mA}$$

em que t está em microssegundos.

Exemplo 8.3-5 Circuito de Primeira Ordem

O circuito da Figura 8.3-8*a* está no regime estacionário antes que a chave seja aberta. Determine a corrente $i(t)$ para $t > 0$.

Solução

A resposta ou saída de um circuito pode ser a corrente ou a tensão em qualquer componente. Muitas vezes, a resposta não é a tensão em um capacitor ou a corrente em um indutor. No circuito da Figura 8.3-8*a*, a resposta é a corrente $i(t)$ em um resistor. Nesse caso, dois passos são necessários para resolver o problema. Em primeiro lugar, determinamos a tensão no capacitor usando os métodos já descritos neste capítulo. Uma vez conhecida a tensão no capacitor, usamos equações de nó ou de malha para expressar a resposta em termos na entrada e da tensão do capacitor.

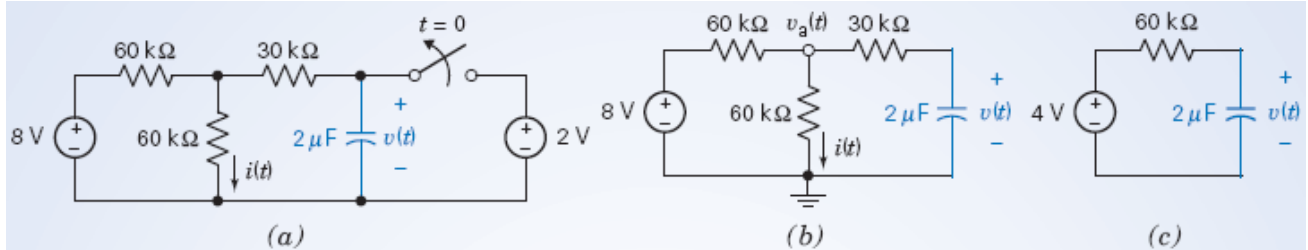



FIGURA 8.3-8 (*a*) Circuito de primeira ordem. (*b*) Circuito depois que a chave é aberta. (*c*) Circuito equivalente depois que a chave é aberta.

Começamos por determinar a tensão do capacitor. Antes da abertura da chave, a tensão do capacitor é igual à tensão da fonte. A condição inicial é, portanto,

$$v(0) = 2 \text{ V}$$

A Figura 8.3-8*b* mostra o circuito após a abertura da chave. Na Figura 8.3-8*c*, a parte do circuito ligada ao capacitor foi substituída pelo circuito equivalente de Thévenin. Os parâmetros do circuito equivalente de Thévenin são

$$v_{oc} = \frac{60 \times 10^3}{60 \times 10^3 + 60 \times 10^3} 8 = 4 \text{ V}$$

e

$$R_t = 30 \times 10^3 + \frac{60 \times 10^3 \times 60 \times 10^3}{60 \times 10^3 + 60 \times 10^3} = 60 \times 10^3 = 60 \text{ k}\Omega$$

A constante de tempo é

$$\tau = R_t \times C = (60 \times 10^3) \times (2 \times 10^{-6}) = 120 \times 10^{-3} = 120 \text{ ms}$$

Substituindo esses valores na Eq. 8.3-6, obtemos

$$v(t) = 4 - 2e^{-t/120} \text{ V}$$

em que t está em microssegundos.

Agora que a tensão no capacitor é conhecida, voltamos ao circuito da Figura 8.3-8*b*. Observe que a tensão do nó central foi chamada de $v_a(t)$. A equação de nó correspondente a esse nó é

$$\frac{v_a(t) - 8}{60 \times 10^3} + \frac{v_a(t)}{60 \times 10^3} + \frac{v_a(t) - v(t)}{30 \times 10^3} = 0$$

Substituindo a expressão da tensão do capacitor, temos

$$\frac{v_a(t) - 8}{60 \times 10^3} + \frac{v_a(t)}{60 \times 10^3} + \frac{v_a(t) - (4 - 2e^{-t/120})}{30 \times 10^3} = 0$$

ou

$$v_a(t) - 8 + v_a(t) + 2\left[v_a(t) - \left(4 - 2e^{-t/120}\right)\right] = 0$$

Explicitando $v_a(t)$, obtemos

$$v_a(t) = \frac{8 + 2\left(4 - 2e^{-t/120}\right)}{4} = 4 - e^{-t/120} \text{ V}$$

Finalmente, calculamos $i(t)$ usando a lei de Ohm

$$i(t) = \frac{v_a(t)}{60 \times 10^3} = \frac{4 - e^{-t/120}}{60 \times 10^3} = 66,7 - 16,7e^{-t/120} \mu\text{A}$$

em que t está em microssegundos.

EXEMPLO 8.3-6 Circuito de Primeira Ordem com $t_0 \neq 0$

Determine a tensão do capacitor depois que a chave do circuito da Figura 8.3-9*a* é aberta. Qual é o valor da tensão do capacitor 50 ms após a abertura da chave?

Solução

Este exemplo é semelhante ao Exemplo 8.3-1; a diferença está no instante em que a chave é aberta. No Exemplo 8.3-1, a chave é aberta em $t = 0$; neste exemplo, a chave é aberta em $t = 50$ ms $= 0,05$ s.

A fonte de tensão mantém o capacitor com uma tensão de 2 V até a chave ser aberta. Assim,

$$v(t = 2 \text{ V} \quad \text{para} \quad t \leq 0,05 \text{ s}$$

Em particular, a condição inicial é

$$v(0,05) = 2 \text{ V}$$

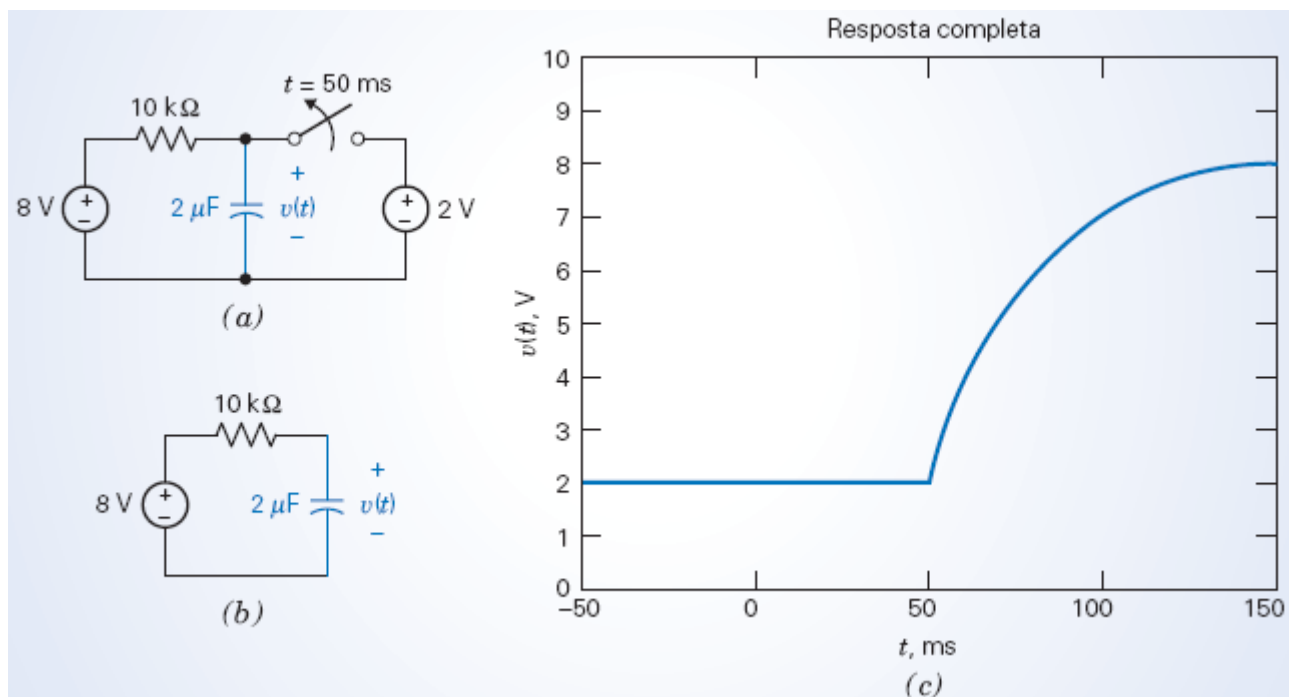



FIGURA 8.3-9 (*a*) Circuito de primeira ordem. (*b*) Circuito equivalente depois que a chave é aberta. (*c*) Gráfico da resposta completa, $v(t)$, dada pela Eq. 8.3-10.

A Figura 8.3-9*b* mostra o circuito depois que a chave é aberta. Comparando este circuito com o circuito *RC* da Figura 8.3-1*b*, vemos que

$$R_t = 10\ \text{k}\Omega \quad \text{e} \quad V_{oc} = 8\ \text{V}$$

A constante de tempo deste circuito de primeira ordem com um capacitor é

$$\tau = R_t C = 0{,}020\ \text{s}$$

O gráfico da tensão do capacitor em função do tempo neste exemplo tem a mesma forma que o gráfico da tensão do capacitor em função do tempo no Exemplo 8.3-1, mas a tensão neste exemplo apresenta um retardo de 50 ms porque a chave foi aberta 50 ms mais tarde. Para levar em conta o retardo, substituímos t por $t - 50$ ms na equação da tensão do capacitor. Assim, a tensão do capacitor neste exemplo é dada por

$$v(t) = 8 - 6e^{-(t-50)/20}\ \text{V} \tag{8.3-10}$$

em que t está em ms. (Compare as Eqs. 8.3-8 e 8.3-10.) Para determinar a tensão 50 ms após a chave ser aberta, fazemos $t = 100$ ms. Nesse caso,

$$v(100) = 8 - 6e^{-(100-50)/20} = 7{,}51\ \text{V}$$

O valor da tensão do capacitor 50 ms após a chave ser aberta é o mesmo do Exemplo 8.3-1. A Figura 8.3-9*c* mostra um gráfico da tensão do capacitor em função do tempo. Como era de se esperar, o gráfico é uma cópia do gráfico da Figura 8.3-4*c* deslocada 50 ms para a direita ao longo do eixo dos tempos.

Exemplo 8.3-7 Circuito de Primeira Ordem com $t_0 \neq 0$

Determine a corrente no indutor depois que a chave do circuito da Figura 8.3-10*a* é fechada. Quanto tempo após o fechamento da chave a corrente no indutor atinge o valor de 2 mA?

Solução

Este exemplo é semelhante ao Exemplo 8.3-2; a diferença está no instante em que a chave é fechada. No Exemplo 8.3-2, a chave é fechada em $t = 0$; neste exemplo, a chave é fechada em $t = 10\ \mu$s.

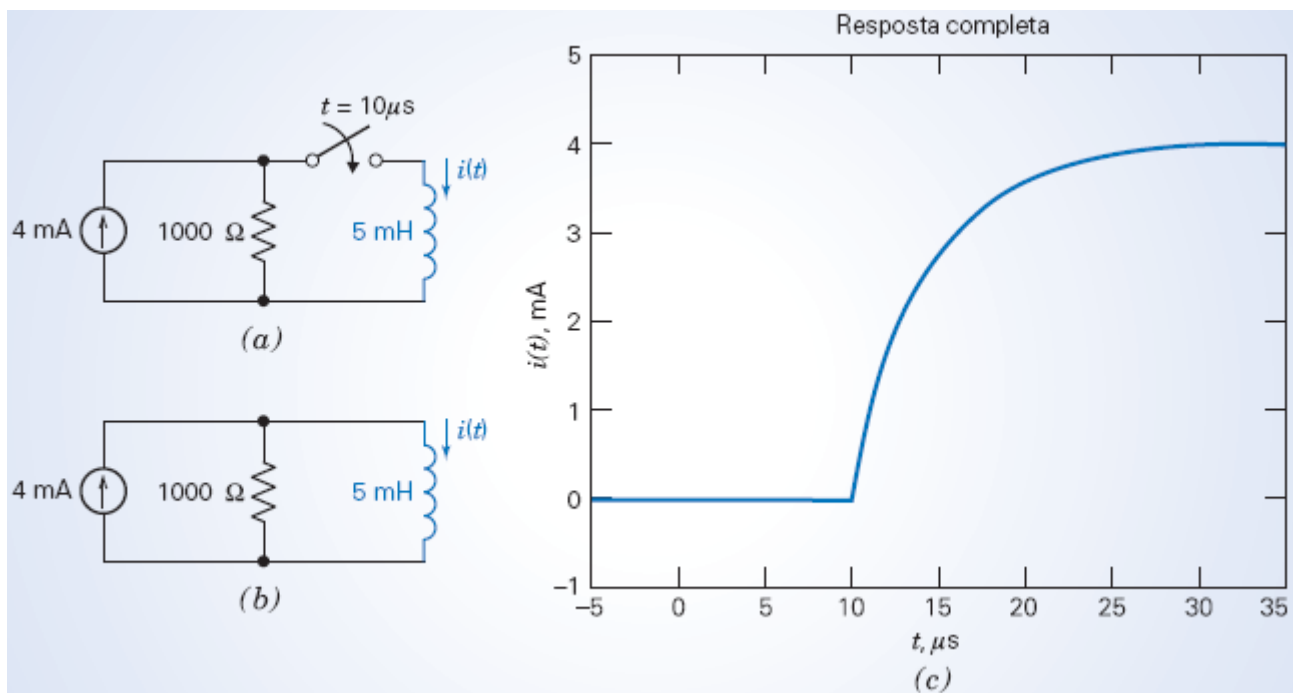



FIGURA 8.3-10 (*a*) Circuito de primeira ordem. (*b*) Circuito equivalente depois que a chave é fechada. (*c*) Gráfico da resposta completa, *i*(*t*), dada pela Eq. 8.3-11.

A corrente do indutor é zero até a chave ser fechada. Como a corrente em um indutor não pode variar bruscamente, continua a ser zero logo após a chave ser fechada. Assim, a condição inicial é

$$i(10\ \mu s) = 0\ A$$

A Figura 8.3-10*b* mostra o circuito depois que a chave é aberta. Comparando este circuito com o circuito *RL* da Figura 8.3-2*b*, vemos que

$$R_t = 1000\ k\Omega \quad \text{e} \quad I_{sc} = 4\ mA$$

A constante de tempo deste circuito de primeira ordem com um indutor é

$$\tau = \frac{L}{R_t} = \frac{5 \times 10^{-3}}{1000} = 5 \times 10^{-6} = 5\ \mu s$$

O gráfico da corrente do indutor em função do tempo neste exemplo tem a mesma forma que o gráfico da corrente do indutor em função do tempo no Exemplo 8.3-2, mas a corrente neste exemplo apresenta um retardo de 10 μs porque a chave foi aberta 10 μs mais tarde. Para levar em conta o retardo, substituímos *t* por $t - 10\ \mu s$ na equação da corrente no indutor. Assim, a corrente do indutor neste exemplo é dada por

$$i(t) = 4 - 4e^{-(t-10)/5}\ \text{mA} \tag{8.3-11}$$

em que *t* está em μs. (Compare as Eqs. 8.3-9 e 8.3-11.) Para determinar quanto tempo após o fechamento da chave a corrente atinge o valor de 2 mA, fazemos $i = 2$ mA. Nesse caso,

$$2 = 4 - 4e^{-(t-10)/5}\ \text{mA}$$

o que nos dá

$$t = -5 \times \ln\left(\frac{2-4}{-4}\right) + 10 = 13{,}47\ \mu s$$

Como a chave é fechada em $t = 10\ \mu s$, é necessário um tempo adicional de 3,47 μs para que a corrente atinja o valor de 2 mA. A Figura 8.3-10*c* mostra um gráfico da corrente do indutor em função do tempo. Como era de se esperar, o gráfico é uma cópia do gráfico da Figura 8.3-5*c* deslocada 10 μs para a direita

ao longo do eixo dos tempos.

EXEMPLO 8.3-8 Resposta Exponencial de um Circuito de Primeira Ordem

A Figura 8.3-11*a* mostra um gráfico da tensão do indutor da Figura 8.3-11*b* em função do tempo.

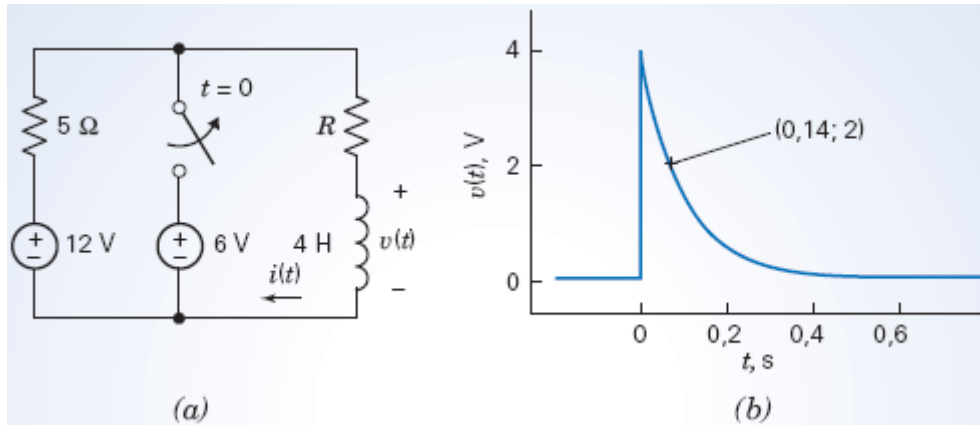



FIGURA 8.3-11 (*a*) Circuito de primeira ordem e (*b*) gráfico da tensão do indutor.

(a) Determine a equação que representa a tensão do indutor em função do tempo.

(b) Determine o valor da resistência *R*.

(c) Determine a equação que representa a corrente do indutor em função do tempo.

Solução

(a) A tensão do indutor é representada por uma equação da forma

$$v(t) = \begin{cases} D & \text{para } t < 0 \\ E + F\,e^{-at} & \text{para } t \geq 0 \end{cases}$$

em que *D*, *E*, *F* e *a* são constantes a serem determinadas. As constantes *D*, *E* e *F* podem ser descritas da seguinte forma:

$$D = v(t) \quad \text{para} \quad t < 0, \quad E = \lim_{t \to \infty} v(t) \quad \text{e} \quad E + F = \lim_{t \to 0+} v(t)$$

Observando o gráfico, vemos que

$$D = 0, E = 0 \quad \text{e} \quad E + F = 4 \text{ V}$$

O que nos dá

$$v(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ 4e^{-at} & \text{para } t \geq 0 \end{cases}$$

Para determinar o valor de *a*, escolhemos um instante em que o circuito não está no regime estacionário. Um desses instantes está assinalado no gráfico da Figura 8.3-11. Vemos que $v(0{,}14) = 2$ V, ou seja, o valor da tensão é 2 V no instante $t = 0{,}14$ s. Substituindo estes valores na equação de $v(t)$, obtemos

$$2 = 4e^{-a(0{,}14)} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\ln(0{,}5)}{-0{,}14} = 5$$

o que nos dá

$$v(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ 4e^{-5t} & \text{para } t \geq 0 \end{cases}$$

(b) A Figura 8.3-12*a* mostra o circuito imediatamente após a abertura da chave. Na Figura 8.3-12*b*, a parte do circuito ligada ao indutor foi substituída pelo circuito equivalente de Thévenin.

A constante de tempo do circuito é dada por

$$\tau = \frac{L}{R_t} = \frac{4}{R+5}$$

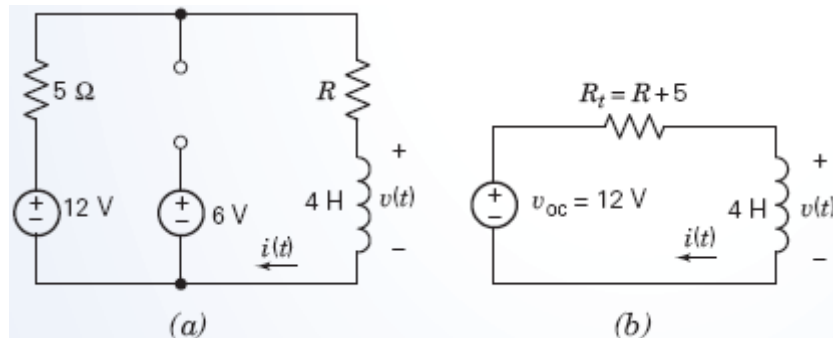



FIGURA 8.3-12 (*a*) Circuito de primeira ordem depois que a chave é aberta. (*b*) Circuito equivalente.

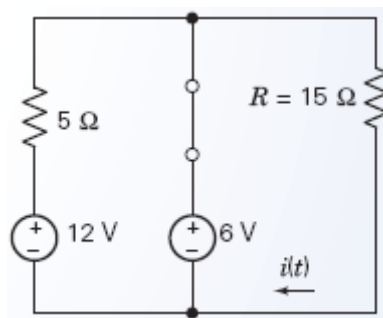



FIGURA 8.3-13 Circuito de primeira ordem antes da abertura da chave.

A constante de tempo está relacionada com o expoente de $v(t)$ através da equação $-5t = -t/\tau$. Assim,

$$5 = \frac{1}{\tau} = \frac{R+5}{4} \quad \Rightarrow \quad R = 15\ \Omega$$

(c) A corrente do indutor está relacionada com a tensão do indutor através da equação

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_0^t v(\tau)\,d\tau + i(0)$$

A Figura 8.3-13 mostra o circuito antes que a chave seja aberta. A chave fechada é representada por um curto-circuito. Como o circuito está no regime estacionário e as tensões das fontes de tensão são constantes, o indutor se comporta como um curto-circuito. A corrente do indutor é dada por

$$i(t) = \frac{6}{15} = 0,4\ \text{A}$$

Em particular, $i(0^-) = 0,4$ A. Como a corrente em um indutor não pode variar bruscamente, $i(0^+) = i(0^-)$. Assim,

$$i(0) = 0{,}4\ \text{A}$$

Voltando à equação da corrente no indutor, depois que a chave é aberta, temos

$$i(t) = \frac{1}{4}\int_0^t 4e^{-5t}\,d\tau + 0{,}4 = \frac{1}{-5}(e^{-5t} - 1) + 0{,}4 = 0{,}6 - 0{,}2e^{-5t}$$

$$i(t) = \begin{cases} 0{,}4 & \text{para } t < 0 \\ 0{,}6 - 0{,}2e^{-5t} & \text{para } t \geq 0 \end{cases}$$

EXERCÍCIO 8.3-1 O circuito da Figura E 8.3-1 está no regime estacionário quando a chave é fechada no instante $t = 0$. Determine a tensão do capacitor, $v(t)$, para $t \geq 0$.

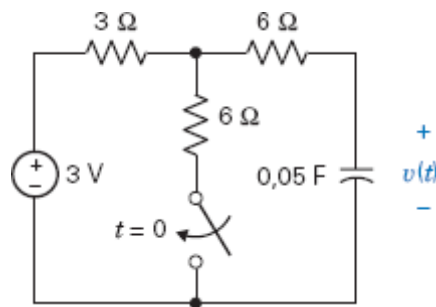



FIGURA E 8.3-1

Resposta: $v(t) = 2 + e^{-2,5t}$ V

EXERCÍCIO 8.3-2 O circuito da Figura E 8.3-2 está no regime estacionário quando a chave é fechada no instante $t = 0$. Determine a corrente do indutor, $i(t)$, para $t \geq 0$.

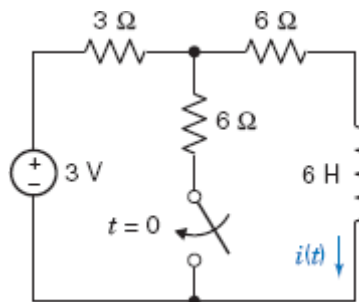



FIGURA E 8.3-2

Resposta: $i(t) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{12}e^{-1,33t}$ A

8.4 Comutação Sequencial

Muitos circuitos contêm chaves que não são acionadas ao mesmo tempo. Por exemplo: um circuito pode ter duas chaves, uma das quais é aberta no instante $t = 0$, enquanto a outra é fechada no instante $t = 1$ ms.

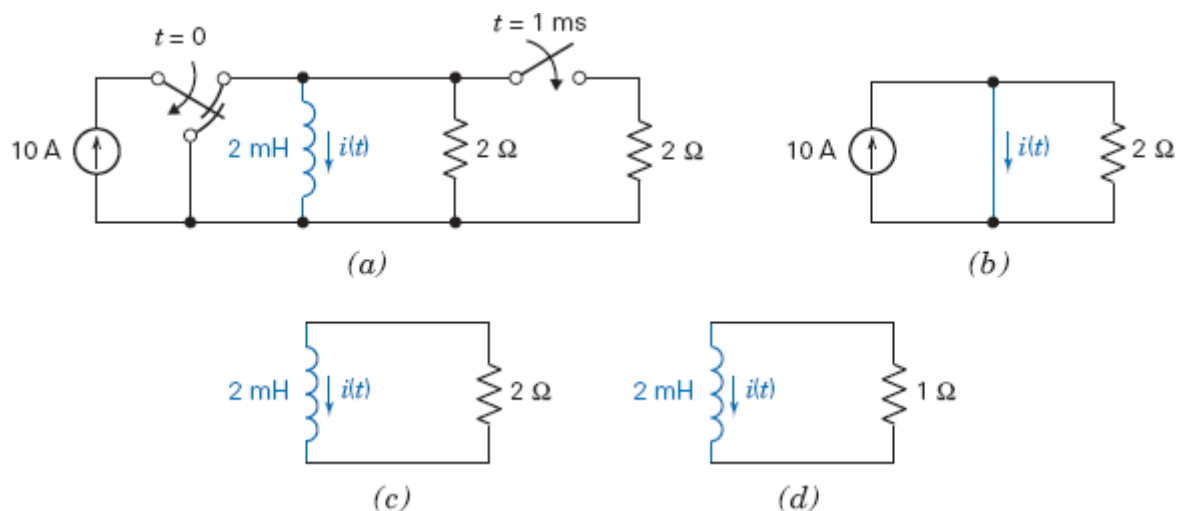



FIGURA 8.4-1 (*a*) Circuito com comutação sequencial. (*b*) Circuito equivalente antes de $t = 0$. (*c*) Circuito equivalente para $0 < t < 1$ ms. (*d*) Circuito equivalente para $t > 1$ ms.

A **comutação sequencial** acontece quando um circuito contém duas ou mais chaves que mudam de estado em diferentes instantes.

Os circuitos com comutação sequencial podem ser resolvidos usando os métodos descritos nas seções anteriores, levando em conta que as correntes dos indutores e as tensões dos capacitores não podem variar bruscamente.

Como exemplo de comutação sequencial, considere o circuito da Figura 8.4-1*a*. O circuito contém duas chaves, uma que muda de estado no instante $t = 0$ e outra que fecha no instante $t = 1$ ms. Suponha que o circuito esteja no regime estacionário quando a primeira chave muda de estado em $t = 0$. A Figura 8.4-1*b* mostra o circuito equivalente para $t < 0$. Como o circuito está no regime estacionário e a entrada é constante, o indutor se comporta como um curto-circuito e a corrente desse curto-circuito é a corrente do indutor. O curto-circuito faz com que a tensão do resistor seja zero e, portanto, a corrente do resistor também é zero. Em consequência, toda a corrente da fonte passa pelo curto-circuito e

$$i(t) = 10 \text{ A} \quad t < 0$$

Assim, a corrente do indutor é 10 A imediatamente antes que a chave mude de estado em $t = 0$, ou seja,

$$i(0^-) = 10 \text{ A}$$

Como a corrente de um indutor não pode variar bruscamente, a corrente do indutor também é 10 A imediatamente após a chave mudar de estado, ou seja,

$$i(0^+) = 10 \text{ A}$$

Essa é a condição inicial que deve ser usada para calcular a corrente no indutor após o instante $t = 0$. A Figura 8.4-1*c* mostra o circuito equivalente depois que a primeira chave mudou de estado e a outra chave ainda não foi fechada. Os parâmetros do circuito equivalente de Norton da parte do circuito ligada ao indutor são

$$I_{sc} = 0 \text{ A} \quad \text{e} \quad R_t = 2\ \Omega$$

A constante de tempo desse circuito de primeira ordem é

$$\tau = \frac{L}{R_t} = \frac{2 \times 10^{-3}}{2} = 1 \times 10^{-3} = 1 \text{ ms}$$

A corrente do indutor é

$$i(t) = i(0)e^{-t/\tau} = 10e^{-t} \text{ A}$$

para $0 < t < 1$ ms. Observe que t está em milissegundos. Imediatamente antes de a segunda chave ser fechada, a corrente do indutor é

$$i(1^-) = 10e^{-1} = 3{,}68 \text{ A}$$

Como a corrente em um indutor não pode variar bruscamente, a corrente do indutor também é 3,68 A imediatamente após a chave ser fechada, ou seja,

$$i(1^+) = 3{,}68 \text{ A}$$

Essa é a condição inicial que deve ser usada para calcular a corrente no indutor depois que a segunda chave foi fechada em $t = 1$ ms. A Figura 8.4-1*d* mostra o circuito equivalente. Os parâmetros do circuito equivalente de Norton da parte do circuito ligada ao indutor são

$$i_{sc} = 0 \text{ A} \quad \text{e} \quad R_t = 1\ \Omega$$

A constante de tempo deste circuito de primeira ordem é

$$\tau = \frac{L}{R_t} = \frac{2 \times 10^{-3}}{1} = 2 \times 10^{-3} = 2 \text{ ms}$$

A corrente do indutor é

$$i(t) = i(t_0)e^{-(t-t_0)/\tau} = 3{,}68e^{-(t-1)/2} \text{ A}$$

para $t > 1$ ms. Mais uma vez, t está em milissegundos. A constante t_0 é usada para representar o instante em que a segunda chave muda de estado; neste exemplo, $t_0 = 1$ ms.

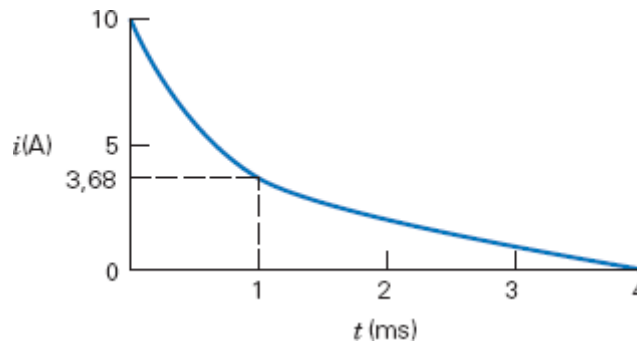



FIGURA 8.4-2 Gráfico da corrente do indutor em função do tempo para $t \geq 0$. A exponencial tem duas constantes de tempo diferentes, uma para $0 \leq t \leq 10$ ms e outra para $t \geq 1$ ms.

A Figura 8.4-2 mostra um gráfico da corrente do indutor em função do tempo. A constante de tempo do circuito muda quando a segunda chave é fechada. Em consequência, a inclinação do gráfico também muda. Imediatamente antes do fechamento da chave, a inclinação é −3,68 A/ms. Imediatamente após o fechamento, a inclinação é −1,84 A/ms.

8.5 *Estabilidade de Circuitos de Primeira Ordem*

Vimos que a resposta natural de um circuito de primeira ordem é

$$x_n(t) = Ke^{-t/\tau}$$

e que a resposta completa é a soma da resposta natural e da resposta forçada:

$$x(t) = x_n(t) + x_f(t)$$

Se $\tau > 0$, a resposta natural tende a zero para $t \to \infty$, deixando apenas a resposta forçada. Nesse caso, dizemos que o circuito é *estável*. Se $\tau < 0$, a resposta natural aumenta sem limite para $t \to \infty$ e a resposta forçada se torna desprezível em comparação com a resposta natural. Nesse caso, dizemos que o circuito é *instável*. Quando um circuito é estável, a resposta predominante após um longo período de tempo é a resposta forçada, que depende da entrada do circuito. Isso significa que a resposta completa contém informações a respeito da entrada. Quando o circuito é instável, a resposta forçada se torna desprezível para longos períodos de tempo e as informações a respeito da entrada são perdidas. Na prática, a resposta natural de um circuito instável não aumenta sem limite; a resposta aumenta até que o circuito sofra algum tipo de mudança. Essa mudança pode ser a saturação de um amplificador operacional ou de uma fonte dependente, mas pode ser também a destruição de um componente. Na maioria dos casos, a instabilidade dos circuitos é indesejável e deve ser evitada.

Como podemos projetar circuitos de primeira ordem para que sejam estáveis? Lembrando que $\tau = R_t C$ ou $\tau = L/R_t$, vemos que

Para que um circuito seja estável, é preciso que $R_t > 0$.

Como essa condição é sempre satisfeita se a parte do circuito ligada ao capacitor ou indutor contém apenas resistores e fontes independentes, circuitos desse tipo são sempre estáveis. Por outro lado, circuitos de primeira ordem que contêm amplificadores operacionais e/ou fontes dependentes podem ser instáveis.

EXEMPLO 8.5-1 Resposta de um Circuito Instável de Primeira Ordem

O circuito de primeira ordem da Figura 8.5-1*a* está no regime estacionário antes que a chave seja fechada no instante $t = 0$. O circuito contém uma fonte dependente e, portanto, pode ser instável. Determine a tensão do capacitor, $v(t)$, para $t > 0$.

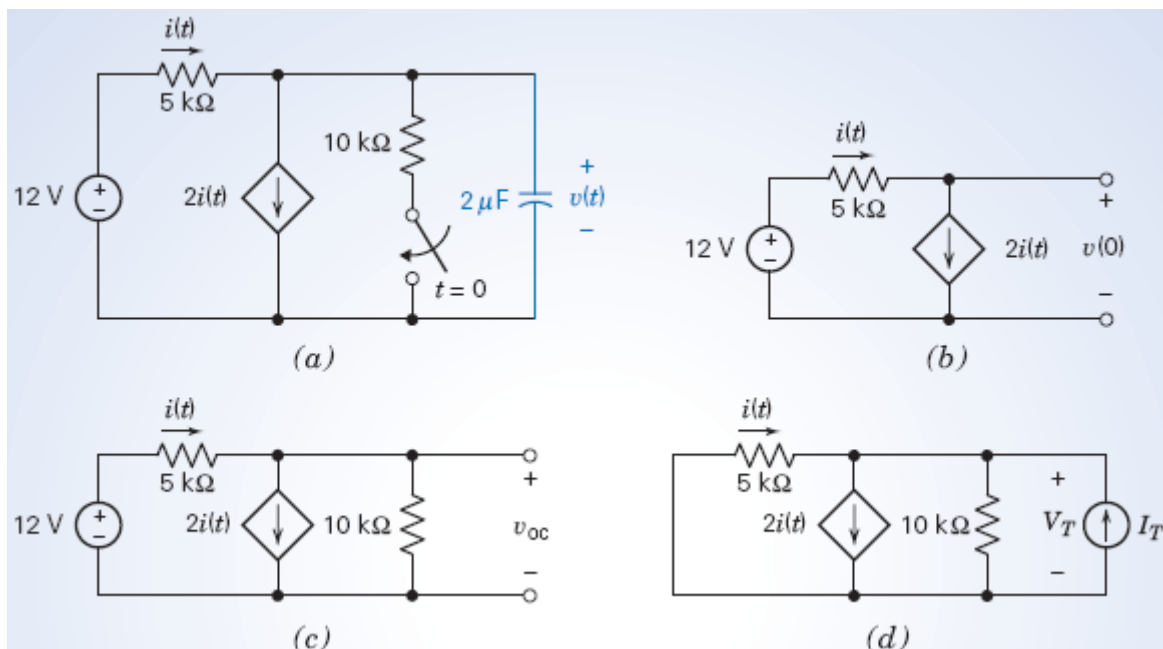



FIGURA 8.5-1 (*a*) Circuito de primeira ordem com uma fonte dependente. (*b*) Circuito usado para determinar a condição inicial. (*c*) Circuito usado para determinar V_{oc}. (*d*) Circuito usado para determinar R_t.

Solução

Como a entrada do circuito é constante, o capacitor se comporta como um circuito aberto no regime estacionário. Assim, calculamos a condição inicial usando o circuito da Figura 8.5-1*b*. Aplicando a LKC ao nó superior da fonte de corrente dependente, obtemos

$$-i + 2i = 0$$

Assim, $i = 0$. Em consequência, a queda de tensão no resistor é zero e

$$v(0) = 12\ \text{V}$$

Em seguida, precisamos determinar o circuito equivalente de Thévenin para a parte do circuito ligada ao capacitor. Para isso, são necessários dois cálculos distintos. Primeiro, calculamos a tensão de circuito aberto usando o circuito da Figura 8.5-1*c*. Aplicando a LKT à malha formada pelos dois resistores e a fonte de tensão, obtemos a seguinte equação:

$$12 = (5 \times 10^3) \times i + (10 \times 10^3) \times (i - 2i)$$

Explicitando a corrente, temos:

$$i = -2{,}4\ \text{mA}$$

Aplicando a lei de Ohm ao resistor de 10 kΩ, obtemos

$$v_{oc} = (10 \times 10^3) \times (i - 2i) = 24\ \text{V}$$

Em seguida, calculamos a resistência de Thévenin usando o circuito da Figura 8.5-1*d*. Aplicando a LKT à malha formada pelos dois resistores, obtemos

$$0 = (5 \times 10^3) \times i + (10 \times 10^3) \times (I_T + i - 2i)$$

Explicitando a corrente, temos

$$i = 2I_T$$

Aplicando a lei de Ohm ao resistor de 10 kΩ, obtemos

$$V_T = 10 \times 10^3 \times (I_T + i - 2i) = -10 \times 10^3 \times I_T$$

A resistência de Thévenin é dada por

$$R_t = \frac{V_T}{I_T} = -10\ \text{k}\Omega$$

A constante de tempo é

$$\tau = R_t C = -20\ \text{ms}$$

Como a constante de tempo é negativa, o circuito é instável. A resposta completa é

$$v_t = 24 - 12e^{t/20}$$

Este resultado mostra que, em vez de tender para $v_f = 24$ V, como aconteceria se a constante de tempo fosse positiva, a tensão do capacitor *diminui sem limite*, ou seja,

$$v(\infty) = \lim_{t \to \infty} v(t) = -\infty$$

Se o circuito é instável, não é correto chamar a resposta forçada de resposta estacionária, já que, nesse caso, não existe um regime estacionário para $t > 0$.

EXEMPLO 8.5-2 Projeto de um Circuito de Primeira Ordem para que Seja Estável

O circuito do Exemplo 8.5-1 foi desenhado novamente na Figura 8.5-2*a*, com o ganho da fonte dependente representado pela variável *B*. Que restrições devem ser impostas ao ganho da fonte dependente para assegurar que o circuito seja estável? Projete o circuito para que a constante de tempo seja +20 ms.

Solução

A Figura 8.5-2*b* mostra o circuito usado para calcular R_t. Aplicando a LKT à malha formada pelos dois resistores, temos:

$$5 \times 10^3 \times i + V_T = 0$$

Explicitando a corrente, obtemos

$$i = -\frac{V_T}{5 \times 10^3}$$

Aplicando a LKC ao nó superior da fonte de corrente, obtemos

$$-i + Bi + \frac{V_T}{10 \times 10^3} - I_T = 0$$

Combinando as duas equações, obtemos

$$\left(\frac{1-B}{5 \times 10^3} + \frac{1}{10 \times 10^3}\right) V_T - I_T = 0$$

A resistência de Thévenin é dada por

$$R_t = \frac{V_T}{I_T} = \frac{10 \times 10^3}{2B - 3}$$

Assim, a condição para que R_t seja positiva e o circuito seja estável é $B < 3/2$.

Para que a constante de tempo seja +20 ms, devemos ter

$$R_t = \frac{\tau}{C} = \frac{20 \times 10^{-3}}{2 \times 10^{-6}} = 10 \times 10^3 = 10\ \text{k}\Omega$$

e, portanto,

$$10 \times 10^3 = -\frac{10 \times 10^3}{2B - 3}$$

e $B = 1$. Isso significa que podemos evitar a instabilidade do Exemplo 8.5-1 reduzindo o ganho da fonte dependente de 2 A/A para 1 A/A.

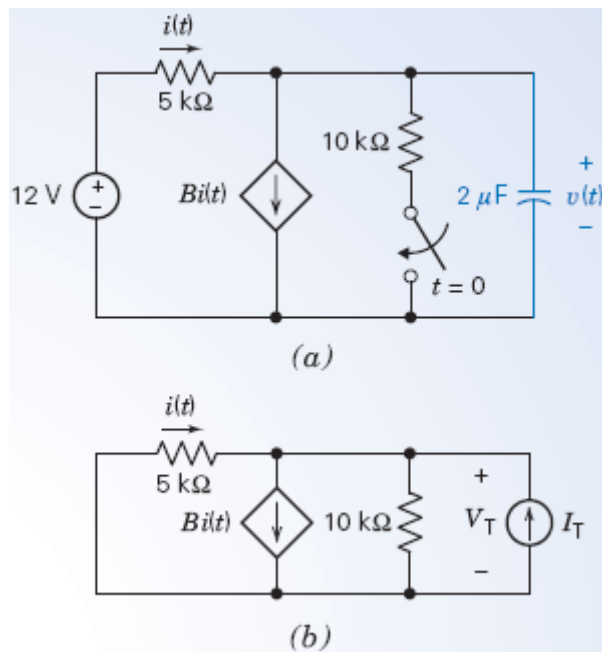



FIGURA 8.5-2 (*a*) Circuito de primeira ordem com uma fonte dependente. (*b*) Circuito usado para determinar a resistência de Thévenin da parte do circuito ligada ao capacitor.

8.6 *Fontes do Tipo Degrau*

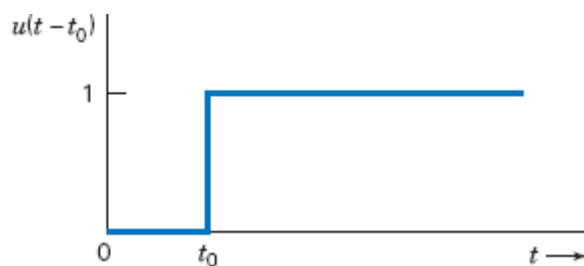



FIGURA 8.6-1 Função degrau unitário, $u(t - t_0)$.

A função degrau unitário é uma forma conveniente de representar tensões ou correntes cujo valor muda bruscamente.

Definimos a *função degrau unitário* como uma função do tempo que é zero para $t < t_0$ e tem valor unitário para $t > t_0$. No instante $t = t_0$, o valor muda bruscamente de zero para um. A função degrau unitário é representada pelo símbolo $u(t - t_0)$, ou seja,

$$u(t-t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1 & t > t_0 \end{cases} \tag{8.6-1}$$

O valor de $u(t - t_0)$ não é definido no instante $t = t_0$ em que o valor varia bruscamente de zero para um. A função degrau unitário está representada graficamente na Figura 8.6-1. Na maioria dos casos, $t_0 = 0$.

A função degrau unitário é adimensional. Para representar uma tensão cujo valor muda bruscamente para outro valor no instante $t = t_0$, usamos a notação

$$v(t) = A + B\,u(t - t_0)$$

que indica que

$$v(t) = \begin{cases} A & t < t_0 \\ A + B & t > t_0 \end{cases}$$

em que A e B são expressas em volts. A Figura 8.6-2 mostra uma fonte desse tipo.

Vale a pena notar que $u(-t)$ significa que a função degrau vale 1 para $t < 0$ e 0 para $t > 0$:

$$u(-t) = \begin{cases} 1 & t < 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases}$$

$A + Bu(t - t_0)$ $v(t)$

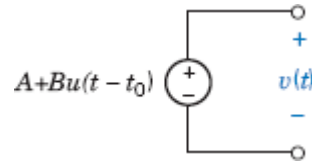



FIGURA 8.6-2 Símbolo de uma fonte de tensão cujo valor muda bruscamente no instante $t = t_0$.

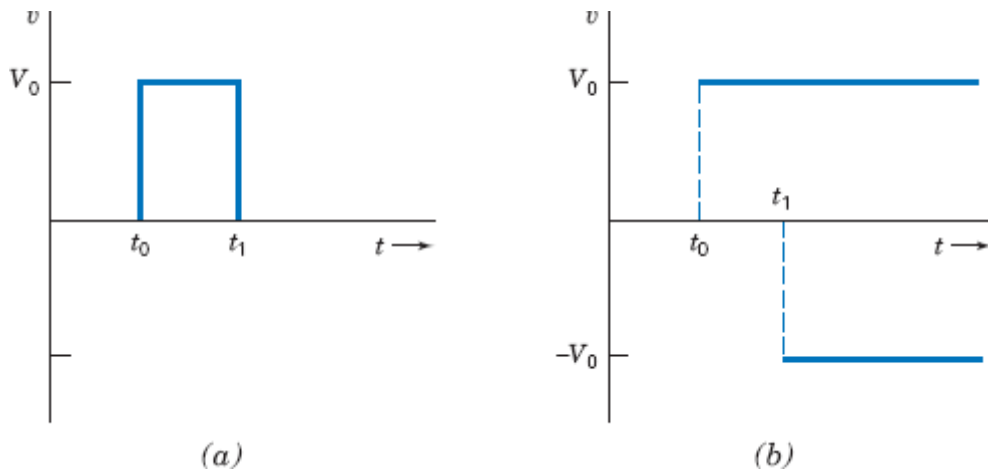



FIGURA 8.6-3 (*a*) Pulso de tensão retangular. (*b*) Degraus de tensão que, somados, produzem o pulso de tensão.

Considere a tensão

$$v(t) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ V_0 & t_0 < t < t_1 \\ 0 & t_1 < t \end{cases}$$

representada graficamente na Figura 8.6-3*a*. Uma tensão desse tipo, denominada *pulso de tensão*, é caracterizada por uma amplitude V_0 e uma duração (ou largura) $t_1 - t_0$. Como mostra a Figura 8.6-3*b*, um pulso de tensão pode ser obtido combinando duas fontes tipo degrau, uma de valor V_0, com a transição em $t = t_0$, e outra de valor $-V_0$, com a transição em $t = t_1$. As duas fontes tipo degrau representadas na Figura 8.6-4 produzem o pulso desejado. A expressão matemática para essa combinação de fontes é $v(t) = V_0 u(t - t_0) - V_0 u(t - t_1)$. Observe como foi fácil representar o pulso usando funções degrau.

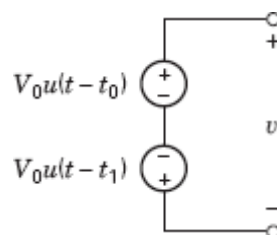



FIGURA 8.6-4 Fontes de tensão que, combinadas, produzem um pulso de tensão retangular, $v(t)$, de amplitude V_0 e largura $(t_1 - t_0)$, em que $t_1 < t_0$.

Um **pulso de tensão** tem um valor constante, diferente de zero, durante um intervalo de tempo $\Delta t = t_1 - t_0$.

A função degrau é um modelo idealizado, já que nenhum componente físico pode mudar instantaneamente de valor. Entretanto, nos casos em que o tempo de comutação é muito menor que a constante de tempo do circuito, a mudança de valor pode ser considerada instantânea para todos os efeitos práticos.

EXEMPLO 8.6-1 Circuito de Primeira Ordem

A Figura 8.6-5 mostra um circuito de primeira ordem. A entrada do circuito é a tensão da fonte de tensão, $v_s(t)$. A saída é a corrente no indutor, $i_o(t)$. Determine a saída do circuito se a entrada é $v_s(t) = 4 - 8u(t)$ V.

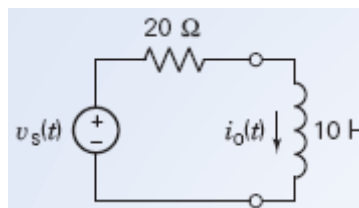



FIGURA 8.6-5 Circuito do Exemplo 8.6-1.

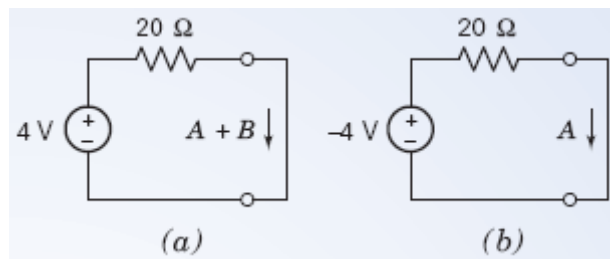



FIGURA 8.6-6 Circuitos usados para calcular a resposta estacionária (*a*) antes de $t = 0$ e (*b*) depois de $t = 0$.

Solução

A entrada do circuito é uma constante, 4 V, antes de $t = 0$ e outra constante, −4 V, depois de $t = 0$. A resposta total do circuito é dada por

$$i_o(t) = A + Be^{-at} \quad \text{para} \quad t > 0 \qquad (8.6\text{-}2)$$

em que *A*, *B* e *a* são constantes a serem determinadas.

Os valores de *A* e *B* podem ser determinados a partir das respostas estacionárias do circuito antes e depois do instante $t = 0$. As Figuras 8.6-6*a* e 8.6-6*b* mostram os circuitos usados para calcular essas respostas. Algumas explicações se fazem necessárias.

Como os indutores se comportam como curtos-circuitos quando a entrada é constante e o circuito está no regime estacionário, o indutor pode ser substituído por um curto-circuito na Figura 8.6-6*a* e na Figura 8.6-6*b*.

Para $t < 0$, o valor da corrente do indutor no regime estacionário é igual à corrente no instante $t = 0$:

$$i_o(0) = A + Be^{-a(0)} = A + B$$

Em consequência, a corrente do indutor foi chamada de $A + B$ na Figura 8.6-6*a*.

Para $t > 0$, o valor da corrente do indutor no regime estacionário é igual ao valor limite da corrente para $t \to \infty$:

$$i_o(\infty) = A + Be^{-a(\infty)} = A$$

Em consequência, a corrente do indutor foi chamada de A na Figura 8.6-6*b*.

Analisando o circuito da Figura 8.6-6*a*, obtemos

$$A + B = 0{,}2 \text{ A}$$

Analisando o circuito da Figura 8.6-6*b*, obtemos

$$A = -0{,}2 \text{ A}$$

o que nos dá

$$B = 0{,}4 \text{ A}$$

O valor de a na Eq. 8.6-2 depende da constante de tempo τ, que, por sua vez, é função da indutância L e da resistência de Thévenin, R_t, do circuito ligado ao indutor:

$$\frac{1}{a} = \tau = \frac{L}{R_t}$$

A Figura 8.6-7 mostra o circuito usado para calcular R_t. De acordo com a figura,

$$R_t = 20\ \Omega$$

o que nos dá

$$a = \frac{20}{10} = 2\frac{1}{\text{s}}$$

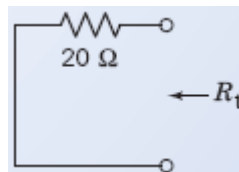



FIGURA 8.6-7 Circuito usado para calcular R_t.

(A constante de tempo é $\tau = 10/20 = 0{,}5$ s.) Substituindo os valores de A, B e a na Eq. 8.6-2, obtemos

$$i_o(t) = \begin{cases} 0{,}2 \text{ A} & \text{para } t \le 0 \\ -0{,}2 + 0{,}4e^{-2t} \text{ A} & \text{para } t \ge 0 \end{cases}$$

EXEMPLO 8.6-2 Circuito de Primeira Ordem

A Figura 8.6-8 mostra um circuito de primeira ordem. A entrada do circuito é a tensão da fonte de tensão, $v_s(t)$. A saída é a tensão do capacitor, $v_o(t)$. Determine a saída do circuito se a entrada é $v_s(t) = 7 - 14u(t)$ V.

Solução

A entrada do circuito é uma constante, 7 V, antes de $t = 0$ e outra constante, −7 V, depois de $t = 0$. A resposta total do circuito é dada por

$$v_o(t) = A + Be^{-at} \quad \text{para} \quad t > 0 \qquad (8.6\text{-}3)$$

em que A, B e a são constantes a serem determinadas.

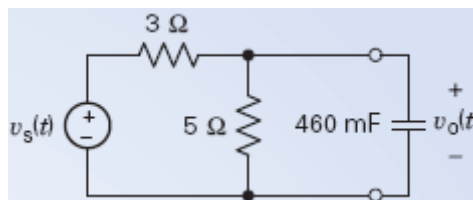



FIGURA 8.6-8 Circuito do Exemplo 8.6-2.

Os valores de A e B podem ser determinados a partir das respostas estacionárias do circuito antes e depois do instante $t = 0$. As Figuras 8.6-9*a* e 8.6-9*b* mostram os circuitos usados para calcular essas respostas. Algumas explicações se fazem necessárias.

Como os capacitores se comportam como circuitos abertos quando a entrada é constante e o circuito está no regime estacionário, o capacitor pode ser substituído por um circuito aberto na Figura 8.6-9*a* e na Figura 8.6-9*b*.

Para $t < 0$, o valor da tensão no regime estacionário é igual à tensão no instante $t = 0$:

$$v_0(t) = A + Be^{-a(0)} = A + B$$

Em consequência, a tensão do capacitor foi chamada de $A + B$ na Figura 8.6-9*a*.

Para $t > 0$, o valor da tensão no regime estacionário é igual ao limite da tensão para $t \longrightarrow \infty$:

$$v_0(\infty) = A + Be^{-a(\infty)} = A$$

Em consequência, a corrente no indutor foi chamada de A na Figura 8.6-9*b*.

Aplicando o método da divisão de tensão ao circuito da Figura 8.6-9*a*, obtemos:

$$A + B = \frac{5}{3+5} \times 7 = 4{,}38 \text{ V}$$

Aplicando o método da divisão de tensão ao circuito da Figura 8.6-9*b*, obtemos:

$$A = \frac{5}{3+5} \times (-7) = -4{,}38 \text{ V}$$

o que nos dá

$$B = 8{,}76 \text{ V}$$

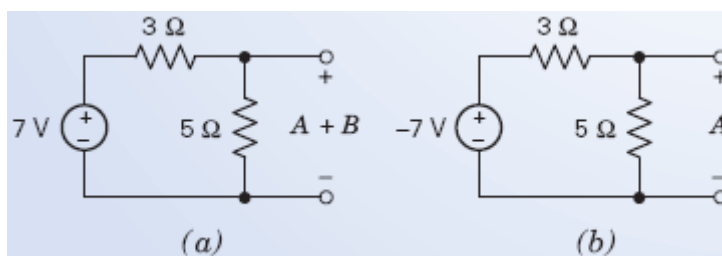



FIGURA 8.6-9 Circuitos usados para calcular a resposta estacionária (*a*) antes de $t = 0$ e (*b*) depois de $t = 0$.

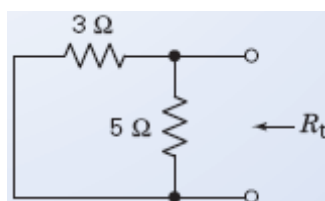



FIGURA 8.6-10 Circuito usado para calcular R_t.

O valor de a na Eq. 8.6-3 depende da constante de tempo τ, que, por sua vez, é função da capacitância C e da resistência de Thévenin, R_t, do circuito ligado ao capacitor:

$$\frac{1}{a} = \tau = R_t C$$

A Figura 8.6-10 mostra o circuito usado para calcular R_t. De acordo com a figura,

$$R_t = \frac{(5)(3)}{5+3} = 1{,}875\ \Omega$$

o que nos dá

$$a = \frac{1}{(1{,}875)(460 \times 10^{-3})} = 1{,}16\frac{1}{\mathrm{s}}$$

[A constante de tempo é $\tau = (1{,}875)(460 \times 10^{-3}) = 0{,}86$ s.] Substituindo os valores de A, B e a na Eq. 8.6-3, obtemos

$$v_o(t) = \begin{cases} -4{,}38\ \mathrm{V} & \text{para } t \leq 0 \\ -4{,}38 + 8{,}76\, e^{-1{,}16\,t}\ \mathrm{V} & \text{para } t \geq 0 \end{cases}$$

8.7 Resposta de um Circuito de Primeira Ordem a uma Fonte Variável

Na seção anterior, usamos o fato de que a resposta forçada a uma entrada constante é uma resposta constante para determinar a resposta forçada no caso de uma entrada constante. Vamos agora discutir o caso em que a entrada não é constante.

A equação diferencial que descreve um circuito *RL* ou *RC* tem a forma geral

$$\frac{dx(t)}{dt} + ax(t) = y(t) \qquad (8.7\text{-}1)$$

em que $y(t)$ é constante apenas quando o sinal de entrada é produzido por uma fonte de tensão ou de corrente constante e em que $a = 1/\tau$ é o recíproco da constante de tempo.

Nesta seção, vamos apresentar o *método do fator de integração*, que consiste em multiplicar a Eq. 8.7-1 por um fator que torna o lado esquerdo uma derivada exata e, em seguida, integrar ambos os membros.

Considere a derivada de um produto de dois termos da forma

$$\frac{d}{dt}(xe^{at}) = \frac{dx}{dt}e^{at} + axe^{at} = \left(\frac{dx}{dt} + ax\right)e^{at} \qquad (8.7\text{-}2)$$

O termo entre parênteses no lado direito da Eq. 8.7-2 tem a mesma forma que o lado esquerdo da Eq. 8.7-1. Assim, se multiplicamos ambos os membros da Eq. 8.7-1 por e^{at}, o lado esquerdo da equação pode ser substituído pela derivada perfeita $d(xe^{at})/dt$. O resultado é o seguinte:

$$\left(\frac{dx}{dt} + ax\right)e^{at} = ye^{at}$$

ou

$$\frac{d}{dt}(xe^{at}) = ye^{at}$$

Integrando ambos os membros da segunda equação, obtemos

$$xe^{at} = \int ye^{at}dt + K$$

em que K é uma constante de integração. Multiplicando por e^{-at} para explicitar x, obtemos

$$x = e^{-at}\int ye^{at}dt + Ke^{-at} \qquad (8.7\text{-}3)$$

No caso em que a entrada é constante, $y(t) = M$ e temos

$$x = e^{-at}M\int e^{at}dt + Ke^{-at} = \frac{M}{a} + Ke^{-at} = x_f + x_n$$

em que a resposta natural é $x_n = Ke^{-at}$ e a resposta forçada é $x_f = M/a$, uma constante.

Considere agora o caso em que $y(t)$, a função forçante, não é constante. Examinando a Eq. 8.7-3, vemos que a resposta natural permanece a mesma, $x_n = Ke^{-at}$. A resposta forçada é

$$x_f = e^{-at}\int y(t)e^{-at}\,dt$$

Assim, a resposta forçada depende da forma de $y(t)$. Considere o caso em que $y(t)$ é da forma $y(t) = e^{bt}$ (uma exponencial). Vamos supor que $(a + b) \neq 0$. Nesse caso,

$$x_f = e^{-at}\int e^{bt}e^{at}\,dt = e^{at}\int e^{(a+b)t}\,dt = \frac{1}{a+b}e^{-at}e^{(a+b)} = \frac{e^{bt}}{a+b} \qquad (8.7\text{-}4)$$

Assim, a resposta forçada de um circuito *RL* ou *RC* a uma função forçante exponencial tem a mesma forma que a função forçante. Se $(a + b) \neq 0$, partimos do princípio de que a resposta forçada tem a mesma forma que a função forçante e tentamos obter uma solução com essa forma para a equação diferencial que descreve o circuito.

EXEMPLO 8.7-1 Circuito de Primeira Ordem com uma Fonte Variável

Determine a corrente i do circuito da Figura 8.7-1*a* para $t > 0$ e

$$v_s = 10e^{-2t}u(t)\text{ V}$$

Suponha que o circuito esteja no regime estacionário em $t = 0^-$.

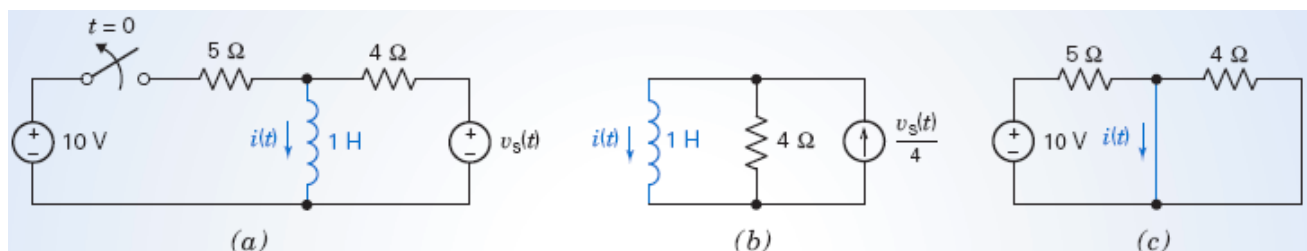



FIGURA 8.7-1 (*a*) Circuito com uma fonte variável. (*b*) Circuito equivalente depois que a chave é aberta. (*c*) Circuito equivalente antes que a chave seja aberta.

Solução

Como a função forçante é uma exponencial, esperamos que a resposta forçada i_f seja também uma exponencial. Assim, esperamos que i_f seja dada por

$$i_f = Be^{-2t}$$

para $t \geq 0$. Aplicando a LKT à malha da direita, obtemos

$$L\frac{di}{dt} + Ri = v_s$$

ou

$$\frac{di}{dt} + 4i = 10e^{-2t}$$

para $t > 0$. Fazendo $i_f = Be^{-2t}$, temos:

$$-2Be^{-2t} + 4Be^{-2t} = 10e^{-2t}$$

ou

$$(-2B + 4B)e^{-2t} = 10e^{-2t}$$

o que nos dá $B = 5$ e

$$i_f = 5e^{-2t}$$

A resposta natural pode ser obtida a partir do circuito da Figura 8.7-1*b*, que é o circuito equivalente depois que a chave é aberta. A parte do circuito ligada ao indutor foi substituída pelo circuito equivalente de Norton. A resposta natural é

$$i_n = Ae^{-(R_t/L)t} = Ae^{-4t}$$

e a resposta completa é

$$i = i_n + i_f = Ae^{-4t} + 5e^{-2t}$$

A constante A pode ser determinada a partir do valor da corrente do indutor no instante $t = 0$. A corrente inicial do indutor, $i(0)$, pode ser calculada analisando o circuito da Figura 8.7-1*c*, que é o circuito equivalente antes da abertura da chave. Como $v_s(t) = 0$ para $t < 0$ e uma fonte de tensão de 0 V é equivalente a um curto-circuito, a fonte de tensão do lado direito do circuito foi substituída por um curto-circuito. Além disso, como o circuito está no regime estacionário antes da abertura da chave e a única entrada é a tensão constante da fonte de 10 V, o indutor também foi substituído por um curto-circuito. A corrente do curto-circuito que substitui o indutor é a condição inicial $i(0)$. No circuito da Figura 8.7-1*c*,

$$i(0) = \frac{10}{5} = 2\text{ A}$$

Assim, em $t = 0$,

$$i(0) = Ae^{-4\times 0} + 5e^{-2\times 0} = A + 5$$

$$2 = A + 5$$

o que nos dá $A = 3$ e, portanto,

$$i = (-3e^{-4t} + 5e^{-2t})\text{ A} \quad t > 0$$

A fonte de tensão do Exemplo 8.7-1 é uma exponencial decrescente da forma

$$v_s = 10e^{-2t}\,u(t)\text{ V}$$

Uma fonte desse tipo é chamada de *aperiódica* (não periódica). Dizemos que uma função $f(t)$ é *periódica* se existe um número T tal que, para qualquer valor de t,

$$f(t+T) = f(t) \qquad (8.7\text{-}5)$$

O menor número positivo T para o qual a Eq. 8.7-5 é satisfeita é chamado de *período*. O período define a duração de um ciclo completo de $f(t)$. Uma fonte para qual não existe nenhum valor de T que satisfaça a Eq. 8.7-5 é chamada de aperiódica. Um exemplo de fonte periódica é a fonte de corrente $i_s = 10$ sen $2t$ do Exemplo 8.7-2. O período dessa fonte senoidal é π s.

EXEMPLO 8.7-2 Circuito de Primeira Ordem com uma Fonte Variável

Determine a resposta $v(t)$ para $t > 0$ no circuito da Figura 8.7-2*a*. Suponha que a $v(0) = 0$ e que a corrente da fonte de corrente é $i_s = (10 \text{ sen } 2t)u(t)$ A.

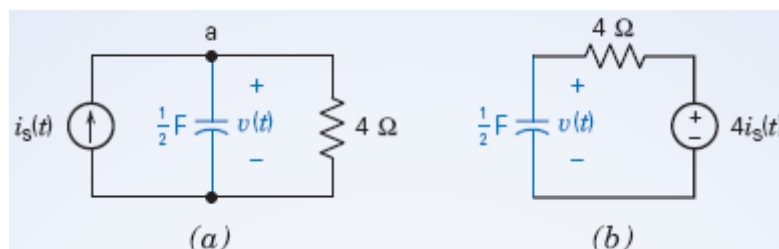



FIGURA 8.7-2 (*a*) Circuito com uma fonte variável. (*b*) Circuito equivalente para $t > 0$.

Solução

Como a função forçante é uma função senoidal, esperamos que a resposta forçada v_f seja também uma função senoidal. Aplicando a LKC ao nó a, temos:

$$C\frac{dv}{dt} + \frac{v}{r} = i_s$$

ou

$$0,5\frac{dv}{dt} + \frac{v}{4} = 10 \text{ sen } 2t \qquad (8.7\text{-}6)$$

para $t > 0$. Vamos supor que v_f é composta por funções senoidais com o mesmo período que a função forçante.

Examinando a Eq. 8.7-6, vemos que a soma de $v_f/4$ com 0,5 dv_f/dt deve ser igual a 10 sen $2t$. Entretanto, $d(\text{sen } 2t)/dt = 2 \cos 2t$. Assim, a função v_t deve conter termos proporcionais a sen $2t$ e a cos $2t$. Vamos experimentar, portanto, uma solução da forma

$$v_F = A \text{ sen } 2t + B \cos 2t$$

A derivada da solução proposta é

$$\frac{dv_f}{dt} = 2A\cos 2t - 2B \text{ sen } 2t$$

Substituindo v_f e dv_f/dt na Eq. 8.7-6, obtemos

$$(A\cos 2t - B \text{ sen } 2t) + \frac{1}{4}(A \text{ sen } 2t - B\cos 2t) = 10 \text{ sen } 2t$$

Igualando os termos em sen $2t$ e cos $2t$, temos:

$$\left(\frac{A}{4} - B\right) = 10 \quad \text{e} \quad \left(A + \frac{B}{4}\right) = 0$$

Resolvendo esse sistema de equações, obtemos

$$A = \frac{40}{17} \quad \text{e} \quad B = \frac{-160}{17}$$

o que nos dá

$$v_f = \frac{40}{17} \text{ sen } 2t - \frac{160}{17} \cos 2t$$

A resposta natural pode ser obtida analisando o circuito da Figura 8.7-2*b*, que é o circuito equivalente para $t > 0$. A parte do circuito ligada ao capacitor foi substituída pelo circuito equivalente de Thévenin. A resposta natural é

$$v_a = De^{-t/(R_t C)} = De^{-t/2}$$

A resposta completa é dada por

$$v = v_n + v_f = De^{-t/2} + \frac{40}{17} \text{ sen } 2t - \frac{160}{17} \cos 2t$$

Como $v(0) = 0$, obtemos, para $t = 0$,

$$0 = D - \frac{160}{17}$$

ou

$$D = \frac{160}{17}$$

A resposta completa é, portanto,

$$v = \left(\frac{160}{17} e^{-t/2} + \frac{40}{17} \text{ sen } 2t - \frac{160}{17} \cos 2t\right) V$$

Tabela 8.7-1 Respostas Forçadas a Algumas Funções Forçantes

FUNÇÃO FORÇANTE, $y(t)$	RESPOSTA FORÇADA, $x_f(t)$
1. Constante	$x_f = N$, uma constante
$y(t) = M$	
2. Exponencial	$x_f = Ne^{-bt}$
$y(t) = Me^{-bt}$	

3. Senoide $y(t) = M \operatorname{sen}(\omega t + \theta)$	$x_f = A \operatorname{sen} \omega t + A \cos \omega t$

Um caso especial da resposta forçada de um circuito pode acontecer quando a função forçante é uma exponencial decrescente da forma $y(t) = e^{-bt}$. Nesse caso, de acordo com a Eq. 8.7-4,

$$x_f = \frac{e^{-bt}}{a-b}$$

Note que, no caso que estamos discutindo, a exponencial é e^{-bt} e não e^{bt}, como na Eq. 8.7-4. No caso especial em que $a = b$, temos $a - b = 0$ e uma resposta da forma dada pela Eq. 8.7-4 se torna indeterminada. Neste caso especial, devemos tomar como resposta forçada uma função da forma $x_f = te^{-bt}$. Essa resposta forçada, para $a = b$, satisfaz a equação diferencial original (Eq. 8.7-1). Assim, quando a resposta natural contém um termo com a mesma forma que a função forçante, precisamos multiplicar por t o termo correspondente à resposta forçada.

A Tabela 8.7-1 mostra as respostas forçadas a algumas funções forçantes. Observe que se um circuito é linear, está no regime estacionário e é excitado por uma única fonte senoidal de frequência ω, todas as correntes e funções do circuito são funções senoidais de frequência ω.

EXERCÍCIO 8.7-1 A fonte de alimentação da estação espacial mostrada na Figura E 8.7-1*a* utiliza células solares para gerar energia elétrica e baterias para armazenar essa energia. Um dos circuitos usados a bordo pode ser modelado pelo circuito da Figura E 8.7-1*b*, em que $v_s = 10 \operatorname{sen} 20t$ V. Se o circuito se encontra no regime estacionário para $t < 0$ e $v(0^-) = 0$, determine $v(t)$ para $t > 0$.

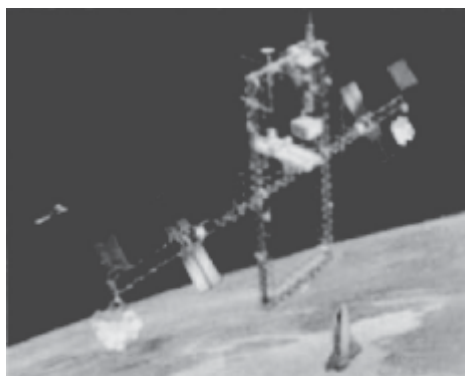
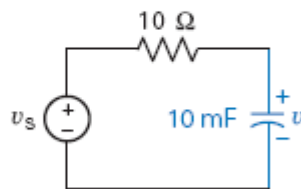



FIGURA E 8.7-1 (*a*) Projeto de uma estação espacial da NASA, com módulos habitáveis que poderiam abrigar um laboratório científico orbital. (*b*) Circuito usado a bordo da estação espacial.

Resposta: $v = 4e^{-10t} - 4 \cos 20t + 2 \operatorname{sen} 20t$ V

8.8 *Operadores Diferenciais*

Nesta seção, vamos introduzir o operador diferencial s.

Um operador é um símbolo que representa uma operação matemática. O *operador diferencial s* é definido da seguinte forma:

$$sx = \frac{dx}{dt} \quad \text{e} \quad s^2x = \frac{d^2x}{dt^2}$$

O operador s representa, portanto, a operação de derivação de uma variável em relação ao tempo. A utilidade do operador s está no fato de que pode ser tratado como uma grandeza algébrica, o que permite substituir equações diferenciais por equações algébricas, mais fáceis de manipular.

O uso do operador s é particularmente útil no caso de equações diferenciais de ordem superior. Nesse caso, o operador é usado várias vezes, de modo que

$$s^n x = \frac{d^n x}{dt^n} \quad \text{para } n \geq 0$$

Podemos supor que $n = 0$ significa que não há derivação, de modo que

$$s^0 = 1$$

o que significa que $s^0 x = x$.

Como a integração é o inverso da derivação, definimos

$$\frac{1}{s} x = \int_{-\infty}^{t} x \, d\tau \qquad (8.8\text{-}1)$$

É possível demonstrar que o operador $1/s$ satisfaz as regras usuais das manipulações algébricas. Dessas regras, a única que oferece alguma dificuldade é da comutatividade da multiplicação, segundo a qual

$$s \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s} \cdot s = 1 \qquad (8.8\text{-}2)$$

Será que isso é verdade para o operador s? Considere a Eq. 8.8-1. Multiplicando a Eq. 8.8-1 por s, obtemos

$$s \cdot \frac{1}{s} x = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{t} x \, d\tau$$

ou

$$x = x$$

como era de se esperar. Se invertermos a ordem, multiplicando sx pelo operador de integração, o resultado será

$$\frac{1}{s} sx = \int_{-\infty}^{t} \frac{dx}{dt} d\tau = x(t) - x(-\infty)$$

e, portanto,

$$\frac{1}{s} sx = x$$

apenas se $x(-\infty) = 0$. Fisicamente, isso significa que as tensões nos capacitores e as correntes nos indutores devem ser nulas para $t = -\infty$. Nesse caso, o operador $1/s$ satisfaz a Eq. 8.8-2 e pode ser manipulado como uma grandeza algébrica.

Os operadores diferenciais podem ser usados para determinar a solução natural de uma equação diferencial. Considere, por exemplo, a equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{d}{dt} x(t) + ax(t) = by(t) \qquad (8.8\text{-}3)$$

A solução natural da Eq. 8.8-3 é

$$x_{\text{n}}(t) = Ke^{st} \qquad (8.8\text{-}4)$$

A forma homogênea de uma equação diferencial é obtida fazendo a função forçante igual a zero. A função forçante da Eq. 8.8-3 é $y(t)$. A forma homogênea da equação é

$$\frac{d}{dt}x(t) + ax(t) = 0 \qquad (8.8\text{-}5)$$

Para mostrar que $x_n(t)$ é uma solução da forma homogênea da equação diferencial, substituímos a Eq. 8.8-4 na Eq. 8.8-5:

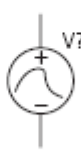
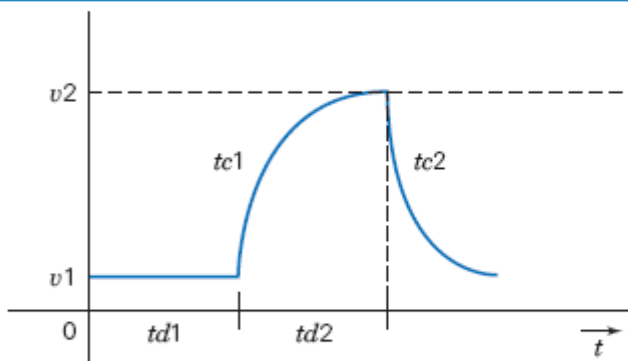
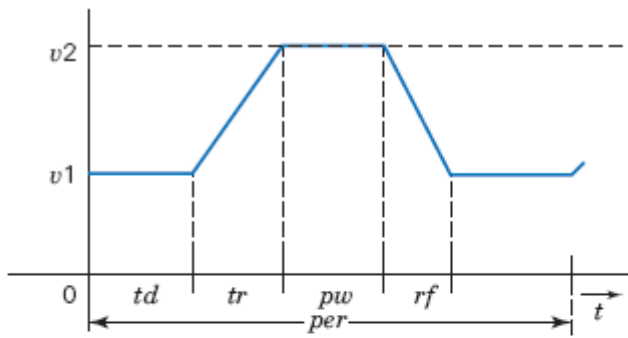
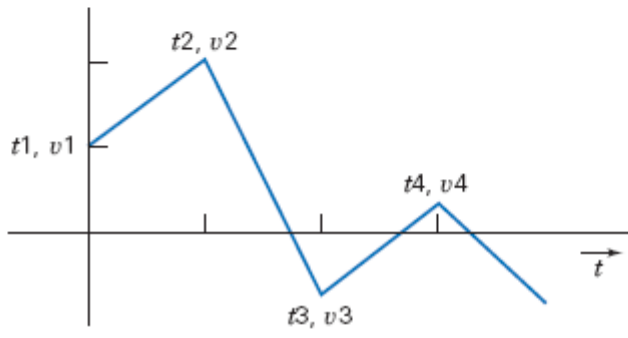
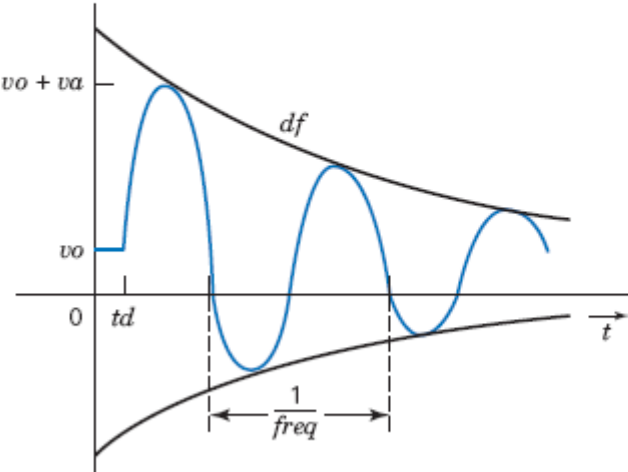
$$\frac{d}{dt}(Ke^{st}) + a(Ke^{st}) = sKe^{st} + aKe^{st} = 0$$

Para obter o parâmetro s da Eq. 8.8-4, substituímos d/dt na Eq. 8.8-5 pelo operador diferencial s. Isso nos dá

$$sx + ax = (s + a)x = 0 \qquad (8.8\text{-}6)$$

A Eq. 8.8-6 tem duas soluções: $x = 0$ e $s = -a$. Como a solução $x = 0$ é trivial, escolhemos a solução $s = -a$. Substituindo essa solução na Eq. 8.8-4, obtemos

$$x_n(t) = Ke^{-at}$$

Trata-se da mesma expressão da resposta natural que foi obtida por outros métodos no início do capítulo, o que não chega a ser uma surpresa. Os operadores diferenciais podem ser muito úteis quando estamos interessados em analisar circuitos que podem ser representados por equações diferenciais de segunda ordem ou de ordem superior à segunda.

8.9 Uso do Programa PSpice para Analisar Circuitos de Primeira Ordem

Para analisar um circuito de primeira ordem com o auxílio do programa PSpice, fazemos o seguinte:

1. Desenhamos o circuito no espaço de trabalho OrCAD Capture
2. Especificamos uma simulação do tipo Time Domain (Transient)

Tabela 8.9-1 **Fontes de Tensão Pulsada e Alternada Disponíveis no PSpice**

NOME	SÍMBOLO	FORMA DE ONDA DA TENSÃO
VEXP	V1 = V2 = TD1 = TC1 = TD2 = TC2 = 	
VPULSE	V1 = V2 = TD = TR = TF = PW = PER = V?	
VPWL		
VSIN	VOFF = VAMPL = FREQ = V?	

3. Executamos a simulação

4. Plotamos o resultado da simulação

A análise no domínio do tempo é mais usada no caso de circuitos que contêm capacitores e/ou indutores. O PSpice dispõe de módulos que simulam capacitores e indutores na biblioteca de componentes ANALOG. O nome do módulo que simula um capacitor é C; as propriedades mais importantes desse módulo são a capacitância e a condição inicial, que podem ser especificadas usando o editor de propriedades do espaço de trabalho OrCAD Capture. (A condição inicial de um capacitor é o valor da tensão do capacitor no instante $t = 0$.) O nome do módulo que simula um indutor é L; a indutância e a condição inicial podem ser especificadas usando o editor de propriedades. (A condição inicial de um indutor é o valor da corrente no indutor no instante $t = 0$.)

As fontes de tensão e corrente que variam com o tempo estão na biblioteca de componentes SOURCE. As fontes de tensão disponíveis aparecem na Tabela 8.9-1. A forma de onda da tensão mostra a variação com o tempo da tensão da fonte. A cada forma de onda da tensão está associada uma série de parâmetros. A fonte de tensão exponencial VEXP, por exemplo, é especificada pelos parâmetros *v*1, *v*2, *td*1, *td* 2, *tc*1 e *tc*2. Os valores dos parâmetros das fontes de tensão da Tabela 8.9-1 podem ser definidos clicando no símbolo da fonte, para abrir o Property Editor, e digitando os valores desejados.

EXEMPLO 8.9-1 Uso do PSpice para Analisar um Circuito de Primeira Ordem

A entrada do circuito da Figura 8.9-1*b* é a tensão da fonte de tensão, $v_i(t)$, mostrada na Figura 8.9-1*a*. A saída (ou resposta) do circuito é a tensão do capacitor, $v_o(t)$. Use o programa PSpice para plotar a resposta do circuito.

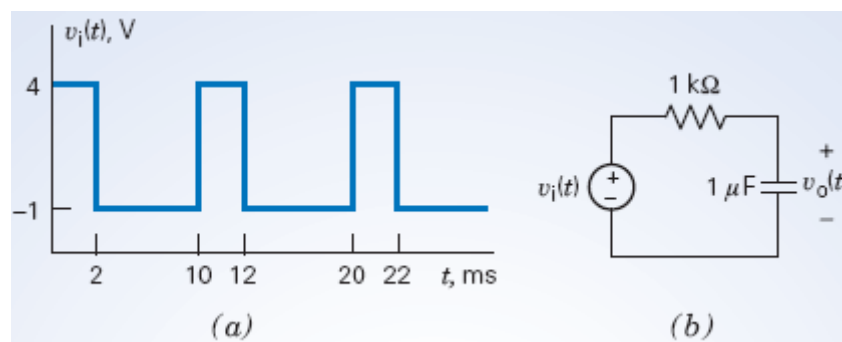



FIGURA 8.9-1 Circuito *RC* (*b*) com uma entrada pulsada (*a*).

Solução

A primeira coisa a fazer é desenhar o circuito no espaço de trabalho OrCAD do PSpice, como mostra a Figura 8.9-2 (veja o Apêndice A). A fonte de tensão é um componente VPULSE (veja a segunda linha da Tabela 8.9-1). A Figura 8.9-1*a* mostra $v_i(t)$ mudando instantaneamente de 4 V para −1 V e vice-versa. Isso equivale a usar o valor zero para os parâmetros *tr* e *tf*, o que não é permitido pelo programa. A solução é escolher para esses parâmetros valores muito menores que o período da forma de onda. Neste exemplo, como o período da forma de onda de entrada é 10 ms, 1 ns é um valor aceitável para *tr* e *tf*.

É conveniente fazer *td*, o tempo de retardo até a fonte de tensão começar a funcionar, igual a zero. Nesse caso, que corresponde à situação mostrada na Figura 8.9-1*a*, $v1 = -1$ e $v2 = 4$. O valor de *pw* é o intervalo de tempo durante o qual $v_i(t) = v2 = 4$; neste exemplo, $pw = 2$ ms. A entrada pulsada é uma função periódica do tempo. O valor de *per* é o período da função; neste exemplo, $per = 10$ ms.

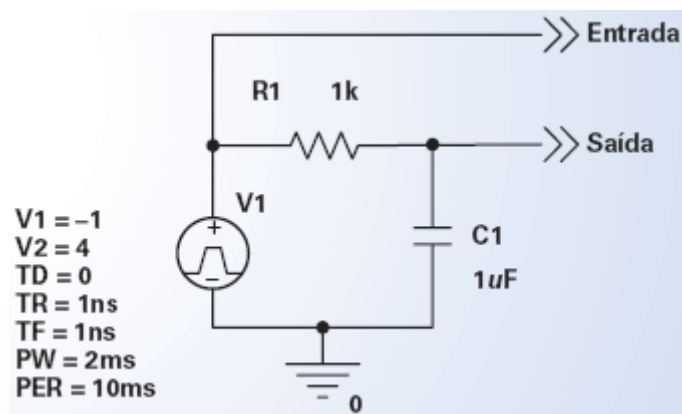



FIGURA 8.9-2 The circuit of Figure 8.9-1 asa drawn in the OrCAD workspace

O circuito mostrado na Figura 8.9-1*b* não possui um nó de terra. Como o PSpice exige que todos os circuitos possuam um nó de terra, precisamos escolher um dos nós do circuito para ser o nó de terra. A Figura 8.9-2 mostra o circuito no espaço de trabalho OrCAD, com o terminal negativo da fonte escolhido para ser o nó de terra. Foram também usados dois Off-Page Connectors para rotular os nós de entrada e saída, escolhendo Place/Off-Page Connector no menu OrCAD Capture para abrir a janela de diálogo Place Off-Page Connector e chamando de Input o nó de entrada e de Output o nó de saída. Com isso, as tensões de entrada e saída são associadas automaticamente às variáveis V(INPUT) e V(OUTPUT), respectivamente.

Vamos realizar uma simulação do tipo Time Domain (Transient). Para isso, escolha PSpice\New Simulation Profile no menu do OrCAD Capture, escolha um nome para a simulação na caixa de diálogo New Simulation e escolha Time Domain (Transiente) no menu Analysis type da caixa de diálogo Simulation Settings. Entre com o valor de 20 ms na janela Run to time para executar a simulação durante dois períodos completos da forma de onda da entrada. Clique em Skip the initial transient bias point calculation (SKIPBP) para ignorar o regime transitório. Selecione PSpice/Run no menu OrCAD Capture para executar a simulação.

Quando a simulação termina, o programa abre automaticamente uma janela SCHEMATIC. Selecione Trace/Add Trace para abrir a caixa de diálogo Add Traces e especifique para serem plotadas as variáveis V(OUTPUT) e V(INPUT). A Figura 8.9-3 mostra o gráfico resultante depois que a grade foi removida e alguns pontos foram rotulados.

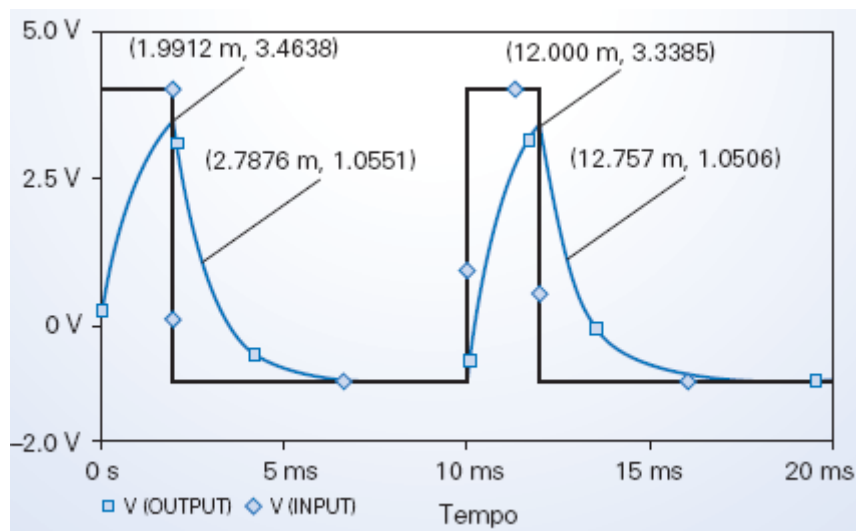



FIGURA 8.9-3 Resposta do circuito *RC* da Figura 8.9-1*b* à forma de onda pulsada da Figura 8.9-1*a*.

8.10 *Como Podemos Testar . . . ?*

Os engenheiros são frequentemente encarregados de verificar se a solução de um problema está correta. As soluções de problemas de projeto, por exemplo, devem ser verificadas para confirmar que todas as especificações estão sendo atendidas. Além disso, os resultados obtidos com o auxílio de computadores devem ser revistos para evitar possíveis erros na digitação dos dados e as afirmações dos vendedores a respeito dos seus produtos devem ser confirmadas.

Os estudantes de engenharia muitas vezes também precisam verificar se os resultados que obtiveram estão corretos. Às vezes falta muito pouco tempo para terminar um exame e é importante poder identificar rapidamente as questões que precisam ser refeitas.

Os exemplos a seguir ilustram algumas técnicas que podem ser usadas para verificar se as soluções de problemas do tipo discutido neste capítulo estão corretas.

EXEMPLO 8.10-1 Como Podemos Testar a Resposta de um Circuito de Primeira Ordem?

Considere um circuito e a resposta transitória correspondente (Figura 8.10-1). **Como podemos testar** se a resposta transitória está correta? Três parâmetros devem ser verificados: a tensão inicial $v_0(t_0)$, a tensão final $v_0(\infty)$ e a constante de tempo τ.

Solução

Considere primeiro a tensão inicial $v_0(t_0)$ (neste exemplo, $t_0 = 10\ \mu s$). Antes do instante $t_0 = 10\ \mu s$, a chave está fechada e permaneceu fechada por um tempo suficiente para que o circuito atingisse o regime estacionário, ou seja, para que os transitórios desaparecessem. Para calcular $v_0(t_0)$, simplificamos o circuito de duas formas. Em primeiro lugar, substituímos a chave por um curto-circuito porque está fechada. Em segundo lugar, substituímos o indutor por um curto-circuito porque os indutores se comportam como curtos-circuitos quando todas as entradas são constantes e o circuito está no regime estacionário. O circuito resultante aparece na Figura 8.10-2*a*. Depois de substituir os resistores de 300 Ω e 600 Ω em paralelo por um resistor equivalente de 200 Ω, a tensão inicial, calculada usando o princípio do divisor de tensão, é

$$v_o(t_0) = \frac{200}{200 + 200} 8 = 4 \text{ V}$$

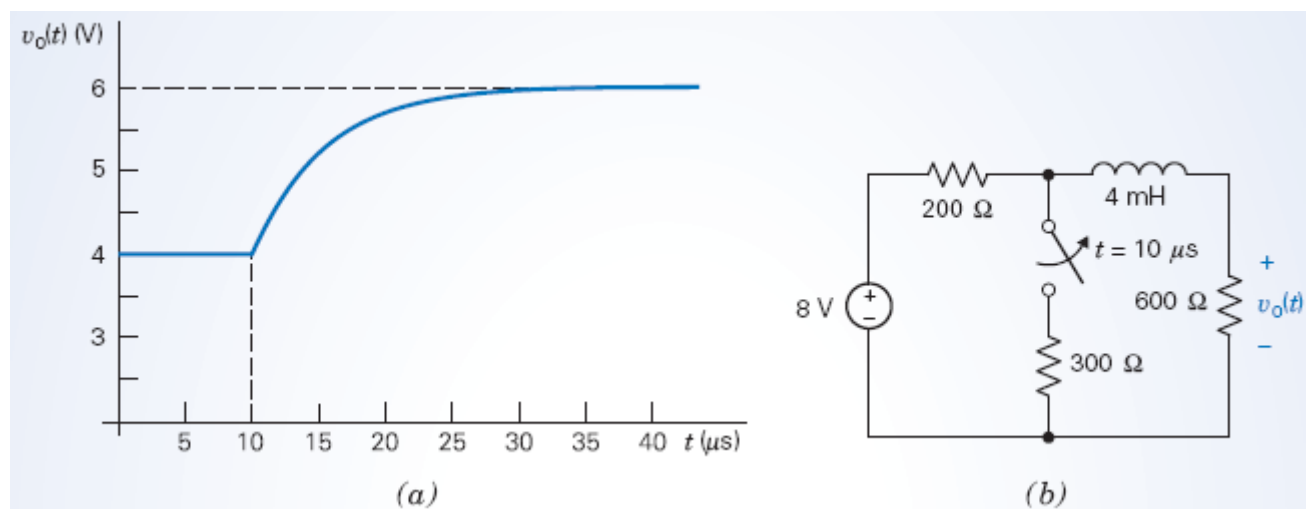



FIGURA 8.10-1 (*a*) Resposta transitória e (*b*) circuito correspondente.

Considere agora a tensão final, $v_o(\infty)$. Nesse caso, a chave está aberta e o circuito se encontra novamente no regime estacionário. Mais uma vez, o circuito pode ser simplificado de duas formas. A chave é substituída por um circuito aberto porque está aberta; o indutor é substituído por um curto-circuito porque os indutores se comportam como curtos-circuitos quando todas as entradas são constantes e o circuito está no regime estacionário. O circuito simplificado aparece na Figura 8.10-2*b*. A tensão final pode ser calculada usando o método da divisão de tensão:

$$v_o(\infty) = \frac{600}{200 + 600} 8 = 6 \text{ V}$$

A constante de tempo pode ser calculada no circuito da Figura 8.10-2*c*. O circuito foi simplificado fazendo a entrada igual a zero (uma tensão zero é equivalente a um curto-circuito) e substituindo a chave por um circuito aberto. A constante de tempo é

$$\tau = \frac{L}{R_t} = \frac{4 \times 10^{-3}}{200 + 600} = 5 \times 10^{-6} = 5\ \mu s$$

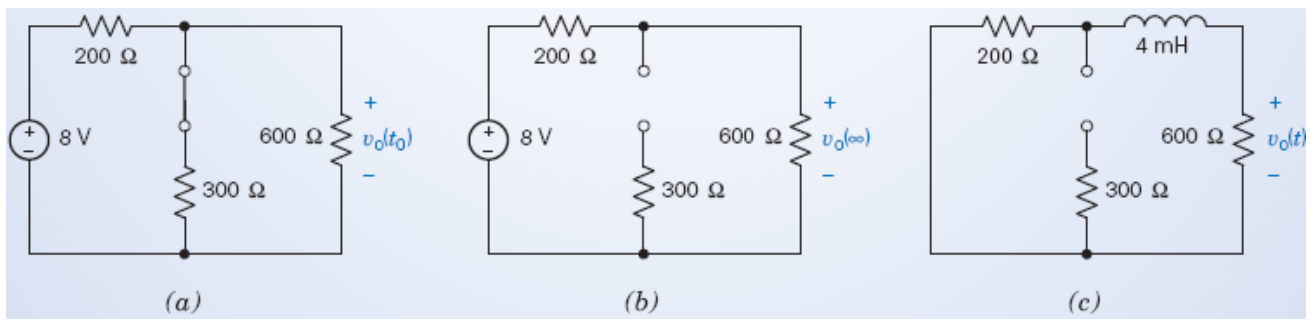



FIGURA 8.10-2 Circuitos usados para calcular (*a*) a tensão inicial, (*b*) a tensão final e (*c*) a constante de tempo.

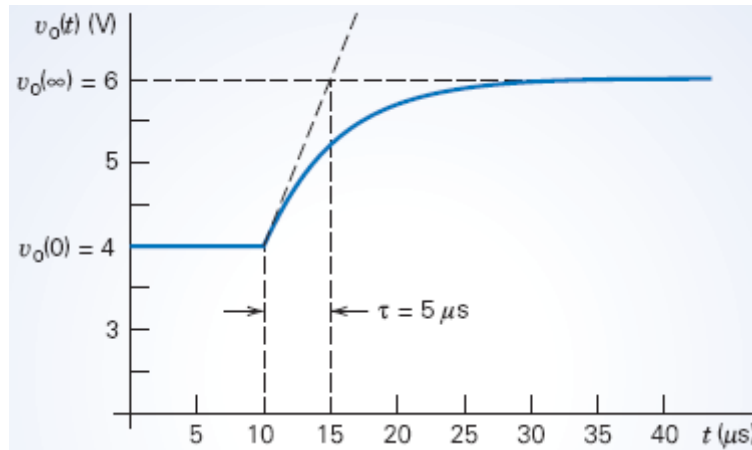



FIGURA 8.10-3 Interpretação da resposta transitória.

A Figura 8.10-3 mostra como a tensão inicial, a tensão final e a constante de tempo podem ser extraídas do gráfico da resposta transitória. (O método para determinar graficamente a constante de tempo foi ilustrado na Figura 8.3-3.) Como os valores de $v_0(t_0)$, $v_0(\infty)$ e τ obtidos a partir do gráfico da resposta transitória são iguais aos valores obtidos analisando o circuito, concluímos que a resposta transitória está correta.

EXEMPLO 8.10-2 Como Podemos Testar a Resposta de um Circuito de Primeira Ordem?

Considere um circuito e a resposta transitória correspondente (Figura 8.10-4). **Como podemos testar** se a resposta transitória está correta? Quatro parâmetros devem ser verificados: a tensão do capacitor no regime estacionário com a chave aberta, a tensão do capacitor no regime estacionário com a chave fechada, a constante de tempo com a chave aberta e a constante de tempo com a chave fechada.

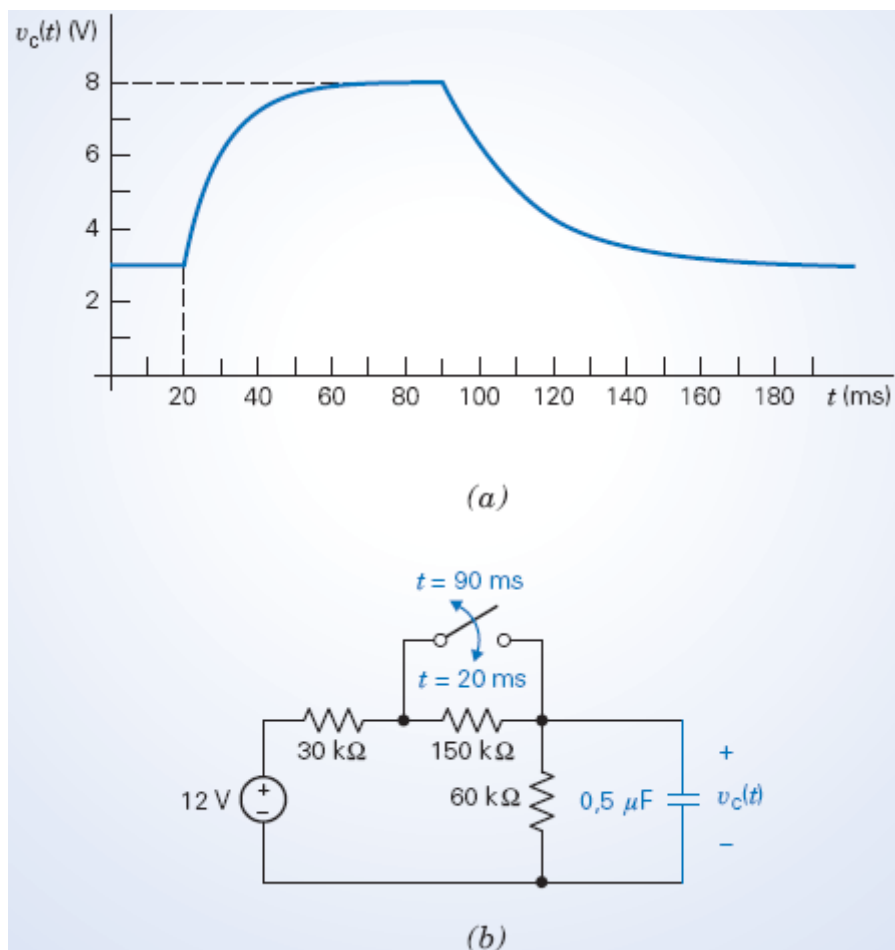



FIGURA 8.10-4 (*a*) Resposta transitória e (*b*) circuito correspondente.

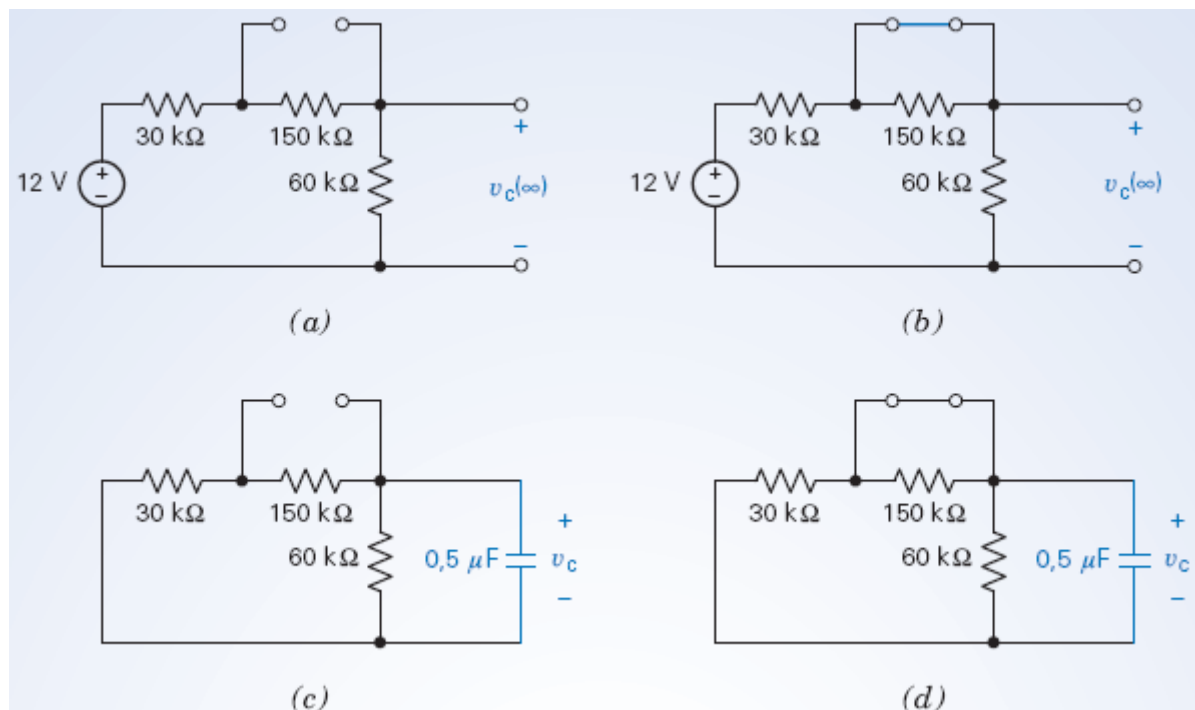



FIGURA 8.10-5 Circuitos usados para calcular (*a*) a tensão estacionária com a chave aberta, (*b*) a tensão estacionária com a chave fechada, (*c*) a constante de tempo com a chave aberta e (*d*) a constante de tempo com a chave fechada.

Solução

A Figura 8.10-5*a* mostra o circuito usado para calcular a tensão do capacitor no regime estacionário com a chave aberta. O circuito foi simplificado de duas formas. Em primeiro lugar, a chave foi substituída por um circuito aberto; em segundo lugar, o capacitor foi substituído por um circuito aberto, já que os

capacitores se comportam como circuitos abertos quando todas as entradas são constantes e o circuito está no regime estacionário. A tensão do capacitor no regime estacionário pode ser calculada usando o método da divisão de tensão:

$$v_c(\infty) = \frac{60}{60 + 30 + 150} 12 = 3 \text{ V}$$

A Figura 8.10-5*b* mostra o circuito usado para calcular a tensão do capacitor no regime estacionário com a chave fechada. Mais uma vez, o circuito foi simplificado de duas formas. Em primeiro lugar, a chave foi substituída por um curto-circuito; em segundo lugar, o capacitor foi substituído por um circuito aberto. A tensão do capacitor no regime estacionário pode ser calculada usando o método da divisão de tensão:

$$v_c(\infty) = \frac{60}{60 + 30} 12 = 8 \text{ V}$$

A Figura 8.10-5*c* mostra o circuito usado para calcular a constante de tempo com a chave aberta. O circuito foi simplificado fazendo a entrada igual a zero (uma tensão zero é equivalente a um curto-circuito) e substituindo a chave por um circuito aberto. Observe que uma resistência de 180 kΩ em paralelo com uma resistência de 60 kΩ é equivalente a uma resistência de 45 kΩ. A constante de tempo é

$$\tau = (45 \times 10^3) \cdot (0{,}5 \times 10^{-6}) = 22{,}5 \times 10^{-3} = 22{,}5 \text{ ms}$$

A Figura 8.10-5*d* mostra o circuito usado para calcular a constante de tempo com a chave fechada. O circuito foi simplificado fazendo a entrada igual a zero e substituindo a chave por um curto-circuito. Observe que uma resistência de 30 kΩ em paralelo com uma resistência de 60 kΩ é equivalente a uma resistência de 20 kΩ. A constante de tempo é

$$\tau = (20 \times 10^3) \cdot (0{,}5 \times 10^{-6}) = 10^{-2} = 10 \text{ ms}$$

De acordo com esses resultados, esperamos que a tensão do capacitor seja 3 V até a chave ser fechada em $t = 20$ ms. Em seguida, a tensão do capacitor deve aumentar exponencialmente até 8 V, com uma constante de tempo de 10 ms. A tensão do capacitor deve permanecer em 8 V até a chave ser aberta em $t = 90$ ms. Em seguida, a tensão do capacitor deve diminuir exponencialmente até 3 V, com uma constante de tempo de 22,5 ms. A Figura 8.10-6 mostra que a resposta transitória está de acordo com essa descrição. Concluímos, portanto, que a resposta transitória está correta.

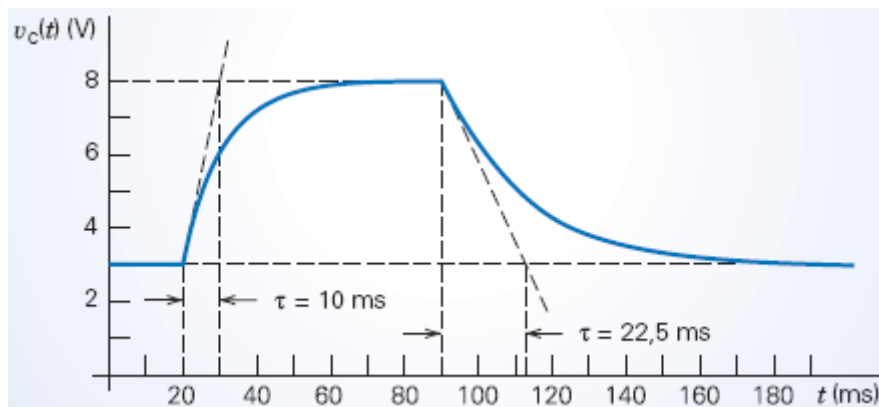



FIGURA 8.10-6 Interpretação da resposta transitória.

8.11 EXEMPLO DE PROJETO Computador e Impressora

Muitas vezes é necessário ligar dois equipamentos eletrônicos de tal forma que a saída de um equipamento seja usada como a entrada de outro. Isso acontece, por exemplo, quando uma impressora é ligada a um computador, como na Figura 8.11-1*a*. Essa situação está representada, de modo mais geral, na Figura 8.11-1*b*. Um transmissor é usado para enviar um sinal a um receptor através de um cabo. Vamos substituir o transmissor, o cabo e o receptor por modelos simples. O transmissor será modelado por uma fonte de tensão, o cabo por um circuito *RC* e o receptor por um circuito aberto. Os valores de resistência e capacitância usados para modelar o cabo dependem do comprimento do cabo. No caso de um cabo coaxial RG58, por exemplo,

$$R = r \cdot \ell \quad \text{em que} \quad r = 0,54\,\frac{\Omega}{\text{m}}$$

e

$$C = c \cdot \ell \quad \text{em que} \quad c = 88\,\frac{\text{pF}}{\text{m}}$$

e ℓ é o comprimento do cabo em metros. A Figura 8.11-1*c* mostra o circuito equivalente.

Suponha que os dois circuitos ligados pelo cabo sejam circuitos digitais. O transmissor envia uma série de uns e zeros para o receptor. Esses uns e zeros são representados por tensões. A saída do transmissor pode ser a tensão V_{TA}, que representa o 1 lógico, ou a tensão V_{TB}, que representa o 0 lógico. Um tipo muito comum de lógica, a lógica TTL, trabalha com $V_{TA} = 2,4$ V e $V_{TB} = 0,4$ V. (TTL é o acrônimo de transistor-transistor logic, ou seja, lógica transistor-transistor.) O receptor utiliza duas outras tensões, V_{RA} e V_{RB}, para representar uns e zeros. (O objetivo é reduzir, tornar os sinais imunes ao ruído, mas não vamos entrar em detalhes.) O receptor interpreta o sinal de entrada, v_b, como um 1 lógico se $v_b > V_{RA}$ e como um 0 lógico se $v_b < V_{RB}$. (Tensões entre V_{RA} e V_{RB} estão presentes apenas durante as transições entre o 1 lógico e o 0 lógico. Essas tensões são às vezes interpretadas como 1 lógico e às vezes como 0 lógico.) A lógica TTL utiliza $V_{RA} = 2,0$ V e $V_{RB} = 0,8$ V.

A Figura 8.11-2 mostra o que acontece quando a saída do transmissor muda de 0 lógico para 1 lógico. Antes do instante t_0,

$$v_a = V_{TB} \quad \text{e} \quad v_b < V_{RB} \quad \text{para} \quad t < t_0$$

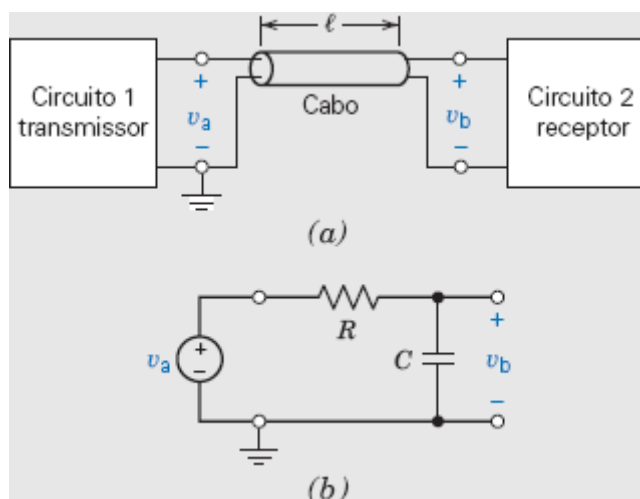



FIGURA 8.11-1 (*a*) Dois circuitos ligados por um cabo. (*b*) Um circuito equivalente.

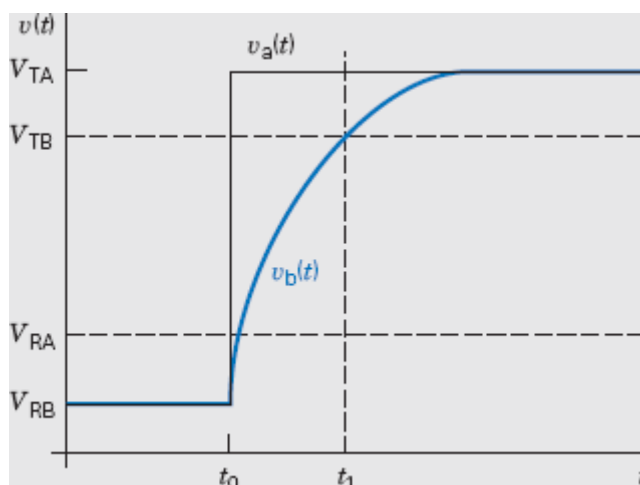



FIGURA 8.11-2 Tensões importantes na transição de 0 lógico para 1 lógico.

Descrevendo em palavras o que acontece, um 0 lógico é enviado e recebido. A saída do transmissor muda bruscamente para V_{TA} no instante t_0. A tensão de entrada do receptor, v_b, muda mais lentamente; apenas no instante t_1 a tensão de entrada do receptor aumenta o suficiente para ser interpretada como um

1 lógico, ou seja,

$$v_b > V_{RA} \quad \text{para} \quad t > t_1$$

O tempo necessário para que o receptor reconheça a transição de 0 para 1,

$$\Delta t = t_1 - t_0$$

é chamado de tempo de retardo. Esse tempo é importante porque estabelece um limite para a velocidade de transmissão. Para assegurar que os pulsos que representam uns e zeros sejam recebidos corretamente, é preciso que cada pulso dure pelo menos Δt. Isso significa que a velocidade de transmissão é inversamente proporcional ao tempo de retardo.

Suponha que dois circuitos TTL sejam ligados por um cabo coaxial RG58. Que restrição deve ser imposta ao comprimento do cabo para assegurar que o tempo de retardo Δt seja menor que 2 ns?

Descreva a Situação e as Hipóteses

A tensão $v_b(t)$ é a tensão no capacitor de um circuito *RC*. O circuito *RC* está no regime estacionário antes do instante t_0.

A entrada do circuito *RC* é $v_a(t)$. Antes do instante t_0, $v_a(t) = V_{TB} = 0{,}4$ V. No instante t_0, $v_a(t)$ muda bruscamente. Depois do instante t_0, $v_a(t) = V_{TA} = 2{,}4$ V.

Antes do instante t_0, $v_b(t) = V_{TB} = 0{,}4$ V. Depois do instante t_0, $v_b(t)$ aumenta exponencialmente. Depois de um tempo suficientemente longo, $v_b(t) = V_{TA} = 2{,}4$ V.

A constante de tempo do circuito *RC* é

$$\tau = R \cdot C = rc\ell^2 = 47{,}52 \times 10^{-2} \cdot \ell^2$$

em que ℓ é o comprimento do cabo em metros.

Estabeleça a Meta

Calcular o comprimento máximo do cabo, ℓ, para o qual $v_b > V_{RA} = 2{,}0$ V no instante $t = t_0 + \Delta t$, em que $\Delta t = 2$ ns.

Formule um Plano

Calcular a tensão $v_b(t)$ da Figura 8.11-1*b*. A tensão $v_b(t)$ depende do comprimento ℓ do cabo, já que a constante de tempo do circuito *RC* depende de ℓ. Fazer $v_b = V_{RA}$ no instante $t_1 = t_0 + \Delta t$. Resolver a equação resultante para obter o comprimento do cabo.

Execute o Plano

Usando a notação introduzida neste capítulo,

$$v_b(0) = V_{TB} = 0{,}4 \text{ V}$$
$$v_b(\infty) = V_{TA} = 2{,}4 \text{ V}$$

e

$$\tau = 47{,}52 \times 10^{-12} \cdot \ell^2$$

De acordo com a Eq. 8.3-6, a tensão $v_b(t)$ é dada por

$$v_b(t) = V_{TA} + (V_{TB} - V_{TA})e^{-(t-t_0)/\tau}$$

Como a tensão no capacitor, v_b, deve ser igual a V_{RA} no instante $t_1 = t_0 + \Delta t$,

$$V_{RA} = V_{TA} + (V_{TB} - V_{TA})e^{-\Delta t/\tau}$$

Explicitando o tempo de retardo Δt, obtemos

$$\Delta t = -\tau \ln\left(\frac{V_{RA} - V_{TA}}{V_{TB} - V_{TA}}\right) = -47{,}52 \times 10^{-12} \cdot \ell^2 \cdot \ln\left(\frac{V_{RA} - V_{TA}}{V_{TB} - V_{TA}}\right)$$

Nesse caso,

$$\ell = \sqrt{\frac{-\Delta t}{47{,}52 \times 10^{-12} \cdot \ln\left(\frac{V_{RA} - V_{TA}}{V_{TB} - V_{TA}}\right)}}$$

e, portanto,

$$\ell = \sqrt{\frac{-2 \cdot 10^{-9}}{47{,}52 \times 10^{-12} \cdot \ln\left(\frac{2{,}0 - 2{,}4}{0{,}4 - 2{,}4}\right)}} = 5{,}11 \text{ m}$$

Verifique se a Solução Proposta Está Correta

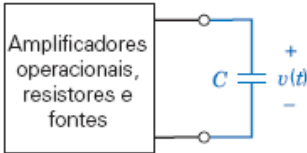
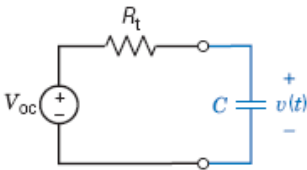
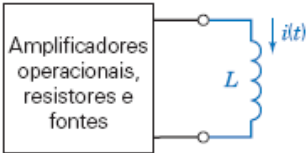
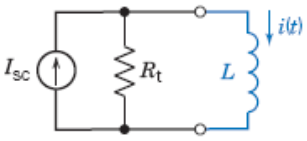
Para $\ell = 5{,}11$ m, temos:

$$R = 0{,}54 \times 5{,}11 = 2{,}76 \ \Omega$$

$$C = (88 \times 10^{-12}) \times 5{,}11 = 450 \text{ pF}$$

$$\tau = 2{,}76 \times (450 \times 10^{-12}) = 1{,}24 \text{ ns}$$

$$\Delta t = -1{,}24 \times 10^{-9} \times \ln\left[\frac{2{,}0 - 2{,}4}{0{,}4 - 2{,}4}\right] = 1{,}995 \text{ ns}$$

Como $\Delta t < 2$ ns, as especificações são satisfeitas, mas sem margem para erros.

8.12 RESUMO

- Tensões e correntes podem ser usadas para codificar, armazenar e processar informações. Quando uma tensão ou corrente é usada para representar informações, essa tensão ou corrente é chamada de sinal. Os circuitos elétricos que processam informações são chamados de circuitos de processamento de sinais.
- Os circuitos que contêm componentes que armazenam energia, isto é, capacitores e indutores, são representados por equações diferenciais. Para analisar circuitos que contêm componentes desse tipo, é preciso resolver equações diferenciais.
- Neste capítulo, discutimos apenas circuitos de primeira ordem. Os circuitos de primeira ordem contêm apenas um componente que armazena energia e são representados por equações diferenciais de primeira ordem, que são relativamente fáceis de resolver usando o método de separação de variáveis.
- A *resposta completa* de um circuito é a soma da *resposta natural* e da *resposta forçada*. A resposta natural é a solução geral da equação diferencial que representa o circuito quando a entrada é zero. A resposta forçada é a solução particular da equação diferencial que representa o circuito.
- A resposta completa pode ser separada em uma *resposta transitória* e uma *resposta estacionária*. A resposta transitória tende a desaparecer com o passar do tempo, deixando apenas a resposta estacionária. Quando a entrada de um circuito é uma constante ou uma função senoidal, a resposta estacionária pode ser usada como a resposta forçada.
- A expressão *resposta transitória* às vezes é usada para designar a "parte transitória da resposta completa" e às vezes é usada para designar uma resposta completa que inclui uma parte transitória. Em particular, o programa

PSpice usa o termo *resposta transitória* para designar a resposta completa. Para evitar equívocos, o termo "resposta transitória" deve ser usado com cautela.

- A *resposta a um degrau* é a resposta de um circuito quando a entrada é uma função degrau unitário e todas as condições iniciais do circuito são nulas.
- Usamos os circuitos equivalentes de Thévenin e Norton para reduzir o problema de analisar qualquer circuito de primeira ordem ao problema de analisar um circuito simples de primeira ordem, que pode ser de dois tipos. O primeiro tipo de circuito simples é um circuito série formado por uma fonte de tensão, um resistor e um capacitor. O outro é um circuito paralelo formado por uma fonte de corrente, um resistor e um indutor. A Tabela 8.12-1 mostra as equações usadas para determinar a resposta completa de um circuito de primeira ordem.
- O parâmetro τ da equação diferencial de primeira ordem $dx(t)/dt + x(t)/\tau = K$ é chamado de constante de tempo. A constante de tempo τ é o tempo necessário para que a resposta de um circuito de primeira ordem atinja 63% da transição do valor inicial para o valor final.
- A estabilidade é uma propriedade de circuitos bem comportados. É muito fácil verificar se um circuito de primeira ordem é estável. Um circuito de primeira ordem é estável se, e apenas se, a constante de tempo é não negativa, ou seja, se $\tau \geq 0$.

Tabela 8.12-1 Circuitos de Primeira Ordem

CIRCUITOS DE PRIMEIRA ORDEM COM UM CAPACITOR	CIRCUITOS DE PRIMEIRA ORDEM COM UM INDUTOR
Substitua o circuito formado por amplificadores operacionais, resistores e fontes por um circuito equivalente de Thévenin:	Substitua o circuito formado por amplificadores operacionais, resistores e fontes por um circuito equivalente de Norton:
A tensão do capacitor é: $v(t) = V_{oc} + (v(0) - v_{oc})e^{-t/\tau}$	A corrente no indutor é: $i(t) = I_{sc} + (i(0) - I_{sc})e^{-t/\tau}$
em que a constante de tempo, τ, é $\tau = R_t C$	em que a constante de tempo, τ, é $\tau = \frac{L}{R_t}$
e a condição inicial, $v(0)$, é a tensão do capacitor no instante $t = 0$.	e a condição inicial, $i(0)$, é a corrente do indutor no instante $t = 0$.

PROBLEMAS

Seção 8.3 Resposta de um Circuito de Primeira Ordem a uma Entrada Constante

P 8.3-1 O circuito da Figura P 8.3-1 está no regime estacionário antes que a chave seja fechada no instante $t = 0$. A entrada do circuito é a tensão da fonte de tensão, 12 V. A saída é a tensão do capacitor, $v(t)$. Determine $v(t)$ para $t > 0$.

Resposta: $v(t) = 6 - 2e^{-1,33t}$ V

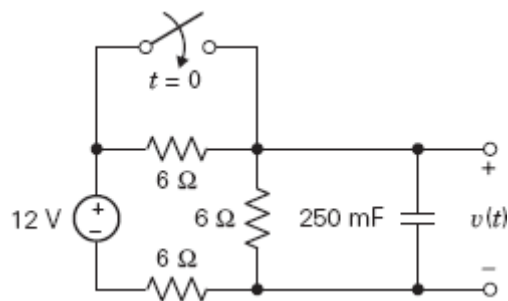



Figura P 8.3-1

P 8.3-2 O circuito da Figura P 8.3-2 está no regime estacionário antes que a chave seja aberta no instante t = 0. A entrada do circuito é a tensão da fonte de tensão, 12 V. A saída é a corrente no indutor, $i(t)$. Determine $i(t)$ para $t > 0$.

Resposta: $i(t) = 1 + e^{-0,5t}$ A

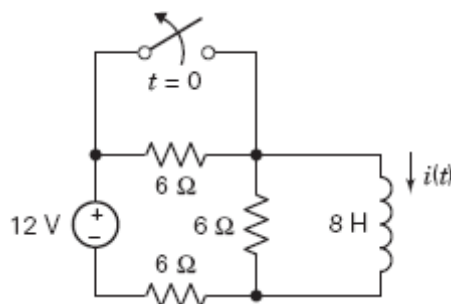



Figura P 8.3-2

P 8.3-3 O circuito da Figura P 8.3-3 está no regime estacionário quando a chave é fechada no instante t = 0. Determine a tensão no capacitor, $v(t)$, para $t > 0$.

Resposta: $v(t) = -6 + 18e^{-6,67t}$ V

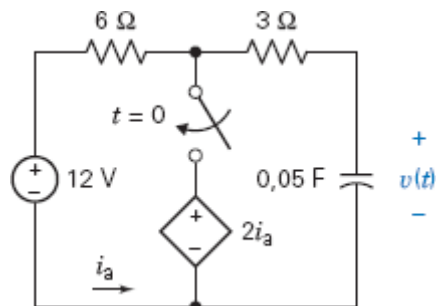



Figura P 8.3-3

P 8.3-4 O circuito da Figura P 8.3-4 está no regime estacionário quando a chave é fechada no instante t = 0. Determine a corrente no indutor, $i(t)$, para $t > 0$.

Resposta: $i(t) = -2 + \frac{10}{3}e^{-0,5t}$ A

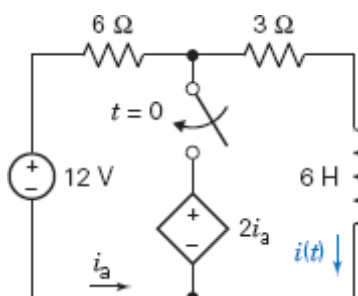



Figura P 8.3-4

P 8.3-5 O circuito da Figura P 8.3-5 está no regime estacionário quando a chave é fechada no instante $t = 0$. Determine a tensão de saída, $v_o(t)$, para $t > 0$.

Resposta: $v_o(t) = 10 - 5e^{-12,5t}$ V

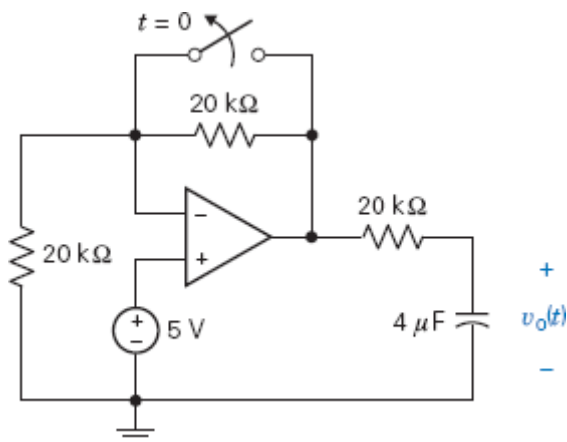



Figura P 8.3-5

P 8.3-6 O circuito da Figura P 8.3-6 está no regime estacionário quando a chave é fechada no instante $t = 0$. Determine a tensão de saída, $v_o(t)$, para $t > 0$.

Resposta: $v_o(t) = 5e^{-4000t}$ V

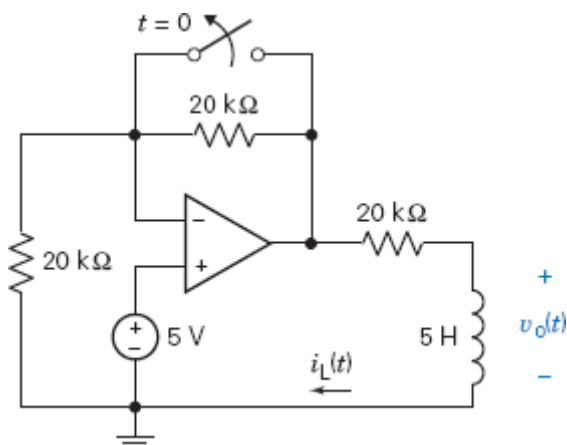



Figura P 8.3-6

P 8.3-7 A Figura P 8.3-7*a* mostra o astronauta Dale Gardner usando a *manned maneuvering unit* (unidade de manobra tripulada) para chegar ao satélite *Westar VI*, que estava girando sem controle, em 14 de novembro de 1984. Gardner usou uma grande ferramenta chamada *apogee capture device* (ACD) para estabilizar o satélite e recolhê-lo, como mostra a Figura P 8.3-7*a*. A ACD pode ser modelada pelo circuito da Figura P 8.3-7*b*. Determine a corrente no indutor, i_L, para $t > 0$.

Resposta: $i_L(t) = 6e^{-20t}$ A

(a)

Cortesia da NASA

(b)

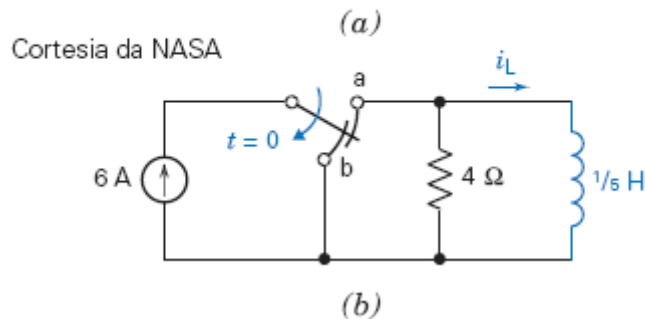



Figura P 8.3-7 (*a*) O astronauta Dale Gardner usando a *manned maneuvering unit* para se aproximar do satélite *Westar* VI. (*b*) Modelo do *apogee capture device*. Suponha que a chave permaneceu na posição a por um longo tempo antes de passar para a posição b no instante $t = 0$.

P 8.3-8 O circuito da Figura P 8.3-8 está no regime estacionário quando a chave é aberta no instante $t = 0$. A entrada do circuito é a tensão da fonte de tensão, V_s. A fonte é uma fonte de tensão contínua, ou seja, V_s é constante. A saída do circuito é a tensão no capacitor, $v_o(t)$. A tensão de saída é dada por

$$v_o(t) = 2 + 8e^{-0,5t} \text{ V para } t > 0$$

Determine o valor da tensão de entrada V_s, da capacitância C e da resistência R.

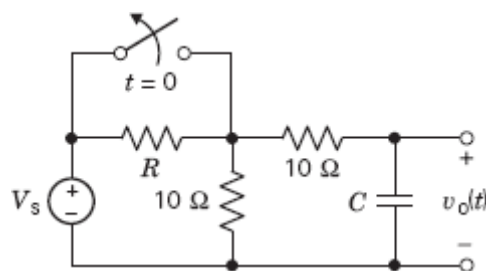



Figura P 8.3-8

P 8.3-9 O circuito da Figura P 8.3-9 está no regime estacionário quando a chave é fechada no instante $t = 0$. A entrada do circuito é a tensão da fonte de tensão, 24 V. A saída do circuito, a tensão no resistor de 3 Ω, é dada por

$$v_o(t) = 6 - 3e^{-0,35t} \text{ V quando } t > 0$$

Determine o valor da indutância L e das resistências R_1 e R_2.

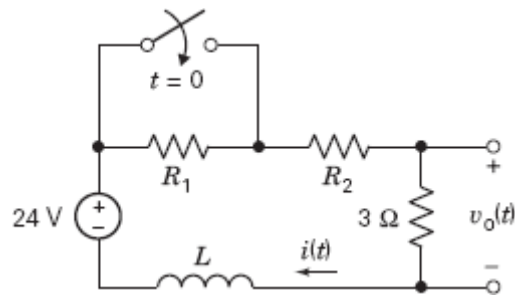



Figura P 8.3-9

P 8.3-10 O sistema de alarme da porta de um edifício de escritórios pode ser modelado pelo circuito da Figura P 8.3-10. A chave representa a trava da porta e v é a tensão que dispara o sinal de alarme. Determine $v(t)$ para $t > 0$, supondo que a chave permaneceu fechada por um longo tempo antes de ser aberta em $t = 0^-$.

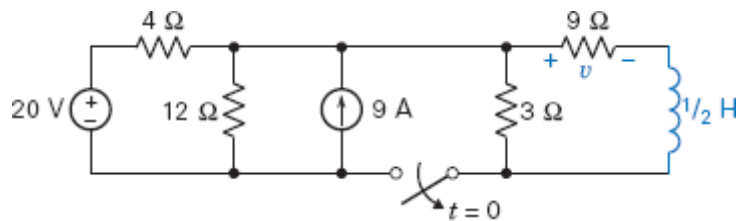



Figura P 8.3-10 Um circuito de alarme.

P 8.3-11 A tensão $v(t)$ no circuito da Figura P 8.3-11 é dada por

$$v(t) = 8 + 4e^{-2t} \text{ V para } t > 0$$

Determine o valor de R_1, R_2 e C.

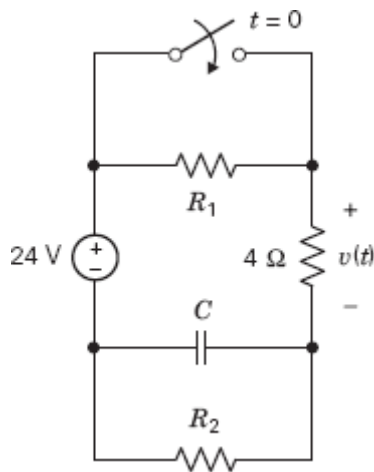



Figura P 8.3-11

P 8.3-12 O circuito da Figura P 8.3-12 está no regime estacionário quando a chave é aberta no instante $t = 0$. Determine $i(t)$ para $t \geq 0$.

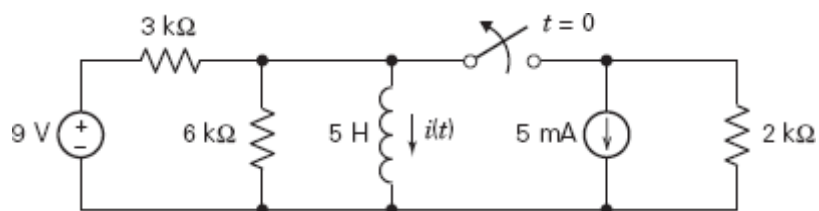



Figura P 8.3-12

P 8.3-13 O circuito da Figura P 8.3-13 está no regime estacionário quando a chave é aberta no instante $t = 0$. Determine $v(t)$ para $t \geq 0$.

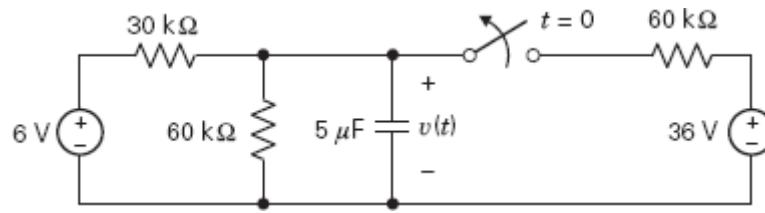



Figura P 8.3-13

P 8.3-14 O circuito da Figura P 8.3-14 está no regime estacionário quando a chave é fechada no instante $t = 0$. Determine $i(t)$ para $t \geq 0$.

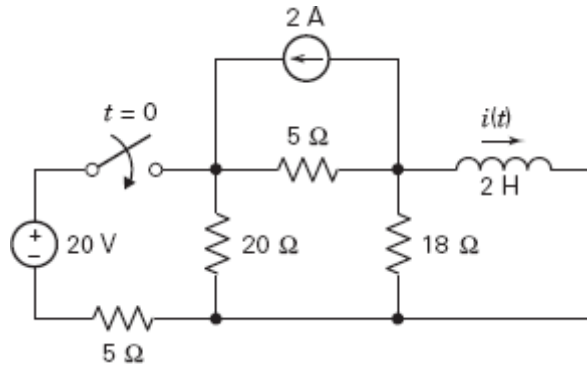



Figura P 8.3-14

P 8.3-15 O circuito da Figura P 8.3-15 está no regime estacionário quando a chave é fechada. Determine a corrente no indutor depois que a chave é fechada.

Sugestão: $i(0) = 0{,}1$ A, $I_{sc} = 0{,}3$ A, $R_t = 40\ \Omega$

Resposta: $i(t) = 0{,}3 - 0{,}2e^{-2t}$ A para $t \geq 0$

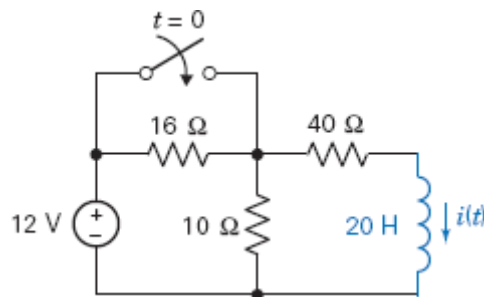



Figura P 8.3-15

P 8.3-16 Considere o circuito da Figura P 8.3-16. (*a*) Determine a constante de tempo τ e a tensão do capacitor no regime estacionário com a chave aberta. (*b*) Determine a constante de tempo τ e a tensão do capacitor no regime estacionário com a chave fechada.

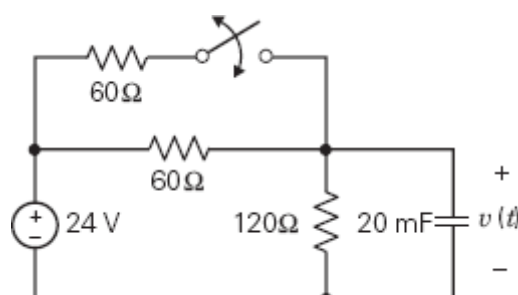



Figura P 8.3-16

P 8.3-17 O circuito da Figura P 8.3-17 está no regime estacionário no instante em que a chave é fechada. A resposta do circuito é a tensão $v(t)$. Determine $v(t)$ para $t > 0$.

Sugestão: Depois que a chave é fechada, a corrente no indutor é $i(t) = 0{,}2(1 - e^{-1{,}8t})$ A

Resposta: $v(t) = 8 + e^{-1{,}8t}$ V

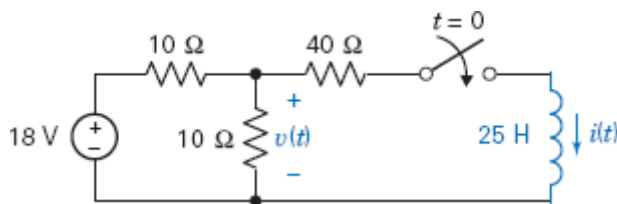



Figura P 8.3-17

P 8.3-18 O circuito da Figura P 8.3-18 está no regime estacionário no instante em que a chave é fechada. A resposta do circuito é a tensão $v(t)$. Determine $v(t)$ para $t > 0$.

Resposta: $v(t) = 37{,}5 - 97{,}5e^{-6400t}$ V

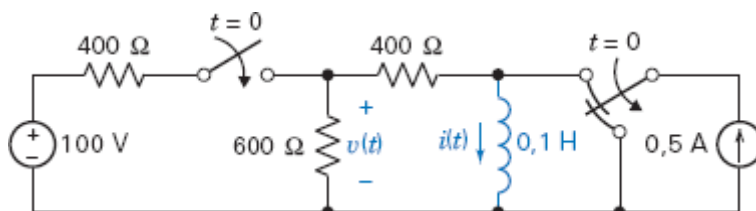



Figura P 8.3-18

P 8.3-19 O circuito da Figura P 8.3-19 está no regime estacionário no instante em que a chave é fechada. Determine $v(t)$ para $t > 0$.

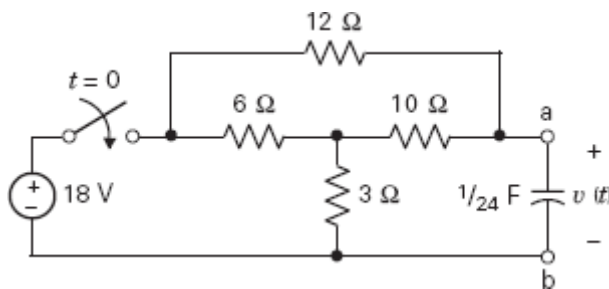



Figura P 8.3-19

P 8.3-20 O circuito da Figura P 8.3-20 está no regime estacionário no instante em que a chave é fechada. Determine $i(t)$ para $t \geq 0$.

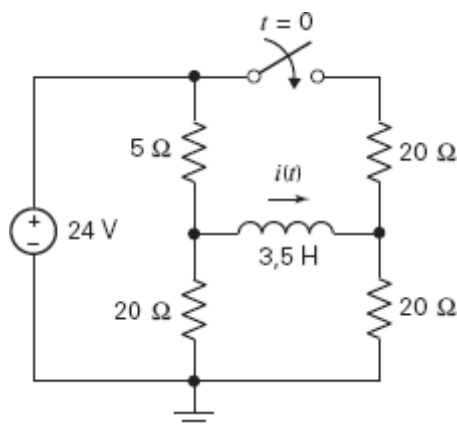



Figura P 8.3-20

P 8.3-21 O circuito da Figura P 8.3-21 está no regime estacionário no instante em que a chave é fechada. Determine $v(t)$ para $t > 0$.

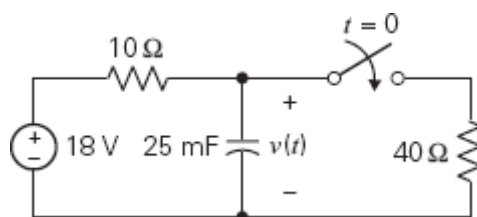



Figura P 8.3-21

P 8.3-22 O circuito da Figura P 8.3-22 está no regime estacionário quando a chave é fechada. Determine $i(t)$ para $t \geq 0$.

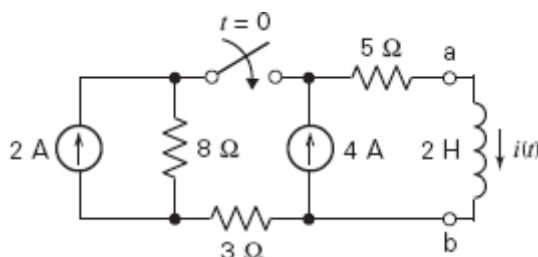



Figura P 8.3-22

P 8.3.23 O circuito da Figura P 8.3-23 está no regime estacionário quando a chave é fechada. Determine $i(t)$ para $t \geq 0$.

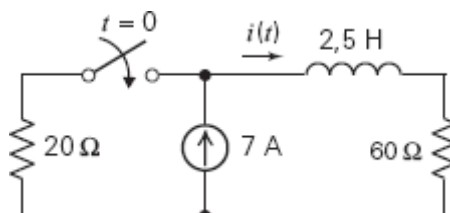



Figura P 8.3-23

P 8.3-24 Sabendo que o gráfico da corrente no indutor da Figura P 8.3-24*a* em função do tempo é o que aparece na Figura P 8.3-24*b*, determine o valor de L, R_1 e R_2.

Sugestão: Use o gráfico para determinar valores de D, E, F e a para os quais a corrente no indutor pode ser representada pelas equações

$$i(t) = \begin{cases} D \text{ para } t \leq 0 \\ E + Fe^{-at} \text{ para } t \geq 0 \end{cases}$$

Resposta: $L = 4{,}8$ H, $R_1 = 200\ \Omega$ e $R_2 = 300\ \Omega$

P 8.3-25 Sabendo que o gráfico da tensão no resistor de 40 Ω da Figura P 8.3-25*a* em função do tempo é o que aparece na Figura P 8.3-25*b*, determine o valor de L e R_2.

Sugestão: Use o gráfico para determinar valores de D, E, F e a para os quais a tensão no resistor de 40 Ω pode ser representada pelas equações

$$v(t) = \begin{cases} D \text{ para } t < 0 \\ E + Fe^{-at} \text{ para } t > 0 \end{cases}$$

Resposta: $L = 8$ H e $R_2 = 10\ \Omega$

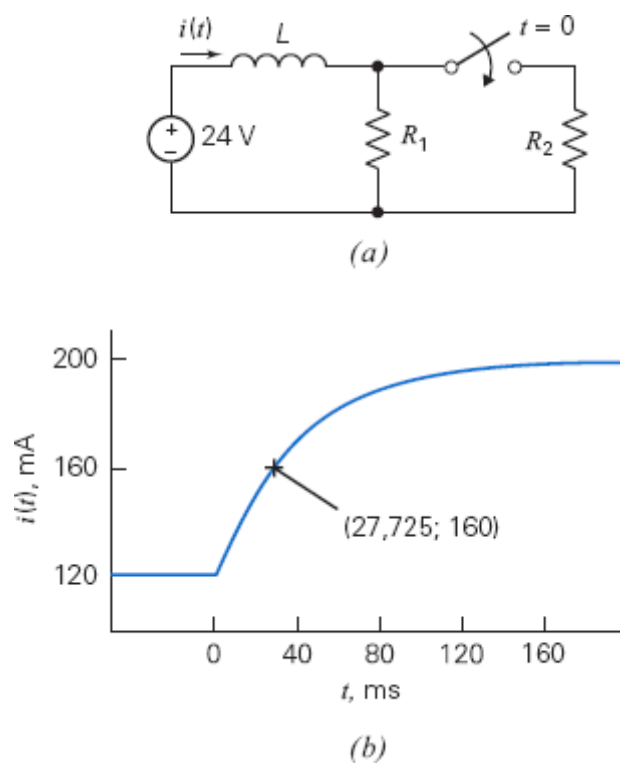



Figura P 8.3-24

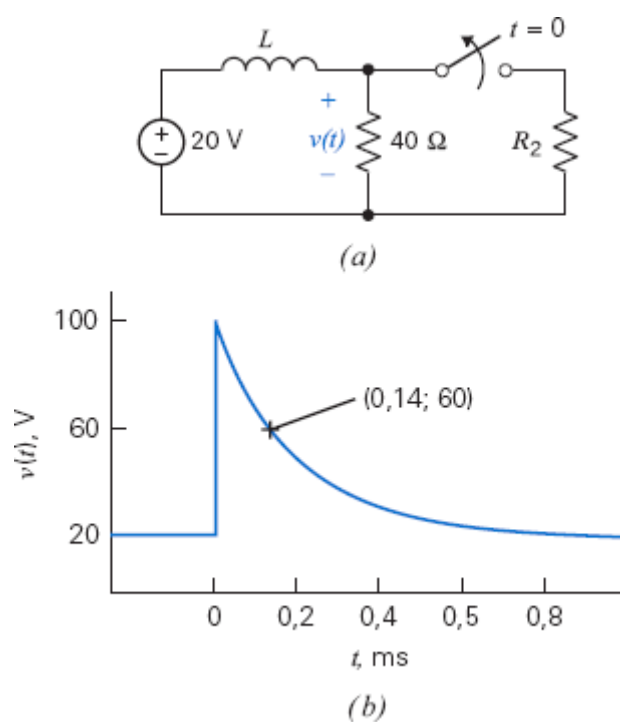



Figura P 8.3-25

P 8.3-26 Determine $v_o(t)$ para $t > 0$ no circuito da Figura P 8.3-26.

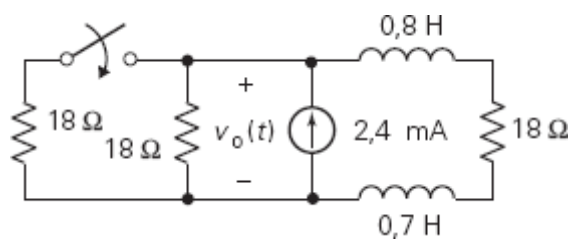



Figura P 8.3-26

P 8.3-27 O circuito da Figura P 8.3-27 está no regime estacionário quando a chave é fechada no instante t = 0. Depois que a chave é fechada, a corrente do indutor é dada por

$$i(t) = 0{,}6 - 0{,}2e^{-5t} \text{ A para } t \geq 0$$

Determine o valor de R_1, R_2 e L.

Resposta: $R_1 = 20\ \Omega$, $R_2 = 10\ \Omega$ e $L = 4$ H

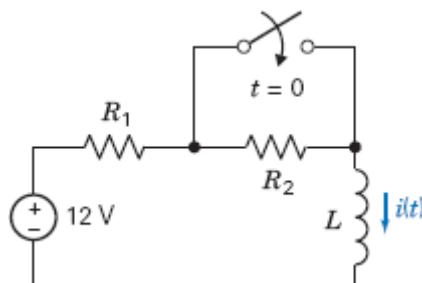



Figura P 8.3-27

P 8.3-28 Depois do instante t = 0, um circuito é representado pelo diagrama da Figura P 8.3-28.

(a) Suponha que a corrente do indutor é

$$i(t) = 21{,}6 + 28{,}4e^{-4t} \text{ mA para } t \geq 0$$

Determine o valor de R_1 e R_3.

(b) Em vez disso, suponha que $R_1 = 16\ \Omega$, $R_3 = 20\ \Omega$ e que a condição inicial é $i(0) = 10$ mA. Determine a corrente do indutor para $t \geq 0$.

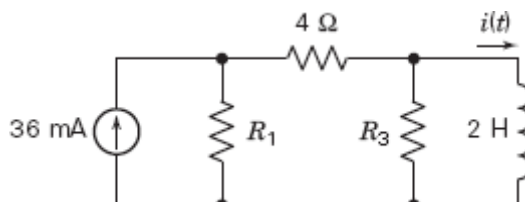



Figura P 8.3-28

P 8.3-29 Considere o circuito da Figura P 8.3-29.

(a) Determine a constante de tempo, τ, e a tensão do capacitor no regime estacionário, $v(\infty)$, com a chave aberta.

(b) Determine a constante de tempo, τ, e a tensão do capacitor no regime estacionário, $v(\infty)$, com a chave fechada.

Respostas: **(a)** $\tau = 3$ s e $v(\infty) = 24$ V; **(b)** $\tau = 2{,}25$ s e $v(\infty) = 12$ V

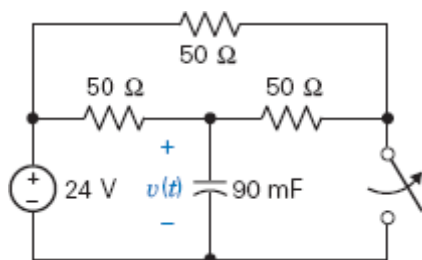



Figura P 8.3-29

P 8.4-1 O circuito da Figura P 8.4-1 está no regime estacionário quando a chave é fechada no instante $t = 0$. A chave permanece fechada por 1,5 s e em seguida é aberta. Determine a tensão do capacitor, $v(t)$, para $t > 0$.

Sugestão: Determine $v(t)$ quando a chave é fechada. Calcule $v(t)$ no instante $t = 1{,}5$ s para obter $v(1{,}5)$. Use $v(1{,}5)$ como condição inicial para determinar $v(t)$ depois que a chave é novamente aberta.

Resposta: $v(t) = \begin{cases} 5 + 5e^{-5t}\ \text{V} & \text{para } 0 < t < 1{,}5\ \text{s} \\ 10 - 2{,}64e^{-2{,}5(t-1{,}5)}\ \text{V} & \text{para } 1{,}5\ \text{s} < t \end{cases}$

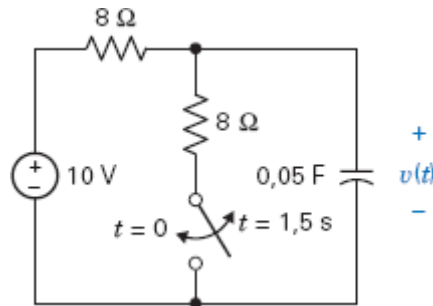



Figura P 8.4-1

P 8.4-2 O circuito da Figura P 8.4-2 está no regime estacionário quando a chave é fechada no instante $t = 0$. A chave permanece fechada por 1,5 s e em seguida é aberta. Determine a corrente $i(t)$ no indutor para $t > 0$.

Resposta: $v(t) = \begin{cases} 2 + e^{-0{,}5t}\ \text{A} & \text{para } 0 < t < 1{,}5\ \text{s} \\ 3 - 0{,}53e^{-0{,}667(t-1{,}5)}\ \text{A} & \text{para } 1{,}5\ \text{s} < t \end{cases}$

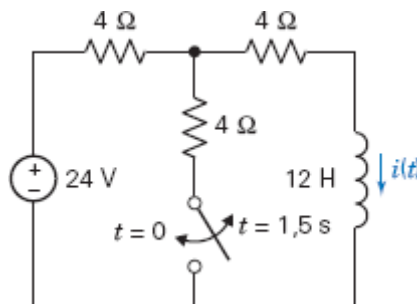



Figura P 8.4-2

P 8.4-3 Os marca-passos são usados para manter o coração batendo regularmente em pessoas com problemas cardíacos. A Figura P 8.4-3 mostra o circuito de um marca-passo. A resistência dos fios, R, pode ser desprezada, já que $R < 1$ mΩ. A resistência do coração, R_L, é da ordem de 1 kΩ. A primeira chave é acionada no instante $t = t_0$ e a segunda chave é acionada no instante $t_1 = t_0 + 10$ ms. O ciclo se repete a cada segundo. Determine $v(t)$ para $t_0 \leq t \leq 1$. Observe que é mais fácil supor que $t_0 = 0$ para realizar o cálculo. O ciclo se repete quando a chave 1 volta à posição a e a chave 2 volta à posição aberta.

Sugestão: Use a relação $q = Cv$ para determinar $v(0^-)$ para o capacitor de 100 μF.

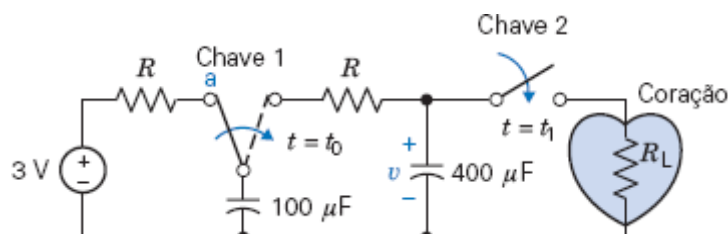



Figura P 8.4-3

P 8.4-4 O sistema de flash eletrônico de uma câmara fotográfica usa o circuito da Figura P 8.4-4. O flash eletrônico foi inventado por Harold E. Edgerton em 1930. Um capacitor é carregado até ser atingido o regime estacionário e em seguida é descarregado quando o obturador da câmara é disparado. A descarga produz um clarão momentâneo. Determine o tempo t_1 que a carga do capacitor leva para se reduzir à metade do valor inicial e a corrente $i(t)$ no instante $t = t_1$.

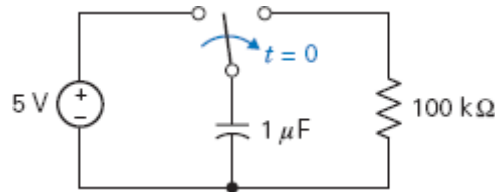



Figura P 8.4-4 Circuito de um flash eletrônico.

P 8.4-5 O circuito da Figura P 8.4-5 está no regime estacionário quando a chave é aberta em $t = 0$. A chave permanece aberta por 0,5 segundo e em seguida é fechada. Determine $v(t)$ para $t \geq 0$.

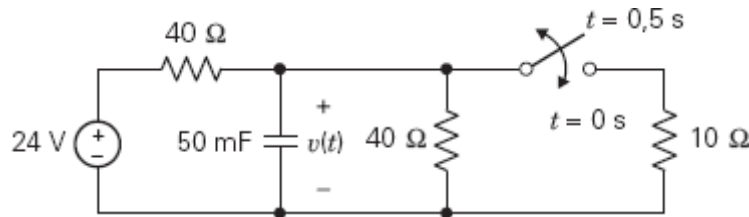



Figura P 8.4-5

8.5 Estabilidade de Circuitos de Primeira Ordem

P 8.5-1 O circuito da Figura P 8.5-1 contém uma fonte de tensão controlada por corrente. Que restrição deve ser imposta ao ganho R da fonte dependente para assegurar a estabilidade do circuito?

Resposta: $R < 400\ \Omega$

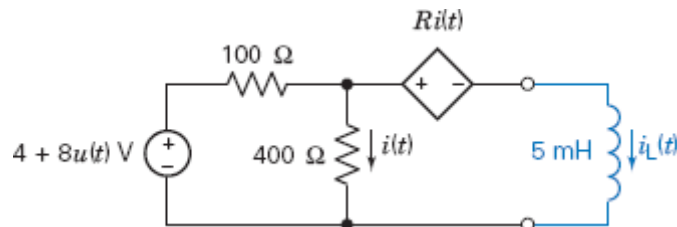



Figura P 8.5-1

P 8.5-2 O circuito da Figura P 8.5-2 contém uma fonte de corrente controlada por corrente. Que restrição deve ser imposta ao ganho B da fonte dependente para assegurar a estabilidade do circuito?

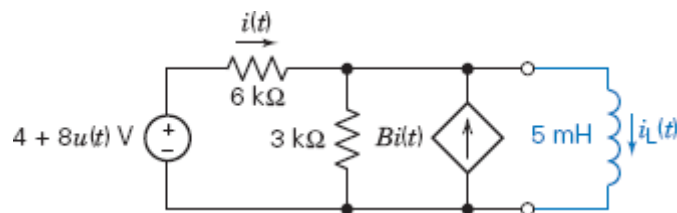



Figura P 8.5-2

8.6 Fontes do Tipo Degrau

P 8.6-1 A entrada do circuito da Figura P 8.6-1 é a tensão da fonte de tensão, $v_s(t)$. A saída é a tensão do capacitor, $v_o(t)$. Determine a saída do circuito se a entrada é $v_s(t) = 8 - 15u(t)$ V.

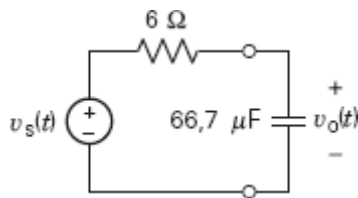



Figura P 8.6-1

P 8.6-2 A entrada do circuito da Figura P 8.6-2 é a tensão da fonte de tensão, $v_s(t)$. A saída é a tensão do capacitor, $v_o(t)$. Determine a saída do circuito se a entrada é $v_s(t) = 3 + 3u(t)$ V.

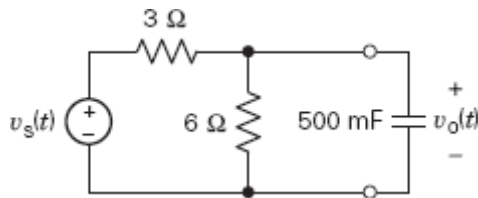



Figura P 8.6-2

P 8.6-3 A entrada do circuito da Figura P 8.6-3 é a tensão da fonte de tensão, $v_s(t)$. A saída é a corrente no indutor, $i_o(t)$. Determine a saída do circuito se a entrada é $v_s(t) = -7 + 13u(t)$ V.

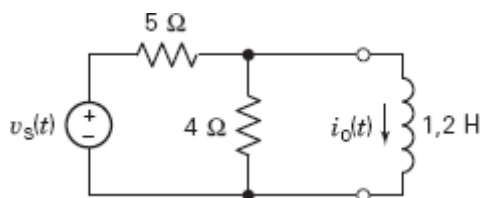



Figura P 8.6-3

P 8.6-4 Determine $v_o(t)$ para $t > 0$ no circuito da Figura P 8.6-4.

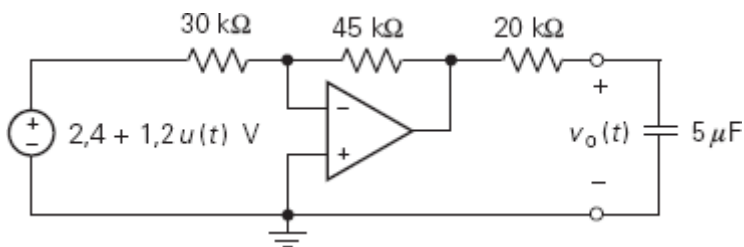



Figura P 8.6-4

P 8.6-5 A tensão inicial do capacitor do circuito da Figura P 8.6-5 é zero. Determine a tensão $v(t)$ se a tensão da fonte é um pulso descrito por

$$v_s = \begin{cases} 0 & t < 1 \text{ s} \\ 4 \text{ V} & 1 < t < 2 \text{ s} \\ 0 & t > 2 \text{ s} \end{cases}$$

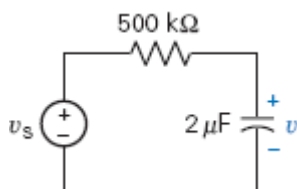



Figura 8.6-5

P 8.6-6 Estudos de um inseto artificial estão sendo realizados com o objetivo de compreender o sistema nervoso dos animais. A Figura P 8.6-6 mostra o modelo de um dos neurônios do sistema nervoso do inseto artificial. A fonte de tensão v_s é usada para gerar uma série de pulsos. A chave gera um pulso ao ser aberta em $t = 0$ e fechada em $t = 0{,}5$ s. Suponha que o circuito está no regime estacionário e que $v(0^-) = 10$ V. Determine a tensão $v(t)$ para $0 < t < 2$ s.

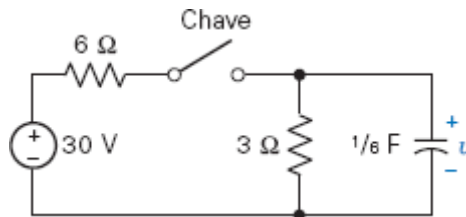



Figura P 8.6-6 Circuito de um modelo de neurônio.

P 8.6-7 Determine a tensão $v_o(t)$ no circuito da Figura P 8.6-7.

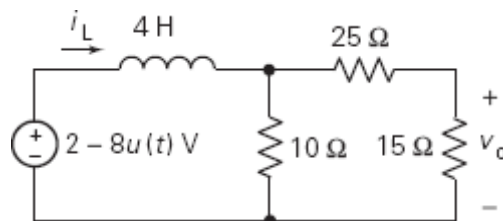



Figura P 8.6-7

P 8.6-8 Determine $v_c(t)$ para $t > 0$ no circuito da Figura P 8.6-8.

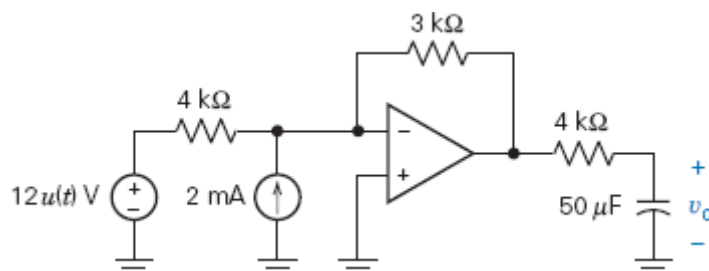



Figura P 8.6-8

P 8.6-9 A tensão da fonte de tensão do circuito da Figura P 8.6-9 é

$$v_s(t) = 7 - 14u(t) \text{ V}$$

Determine $v(t)$ para $t > 0$.

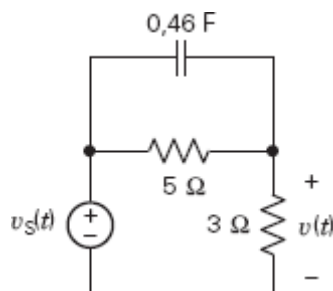



Figura P 8.6-9

P 8.6-10 Determine a tensão $v(t)$ para $t \geq 0$ no circuito da Figura P 8.6-10.

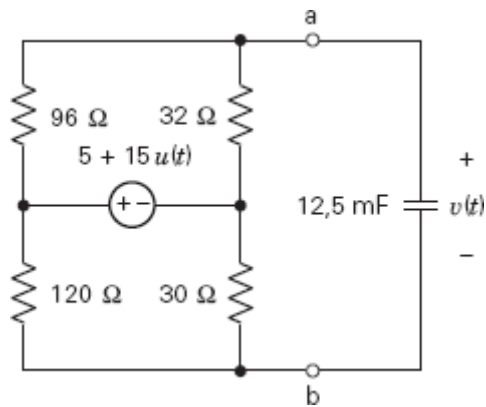



Figura P 8.6-10

P 8.6-11 A tensão da fonte de tensão do circuito da Figura P 8.6-11 é

$$v_s(t) = 5 + 20u(t)$$

Determine $i(t)$ para $t \geq 0$.

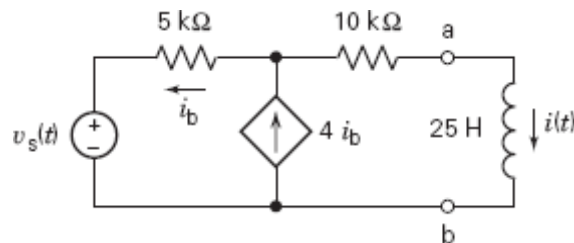



Figura P 8.6-11

P 8.6-12 A tensão da fonte de tensão no circuito da Figura P 8.6-12 é

$$v_s(t) = 12 - 6u(t) \text{ V}$$

Determine $v(t)$ para $t \geq 0$.

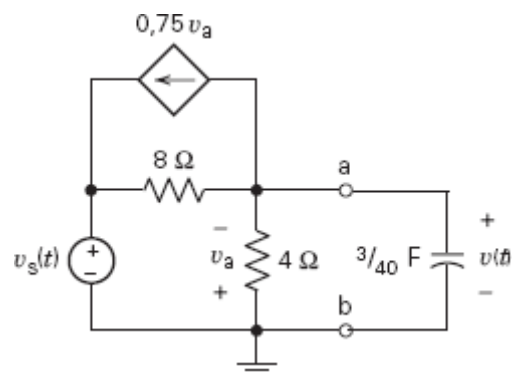



Figura P 8.6-12

P 8.6-13 Determine $i(t)$ para $t \geq 0$ no circuito da Figura P 8.6-13.

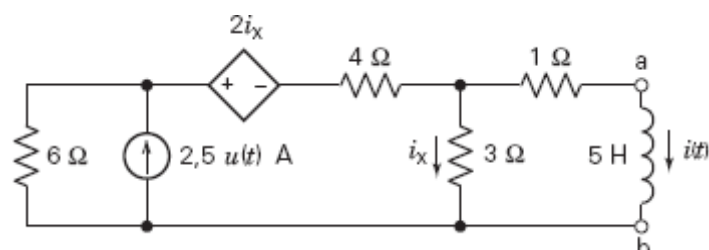



Figura P 8.6-13

P 8.6-14 Determine $i(t)$ para $t \geq 0$ no circuito da Figura P 8.6-14.

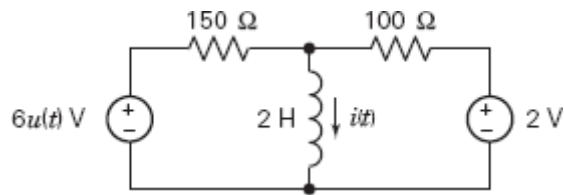



Figura P 8.6-14

P 8.6-15 Determine $v(t)$ para $t \geq 0$ no circuito da Figura P 8.6-15.

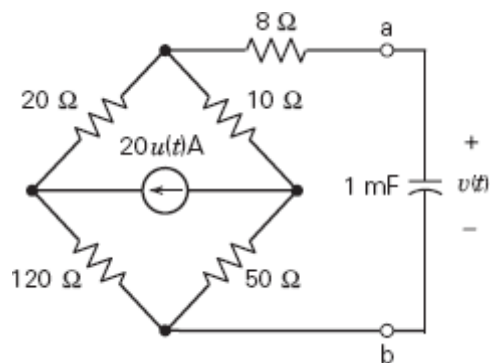



Figura P 8.6-15

P 8.6-16 Determine $v(t)$ para $t \geq 0$ no circuito da Figura P 8.6-16.

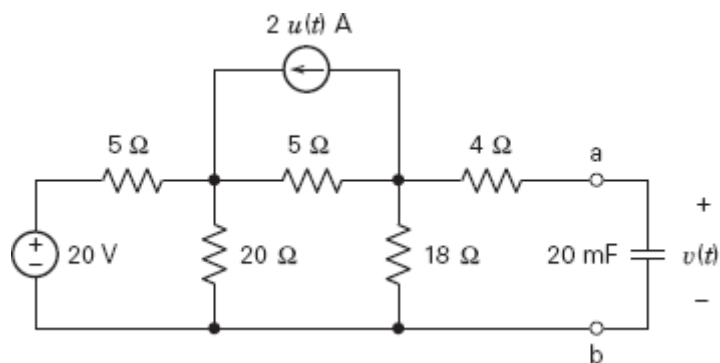



Figura P 8.6-16

P 8.6-17 Determine $i(t)$ para $t \geq 0$ no circuito da Figura P 8.6-17.

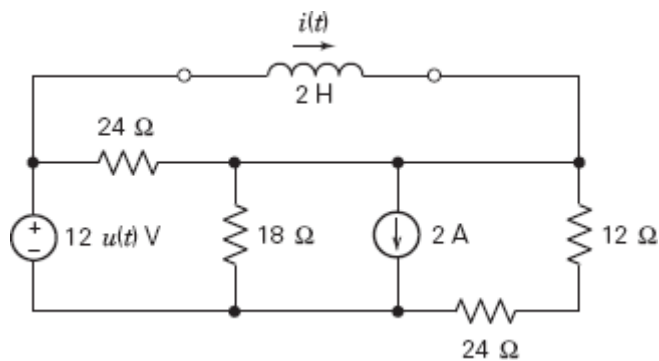



Figura P 8.6-17

P 8.6-18 A tensão da fonte de tensão do circuito da Figura P 8.6-18 é

$$v_s(t) = 8 + 12u(t) \text{ V}$$

Determine $v(t)$ para $t \geq 0$.

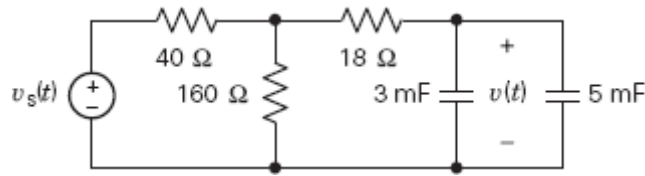



Figura P 8.6-18

P 8.6-19 Determine a corrente $i_o(t)$ no circuito da Figura 8.6-19.

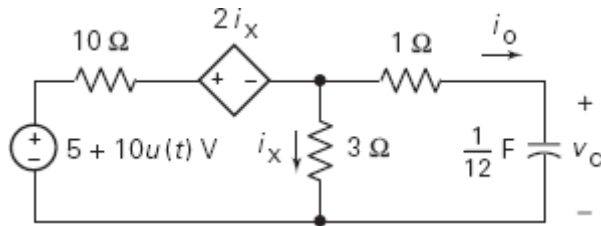



Figura P 8.6-19

P 8.6-20 A tensão da fonte de tensão da Figura P 8.6-20 é

$$v_s(t) = 25u(t) - 10 \text{ V}$$

Determine $i(t)$ para $t \geq 0$.

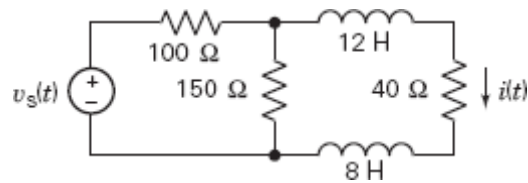



Figura P 8.6-20

P 8.6-21 A tensão da fonte de tensão do circuito da Figura P 8.6-21 é

$$v_s(t) = 30 - 24u(t) \text{ V}$$

Determine $i(t)$ para $t \geq 0$.

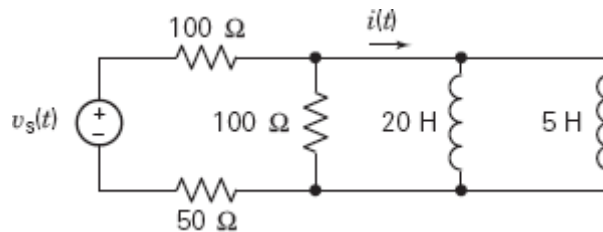



Figura P 8.6-21

P 8.6-22 A tensão da fonte de tensão do circuito da Figura P 8.6-22 é

$$v_s(t) = 10 + 40u(t) \text{ V}$$

Determine $v(t)$ para $t \geq 0$.

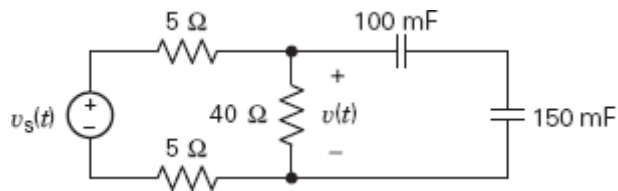



Figura P 8.6-22

P 8.6-23 Determine $v(t)$ para $t > 0$ no circuito da Figura P 8.6-23.

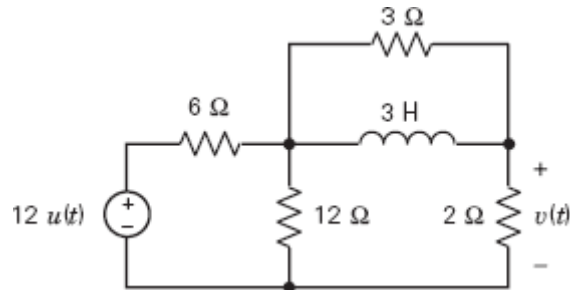



Figura P 8.6-23

P 8.6.24 A entrada do circuito da Figura P 8.6-24 é a corrente da fonte de corrente

$$i_s(t) = 2 + 4u(t) \text{ A}$$

A saída é a tensão $v(t)$. Determine $v(t)$ para $t > 0$.

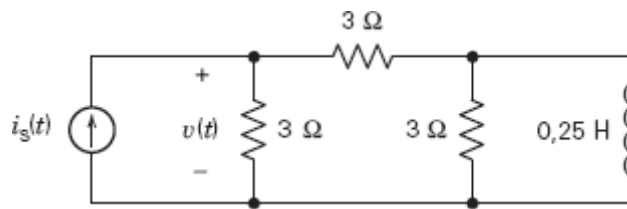



Figura P 8.6-24

P 8.6-25 A entrada do circuito da Figura P 8.6-25 é a tensão da fonte de tensão

$$v_s(t) = 6 + 6u(t)$$

A saída é a tensão $v_o(t)$. Determine $v_o(t)$ para $t > 0$.

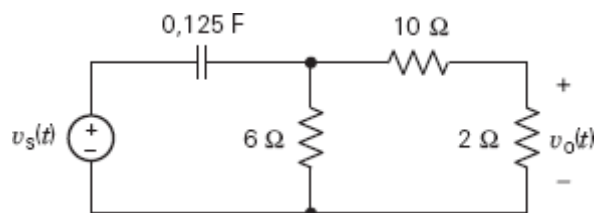



Figura P 8.6-25

P 8.6-26 Determine $v(t)$ para $t > 0$ no circuito da Figura P 8.6-26.

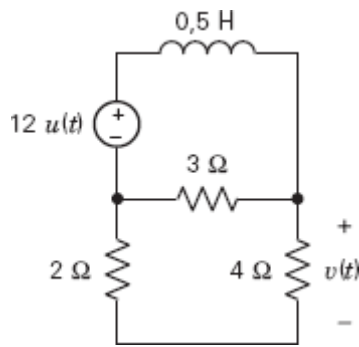



Figura P 8.6-26

P 8.6-27 Quando a entrada do circuito da Figura P 8.6-27 é a tensão da fonte de tensão

$$v_s(t) = 3 - u(t) \text{ V}$$

a saída é a tensão

$$v_o(t) = 10 + 5e^{-50t} \text{ V} \quad \text{para } t \geq 0$$

Determine o valor de R_1 e R_2.

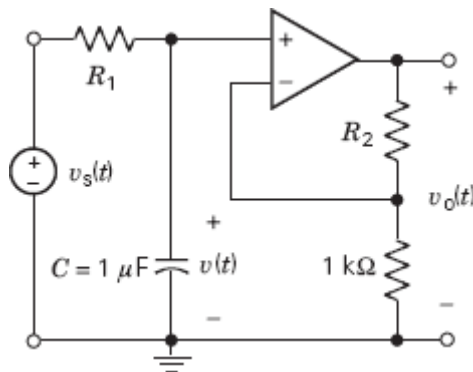



Figura P 8.6-27

P 8.6-28 A constante de tempo de um circuito é $\tau = 0{,}25$ s. Em resposta a um degrau de tensão, a tensão de um capacitor varia de −2,5 V para +4,2 V. Qual é o tempo necessário para que a tensão do capacitor aumente de −2,0 V para +2,0 V?

Seção 8.7 Resposta de um Circuito de Primeira Ordem a uma Fonte Variável

P 8.7-1 Determine $v_c(t)$ para $t > 0$ no circuito da Figura P 8.7-1 se $v_1 = 8e^{-5t}\, u(t)$ V. Suponha que o circuito esteja no regime estacionário em $t = 0^-$.

Resposta: $v_c(t) = 4e^{-9t} + 18e^{-5t}$ V

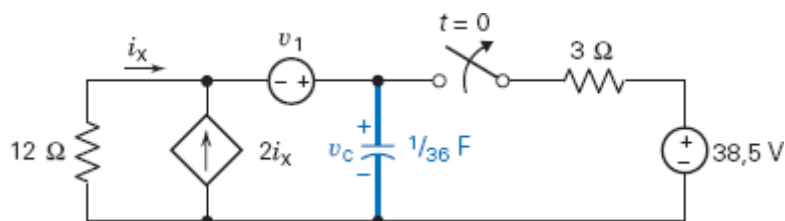



Figura P 8.7-1

P 8.7-2 Determine $v(t)$ para $t > 0$ no circuito da Figura P 8.7-2. Suponha que o circuito está no regime estacionário em $t = 0^-$.

Resposta: $v(t) = 20e^{-10t/3} - 12e^{-2t}$ V

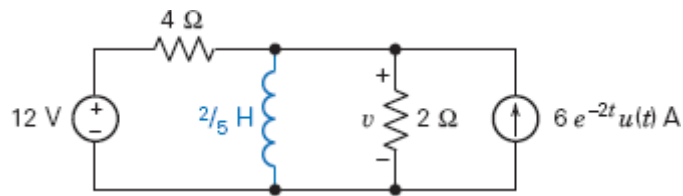



Figura P 8.7-2

P 8.7-3 Determine $v_c(t)$ para $t > 0$ no circuito da Figura P 8.7-3 se $i_s = (2 \cos 2t)\, u(t)$ mA.

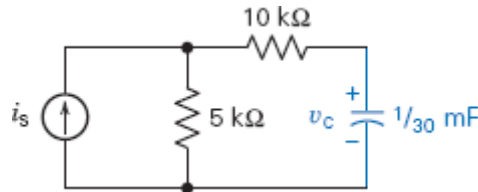



Figura P 8.7-3

P 8.7-4 Os megafones elétricos são muito usados para amplificar a voz em espetáculos públicos. A Figura P 8.7-4*a* mostra um tipo simples de megafone; o circuito correspondente aparece na Figura P 8.7-4*b*. Determine $v(t)$ para $v_s = (10 \text{ sen } 100t)\, u(t)$, que pode representar uma pessoa assoviando ou solfejando uma nota musical.

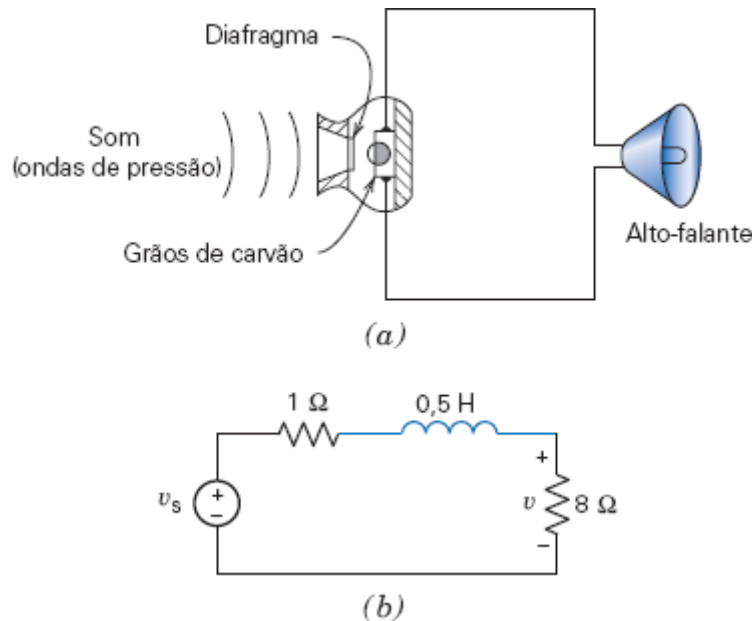



Figura P 8.7-4 Circuito de um megafone.

P 8.7-5 A Figura P 8.7-5 mostra um circuito integrador com perdas. O capacitor sem perdas do circuito de um integrador ideal foi substituído por um modelo de capacitor com perdas que consiste em um capacitor sem perdas em paralelo com um resistor de 1 kΩ. Se $v_s = 15e^{-2t}\, u(t)$ V e $v_o(0) = 10$ V, determine $v_o(t)$ para $t > 0$.

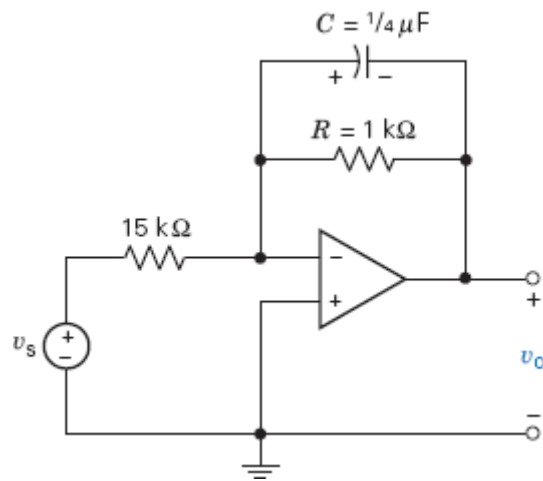



Figura P 8.7-5 Circuito integrador.

P 8.7-6 Determine $v(t)$ no circuito da Figura P 8.7-6.

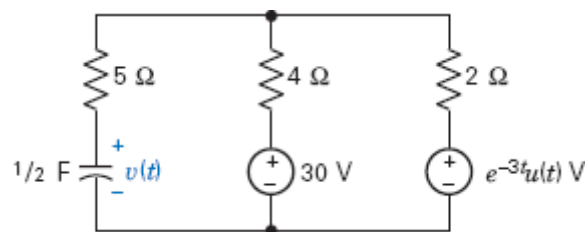



Figura P 8.7-6

P 8.7-7 Determine $v(t)$ no circuito da Figura P 8.7-7*a* se v_s varia com tempo como na Figura P 8.7-7*b*. A tensão inicial do capacitor é $v_c(0) = 0$.

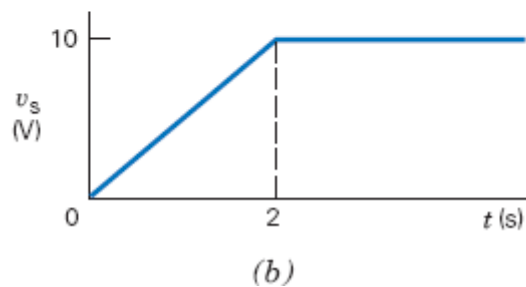
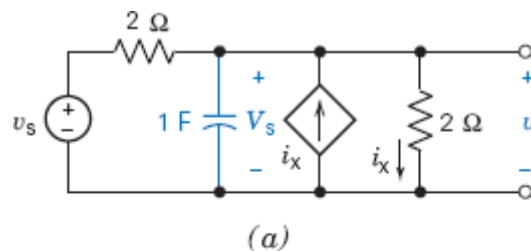



Figura P 8.7-7

P 8.7-8 Para desenhar gráficos na tela, os osciloscópios utilizam um tubo de raios catódicos e um sistema de deflexão elétrica cujos componentes básicos são mostrados na Figura P 8.7-8*a*. Para fazer o feixe de elétrons se deslocar na tela, são aplicadas rampas de corrente às placas de deflexão horizontal e vertical. A Figura P 8.7-8*b* mostra o circuito da placa de deflexão horizontal. Suponha que a capacitância das placas é *C*.

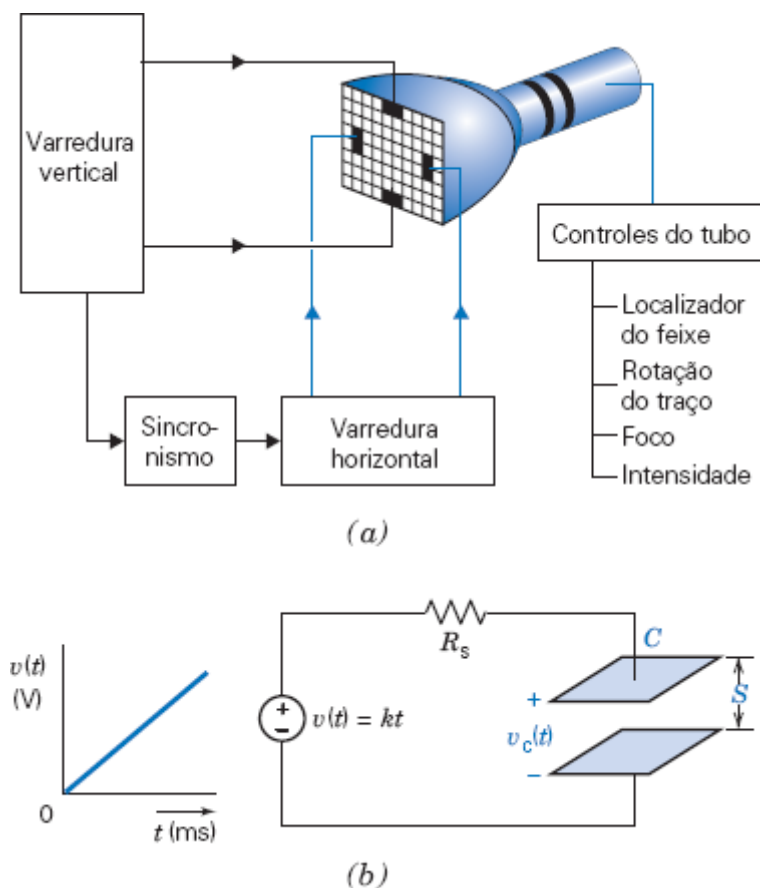



Figura P 8.7-8 Circuito de deflexão elétrica de um tubo de raios catódicos.

Escreva uma expressão para a tensão $v_C(t)$ entre as placas de deflexão supondo que $v(t) = kt$, $R_s = 625$ kΩ, $k = 1000$ e $C = 2000$ pF. Plote $v(t)$ e $v_c(t)$ no mesmo gráfico para $0 < t < 10$ ms. A tensão entre as placas acompanha a tensão de entrada?

Seção 8.10 Como Podemos Testar . . . ?

P 8.10-1 A Figura P 8.10-1 mostra a resposta transitória de um circuito de primeira ordem, obtida usando o programa de computador PSpice. Um ponto da resposta está assinalado na figura, com uma indicação do tempo e da tensão nesse instante. O fato de que o diagrama de um circuito é mostrado juntamente com o gráfico sugere que o gráfico corresponde a alguma tensão do circuito. Mostre que o gráfico representa a tensão do capacitor, $v_c(t)$.

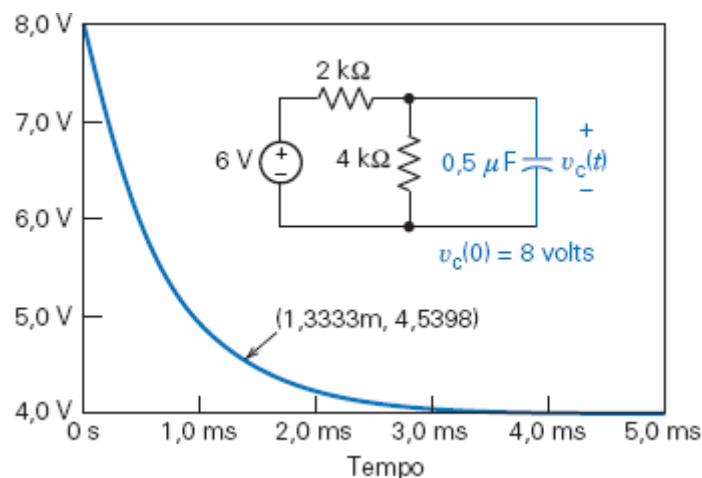



Figura P 8.10-1

P 8.10-2 A Figura P 8.10-2 mostra a resposta transitória de um circuito de primeira ordem, obtida usando o programa de computador PSpice. Um ponto da resposta está assinalado na figura, com uma indicação do tempo

e da corrente nesse instante. O fato de que o diagrama de um circuito é mostrado juntamente com o gráfico sugere que o gráfico corresponde a alguma corrente do circuito. Mostre que o gráfico representa a corrente do indutor, $i_L(t)$.

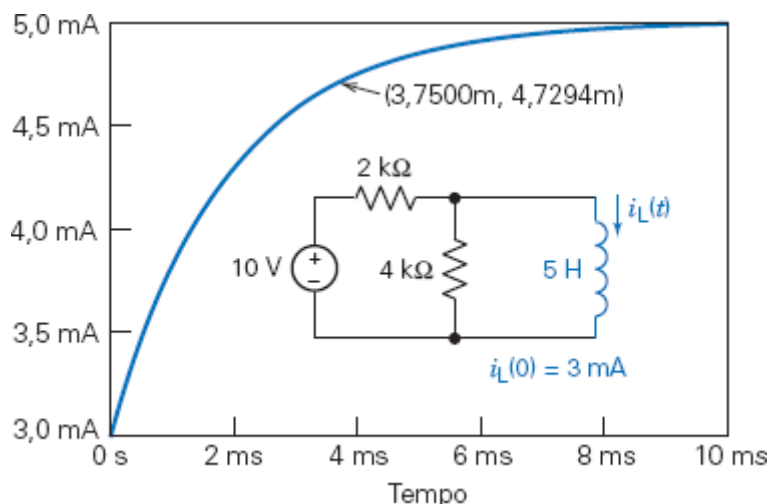



Figura P 8.10-2

P 8.10-3 A Figura P 8.10-3 mostra a resposta transitória de um circuito de primeira ordem, obtida usando o programa de computador PSpice. Um ponto da resposta está assinalado na figura, com uma indicação do tempo e da corrente nesse instante. O diagrama do circuito também é mostrado na figura. Determine a indutância L do indutor do circuito para que a resposta mostrada no gráfico corresponda à corrente no indutor, $i_L(t)$.

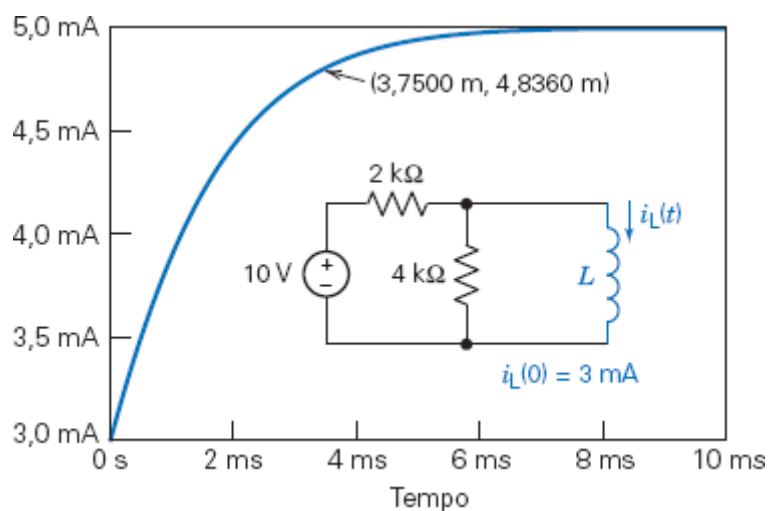



Figura P 8.10-3

P 8.10-4 A Figura P 8.10-4 mostra a resposta transitória de um circuito de primeira ordem, obtida usando o programa de computador PSpice. Um ponto da resposta está assinalado na figura, com uma indicação do tempo e da tensão nesse instante. O diagrama do circuito também é mostrado na figura. Suponha que o circuito esteja no regime estacionário no instante $t = 0$. Determine os valores de A, B, R_1, R_2 e C para que a resposta mostrada no gráfico corresponda à tensão do capacitor, $v_c(t)$.

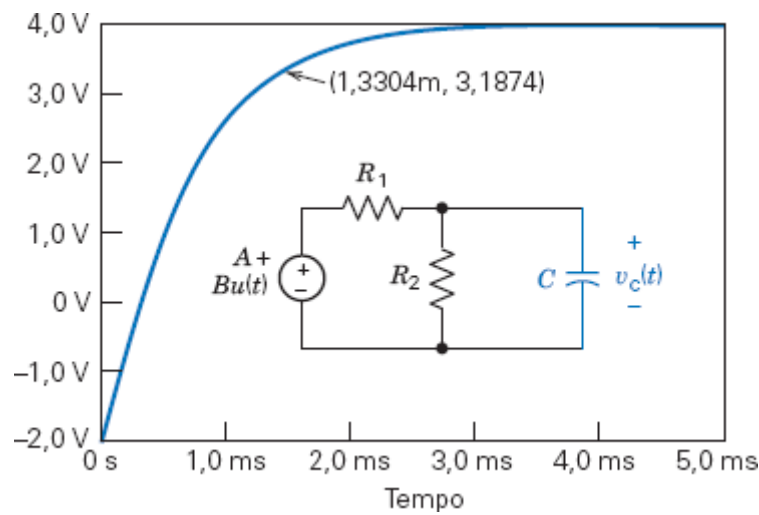



Figura P 8.10-4

Problemas com o PSpice

PS 8-1 A entrada do circuito da Figura PS 8-1 é a tensão da fonte de tensão, $v_i(t)$. A saída é a tensão do capacitor, $v_o(t)$. O sinal de entrada é o que aparece na figura. Use o programa PSpice para plotar a saída, $v_o(t)$, em função do tempo.

Sugestão: Represente a fonte de tensão usando o módulo do PSpice chamado VPULSE.

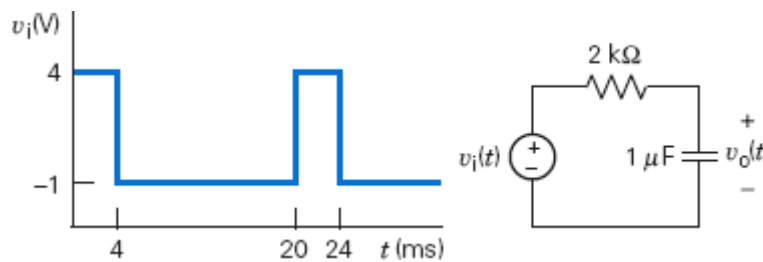



Figura PS 8.-1

PS 8-2 A entrada do circuito da Figura PS 8-2 é a tensão da fonte de tensão, $v_i(t)$. A saída é a corrente do indutor, $i_o(t)$. O sinal de entrada é o que aparece na figura. Use o programa PSpice para plotar a saída, $i_o(t)$, em função do tempo.

Sugestão: Represente a fonte de tensão usando o módulo do PSpice chamado VPULSE.

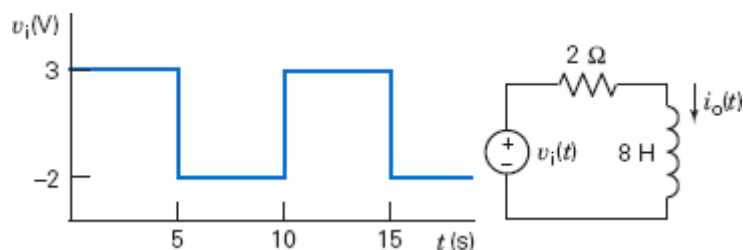



Figura PS 8.-2

PS 8-3 O circuito da Figura PS 8-3 está no regime estacionário quando a chave é fechada no instante $t = 0$. A entrada do circuito é a tensão da fonte de tensão, 12 V. A saída é a tensão do capacitor, $v(t)$. Use o programa PSpice para plotar a saída, $v(t)$, em função de t. Use o gráfico para obter uma representação analítica de $v(t)$ para $t > 0$.

Sugestão: Esperamos que a tensão seja da forma $v(t) = A + Be^{-t/\tau}$ para $t > 0$, em que A, B e τ são constantes a determinar.

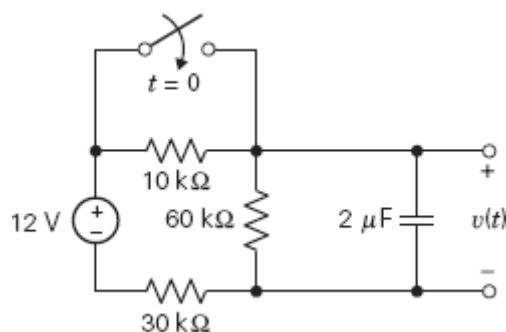



Figura PS 8.-3

PS 8-4 O circuito da Figura PS 8-4 está no regime estacionário quando a chave é fechada no instante $t = 0$. A entrada do circuito é a corrente da fonte de corrente, 4 mA. A saída é a corrente no indutor, $i(t)$. Use o programa PSpice para plotar a saída, $i(t)$, em função de t. Use o gráfico para obter uma representação analítica de $i(t)$ para $t >$ 0.

Sugestão: Esperamos que a corrente seja da forma $i(t) = A + Be^{-t/\tau}$ para $t > 0$, em que A, B e τ são constantes a determinar.

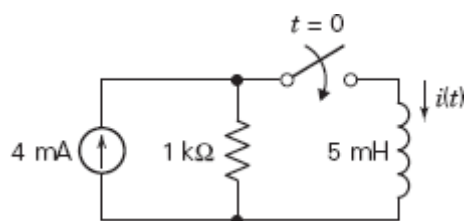



Figura PS 8.-4

Problemas de Projeto

PP 8-1 Projete o circuito da Figura PP 8-1 para que $v(t)$ sofra a transição de $v(t) = 6$ V para $v(t) = 10$ V em 10 ms quando a chave é fechada. Suponha que o circuito esteja no regime estacionário quando a chave seja fechada e que a transição possa ser considerada completa após 5 constantes de tempo.

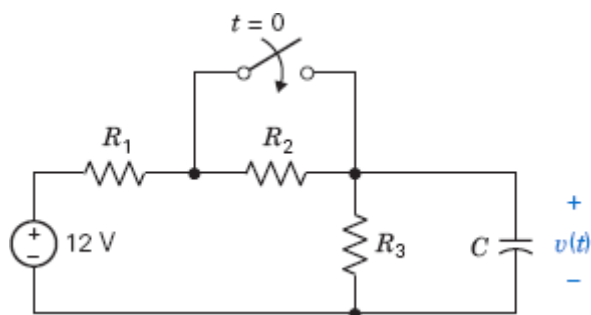



Figura PP 8-1

PP 8-2 Projete o circuito da Figura PP 8-2 para que $i(t)$ sofra a transição de $i(t) = 1$ mA para $i(t) = 4$ mA em 10 ms quando a chave é fechada. Suponha que o circuito esteja no regime estacionário quando a chave seja fechada e que a transição possa ser considerada completa após 5 constantes de tempo.

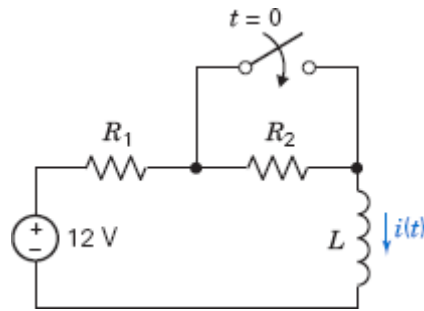



Figura PP 8-2

PP 8-3 A chave da Figura PP 8-3 é fechada nos instantes 0, $2\Delta t$, $4\Delta t$,... $2k\Delta t$ e aberta nos instantes Δt, $3\Delta t$, $5\Delta t$, . . . $(2k + 1)\Delta t$. Quando a chave é fechada, $v(t)$ sofre uma transição de $v(t) = 0$ V para $v(t) = 5$ V; quando é aberta, $v(t)$ sofre uma transição de $v(t) = 5$ V para $v(t) = 0$ V. As especificações do circuito exigem que$\Delta t = 5\tau$ para que cada transição esteja terminada antes de começar a transição seguinte. (*a*) Determine o valor de C para $\Delta t = 1$ μs. (*b*) Qual deve ser o valor de Δt se $C = 2$ μF?

Respostas: (a) $C = 4$ pF; (b) $\Delta t = 0{,}5$ s.

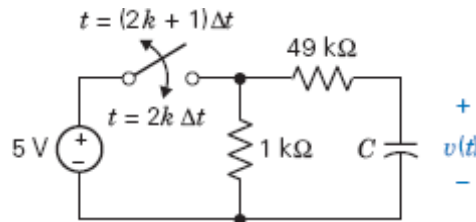



Figura PP 8-3

PP 8-4 A chave da Figura PP 8-3 é fechada nos instantes 0, $2\Delta t$, $4\Delta t$, ... $2k\Delta t$ e aberta nos instantes Δt, $3\Delta t$, $5\Delta t$, ... $(2k + 1)\Delta t$. Quando a chave é fechada, $v(t)$ sofre uma transição de $v(t) = 0$ V para $v(t) = 5$ V; quando é aberta, $v(t)$ sofre uma transição de $v(t) = 5$ V para $v(t) = 0$ V. As especificações do circuito exigem que cada transição esteja 95% terminada antes de começar a transição seguinte. (*a*) Determine o valor de C para $\Delta t = 1$ μs. (*b*) Qual deve ser o valor de Δt se $C = 2$ μF?

Sugestão: Mostre que $\Delta t = -\tau \ln(1 - k)$ para que a transição esteja $100k$% completa.

Respostas: (a) $C = 6{,}67$ pF; (b) $\Delta t = 0{,}3$ s.

PP 8-5 A Figura PP 8-5 mostra o circuito de disparo de um laser. Para disparar o laser, é preciso que 60 mA < $|i|$ < 180 mA para $0 < t < 200$ μs. Determine valores apropriados de R_1 e R_2.

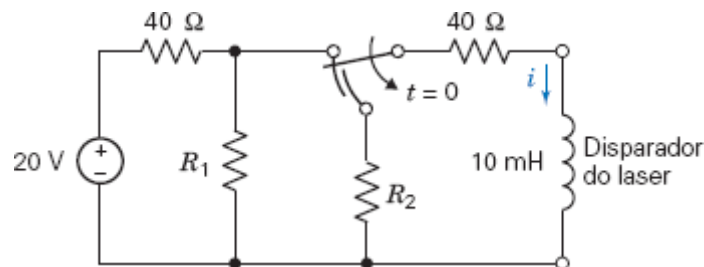



Figura PP 8-5 Circuito de disparo de um laser.

PP 8-6 Fusíveis são usados para abrir circuitos quando a corrente excede um determinado limite (Wright, 1990). Um fusível foi projetado para abrir se a potência absorvida por sua resistência R exceder 10 W durante 0,5 s. Considere o circuito da Figura PP 8-6. A entrada é dada por $v_s = A[u(t) - u(t - 0{,}75)]$ V. Suponha que $i_L(0^-) = 0$. Determine o maior valor de A para o qual o fusível não abre.

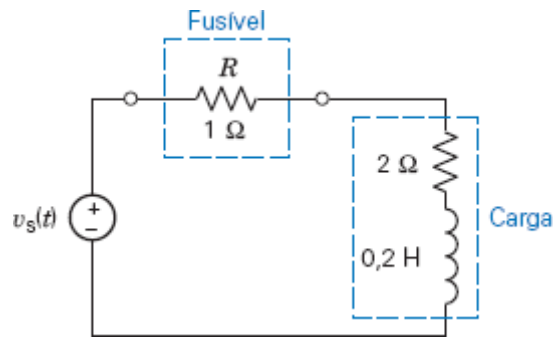



Figura PP 8-6 Circuito com um fusível.

PP 8-7 Determine os valores de C, R_1 e R_2 no circuito da Figura PP 8-7*a* para que a resposta do circuito seja a que aparece na Figura PP 8-7*b*.

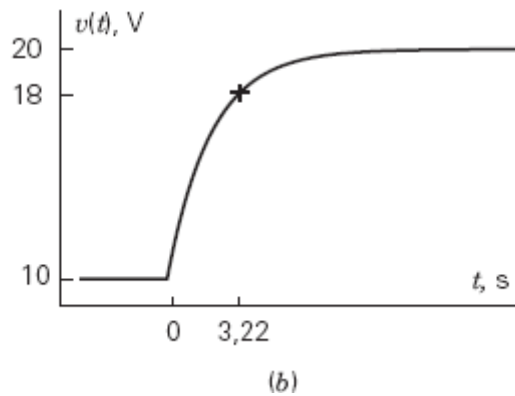
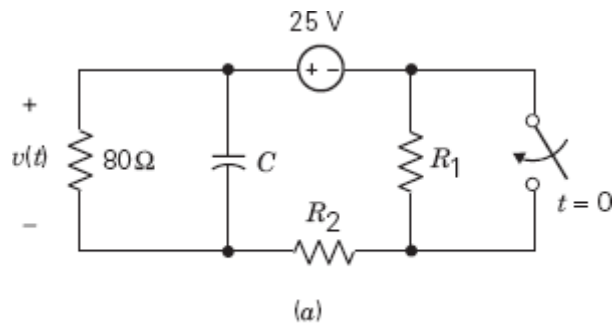



Figura PP 8-7

PP 8-8 Determine os valores L, R_1 e R_2 no circuito da Figura PP 8-8*a* para que a resposta do circuito seja a que aparece na Figura PP 8-8*b*.

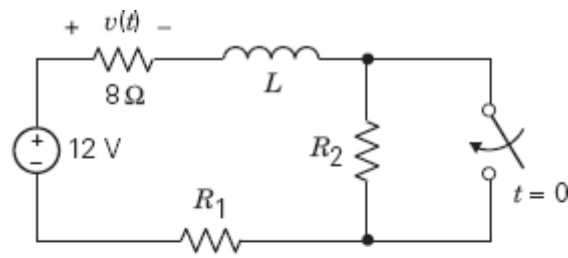
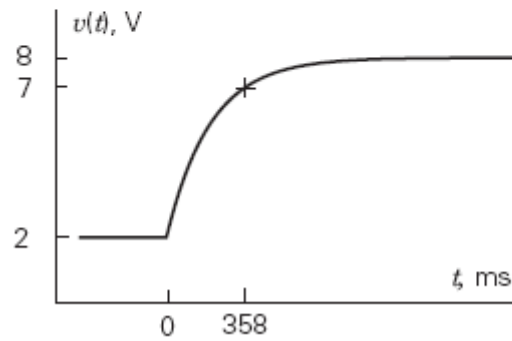



Figura PP 8-8

PP 8-9 Determine os valores de C, R_1 e R_2 no circuito da Figura PP 8-9*a* para que a resposta do circuito seja a que aparece na Figura PP 8-9*b*.

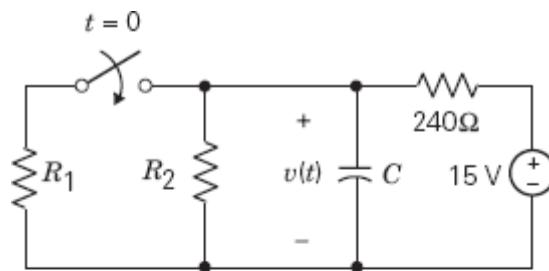
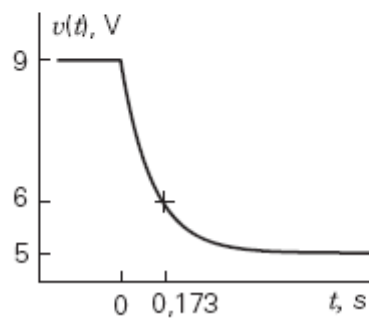



Figura PP 8-9

PP 8-10 Determine os valores de L, R_1 e R_2 no circuito da Figura PP 8-10*a* para que a resposta do circuito seja a que aparece na Figura 8-10*b*.

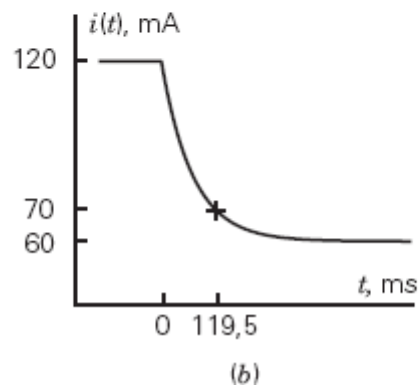
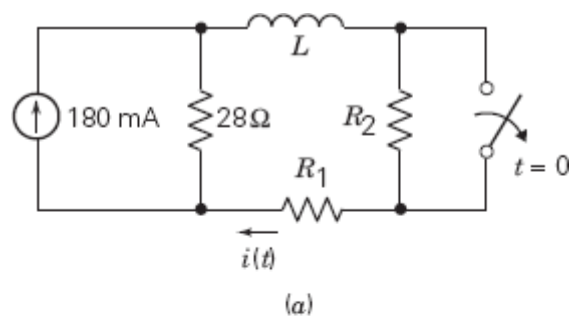



Figura PP 8-10

CAPÍTULO 9 Resposta Completa de Circuitos com Dois Elementos de Armazenamento de Energia

NESTE CAPÍTULO

9.1 *Introdução*

Neste capítulo, vamos estudar os circuitos de segunda ordem. Circuito de segunda ordem é um circuito que é representado por uma equação diferencial de segunda ordem. A ordem da equação diferencial que representa um circuito é no máximo igual à soma do número de capacitores com o número de indutores. Um circuito de segunda ordem pode conter, por exemplo, um capacitor e um indutor ou dois capacitores e nenhum indutor.

A equação diferencial que representa um circuito de segunda ordem pode ser escrita na forma

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + 2\alpha\frac{d}{dt}x(t) + \omega_0^2x(t) = f(t)$$

em que $x(t)$ é a saída do circuito e $f(t)$ é a entrada do circuito. A saída do circuito, também chamada de resposta, pode ser a corrente ou a tensão de qualquer componente do circuito. A saída é frequentemente escolhida como a

corrente em um indutor ou a tensão em um capacitor. As entradas do circuito podem ser tensões de fontes de tensão independentes e/ou correntes de fontes de corrente independentes. Os coeficientes da equação diferencial recebem nomes especiais: α é chamado de coeficiente de amortecimento e ω_0 de frequência de ressonância.

Para determinar a resposta de um circuito de segunda ordem, temos que fazer o seguinte:

- Representar o circuito por uma equação diferencial de segunda ordem.
- Obter a solução geral da equação diferencial homogênea. Essa solução é a resposta natural, $x_n(t)$. A resposta natural contém duas constantes a serem determinadas.
- Obter uma solução particular da equação diferencial. Essa solução é a resposta forçada, $x_f(t)$.
- Representar a resposta do circuito de segunda ordem na forma $x(t) = x_n(t) + x_f(t)$.
- Usar as condições iniciais, como, por exemplo, os valores iniciais das correntes dos indutores e das tensões dos capacitores, para calcular as constantes desconhecidas.

9.2 *Equação Diferencial de Circuitos com Dois Componentes que Armazenam Energia*

No Capítulo 8, estudamos circuitos que continham apenas um componente que armazenava energia e eram descritos por uma equação diferencial de primeira ordem. Nesta seção, vamos considerar circuitos com dois componentes irredutíveis que armazenam energia, descritos por uma equação diferencial de segunda ordem. Mais tarde, vamos falar de circuitos com três ou mais componentes irredutíveis que armazenam energia, descritos por equações diferenciais de ordem superior à segunda. Usamos o termo *irredutíveis* para indicar que os componentes considerados são os que restam depois que todos os componentes em série e em paralelo foram substituídos por componentes equivalentes. Todos os capacitores em paralelo, por exemplo, podem ser reduzidos a um capacitor equivalente, C_p, que é considerado um único capacitor para efeito da determinação da ordem da equação diferencial que descreve o circuito.

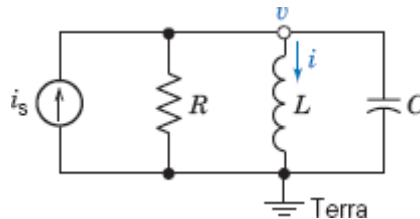



FIGURA 9.2-1 Circuito *RLC* paralelo.

Nos parágrafos a seguir, usamos dois métodos de obter a equação diferencial de segunda ordem usada para descrever circuitos com dois componentes que armazenam energia. A solução de equações desse tipo será discutida na próxima seção.

Considere o circuito da Figura 9.2-1, que é formado pela combinação em paralelo de um resistor, um indutor e um capacitor. A equação nodal do nó superior é a seguinte:

$$\frac{v}{R} + i + C\frac{dv}{dt} = i_s \tag{9.2-1}$$

A equação constitutiva do resistor é

$$v = L\frac{di}{dt} \tag{9.2-2}$$

Substituindo a Eq. 9.2-2 na Eq. 9.2-1, obtemos:

$$\frac{L}{R}\frac{di}{dt} + i + CL\frac{d^2 i}{dt^2} = i_s \tag{9.2-3}$$

que é a equação diferencial de segunda ordem procurada. Para obter o valor de $i(t)$, basta resolver a Eq. 9.2-3. Para obter o valor de $v(t)$, basta substituir o valor de $i(t)$ na Eq. 9.2-2.

Este método para obter a equação diferencial de segunda ordem é chamado de *método direto* e está descrito na Tabela 9.2-1.

Na Tabela 9.2-1, as variáveis do circuito são chamadas de x_1 e x_2. Em um caso concreto, x_1 e x_2 são correntes ou tensões específicas. Quando analisamos o circuito da Figura 9.2-1, fizemos $x_1 = v$ e $x_2 = i$. Por outro lado, para analisar o circuito da Figura 9.2-2, vamos fazer $x_1 = i$ e $x_2 = v$, em que i é a corrente do indutor e v é a tensão do capacitor.

Vamos agora considerar o circuito *RLC* série da Figura 9.2-2 e usar o método direto para obter a equação diferencial de segunda ordem. Escolhemos $x_1 = i$ e $x_2 = v$. Para começar, procuramos uma equação para $dx_1/dt = di/dt$. Aplicando a LKT à única malha do circuito, obtemos

$$L\frac{di}{dt} + v + Ri = v_s \tag{9.2-4}$$

Tabela 9.2-1 Método Direto para Obter a Equação Diferencial de Segunda Ordem de um Circuito

1º passo	Identificar as variáveis x_1 e x_2, que são tensões em capacitores e/ou correntes em indutores
2º passo	Escrever uma equação diferencial de primeira ordem, $\frac{dx_1}{dt} = f(x_1, x_2)$.
3º passo	Escrever uma segunda equação diferencial de primeira ordem, $\frac{dx_2}{dt} = Kx_1$ ou $x_1 = \frac{1}{K}\frac{dx_2}{dt}$.
4º passo	Substituir a equação do 3º passo na equação do 2º passo, obtendo assim uma equação diferencial de segunda ordem em termos de x_2.

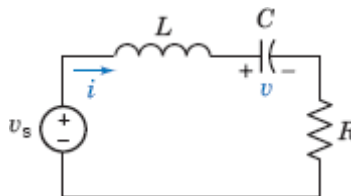



FIGURA 9.2-2 Circuito *RLC* série.

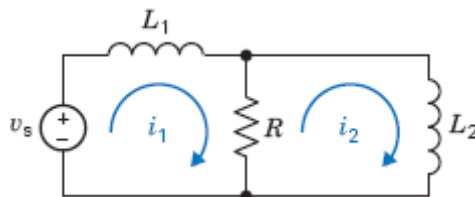



FIGURA 9.2-3 Circuito com dois indutores.

em que v é a tensão do capacitor. A Eq. 9.2-4 pode ser escrita na forma

$$\frac{di}{dt} + \frac{v}{L} + \frac{R}{L}i = \frac{v_s}{L} \tag{9.2-5}$$

Agora precisamos de uma equação em termos de $dx_2/dt = dv/dt$. Como

$$C\frac{dx_2}{dt} = x_1 \tag{9.2-6}$$

ou

$$C\frac{dv}{dt} = i \tag{9.2-7}$$

basta substituir a Eq. 9.2-7 na Eq. 9.2-5 para obter a equação de segunda ordem desejada:

$$C\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{v}{L} + \frac{RC}{L}\frac{dv}{dt} = \frac{v_s}{L} \tag{9.2-8}$$

A Eq. 9.2-8 pode ser escrita na forma

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC}v = \frac{v_s}{LC} \tag{9.2-9}$$

Outro método para obter a equação diferencial de segunda ordem que descreve um circuito é o chamado *método dos operadores*. Nesse método, depois de obter equações diferenciais que descrevem as tensões de nó ou as correntes de malha, usamos operadores para obter a equação diferencial do circuito.

Como um exemplo mais complicado de um circuito com dois componentes que armazenam energia, considere o circuito da Figura 9.2-3. O circuito possui dois indutores e duas malhas simples. As equações de malha são

$$L_1\frac{di_1}{dt} + R(i_1 - i_2) = v_s \tag{9.2-10}$$

$$R(i_2 - i_1) + L_2\frac{di_2}{dt} = 0 \tag{9.2-11}$$

Vamos supor que $R = 1\ \Omega$, $L_1 = 1$ H e $L_2 = 2$ H. Nesse caso, temos

$$\frac{di_1}{dt} + i_1 - i_2 = v_s$$

e

$$i_2 - i_1 + 2\frac{di_2}{dt} = 0 \tag{9.2-12}$$

Essas equações podem ser escritas na forma

$$\frac{di_1}{dt} + i_1 - i_2 = v_s \tag{9.2-13}$$

e

$$-i_1 + i_2 + 2\frac{di_2}{dt} = 0 \tag{9.2-14}$$

O passo seguinte do método dos operadores consiste em obter uma equação diferencial de segunda ordem a partir deste sistema de equações, usando o operador diferencial $s = d/dt$ para transformar equações diferenciais em equações algébricas. Substituindo d/dt por s, as Eqs. 9.2-13 e 9.2-14 se tornam

$$si_1 + i_2 - i_2 = v_s$$

e

$$-i_1 + i_2 + 2si_2 = 0$$

Essas duas equações podem ser escritas na forma

$$(s+1)i_1 - i_2 = v_s$$

e

$$-i_1 + (2s+1)i_2 = 0$$

Resolvendo esse sistema de equações, obtemos:

$$i_2 = \frac{1v_s}{(s+1)(2s+1)-1} = \frac{v_s}{2s^2+3s}$$

o que nos dá

$$(2s^2 + 3s)i_2 - v_s$$

Substituindo s^2 por $\frac{d^2}{dt^2}$ e s por $\frac{d}{dt}$, obtemos a equação diferencial

$$2\frac{d^2 i_2}{dt^2} + 3\frac{di_2}{dt} = v_s \tag{9.2-15}$$

O método dos operadores para obter a equação diferencial de segunda ordem de um circuito está descrito na Tabela 9.2-2.

Tabela 9.2-2 Método dos Operadores para Obter a Equação Diferencial de Segunda Ordem de um Circuito

1º passo	Identificar a variável x_1 para a qual se deseja a solução.
2º passo	Escrever uma equação diferencial em termos da variável desejada x_1 e de uma segunda variável x_2.
3º passo	Obter uma equação adicional em termos de x_1 e x_2.
4º passo	Usar os operadores $s = d/dt$ e $1/s = \int dt$ para obter um sistema de duas equações algébricas em termos de s e das variáveis x_1 e x_2.
5º passo	Usar a regra de Cramer para resolver o sistema de equações do 4º passo e obter uma solução da forma $x_1 = P(s)/Q(s)$, em que $P(s)$ e $Q(s)$ são polinômios em s.
6º passo	Escrever a equação obtida no 5º passo na forma $Q(s)x_1 = P(s)$.
7º passo	Converter os operadores da equação do 6o passo em derivadas para obter a equação diferencial de segunda ordem.

EXEMPLO 9.2-1 Representação de um Circuito por uma Equação Diferencial

Determine a equação diferencial da corrente i_2 no circuito da Figura 9.2-4.

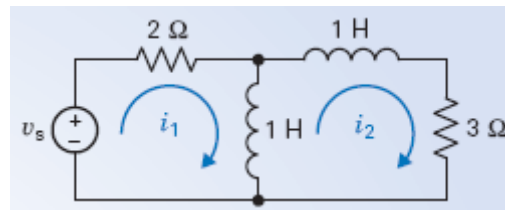



FIGURA 9.2-4 Circuito do Exemplo 9.2-1.

Solução

Aplicando a LKT às duas malhas simples do circuito, obtemos

$$2i_1 + \frac{di_1}{dt} - \frac{di_2}{dt} = v_s$$

$$-\frac{di_1}{dt} + 3\,i_2 + 2\frac{di_2}{dt} = 0$$

Usando o operador $s = d/dt$, temos

$$(2+s)i_1 - si_2 = v_s$$

$$-si_1 + (3+2s)i_2 = 0$$

Resolvendo esse sistema de equações, obtemos

$$i_2 = \frac{sv_s}{(2+s)(3+2s)-s^2} = \frac{sv_s}{s^2+7s} + 6 \tag{9.2-16}$$

que pode ser escrita na forma

$$(s^2 + 7s + 6)i_2 = sv_s \tag{9.2-17}$$

Assim, a equação diferencial de i_2 é

$$\frac{d^2i_2}{dt^2} + 7\frac{di_2}{dt} + 6i_2 = \frac{dv_s}{dt} \tag{9.2-18}$$

EXEMPLO 9.2-2 Representação de um Circuito por uma Equação Diferencial

Determine a equação diferencial da tensão v no circuito da Figura 9.2-5.

Solução

Aplicando a LKC ao nó superior do circuito, obtemos

$$\frac{v - v_s}{R_1} + i + C\frac{dv}{dt} = 0 \tag{9.2-19}$$

Como estamos interessados em encontrar uma equação que envolva apenas v, precisamos de uma segunda relação entre i e v. Aplicando a lei de Ohm e a equação constitutiva do indutor à corrente no ramo que contém o resistor R e o indutor, obtemos

$$Ri + L\frac{di}{dt} = v \qquad (9.2\text{-}20)$$

Usando o operador $s = d/dt$, obtemos o sistema de equações

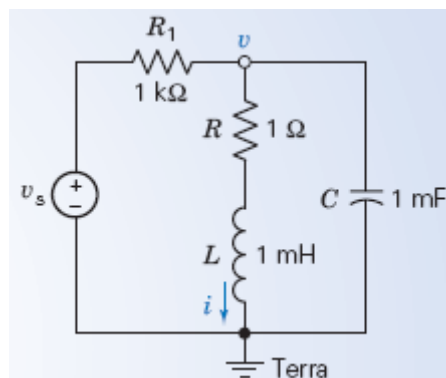



FIGURA 9.2-5 Circuito *RLC* do Exemplo 9.2-2.

$$\frac{v}{R_1} + Csv + i = \frac{v_s}{R_1}$$

$$-v + Ri + Lsi = 0$$

Substituindo os valores dos parâmetros e reagrupando os termos, obtemos

$$(10^{-3} + 10^{-3}\,s)v + i = 10^{-3}v_s$$

$$-v + (10^{-3}s + 1)i = 0$$

Aplicando a regra de Cramer, obtemos

$$v = \frac{(s+1000)v_s}{(s+1)(s+1000)+10^6} = \frac{(s+1000)v_s}{s^2+1001s+1001\times 10^3}$$

Assim, temos

$$(s^2 + 1001s + 1001 \times 10^3)v = (s + 1000)v_s$$

e a equação diferencial que procuramos é

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 1001\frac{dv}{dt} + 1001\times 10^3\,v = \frac{dv_s}{dt} + 1000v_s$$

EXERCÍCIO 9.2-1 Determine a equação diferencial de segunda ordem de i no circuito da Figura E 9.2-1 usando o método direto.

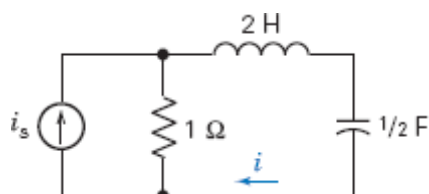



FIGURA E 9.2-1

Resposta: $\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{2}\frac{di}{dt} + i = \frac{1}{2}\frac{di_s}{dt}$

EXERCÍCIO 9.2-2 Determine a equação diferencial de segunda ordem para v no circuito da Figura E 9.2-2 usando o método dos operadores.

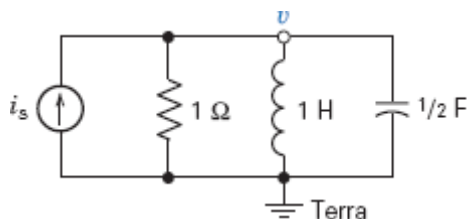



FIGURA E 9.2-2

Resposta: $\frac{d^2v}{dt^2} + 2\frac{dv}{dt} + 2v = 2\frac{di_s}{dt}$

9.3 Solução de uma Equação Diferencial de Segunda Ordem: A Resposta Natural

Na seção anterior, vimos que um circuito com dois componentes irredutíveis que armazenam energia pode ser representado por uma equação diferencial de segunda ordem da forma

$$a_2\frac{d^2x}{dt^2} + a_1\frac{dx}{dt} + a_0x = f(t)$$

em que as constantes a_2, a_1 e a_0 são conhecidas e a função forçante $f(t)$ é especificada.

A resposta completa $x(t)$ é dada por

$$x = x_n + x_f \tag{9.3-1}$$

em que x_n é a resposta natural e x_f é a resposta forçada. A resposta natural x_n satisfaz a equação diferencial não forçada, que é obtida fazendo $f(t) = 0$. A resposta forçada x_f satisfaz a equação diferencial completa.

A resposta natural de um circuito, x_n, satisfaz a equação

$$a_2\frac{d^2x_n}{dt^2} + a_1\frac{dx_n}{dt} + a_0x_n = 0 \tag{9.3-2}$$

Como x_n e suas derivadas devem satisfazer a equação, postulamos a solução exponencial

$$x_n = Ae^{st} \tag{9.3-3}$$

em que A e s são constantes a determinar. A função exponencial é a única função que é proporcional a todas as suas derivadas e integrais e, portanto, é uma escolha natural para a solução de uma equação diferencial com coeficientes constantes. Substituindo a Eq. 9.3-3 na Eq. 9.3-2 e derivando quando necessário, obtemos

$$a_2As^2e^{st} + a_1Ase^{st} + a_0Ae^{st} = 0 \tag{9.3-4}$$

Como $x_n = Ae^{st}$, podemos escrever a Eq. 9.3-4 na forma

$$a_2s^2x_n + a_1sx_n + a_0x_n = 0$$

$$(a_2s^2 + a_1s + a_0)x_n = 0$$

Desprezando a solução trivial $x_n = 0$, temos

$$(a_2s^2 + a_1s + a_0) = 0 \qquad (9.3\text{-}5)$$

Essa equação, em termos de s, é chamada de *equação característica* e pode ser obtida com mais facilidade substituindo a derivada por s e a derivada segunda por s^2, o que equivale a usar o operador

$$s^n = \frac{d^n}{dt^n}$$

A **equação característica** é obtida a partir da equação diferencial de um circuito anulando todas as fontes independentes e supondo uma solução exponencial.

Oliver Heaviside (1850-1925), cuja fotografia aparece na Figura 9.3-1, foi o primeiro a aplicar a teoria dos operadores à solução de equações diferenciais.

FIGURA 9.3-1 Oliver Heaviside (1850-1925).

A equação do segundo grau (9.3-5) tem duas raízes, s_1 e s_2, dadas por

$$s_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2} \qquad (9.3\text{-}6)$$

e

$$s_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2} \qquad (9.3\text{-}7)$$

Se as duas raízes são diferentes, a resposta natural é da forma

$$x_n = A_1e^{s_1t} + A_2e^{s_2t} \qquad (9.3\text{-}8)$$

em que A_1 e A_2 são constantes a ser determinadas. O caso especial em que $s_1 = s_2$ será discutido mais adiante.

As **raízes** da equação característica contêm todas as informações necessárias para determinar o tipo de comportamento da resposta natural.

EXEMPLO 9.3-1 Resposta Natural de um Circuito de Segunda Ordem

EXEMPLO 9.3-1 Resposta Natural de um Circuito de Segunda Ordem

Determine a resposta natural da corrente i_2 no circuito da Figura 9.3-2. Use operadores para formular a equação diferencial e obter a resposta em termos de duas constantes arbitrárias.

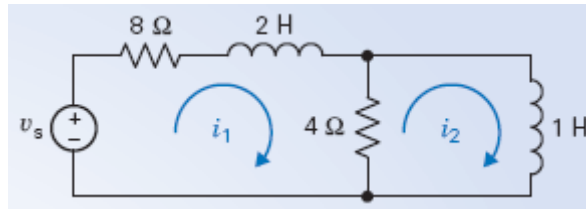



FIGURA 9.3-2 Circuito do Exemplo 9.3-1.

Solução

As duas equações de malha são

$$12i_1 + 2\frac{di_1}{dt} - 4\,i_2 = v_s$$

$$-4\,i_1 + 4\,i_2 + 1\frac{di_2}{dt} = 0$$

Usando o operador $s = d/dt$, obtemos

$$(12 + 2s)i_1 - 4i_2 - v_s \qquad (9.3\text{-}9)$$

$$-4i_1 + (4 + s)i_2 = 0 \qquad (9.3\text{-}10)$$

Resolvendo o sistema de equações, obtemos

$$i_2 = \frac{4\,v_s}{(12 + 2s)(4 + s) - 16} = \frac{4\,v_s}{2s^2 + 20s + 32} = \frac{2\,v_s}{s^2 + 10s + 16}$$

o que nos dá

$$(s^2 + 10s + 16)i_2 = 2v_s$$

A equação característica é, portanto, $s^2 + 10s + 16 = 0$, cujas raízes são $s_1 = -2$ e $s_2 = -8$. A resposta natural é

$$x_n = A_1e^{-2t} + A_2e^{-8t}$$

em que $x = i_2$. As raízes s_1 e s_2 são as *raízes características*, também chamadas de *frequências naturais*. Os recíprocos do valor absoluto das raízes características reais são as *constantes de tempo*. As constantes de tempo desse circuito são 1/2 s e 1/8 s.

EXERCÍCIO 9.3-1 Determine a equação característica e as frequências naturais do circuito da Figura E 9.3-1.

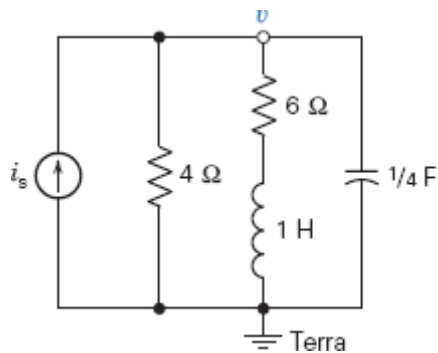



FIGURA E 9.3-1

Resposta: $s^2 + 7s + 10 = 0$

$s_1 = -2$

$s_2 = -5$

9.4 *Resposta Natural de um Circuito* RLC *Paralelo Não Forçado*

Nesta seção vamos estudar a resposta natural (não forçada) do circuito *RLC* paralelo da Figura 9.4-1. Esse estudo tem como principal objetivo ilustrar as três formas de resposta natural. Uma discussão análoga do circuito *RLC* série poderia ser apresentada, mas foi omitida porque o objetivo não é obter uma solução para circuitos específicos e sim ilustrar o método geral.

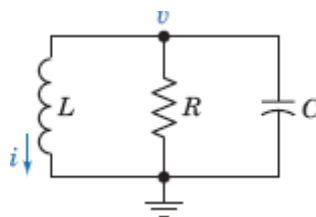



FIGURA 9.4-1 Circuito *RLC* paralelo.

Um circuito que contém um capacitor e um indutor é representado por uma equação diferencial de segunda ordem

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + 2\alpha\frac{d}{dt}x(t) + \omega_0^2\, x(t) = f(t)$$

em que $x(t)$ é a saída do circuito e $f(t)$ é a entrada do circuito. A saída do circuito, também chamada de resposta, pode ser a corrente ou a tensão de qualquer componente do circuito. A saída é frequentemente escolhida como a corrente em um indutor ou a tensão em um capacitor. As entradas do circuito podem ser tensões de fontes de tensão independente e/ou correntes de fontes de corrente independentes. Os coeficientes da equação diferencial recebem nomes especiais: α é chamado de coeficiente de amortecimento e ω_0 de frequência de ressonância.

Como o circuito da Figura 9.4-1 não contém fontes independentes, a entrada, $f(t)$, é nula. A equação diferencial com $f(t) = 0$ é chamada de equação diferencial homogênea. Vamos supor que a saída é a tensão, $v(t)$, no nó superior do circuito. Em consequência, vamos representar o circuito da Figura 9.4-1 por uma equação diferencial homogênea da forma

$$\frac{d^2}{dt^2}v(t) + 2\alpha\frac{d}{dt}v(t) + \omega_0^2\, v(t) = 0$$

Aplicando a LKC ao nó superior do circuito, obtemos

$$\frac{v}{R} + \frac{1}{L}\int_0^t v\,d\tau + i(0) + C\frac{dv}{dt} = 0 \qquad (9.4\text{-}1)$$

Derivando a Eq. 9.4-1, obtemos

$$C\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{L}v = 0 \qquad (9.4\text{-}2)$$

Dividindo por C ambos os membros da Eq. 9.4-2, obtemos

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC}v = 0 \qquad (9.4\text{-}3)$$

Usando o operador s, chegamos à equação característica

$$s^2 = \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC} = 0 \qquad (9.4\text{-}4)$$

Comparando a Eq. 9.4-4 com a Eq. 9.4-1, vemos que

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \quad \text{e} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \qquad (9.4\text{-}5)$$

As duas raízes da equação característica são

$$s_1 = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad \text{e} \quad s_2 = -\frac{1}{2RC} - \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \qquad (9.4\text{-}6)$$

Se $s_1 \neq s_2$, a solução da Eq. 9.4-3 para $t > 0$ é

$$v_n = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \qquad (9.4\text{-}7)$$

As raízes da equação característica podem ser escritas na forma

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad \text{e} \quad s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \qquad (9.4\text{-}8)$$

A frequência de ressonância amortecida, ω_d, é definida pela da equação

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

Se $\omega_0 > \alpha$, as raízes da equação característica são complexas e podem ser expressas na forma

$$s_1 = -\alpha + j\omega_d \quad \text{e} \quad s_2 = -\alpha + j\omega_d$$

As raízes da equação característica podem ser de três tipos:

1. Reais e distintas, se $\alpha^2 > \omega_0^2$.
2. Reais e iguais, se $\alpha^2 = \omega_0^2$.
3. Complexas, se $\alpha^2 < \omega_0^2$.

Se as raízes são reais e distintas, dizemos que o circuito é *superamortecido*. Se as raízes são reais e iguais, dizemos que o circuito é *criticamente amortecido*. Se as raízes são complexas, dizemos que o circuito é *subamortecido*.

Vamos determinar a resposta natural do circuito *RLC* superamortecido da Figura 9.4-1 supondo que as condições iniciais do capacitor e do indutor são *v*(0) e *i*(0), respectivamente. Observe que, como a entrada do

circuito da Figura 9.4-1 é nula, $v(0)$ e $v_n(0)$ correspondem à mesma tensão. Fazendo $t = 0$ na Eq. 9.4-7, temos

$$v_n(0) = A_1 + A_2 \tag{9.4-9}$$

Como A_1 e A_2 são constantes ainda desconhecidas, precisamos de mais uma equação em $t = 0$. Fazendo $t = 0$ na Eq. 9.4-1, temos:[1]

$$\frac{v(0)}{R} + i(0) + C\frac{dv(0)}{dt} = 0$$

Explicitando $dv(0)/dt$, obtemos

$$\frac{dv(0)}{dt} = -\frac{v(0)}{RC} - \frac{i(0)}{C} \tag{9.4-10}$$

Agora, portanto, conhecemos o valor inicial da derivada de v em termos das condições iniciais. Derivando a Eq. 9.4-7 e fazendo $t = 0$, obtemos

$$\frac{dv_n(0)}{dt} = s_1A_1 + s_2A_2 \tag{9.4-11}$$

Usando as Eqs. 9.4-10 e 9.4-11, obtemos uma segunda equação em termos das duas constantes:

$$s_1A_1 + s_2A_2 = -\frac{v(0)}{RC} - \frac{i(0)}{C} \tag{9.4-12}$$

Usando as Eqs. 9.4-9 e 9.4-12, podemos calcular o valor de A_1 e A_2.

EXEMPLO 9.4-1 Resposta Natural de um Circuito de Segunda Ordem Superamortecido

Determine a resposta natural de $v(t)$ para $t > 0$ no circuito *RLC* paralelo da Figura 9.4-1 com $R = 2/3\ \Omega$, $L = 1$ H, $C = 1/2$ F, $v(0) = 10$ V e $i(0) = 2$ A.

Solução

De acordo com a Eq. 9.4-4, a equação característica é

$$s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC} = 0$$

ou

$$s^2 + 3s + 2 = 0$$

Assim, as raízes da equação característica são

$$s_1 = -1 \quad \text{e} \quad s_2 = -2$$

e a resposta natural é

$$v_n A_1e^{-t} + A_2e^{-2t} \tag{9.4-13}$$

Como a tensão inicial do capacitor é $v(0) = 10$, temos:

$$v_n(0) = A_1 + A_2$$
$$10 = A_1 + A_2 \tag{9.4-14}$$

Usamos a Eq. 9.4-12 para obter a segunda equação que envolve as constantes desconhecidas:

$$s_1A_1 + s_2A_2 = -\frac{v(0)}{RC} - \frac{i(0)}{C}$$

ou

$$v_n = (-14e^{-t} + 24e^{-2t})\ \text{V}$$

Assim, temos:

$$-A_1 - 2A_2 = -34 \qquad (9.4\text{-}15)$$

Resolvendo o sistema de equações formado pelas Eqs. 9.4-14 e 9.4-15, obtemos $A_2 = 24$ e $A_1 = -14$. A resposta natural é, portanto,

$$v_n = (-14e^{-t} + 24e^{-2t})\ \text{V}$$

A resposta natural do circuito aparece na Figura 9.4-2.

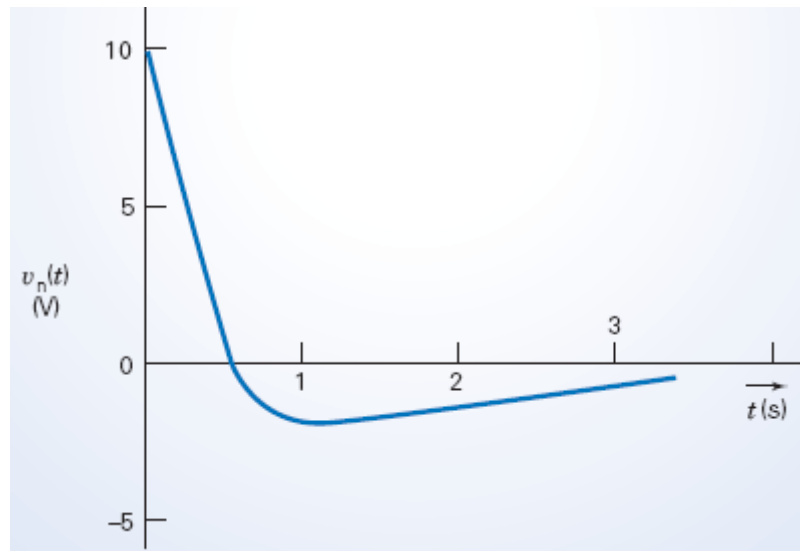



FIGURA 9.4-2 Resposta superamortecida do circuito *RLC* do Exemplo 9.4-1.

EXERCÍCIO 9.4-1 Determine a resposta natural do circuito *RLC* da Figura 9.4-1 para $R = 6\ \Omega$, $L = 7$ H e $C = 1/42$ F. As condições iniciais são $v(0) = 0$ e $i(0) = 10$ A.

Resposta: $v_n(t) = -84(e^{-t} - e^{-6t})$ V

9.5 *Resposta Natural de um Circuito* RLC *Paralelo Não Forçado Criticamente Amortecido*

Vamos considerar novamente o circuito *RLC* paralelo, desta vez para discutir o caso especial em que a equação característica possui duas raízes reais e iguais. Para isso, é preciso que $\alpha^2 = \omega_0^2$, em que

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \quad \text{e} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

Vamos supor que $s_1 = s_2$ e calcular $v_n(t)$. Escrevemos a resposta natural como a soma de duas exponenciais:

$$v_n = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_1 t} = A_3 e^{s_1 t} \quad (9.5\text{-}1)$$

em que $A_3 = A_1 + A_2$. Como as duas raízes são iguais, temos apenas uma constante a ser determinada e duas condições iniciais para satisfazer, o que torna claro que a Eq. 9.5-1 não é a solução completa da resposta natural de um circuito criticamente amortecido. Como precisamos de uma solução que contenha duas constantes arbitrárias, vamos tentar uma solução do tipo

$$v_n = e^{s_1 t}(A_1 t + A_2) \quad (9.5\text{-}2)$$

Considere um circuito *RLC* paralelo com *L* = 1 H, *R* = 1 Ω, *C* = 1/4 F, *v*(0) = 5 V e *i*(0) = −6 A. A equação característica do circuito é

$$s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC} = 0$$

ou

$$s^2 + 4s + 4 = 0$$

As duas raízes são $s_1 = s_2 = -2$. Supondo que a resposta natural é uma função como a da Eq. 9.5-2, temos

$$v_n = e^{-2t}(A_1 t + A_2) \quad (9.5\text{-}3)$$

Como $v_n(0) = 5$, temos, para $t = 0$,

$$5 = A_2$$

Para obter o valor de A_1, derivamos v_n e calculamos o valor da derivada em $t = 0$. Derivando a Eq. 9.5-3, obtemos

$$\frac{dv}{dt} = -2A_1 t e^{-2t} + A_1 e^{-2t} - 2A_2 e^{-2t} \quad (9.5\text{-}4)$$

Calculando o valor da Eq. 9.5-4 para $t = 0$, obtemos

$$\frac{dv(0)}{dt} = A_1 - 2A_2$$

De acordo com a Eq. 9.4-10,

$$\frac{dv(0)}{dt} = \frac{v(0)}{RC} - \frac{i(0)}{C}$$

ou

$$A_1 - 2A_2 = \frac{-5}{1/4} - \frac{-6}{1/4} = 4$$

Assim, $A_1 = 14$ e a resposta natural é

$$v_n = e^{-2t}(14t + 5)\ \text{V}$$

A resposta natural criticamente amortecida desse circuito *RLC* está plotada em função do tempo na Figura 9.5-1.

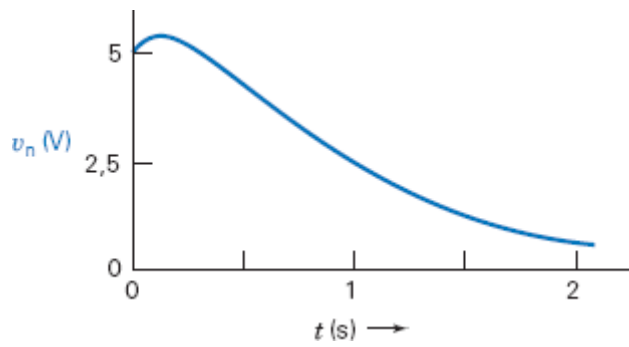



FIGURA 9.5-1 Resposta criticamente amortecida de um circuito *RLC* paralelo.

EXERCÍCIO 9.5-1 Determine a resposta natural $v_n(t)$, para $t > 0$, de um circuito *RLC* paralelo com $R = 10\ \Omega$, $C = 1$ mF, $L = 0{,}4$ H, $v(0) = 8$ V e $i(0) = 0$.

Resposta: $v_n(t) = e^{-50t}(8 - 400t)$ V

9.6 *Resposta Natural de um Circuito* RLC *Paralelo Não Forçado Subamortecido*

A equação característica do circuito *RLC* paralelo possui duas raízes complexas conjugadas se $\alpha^2 < \omega_0^2$. Essa condição é satisfeita se

$$LC < (2RC)^2$$

ou seja, se

$$L < 4R^2C$$

Como

$$v_n = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \tag{9.6-1}$$

onde

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

Se

$$\omega_0^2 > \alpha^2$$

temos

$$s_{1,2} = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha_0^2}$$

em que

$$j = \sqrt{-1}$$

Para uma revisão de números complexos, veja o Apêndice B.

As raízes complexas levam a uma resposta do tipo oscilatório. Definimos a raiz quadrada $\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ como ω_d, que é chamada de *frequência de ressonância amortecida*. O fator α, conhecido como *coeficiente de*

***amortecimento*, determina a rapidez com que as oscilações são amortecidas. As raízes podem ser escritas na forma**

$$s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d$$

Assim, a resposta natural é

$$v_n = A_1 e^{-\alpha t} e^{j\omega_d t} + A_2 e^{-\alpha t} e^{j\omega_d t}$$

ou

$$v_n = e^{-\alpha t}(A_1 e^{j\omega_d t} + A_2 e^{j\omega_d t}) \quad (9.6\text{-}2)$$

Vamos usar a identidade de Euler[2]

$$e^{\pm j\omega t} = \cos \omega t \pm j \text{ sen } \omega t \quad (9.6\text{-}3)$$

Fazendo $\omega = \omega_d$ na Eq. 9.6-3 e substituindo na Eq. 9.6-2, obtemos

$$\begin{aligned} v_n &= e^{-\alpha t}(A_1 \cos\omega_d t + jA_1 \text{ sen } \omega_d t + A_2 \cos\omega_d t - jA_2 \text{ sen } \omega_d t) \\ &= e^{-\alpha t}\left[(A_1 + A_2)\cos\omega_d t + j(A_1 - A_2)\text{ sen } \omega_d t)\right] \end{aligned} \quad (9.6\text{-}4)$$

Como as constantes A_1 e A_2 permanecem arbitrárias, podemos substituir $(A_1 + A_2)$ e $j(A_1 - A_2)$ por novas constantes B_1 e B_2. Como A_1 e A_2 são complexos conjugados, B_1 e B_2 são números reais. Assim, a Eq. 9.6-4 se torna

$$v_n = e^{-\alpha t}(B_1 \cos \omega_d t + B_2 \text{ sen } \omega_d t) \quad (9.6\text{-}5)$$

em que B_1 e B_2 são constantes a serem determinadas pelas condições iniciais, $v(0)$ e $i(0)$.

A resposta natural subamortecida é uma resposta oscilatória amortecida. A rapidez do amortecimento depende de α e a frequência das oscilações depende de ω_d.

Vamos determinar os valores de B_1 e B_2 em termos das condições iniciais. Fazendo $t = 0$, obtemos

$$v_n(0) = B_1$$

Para determinar B_2, calculamos o valor da derivada de v_n para $t = 0$. A derivada é

$$\frac{dv_n}{dt} = e^{-\alpha t}\left[(\omega_d B_2 - \alpha B_1)\cos \omega_d t - (\omega_d B_1 + \alpha B_2)\text{ sen } \omega_d t\right]$$

Fazendo $t = 0$, obtemos

$$\frac{dv_n(0)}{dt} = \omega_d B_2 - \alpha B_1 \quad (9.6\text{-}6)$$

De acordo com a Eq. 9.4-10,

$$\frac{dv_n(0)}{dt} = -\frac{v(0)}{RC} - \frac{i(0)}{C} \quad (9.6\text{-}7)$$

Combinando as Eqs. 9.6-6 e 9.6-7, temos

$$\omega_d B_2 = \alpha B_1 - \frac{v(0)}{RC} - \frac{i(0)}{C} \quad (9.6\text{-}8)$$

EXEMPLO 9.6-1 Resposta Natural de um Circuito de Segunda Ordem Subamortecido

EXEMPLO 9.6-1 Resposta Natural de um Circuito de Segunda Ordem Subamortecido

Determine a resposta natural $v_n(t)$, para $t > 0$, de um circuito *RLC* paralelo com $R = 25/3\ \Omega$, $L = 0{,}1$ H, $C = 1$ mF, $v(0) = 10$ V e $i(0) = -0{,}6$ A.

Solução

Em primeiro lugar, calculamos α^2 e ω_0^2 para conhecer a forma da resposta. Os resultados são

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = 60 \quad \text{e} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} = 10^4$$

Como $\omega_0^2 > \alpha^2$, a resposta natural é subamortecida. O passo seguinte consiste em calcular a frequência de ressonância amortecida:

$$\omega_\text{d} = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{10^4 - 3{,}6 \times 10^3} = 80 \text{ rad/s}$$

Assim, as raízes da equação característica são

$$s_1 = -\alpha + j\omega_\text{d} = -60 + j80 \quad \text{e} \quad s_2 = -\alpha + j\omega_\text{d} = -60 - j80$$

De acordo com a Eq. 9.6-5, a resposta natural é

$$v_n(t) = B_1 e^{-60t} \cos 80t + B_2 e^{-60t} \sin 80t$$

Como $v(0) = 10$, temos

$$B_1 = v(0) = 10$$

Podemos usar a Eq. 9.6-8 para calcular B_2:

$$\begin{aligned} B_2 &= \frac{\alpha}{\omega_\text{d}} B_1 - \frac{v(0)}{\omega_\text{d} RC} - \frac{i(0)}{\omega_\text{d} C} \\ &= \frac{60 \times 10}{80} - \frac{10}{80 \times 25\,/\,3000} - \frac{-0{,}6}{80 \times 10^{-3}} = 7{,}5 - 15{,}0 + 7{,}5 = 0 \end{aligned}$$

Assim, a resposta natural é

$$v_n(t) = 10e^{-60t} \cos 80t \text{ V}$$

A Figura 9.6-1 mostra a resposta do circuito em função do tempo. Embora a resposta seja oscilatória por causa da função cosseno, é amortecida pela função exponencial, e^{-60t}.

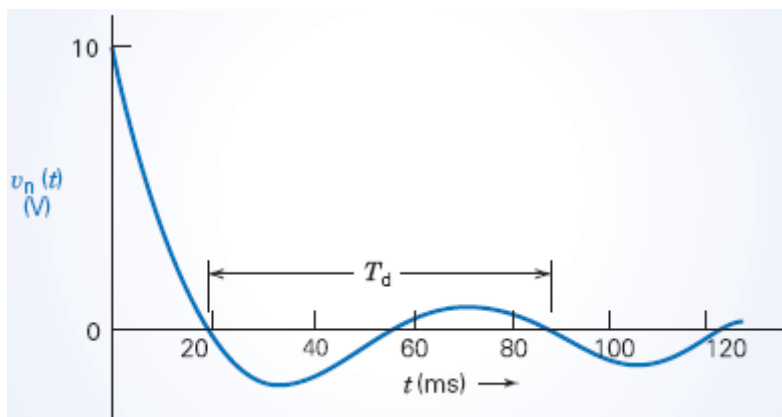



FIGURA 9.6-1 Resposta subamortecida de um circuito *RLC* paralelo.

O *período das oscilações amortecidas* é o intervalo de tempo T_d definido pela equação

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} \tag{9.6-9}$$

A resposta natural de um circuito subamortecido não é uma resposta oscilatória pura, mas apresenta oscilações. Podemos determinar o valor aproximado de T_d medindo a distância no tempo entre o primeiro e o terceiro cruzamentos com o eixo horizontal, como mostra a Figura 9.6-1. A frequência das oscilações amortecidas, em hertz, é o inverso do período em segundos:

$$f_d = \frac{1}{T_d}$$

No caso do Exemplo 9.6-1, o período das oscilações é

$$T_d = \frac{2\pi}{80} = 79 \text{ ms}$$

EXERCÍCIO 9.6-1 Determine a resposta natural $v_n(t)$, para $t > 0$, de um circuito *RLC* paralelo com $R = 62{,}5\ \Omega$, $L = 10$ mH, $C = 1\ \mu$F, $v(0) = 10$ V e $i(0) = 80$ mA.

Resposta: $v_n(t) = e^{-8000t}\,(10 \cos 6000t - 26{,}7 \text{ sen } 6000t)$ V

9.7 *Resposta Forçada de um Circuito* RLC

A resposta forçada de um circuito *RLC* descrito por uma equação diferencial de segunda ordem deve satisfazer a equação diferencial e não pode conter constantes arbitrárias. Como já dissemos, a resposta a uma função forçante muitas vezes é da mesma natureza que a função forçante. Mais uma vez, vamos escrever a equação diferencial do circuito de segunda ordem na forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1\frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t) \tag{9.7-1}$$

Tabela 9.7-1 Respostas Forçadas

FUNÇÃO FORÇANTE	SOLUÇÃO PROPOSTA
K	A
Kt	$At + B$
Kt^2	$At^2 + Bt + C$
$K \text{ sen } \omega t$	$A \text{ sen } \omega t + B \cos \omega t$
Ke^{-at}	Ae^{-at}

A resposta forçada x_f deve satisfazer a Eq. 9.7-1. Assim, substituindo x por x_f, devemos ter

$$\frac{d^2x_f}{dt^2} + a_1\frac{dx_f}{dt} + a_0 x_f = f(t) \tag{9.7-2}$$

Precisamos determinar x_f para que a Eq. 9.7-2 seja satisfeita.

Se a função forçante é uma constante, esperamos que a resposta forçada também seja uma constante, já que as derivadas de uma constante são nulas. Se a função forçante é da forma $f(t) = Be^{-at}$, as derivadas de $f(t)$ são exponenciais da forma Qe^{-at} e esperamos que

$$x_f = De^{-at}$$

Se a função forçante é uma função senoidal, esperamos que a resposta forçada seja uma função senoidal. Se $f(t) = A \text{ sen } \omega_0 t$, a resposta forçada é da forma

$$x_f = M \text{ sen } \omega_0 t + N \cos \omega_0 t = Q \text{ sen } (\omega_0 t + \theta)$$

A Tabela 9.7-1 mostra algumas funções forçantes e a forma das soluções correspondentes.

EXEMPLO 9.7-1 Resposta Forçada a uma Entrada Exponencial

Determine a resposta forçada i_f da corrente do indutor no circuito *RLC* paralelo da Figura 9.7-1 para $i_s = 8e^{-2t}$ A, $R = 6\ \Omega$, $L = 7$ H e $C = 1/42$ F.

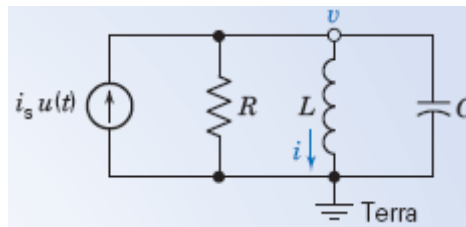



FIGURA 9.7-1 Circuito dos Exemplos 9.7-1 e 9.7-2.

Solução

Como a função i_s está multiplicada pela função degrau $u(t)$, a fonte de corrente é ligada no instante $t = 0$. Aplicando a LKC ao nó superior, obtemos, para $t >$ 0:

$$i + \frac{v}{R} + C\frac{dv}{dt} = i_s \tag{9.7-3}$$

Sabemos que

$$v = L\frac{di}{dt} \tag{9.7-4}$$

e

$$\frac{dv}{dt} = L\frac{d^2 i}{dt^2} \tag{9.7-5}$$

Substituindo as Eqs. 9.7-4 e 9.7-5 na Eq. 9.7-3, obtemos

$$i + \frac{L}{R}\frac{di}{dt} + CL\frac{di^2}{dt^2} = i_s$$

Dividindo ambos os membros por *LC* e reagrupando os termos, podemos escrever a equação na forma padrão

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = \frac{i_s}{LC} \tag{9.7-6}$$

Substituindo os valores dos componentes e o sinal i_s, obtemos

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 7\frac{di}{dt} + 6i = 48e^{-2t} \tag{9.7-7}$$

Como a função forçante é uma exponencial, vamos supor que a resposta é da forma

$$i_f = Be^{-2t} \tag{9.7-8}$$

em que B é uma constante a ser determinada. Substituindo a solução proposta, Eq. 9.7-8, na equação diferencial, obtemos

$$4Be^{-2t} + 7(-Be^{-2t}) + 6Be^{-2t} = 48e^{-2t}$$

ou

$$(4 - 14 + 6)Be^{-2t} = 48e^{-2t}$$

Assim, $B = -12$ e

$$i_f = -12e^{-2t} \text{ A}$$

EXEMPLO 9.7-2 Resposta Forçada a uma Entrada Constante

Determine a resposta forçada i_f do circuito do Exemplo 9.7-1 se $i_s = I_0$, em que I_0 é uma constante.

Solução

Como a função forçante é uma corrente constante aplicada no instante $t = 0$, esperamos que a resposta forçada também seja uma corrente constante. Como primeiro método, vamos usar a equação diferencial para determinar a resposta forçada. Em seguida, vamos demonstrar um método alternativo que utiliza o comportamento do circuito no regime estacionário para determinar i_f.

A equação diferencial com uma fonte constante pode ser obtida a partir da Eq. 9.7-6:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 7\frac{di}{dt} + 6i = 6I_0$$

Vamos supor que a resposta forçada é $i_f = D$, em que D é uma constante. Como as derivadas primeira e segunda de uma constante são nulas, temos

$$6D = 6I_0$$

$$D = I_0$$

o que nos dá

$$i_f = I_0$$

Outra abordagem consiste em determinar a resposta estacionária i_f do circuito da Figura 9.7-1 desenhando o circuito no regime estacionário. Nesse caso, o indutor é substituído por um curto-circuito e o capacitor é substituído por um circuito aberto, como mostra a Figura 9.7-2. Como no regime estacionário o indutor se comporta como um curto-circuito, toda a corrente da fonte passa pelo indutor e, portanto,

$$i_f = I_0$$

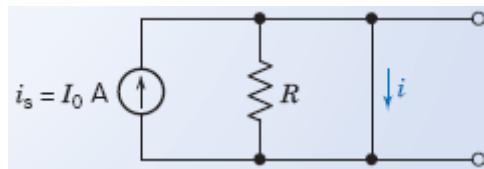



FIGURA 9.7-2 Circuito *RLC* paralelo, com entrada constante, no regime estacionário.

Os dois exemplos anteriores mostraram que, em muitos casos, é relativamente fácil obter a resposta do circuito a uma função forçante. Às vezes, porém, nos deparamos com um caso especial em que a função forçante tem a mesma forma que um dos componentes da resposta natural.

Considere mais uma vez o circuito dos Exemplos 9.7-1 e 9.7-2 (Figura 9.7-1), para o qual a equação diferencial é

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 7\frac{di}{dt} + 6\,i = 6\,i_s \tag{9.7-9}$$

Suponha que

$$i_s = 3\,e^{-6t}$$

Substituindo a função forçante na Eq. 9.7-9, temos

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 7\frac{di}{dt} + 6i = 18\,e^{-6t} \tag{9.7-10}$$

A equação característica do circuito é

$$s^2 + 7s + 6 = 0$$

$$(s + 1)(s + 6) = 0$$

Assim, a resposta natural é

$$i_n = A_1e^{-t} + A_2e^{-6t}$$

É natural esperarmos que a resposta forçada seja da forma

$$i_f = Be^{-6t} \tag{9.7-11}$$

Nesse caso, porém, a resposta forçada e uma das componentes da resposta natural teriam a mesma forma, De^{-6t}, em que D é uma constante. Será que isso faz diferença? Vamos experimentar substituir a Eq. 9.7-11 na equação diferencial (Eq. 9.7-9). O resultado é o seguinte:

$$36\,Be^{-6t} - 42Be^{-6t} + 6Be^{-6t} = 18e^{-6t}$$

$$0 = 18e^{-6t}$$

que não tem solução para t finito e não permite determinar o valor de B. Isso significa que precisamos de outra forma de resposta forçada quando um dos termos da resposta natural tem a mesma forma que a função forçante.

Vamos experimentar a resposta forçada

$$i_f = Bte^{-6t} \tag{9.7-12}$$

Substituindo a Eq. 9.7-12 na Eq. 9.7-10, temos

$$B(-6e^{-6t} - 6e^{-6t} + 36e^{-6t}) + 7B(e^{-6t} - 6t\, e^{-6t}) + 6Bt\, e^{-6t} = 18\, e^{-6t} \qquad (9.7\text{-}13)$$

Simplificando a Eq. 9.7-13, obtemos

$$B = \frac{18}{5}$$

o que nos dá

$$i_f = -\frac{18}{5} t e^{-6t}$$

Em geral, se a função forçante tem a mesma forma que um dos componentes da resposta natural, x_{n1}, a resposta forçada é da forma

$$x_f = t^p x_{n1}$$

em que p é o menor número inteiro positivo para o qual x_f não tem a mesma forma que a resposta natural.

EXERCÍCIO 9.7-1 Um circuito é descrito, para $t > 0$, pela equação

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 9\frac{di}{dt} + 20i = 6i_s$$

em que $i_s = 6 + 2t$ A. Determine a resposta forçada i_f para $t > 0$.

Resposta: $i_f = 1{,}53 + 0{,}6t$ A

9.8 *Resposta Completa de um Circuito* RLC

Já discutimos a resposta natural e a resposta forçada de um circuito descrito por uma equação diferencial de segunda ordem; vamos agora estudar a resposta completa do circuito.

A *resposta completa* de um circuito é a soma da resposta natural e da resposta forçada:

$$x = x_n + x_f$$

Considere o circuito *RLC* série da Figura 9.2-2. A equação diferencial do circuito, Eq. 9.2-8, pode ser escrita da seguinte forma:

$$LC\frac{d^2 v}{dt^2} + RC\frac{dv}{dt} + v = v_s$$

Para $L = 1$ H, $C = 1/6$ F e $R = 5\ \Omega$, temos:

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + 5\frac{dv}{dt} + 6v = 6\, v_s \qquad (9.8\text{-}1)$$

Vamos supor que $v_s = \dfrac{2e^{-t}}{3}$, $v(0) = 10$ V e $dv(0)/dt = -2$ V/s.

Nosso objetivo inicial será determinar a forma da resposta natural e, em seguida, a forma da resposta forçada. Somando as duas respostas, obteremos a resposta completa com duas constantes a serem

determinadas. Finalmente, usaremos as condições iniciais para calcular o valor das constantes.

Para obter a resposta natural, escrevemos a equação característica usando operadores:

$$s^2 + 5s + 6 = 0$$

ou

$$(s + 2)(s + 3) = 0$$

A resposta natural é, portanto,

$$v_n = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-3t}$$

A resposta forçada é obtida examinando a função forçante e notando que a resposta exponencial tem uma constante de tempo diferente da resposta natural, de modo que podemos tomar como resposta forçada uma função do tipo

$$v_f = Be^{-t} \tag{9.8-2}$$

Podemos determinar o valor de B substituindo a Eq. 9.8-2 na Eq. 9.8-1. O resultado é o seguinte:

$$Be^{-t} + 5(-Be^{-t}) + 6(Be^{-t}) = 4e^{-t}$$

ou

$$B = 2$$

A resposta completa é, portanto,

$$v = v_n + v_f = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-3t} + 2e^{-t}$$

Para determinar A_1 e A_2, usamos as condições iniciais. Em $t = 0$, $v(0) = 10$ e, portanto,

$$10 = A_1 + A_2 + 2 \tag{9.8-3}$$

Como $dv/dt = i/C = -2$ em $t = 0$, temos também

$$-2A_1 - 3A_2 - 2 = -2 \tag{9.8-4}$$

Resolvendo o sistema de equações formado pelas Eqs. 9.8-3 e 9.8-4, obtemos $A_1 = 24$ e $A_2 = -16$. Assim,

$$v = 24\, e^{-2t} - 16\, e^{-3t} + 2\, e^{-t} \text{ V}$$

EXEMPLO 9.8-1 Resposta Completa de um Circuito de Segunda Ordem

Determine a resposta completa $v(t)$ do circuito da Figura 9.8-1 para $t > 0$. Suponha que o circuito esteja no regime estacionário em $t = 0^-$.

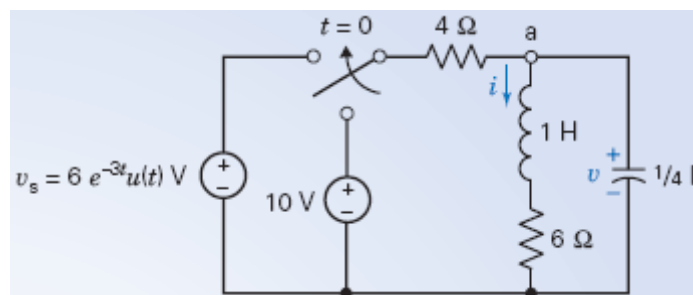



FIGURA 9.8-1 Circuito do Exemplo 9.8-1.

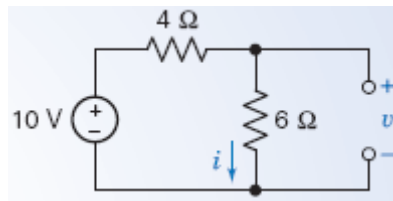



FIGURA 9.8-2 Circuito do Exemplo 9.8-1 em $t = 0^-$.

Solução

Em primeiro lugar, vamos determinar as condições iniciais do circuito. Em $t = 0^-$, o circuito tem a forma da Figura 9.8-2, com o capacitor substituído por um circuito aberto e o indutor por um curto-circuito. A tensão do capacitor é

$$v(0^-) = 6\text{ V}$$

e a corrente do indutor é

$$i(0^-) = 1\text{ V}$$

Depois que a chave muda de estado, aplicamos a LKT à malha da direita da Figura 9.8-1 para obter

$$-v + \frac{di}{dt} + 6i = 0 \tag{9.8-5}$$

Aplicando a LKC ao nó a, obtemos uma segunda equação envolvendo v e i:

$$\frac{v - v_s}{4} + i + \frac{1}{4}\frac{dv}{dt} = 0 \tag{9.8-6}$$

As Eqs. 9.8-5 e 9.8-6 podem ser escritas da seguinte forma:

$$\left(\frac{di}{dt} + 6i\right) - v = 0 \tag{9.8-7}$$

$$i + \left(\frac{v}{4} + \frac{1}{4}\frac{dv}{dt}\right) = \frac{v_s}{4} \tag{9.8-8}$$

Usando o operador $s \equiv d/dt$, temos

$$(s + 6)i - v = 0 \tag{9.8-9}$$

$$i + \frac{1}{4}(s + 1)v = v_s/4 \tag{9.8-10}$$

Explicitando i na Eq. 9.8-10 e substituindo o resultado na Eq. 9.8-9, obtemos

$$[(s + 6)(s + 1) + 4]v = (s + 6)v_s$$

ou, efetuando a multiplicação e agrupando os termos,

$$(s^2 + 7s + 10)v = (s + 6)v_s$$

Assim, a equação diferencial de segunda ordem é

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 7\frac{dv}{dt} + 10v = \frac{dv_s}{dt} + 6v_s \tag{9.8-11}$$

A equação característica é

$$s^2 + 7s + 10 = 0$$

As raízes da equação característica são

$$s_1 = -2 \quad \text{e} \quad s_2 = -5$$

A resposta natural v_n é

$$v_n = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-5t}$$

Podemos supor que a resposta forçada é da forma

$$v_f = Be^{-3t} \qquad (9.8\text{-}12)$$

Substituindo v_f na equação diferencial, obtemos

$$9Be^{-3t} - 21Be^{-3t} + 10Be^{-3t} = -18e^{-3t} + 36e^{-3t}$$

Assim,

$$B = -9$$

e

$$v_f = -9e^{-3t}$$

A resposta completa é, portanto,

$$v = v_n + v_f = A_t e^{-2t} + A_2 e^{-5t} - 9e^{-3t} \qquad (9.8\text{-}13)$$

Como $v(0) = 6$, temos:

$$v(0) = 6 = A_1 + A_2 - 9$$

ou

$$A_1 + A_2 = 15 \qquad (9.8\text{-}14)$$

Também sabemos que $i(0) = 1$ A. Podemos usar a Eq. 9.8-8 para determinar $dv(0)/dt$ e, em seguida, calcular a derivada da Eq. 9.8-13 para $t = 0$. De acordo com a Eq. 9.8-8,

$$\frac{dv}{dt} = -4\,i - v + v_s$$

Em $t = 0$, temos

$$\frac{dv(0)}{dt} = -4\,i(0) - v(0) + v_s(0) = -4 - 6 + 6 = -4$$

Derivando a Eq. 9.8-13, obtemos

$$\frac{dv}{dt} = -2A_1 e^{-2t} - 5A_2 e^{-5t} + 27e^{-3t}$$

Em $t = 0$, temos:

$$\frac{dv(0)}{dt} = -2A_1 - 5A_2 + 27$$

Como $dv(0)/dt = -4$, temos

$$2A_1 + 5A_2 = 31 \qquad (9.8\text{-}15)$$

Resolvendo o sistema de equações formado pelas Eqs. 9.8-14 e 9.8-15, obtemos

$$A_1 = \frac{44}{3} \quad \text{e} \quad A_2 = \frac{1}{3}$$

o que nos dá

$$v = \frac{44}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-5t} - 9e^{-3t}\ \text{V}$$

Observe que escolhemos como incógnitas a tensão do capacitor e a corrente do indutor. Isso é muito conveniente, já que, na maioria dos casos, dispomos de informações a respeito das condições iniciais das variáveis v_c e i_L, conhecidas como *variáveis de estado*. Vamos examinar essa abordagem mais de perto na próxima seção.

9.9 O Método das Variáveis de Estado

As *variáveis de estado* de um sistema são variáveis cujo conhecimento é necessário para descrever o estado do sistema em um dado instante. Nesse contexto, a palavra *estado* significa "situação", como na expressão *estado de espírito*. No caso dos circuitos elétricos, as variáveis de estado são as variáveis que descrevem o armazenamento de energia no circuito, ou seja, as tensões nos capacitores e as correntes nos indutores.

Considere o circuito da Figura 9.9-1. Os dois componentes que armazenam energia são C_1 e C_2 e os dois capacitores não podem ser combinados em um capacitor equivalente. Assim, esperamos que o circuito seja descrito por uma equação diferencial de segunda ordem. Entretanto, vamos primeiro obter as duas equações diferenciais de primeira ordem a que obedecem as funções $v_1(t)$ e $v_2(t)$, que são as variáveis de estado do circuito. Se conhecemos o valor das variáveis de estado em um dado instante e o valor das variáveis de entrada desse instante em diante, podemos calcular o valor das variáveis de estado em qualquer momento subsequente.

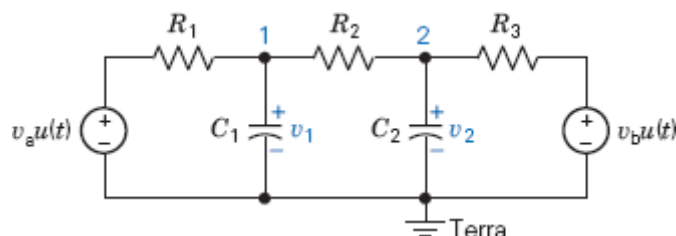



FIGURA 9.9-1 Circuito com dois componentes que armazenam energia.

Aplicando a LKC aos nós 1 e 2, temos

$$\text{nó 1:} \quad C_1\frac{dv_1}{dt} = \frac{v_a - v_1}{R_1} + \frac{v_2 - v_1}{R_2} \qquad (9.9\text{-}1)$$

$$\text{nó 2:} \quad C_2\frac{dv_2}{dt} = \frac{v_b - v_2}{R_3} + \frac{v_1 - v_2}{R_2} \quad (9.9\text{-}2)$$

As Eqs. 9.9-1 e 9.9-2 podem ser escritas na forma

$$\frac{dv_1}{dt} + \frac{v_1}{C_1R_1} + \frac{v_1}{C_1R_2} - \frac{v_2}{C_1R_2} = \frac{v_a}{C_1R_1} \quad (9.9\text{-}3)$$

$$\frac{dv_2}{dt} + \frac{v_2}{C_2R_3} + \frac{v_2}{C_2R_2} - \frac{v_1}{C_2R_2} = \frac{v_b}{C_2R_3} \quad (9.9\text{-}4)$$

Vamos supor que $C_1R_1 = 1$, $C_1R_2 = 1$, $C_2R_3 = 1$ e $C_2R_2 = 1/2$. Nesse caso, temos

$$\frac{dv_1}{dt} + 2v_1 - v_2 = v_a \quad (9.9\text{-}5)$$

e

$$-2v_1 + \frac{dv_2}{dt} + 3v_2 = v_b \quad (9.9\text{-}6)$$

Usando operadores, obtemos

$$(s + 2)v_1 - v_2 = v_a$$

$$-2v_1 + (s + 3)v_2 = v_b$$

Usando a regra de Cramer, obtemos o valor de v_1:

$$v_1 = \frac{(s + 3)v_a + v_b}{(s + 2)(s + 3) - 2} \quad (9.9\text{-}7)$$

O denominador da Eq. 9.9-7, que é a equação característica, pode ser escrito na forma

$$s^2 + 5s + 4 = 0$$

As raízes características são $s = -4$ e $s = -1$. A equação diferencial de segunda ordem pode ser obtida escrevendo a Eq. 9.9-7 na forma

$$(s^2 + 5s + 4)v_1 = (s + 3)v_a + v_b$$

Assim, a equação diferencial de v_1 é

$$\frac{d^2v_1}{dt^2} + 5\frac{dv_1}{dt} + 4v_1 = \frac{dv_a}{dt} + 3v_a + v_b \quad (9.9\text{-}8)$$

Vamos agora calcular a resposta natural

$$v_{in} = A_1e^{-t} + A_2e^{-4t}$$

e a resposta forçada, que depende da forma da função forçante. Por exemplo: se $v_a = 10$ V e $v_b = 6$ V, v_{1f} é uma constante (veja a Tabela 9.7-1). Substituindo v_a e v_b por seus valores na Eq. 9.9-8 e anulando as derivadas, temos

$$4v_{1f} = 3v_a + v_b$$

ou

$$4v_{1f} = 30 + 6 = 36$$

o que nos dá

$$v_{1f} = 9$$

e

$$v_1 = v_{1n} + v_{1f} = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-4t} + 9 \qquad (9.9\text{-}9)$$

Em geral, conhecemos as condições iniciais dos componentes que armazenam energia. Por exemplo: se $v_1(0) = 5$ V e $v_2(0) = 10$ V, primeiro fazemos $v_1(0) = 5$ e $t = 0$ na Eq. 9.9-9 para obter

$$v_1(0) = A_1 + A_2 + 9$$

o que nos dá

$$A_1 + A_2 = -4 \qquad (9.9\text{-}10)$$

Precisamos também conhecer o valor de dv_1/dt em $t = 0$. De acordo com a Eq. 9.9-5, temos:

$$\frac{dv_1}{dt} = v_a + v_2 - 2\, v_1$$

Assim, em $t = 0$ temos:

$$\frac{dv_1(0)}{dt} = v_a(0) + v_2(0) - 2\, v_1(0) = 10 + 10 - 2(5) = 10$$

No instante $t = 0$, a derivada da solução completa, Eq. 9.9-9, é dada por

$$\frac{dv_1(0)}{dt} = -A_1 - 4A_2$$

e, portanto,

$$A_1 + 4A_2 = -10 \qquad (9.9\text{-}11)$$

Resolvendo o sistema de equações formado pelas Eqs. 9.9-10 e 9.9-11, obtemos

$$A_1 = -2 \quad \text{e} \quad A_2 = -2$$

o que nos dá

$$v_1(t) = -2e^{-t} - 2e^{-4t} + 9 \text{ V}$$

Quando o leitor encontrar circuitos com dois ou mais componentes que armazenam energia, deve considerar a possibilidade de usar o método das variáveis de estado para obter um sistema de equações diferenciais de primeira ordem.

O **método das variáveis** de estado utiliza uma equação diferencial de primeira ordem associada a cada variável de estado para determinar a resposta completa de um circuito.

O método das variáveis de estado está descrito na Tabela 9.9-1. O método será ilustrado no Exemplo 9.9-1.

Tabela 9.9-1 Método das Variáveis de Estado

1. Identifique as variáveis de estado (tensões nos capacitores e correntes nos indutores).
2. Determine as condições iniciais em $t = 0$ (tensões nos capacitores e correntes nos indutores).
3. Obtenha uma equação diferencial de primeira ordem para cada variável de estado usando a LKC ou a LKT.
4. Use o operador *s* em lugar de *d*/*dt* no sistema de equações obtido no item anterior.
5. Obtenha a equação característica do circuito igualando a zero o determinante de Cramer do sistema de equações obtido no item anterior.
6. Determine as raízes da equação característica, que definem a forma da resposta natural.
7. Obtenha a equação diferencial de segunda ordem (ou de ordem superior) para a variável *x* selecionada pela regra de Cramer.
8. Determine a resposta forçada xf supondo uma forma apropriada para x_f e determinando a constante por substituição da solução proposta na equação diferencial de segunda ordem.
9. Obtenha a solução completa $x = x_n = x_f$.
10. Use as condições iniciais das variáveis de estado, juntamente com um sistema de equações diferenciais de primeira ordem (3º passo) para obter $dx(0)/dt$.
11. Use $x(0)$ e $dx(0)/dt$ para calcular as constantes $A_1, A_2, \ldots, A_n$ da resposta natural e assim completar a determinação da solução completa.

EXEMPLO 9.9-1 Resposta Completa de um Circuito de Segunda Ordem

Determine $i(t)$ para $t > 0$ no circuito da Figura 9.9-2, em que $R = 3\ \Omega$, $L = 1$ H, $C = 1/2$ F e $i_s = 2e^{-3t}$ A. Suponha que o circuito esteja no regime estacionário em $t = 0^-$.

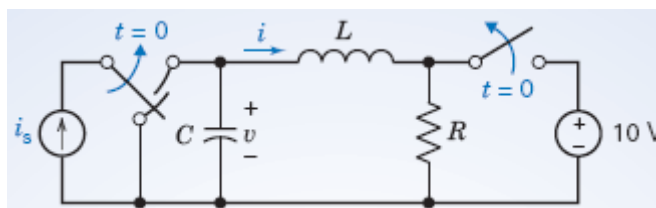



FIGURA 9.9-2 Circuito do Exemplo 9.9-1.

Solução

Em primeiro lugar, identificamos as variáveis de estado como *i* e *v*. As condições iniciais em $t = 0$ são obtidas supondo que a fonte de 10 V permaneceu ligada ao circuito por um longo tempo antes do instante $t = 0^-$. Nesse caso,$v(0) = 10$ V e $i(0) = 0$ A. Em $t = 0$, a fonte de tensão é removida e a fonte de corrente é ligada ao circuito.

Considere o circuito após o instante $t = 0$. A primeira equação diferencial é obtida aplicando a LKT à malha *RLC*, o que nos dá

$$L\frac{di}{dt} + Ri = v$$

A segunda equação diferencial é obtida aplicando a LKC ao nó do terminal de cima do capacitor, o que nos dá

$$C\frac{dv}{dt} + i = i_s$$

Podemos escrever essas duas equações diferenciais de primeira ordem na forma

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i - \frac{v}{L} = 0$$

e

$$\frac{dv}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{i_s}{C}$$

Substituindo os valores dos componentes, obtemos

$$\frac{di}{dt} + 3i - v = 0 \qquad (9.9\text{-}12)$$

e

$$\frac{dv}{dt} + 2i = 2i_s \qquad (9.9\text{-}13)$$

Usando o operador $s \equiv d/dt$, obtemos

$$(s + 3)i - v = 0 \qquad (9.9\text{-}14)$$

$$2i + sv = 2i_s \qquad (9.9\text{-}15)$$

A equação característica obtida a partir do determinante Δ de Cramer é

$$(s + 3)s + 2 = 0$$

ou

$$s^2 + 3s + 2 = 0$$

e as raízes da equação característica são

$$s_1 = -2 \quad \text{e} \quad s_2 = -1$$

Resolvendo o sistema de equações formado pelas Eqs. 9.9-14 e 9.9-15, obtemos:

$$i = \frac{2i_s}{s^2 + 3s + 2}$$

Assim, a equação diferencial é

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 3\frac{di}{dt} + 2i = 2i_s \qquad (9.9\text{-}16)$$

A resposta natural é

$$i_n = A_1e^{-t} + A_2e^{-2t}$$

Podemos supor que a resposta forçada é da forma

$$i_f = Be^{-3t}$$

Substituindo i_f na Eq. 9.9-16, obtemos

$$(9Be^{-3t}) + 3(-3Be^{-3t}) + 2Be^{-3t} = 2(2e^{-3t})$$

$$9B - 9B + 2B = 4$$

Assim, $B = 2$ e

$$i_f = 2e^{-3t}$$

A resposta completa é

$$i = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-2t} + 2e^{-3t}$$

Como $i(0) = 0$,

$$0 = A_1 + A_2 + 2 \tag{9.9-17}$$

Precisamos obter o valor de $di(0)/dt$ a partir da Eq. 9.9-12,

$$\frac{di}{dt} + 3i - v = 0$$

Para $t = 0$, temos

$$\frac{di(0)}{dt} = -3i(0) + v(0) = 10$$

A derivada da resposta completa em $t = 0$ é

$$\frac{di(0)}{dt} = -A_i - 2A_2 - 6$$

Como $di(0)/dt = 10$, temos

$$-A_i - 2A_2 = 16$$

Além disso, de acordo com a Eq. 9.9-17, temos

$$A_i + A_2 = -2$$

Resolvendo o sistema de equações, obtemos $A_1 = 12$ e $A_2 = -14$. A solução completa é, portanto,

$$i = 12e^{-t} - 14e^{-2t} + 2e^{-3t}\ \text{A}$$

O método das variáveis de estado também pode ser aplicado a circuitos com três ou mais componentes que armazenam energia. Considere, por exemplo, o circuito da Figura 9.9-3. As variáveis de estado, nesse caso, são v_1, v_2 e i. Duas equações diferenciais de primeira ordem são obtidas aplicando a LKC ao nó a e ao nó b. Uma terceira equação diferencial de primeira ordem é obtida aplicando a LKT à malha central. A solução para uma ou mais dessas variáveis pode ser obtida usando o método da Tabela 9.9-1.

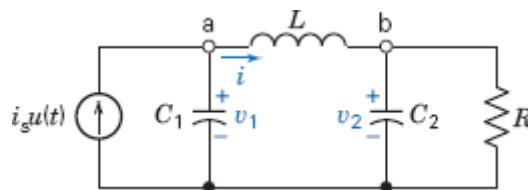



FIGURA 9.9-3 Circuito com três componentes que armazenam de energia.

EXERCÍCIO 9.9-1 Determine $v_2(t)$ para $t > 0$ no circuito da Figura 9.9-1. Suponha que os capacitores estejam inicialmente descarregados e a corrente do indutor é nula.

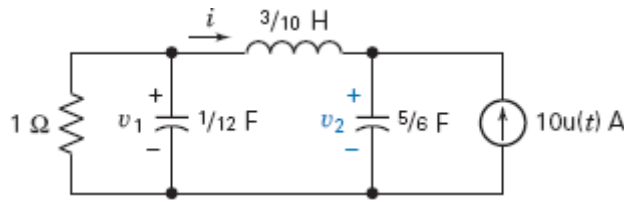



FIGURA E 9.9-1

Resposta: $v_2(t) = -15e^{-2t} + 6e^{-4t} - e^{-6t} + 10$ V

9.10 *Raízes no Plano Complexo*

Já vimos que o tipo de resposta natural de um sistema de segunda ordem é determinado pelas raízes da equação característica. Considere as raízes de um circuito *RLC* paralelo. A equação característica é a Eq. 9.4-3:

$$s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC} = 0$$

e as raízes são dadas pela Eq. 9.4-8:

$$s = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

em que $\alpha = 1/2RC$ e $\omega_0^2 = 1/LC$. Se $\omega_0 > \alpha$, as raízes são complexas e

$$s = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm j\omega_d \qquad (9.10\text{-}1)$$

As raízes da equação característica podem ser representadas como pontos no chamado plano complexo, cujos eixos são o eixo σ, ou eixo real, e o eixo $j\omega$, ou eixo imaginário. A parte real da raiz é a coordenada do ponto em relação ao eixo real e a parte imaginária é a coordenada em relação ao eixo imaginário. O plano complexo também é chamado de plano *s*. Quando as raízes são reais, negativas e distintas, a resposta é a soma de duas exponenciais decrescentes e dizemos que é uma resposta superamortecida. Quando as raízes são complexos conjugados, a resposta natural é uma senoide atenuada e dizemos que a resposta é subamortecida ou oscilatória.

Vamos agora mostrar qual é a posição das raízes da equação característica no plano complexo para quatro tipos de resposta: (a) não amortecida, $\alpha = 0$; (b) subamortecida, $\alpha < \omega_0$; (c) criticamente amortecida, $\alpha = \omega_0$; (d) superamortecida, $\alpha > \omega_0$. Os quatro tipos de resposta estão representados na Figura 9.10-1. Se $\alpha = 0$, as duas raízes estão nos pontos $s = j\omega_0$ e $s = -j\omega_0$. Se $\alpha < \omega_0$, as raízes estão nos pontos $s = -\alpha + j\omega_d$ e $s = -\alpha - j\omega_d$. Se $\alpha = \omega_0$, as duas raízes estão no mesmo ponto, $s = -\alpha$. Finalmente, se $\alpha > \omega_0$, as raízes estão nos pontos $s = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$ e $s = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$.

Um sumário da localização das raízes, do tipo de resposta e da forma da resposta $i(t)$ para $i(0) = 1$ A e $v(0) = 0$ aparece na Tabela 9.10-1.

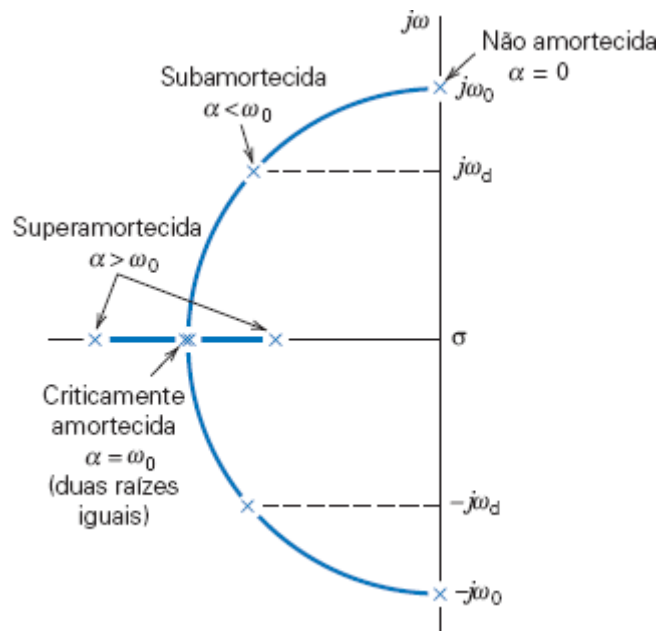
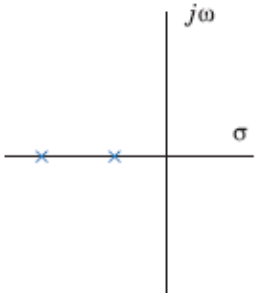
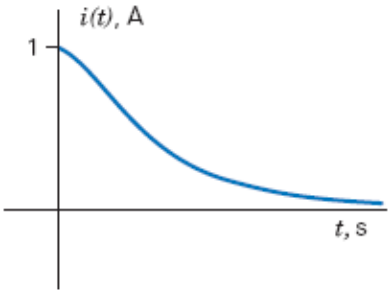
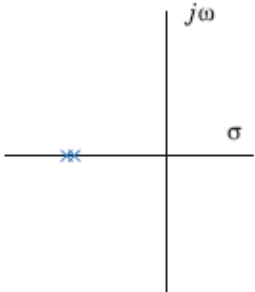
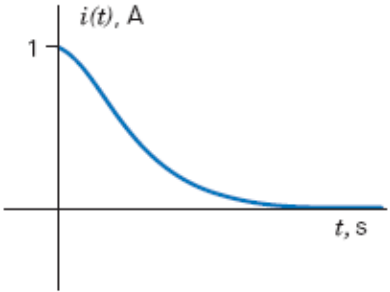
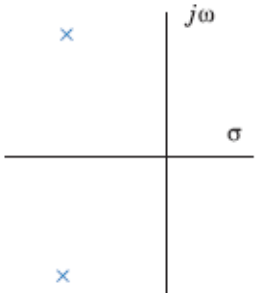
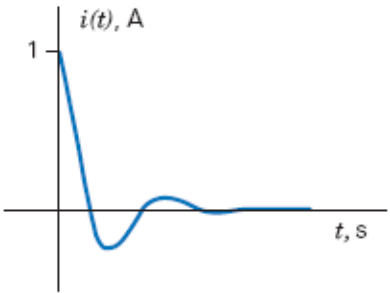
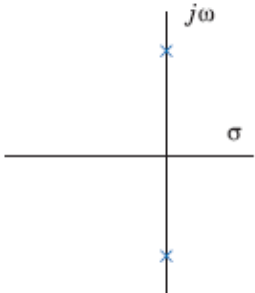
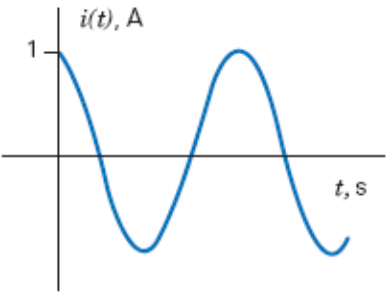



FIGURA 9.10-1 Gráfico que mostra a localização no plano complexo das duas raízes da equação característica, s_1 e s_2, para os três tipos de amortecimento. A posição das raízes está indicada pelo símbolo ×.

EXERCÍCIO 9.10-1 Em um circuito *RLC* paralelo, L = 0,1 H e C = 100 mF. Determine as raízes da equação característica e plote as raízes no plano s (a) para R = 0,4 Ω e (b) para R = 1,0 Ω.

Resposta parcial: (a) $s_1 = -5$ e $s_2 = -20$ (Figura E 9.10-1).

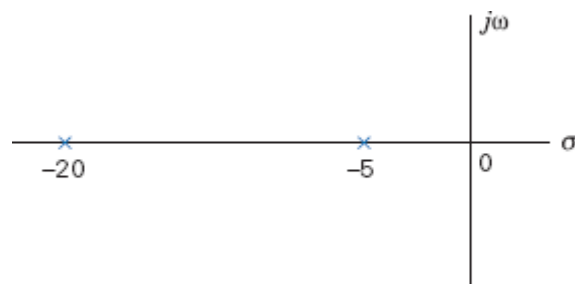



FIGURA E 9.10-1

Tabela 9.10-1 Resposta Natural de um Circuito *RLC* Paralelo*

TIPO DE RESPOSTA	LOCALIZAÇÃO DAS RAÍZES	FORMA DA RESPOSTA
Superamortecida	$j\omega$, σ	$i(t)$, A; 1; t, s
Criticamente amortecida	$j\omega$, σ	$i(t)$, A; 1; t, s
Subamortecida	$j\omega$, σ	$i(t)$, A; 1; t, s
Não amortecida	$j\omega$, σ	$i(t)$, A; 1; t, s

* A corrente $i(t)$ é a corrente do indutor do circuito da Figura 9.4-1 nas condições iniciais $i(0) = 1$ e $v(0) = 0$.

9.11 *Como Podemos Testar . . . ?*

Os engenheiros são frequentemente encarregados de verificar se a solução de um problema está correta. As soluções de problemas de projeto, por exemplo, devem ser verificadas para confirmar que todas as especificações estão sendo atendidas. Além disso, os resultados obtidos com o auxílio de computadores devem ser revistos para evitar possíveis erros na digitação dos dados e as afirmações dos vendedores a respeito dos seus produtos devem ser confirmadas.

Os estudantes de engenharia muitas vezes também precisam verificar se os resultados que obtiveram estão corretos. Às vezes falta muito pouco tempo para terminar um exame e é importante poder identificar rapidamente as questões que precisam ser refeitas.

O exemplo a seguir ilustra algumas técnicas que podem ser usadas para verificar se as soluções de problemas do tipo discutido neste capítulo estão corretas.

EXEMPLO 9.11-1 Como Podemos Testar uma Resposta Subamortecida?

A Figura 9.11-1*b* mostra um circuito *RLC*. A tensão $v_s(t)$ da fonte de tensão é a onda quadrada que aparece na Figura 9.11-1*a*. A Figura 9.11-2 mostra um gráfico da corrente do indutor, $i(t)$, que foi obtido simulando o circuito com o auxílio do programa PSpice. **Como podemos testar** se o gráfico de $i(t)$ está correto?

Solução

Vários aspectos do gráfico podem ser testados. O gráfico mostra que os valores da corrente do indutor no regime estacionário são $i(\infty) = 0$ e $i(\infty) = 200$ mA e que o circuito é subamortecido. Além disso, alguns pontos da resposta foram assinalados com os valores correspondentes de tempo e corrente. Esses pontos podem ser usados para testar o valor da frequência de ressonância amortecida, ω_d.

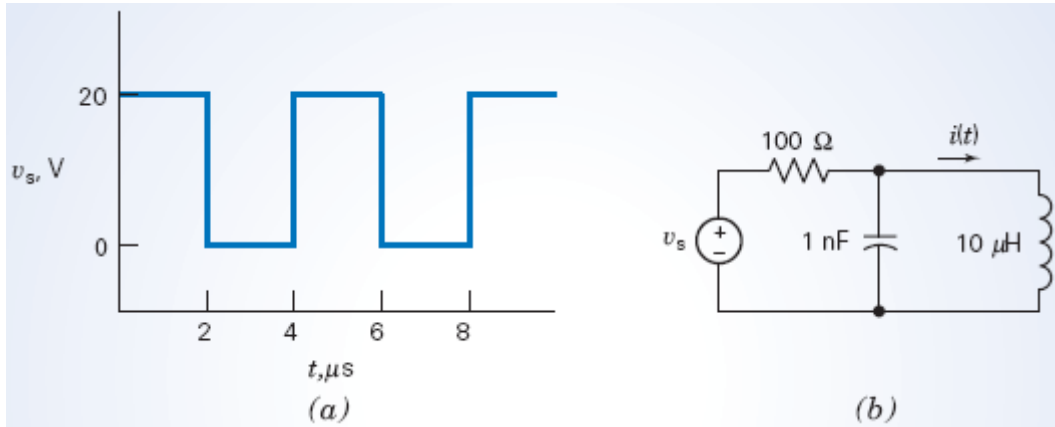



FIGURA 9.11-1 Circuito *RLC* (*b*) excitado por uma onda quadrada (*a*).

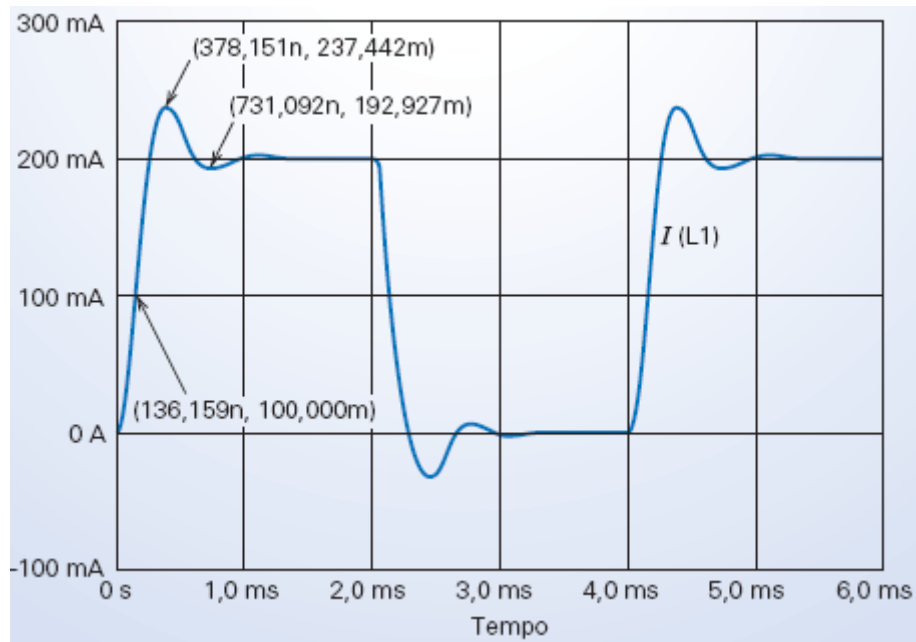



FIGURA 9.11-2 Gráfico gerado pelo programa PSpice para a corrente $i(t)$ do indutor da Figura 9.11-1.

Para uma tensão constante V_s da fonte de tensão, $v_s(t) = V_s$ e a corrente do indutor é dada por

$$i(t) = \frac{V_s}{100}$$

Assim, esperamos que a corrente do indutor no regime estacionário seja $i(\infty) = 0$ para $V_s = 0$ V e $i(\infty) = 200$ mA para $V_s = 20$ V. O gráfico da Figura 9.11-2 mostra que os valores da corrente do indutor no regime estacionário são realmente $i(\infty) = 0$ e $i(\infty) = 200$ mA.

O gráfico da Figura 9.11-2 mostra uma resposta subamortecida. O circuito *RLC* dado será subamortecido se

$$10^{-5} = L < 4R^2C = 4 \times 100^2 \times 10^{-9}$$

Como essa desigualdade é satisfeita, o circuito é realmente subamortecido, como sugere o gráfico.

A frequência de ressonância amortecida ω_d é dada por

$$\omega_d = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2RC}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{10^{-5} \times 10^{-9}} - \left(\frac{1}{2 \times 100 \times 10^{-9}}\right)^2} = 8{,}66 \times 10^6 \text{ rad/s}$$

O gráfico indica que a corrente passa por um máximo em 378 ns e por um mínimo em 731 ns. Assim, o período da oscilação amortecida é, aproximadamente,

$$T_d = 2(731 \times 10^{-9} - 378 \times 10^{-9}) = 706 \times 10^{-9} \text{ s}$$

A frequência de ressonância amortecida ω_d está relacionada a T_d pela Eq. 9.6-9:

$$\omega_d = \frac{2\pi}{T_d} = \frac{2\pi}{706 \times 10^{-9}} = 8{,}90 \times 10^6 \text{ rad/s}$$

Assim, o valor de ω_d obtido a partir do gráfico é da mesma ordem que o valor teórico.

Concluímos que o gráfico está correto.

9.12 EXEMPLO DE PROJETO Ignitor de Airbag

Os airbags são hoje muito usados para proteger os motoristas e passageiros de automóveis. Em caso de acidente, um pêndulo faz com que um capacitor seja ligado ao ignitor do airbag, como mostra a Figura 9.12-1. O airbarg é inflado por um explosivo detonado quando o componente resistivo representado por R dissipa energia. Para que o airbag seja inflado, é preciso que a energia dissipada em R seja pelo menos 1 J. O airbag deve ser inflado menos de 0,1 s depois que o pêndulo provoca a comutação do circuito. Escolha os valores de L e C para que essas especificações sejam satisfeitas.

Descreva a Situação e as Hipóteses

1. A chave passa da posição 1 para a posição 2 em $t = 0$.
2. A chave permaneceu por um longo tempo na posição 1.
3. Para $t \geq 0$, o circuito é um circuito RLC paralelo.

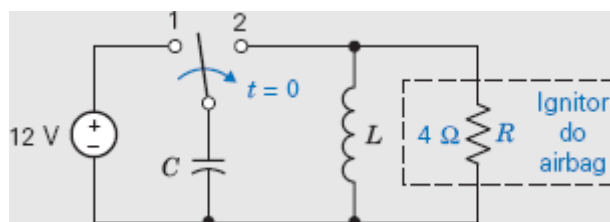



FIGURA 9.12-1 Circuito de um ignitor de airbag.

Estabeleça a Meta

Escolher L e C para que a energia armazenada no capacitor seja rapidamente transferida para o componente resistivo R.

Formule um Plano

1. Escolher valores de L e C tais que a resposta seja subamortecida com um período menor ou igual a 0,4 s ($T \leq 0{,}4$ s).
2. Determinar a tensão $v(t)$ e a corrente $i(t)$ no resistor R.

Execute o Plano

Como a chave permanece por um longo tempo na posição 1 antes de $t = 0$, sabemos que as condições iniciais são $v(0) = 12$ V e $i_L(0) = 0$. Como vimos na Seção 9.6, a reposta subamortecida de um circuito *RLC* paralelo é dada pela Eq. 9.6-5,

$$v(t) = e^{-\alpha t}(B_1 \cos \omega_d t + B_2 \operatorname{sen} \omega_d t) \qquad (9.12\text{-}1)$$

Essa resposta natural acontece se $\alpha^2 < \omega_0^2$, ou seja, se $L < 4R^2C$. Escolhemos uma resposta subamortecida para nosso projeto, mas reconhecemos que uma resposta superamortecida ou criticamente amortecida pode atender aos objetivos do circuito. Além disso, reconhecemos que os valores dos parâmetros escolhidos a seguir representam apenas uma das possíveis soluções.

Como estamos interessados em uma resposta rápida, escolhemos $a = 2$ (uma constante de tempo de 0,5 s), em que $a = 1/2RC$. Nesse caso, temos:

$$C = \frac{1}{2R\alpha} = \frac{1}{16}\ \text{F}$$

Lembre-se de que $\omega_0^2 = 1/LC$ e queremos que $\alpha^2 < \omega_0^2$. Para $T = 0{,}4$ s,

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}4} = 5\pi\ \text{rad/s}$$

Assim, temos:

$$L = \frac{1}{\omega_0^2 C} = \frac{1}{25\pi^2(1/16) = 0{,}065\ \text{H}}$$

Vamos, portanto, usar $C = 1/16$ F e $L = 65$ mH. Nesse caso, $\omega_d = 15{,}58$ rad/s e, de acordo com a Eq. 9.6-5, temos

$$v(t) = e^{-2t}(B_1 \cos \omega_d t + B_2 \operatorname{sen} \omega_d t) \qquad (9.12\text{-}2)$$

Além disso, sabemos que $B_1 = v(0) = 12$ e

$$\omega_d B_2 = \alpha B_1 - \frac{B_1}{RC} = (2 - 4)12 = -24$$

Assim, $B_2 = -24/15{,}58 = -1{,}54$. Como $B_2 \ll B_1$, a Eq. 9.12-2 se reduz a

$$v(t) \cong 12e^{-2t} \cos \omega_d t\ \text{V}$$

A potência é, portanto,

$$p = \frac{v^2}{R} = 36e^{-4t} \cos^2 \omega_d t\ \text{W}$$

Verifique se a Solução Proposta Está Correta

A Figura 9.12-2 mostra a tensão e a corrente no resistor R durante os primeiros 100 ms. Plotando o produto de v e i nos primeiros 100 ms, verificamos que a potência diminui quase linearmente de 36 W em $t = 0$ para 0 W em $t = 95$ ms. A energia absorvida pelo resistor nos primeiros 100 ms é, portanto,

$$w \cong \frac{1}{2}(36)(0{,}1\ \text{s}) = 1{,}8\ \text{J}$$

Assim, o airbag é inflado em menos de 0,1 s e nosso objetivo é atingido.

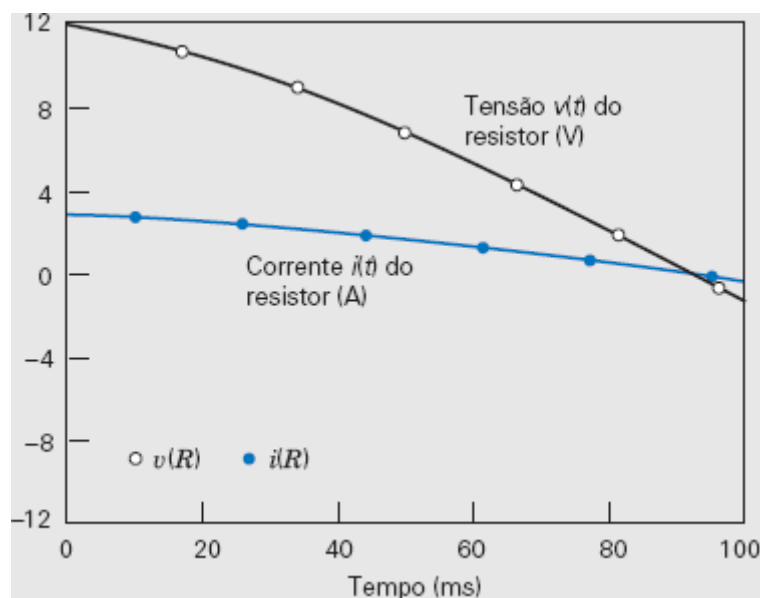



FIGURA 9.12-2 Resposta do circuito *RLC*.

9.13 RESUMO

- Os circuitos de segunda ordem são representados por equações diferenciais de segunda ordem da forma

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + 2\alpha\frac{d}{dt}x(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t)$$

em que $x(t)$ é a corrente ou tensão de saída e $f(t)$ é a corrente ou tensão de entrada do circuito. A saída do circuito, também chamada de resposta, pode ser a tensão ou a corrente em qualquer componente do circuito. A saída escolhida é muitas vezes a corrente em um indutor ou a tensão em um capacitor. A entrada do circuito pode ser a tensão em uma fonte independente de tensão ou a corrente em uma fonte independente de corrente. Os coeficientes da equação diferencial recebem nomes especiais: α é chamado de coeficiente de amortecimento e ω_0 de frequência de ressonância.

- Existem várias formas de obter a equação diferencial que representa um circuito. Neste capítulo são apresentados três métodos diferentes para obter a equação diferencial: o método direto (Seção 9.2), o método dos operadores (Seção 9.2) e o método das variáveis de estado (Seção 9.10).
- A equação característica de um circuito de segunda ordem é

$$s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$$

Essa equação de segunda ordem tem duas soluções, s_1 e s_2, que são chamadas de frequências naturais do circuito de segunda ordem.

- Os circuitos de segunda ordem podem ser superamortecidos, criticamente amortecidos ou subamortecidos. Um circuito de segunda ordem é superamortecido se s_1 e s_2 são reais e distintas, ou, o que é equivalente, se $\alpha > \omega_0$. Um circuito de segunda ordem é criticamente amortecido se s_1 e s_2 são reais e iguais ou, o que é equivalente, se $\alpha = \omega_0$. Um circuito de segunda ordem é subamortecido se s_1 e s_2 são complexas ou, o que é equivalente, se $\alpha < \omega_0$.
- A Tabela 9.13-1 mostra as frequências naturais de circuitos *RLC* série e *RLC* paralelo superamortecidos, subamortecidos e criticamente amortecidos.
- A resposta completa de um circuito de segunda ordem é a soma da resposta natural e da resposta forçada:

$$x = x_n + x_f$$

A forma da resposta natural depende das frequências naturais do circuito, como mostra a Tabela 9.13-2. A forma da resposta forçada depende da entrada do circuito, como mostra a Tabela 9.13-3.

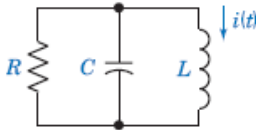
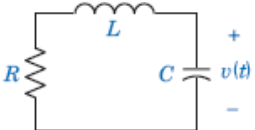
Tabela 9.13-1 Frequências Naturais de Circuitos *RLC* Paralelo e Circuitos *RLC* Série

	RLC PARALELO	*RLC* SÉRIE
Circuito	R, C, L em paralelo; $i(t)$	R, L, C em série; $v(t)$
Equação diferencial	$\frac{d^2}{dt^2}i(t)+\frac{1}{RC}\frac{d}{dt}i(t)+\frac{1}{LC}i(t)=0$	$\frac{d^2}{dt^2}v(t)+\frac{R}{L}\frac{d}{dt}v(t)+\frac{1}{LC}v(t)=0$
Equação característica	$s^2+\frac{1}{RC}s+\frac{1}{LC}=0$	$s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}=0$
Coeficiente de amortecimento, rad/s	$\alpha=\frac{1}{2RC}$	$\alpha=\frac{R}{2L}$
Frequência de ressonância, rad/s	$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$	$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$
Frequência de ressonância amortecida, rad/s	$\omega_d=\sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2-\frac{1}{LC}}$	$\omega_d=\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}$
Frequências naturais: superamortecimento	$s_1,s_2=-\frac{1}{2RC}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2-\frac{1}{LC}}$ se $R<\frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$	$s_1,s_2=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}$ se $R>2\sqrt{\frac{L}{C}}$
Frequências naturais: amortecimento crítico	$s_1=s_2=-\frac{1}{2RC}$ se $R=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$	$s_1=s_2=-\frac{R}{2L}$ se $R=2\sqrt{\frac{L}{C}}$
Frequências naturais: subamortecimento	$s_1,s_2=-\frac{1}{2RC}\pm j\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{1}{2RC}\right)^2}$ se $R>\frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$	$s_1,s_2=-\frac{R}{2L}\pm j\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}$ se $R<2\sqrt{\frac{L}{C}}$

Tabela 9.13-2 Resposta Natural de Circuitos de Segunda Ordem

CASO	FREQUÊNCIAS NATURAIS	RESPOSTA NATURAL, x_n
Superamortecido	$s_1,s_2=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}$	$A_1e^{s_1t}+A_2e^{s_2t}$
Criticamente amortecido	$s_1,s_2=-\alpha$	$(A_1+A_2t)e^{-\alpha t}$
Subamortecido	$s_1,s_2=-\alpha\pm j\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}=-\alpha\pm j\omega_d$	$(A_1\cos\omega_d t+A_2\,\text{sen}\,\omega_d t)e^{-\alpha t}$

Tabela 9.13-3 Resposta Forçada de Circuitos de Segunda Ordem

	ENTRADA, $f(t)$	RESPOSTA FORÇADA, x_f
Constante	K	A
Rampa	Kt	$A+Bt$
Senoide	$K\cos\omega t$, $K\,\text{sen}\,\omega t$ ou $K\cos(\omega t+\theta)$	$A\cos\omega t+B\,\text{sen}\,\omega t$
Exponencial	Ke^{-bt}	Ae^{-bt}

PROBLEMAS

Seção 9.2 Equação Diferencial de Circuitos com Dois Componentes que Armazenam Energia

P 9.2-1 Determine a equação diferencial do circuito da Figura P 9.2-1 usando o método direto.

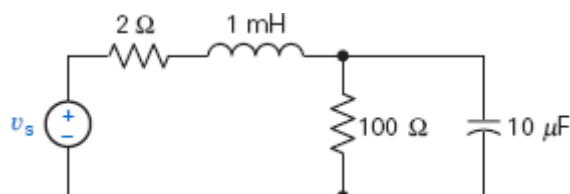



Figura P 9.2-1

P 9.2-2 Determine a equação diferencial do circuito da Figura P 9.2-2 usando o método dos operadores.

Resposta:

$$\frac{d^2}{dt^2} i_L + 11.000 \frac{d}{dt} i_L(t) + 1{,}1 \times 10^8 i_L(t) = 10^8 i_s(t)$$

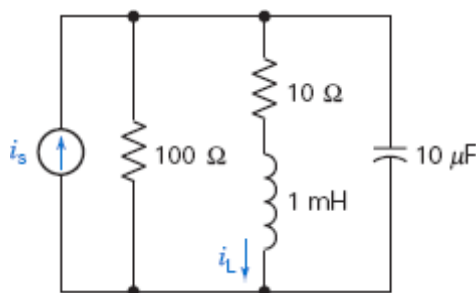



Figura P 9.2-2

P 9.2-3 Determine a equação diferencial de $i_L(t)$ para $t > 0$ no circuito da Figura P 9.2-3.

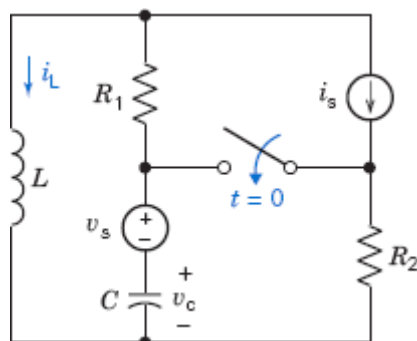



Figura P 9.2-3

P 9.2-4 A entrada do circuito da Figura P 9.2-4 é a tensão V_s da fonte de tensão. A saída é a corrente $i(t)$ do indutor. Represente o circuito por uma equação diferencial de segunda ordem que mostre como a saída deste circuito está relacionada à entrada, para $t > 0$.

Sugestão: Use o método direto.

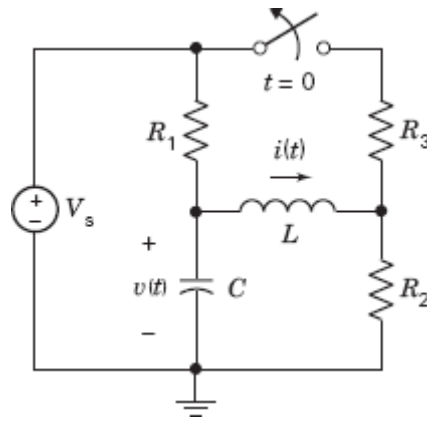



Figura P 9.2-4

P 9.2-5 A entrada do circuito da Figura P 9.2-5 é a tensão v_s da fonte de tensão. A saída é a tensão $v(t)$ do capacitor. Represente o circuito por uma equação diferencial de segunda ordem que mostre como a saída do circuito está relacionada à entrada, para $t > 0$.

Sugestão: Use o método direto.

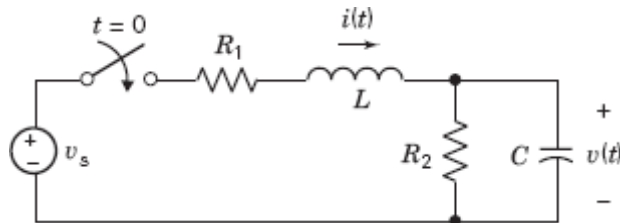



Figura P 9.2-5

P 9.2-6 A entrada do circuito da Figura P 9.2-6 é a tensão v_s da fonte de tensão. A saída é a corrente $i(t)$ do indutor. Represente o circuito por uma equação diferencial de segunda ordem que mostre como a saída do circuito está relacionada à entrada, para $t > 0$.

Sugestão: Use o método direto.

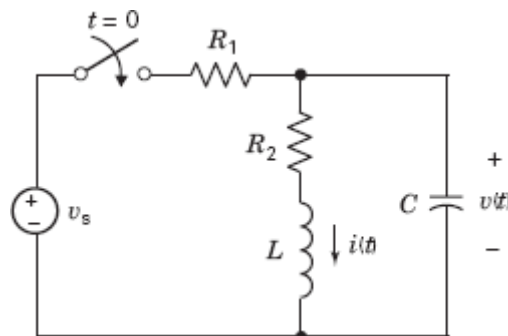



Figura P 9.2-6

P 9.2-7 A entrada do circuito da Figura P 9.2-7 é a tensão v_s da fonte de tensão. A saída é a corrente $i_2(t)$ do indutor L_2. Represente o circuito por uma equação diferencial de segunda ordem que mostre como a saída do circuito está relacionada à entrada, para $t > 0$.

Sugestão: Use o método dos operadores.

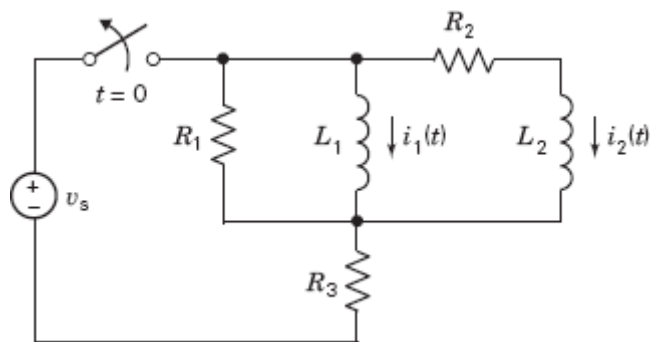



Figura P 9.2-7

P 9.2-8 A entrada do circuito da Figura P 9.2-8 é a tensão v_s da fonte de tensão. A saída é a tensão $v_2(t)$ do capacitor C_2. Represente o circuito por uma equação diferencial de segunda ordem que mostra como a saída do circuito está relacionada à entrada, para $t > 0$.

Sugestão: Use o método dos operadores.

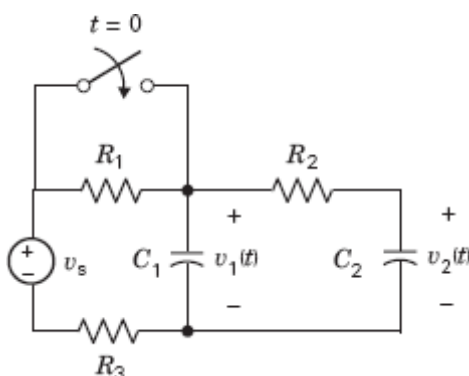



Figura P 9.2-8

P 9.2-9 A entrada do circuito da Figura P 9.2-9 é a tensão v_s da fonte de tensão. A saída é a tensão $v(t)$ do capacitor. Represente o circuito por uma equação diferencial de segunda ordem que mostre como a saída do circuito está relacionada à entrada, para $t > 0$.

Sugestão: Use o método direto.

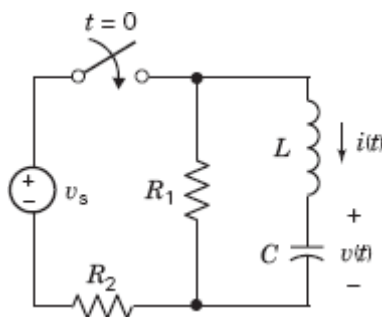



Figura P 9.2-9

P 9.2-10 A entrada do circuito da Figura P 9.2-10 é a tensão v_s da fonte de tensão. A saída é a tensão $v(t)$ do capacitor. Represente o circuito por uma equação diferencial de segunda ordem que mostre como a saída do circuito está relacionada à entrada, para $t > 0$.

Sugestão: Determine o circuito equivalente de Thévenin.

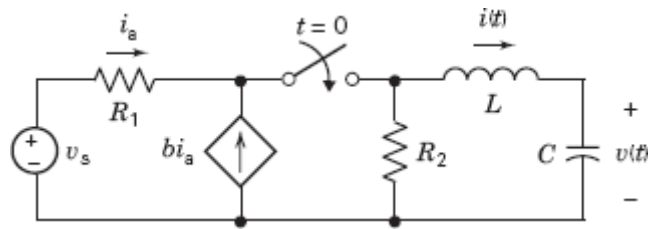



Figura P 9.2-10

P 9.2-11 A entrada do circuito da Figura P 9.2-11 é a tensão $v_s(t)$ da fonte de tensão. A saída é a tensão $v_2(t)$ do capacitor C_2. Represente o circuito por uma equação diferencial de segunda ordem que mostre como a saída do circuito está relacionada à entrada.

Sugestão: Use o método direto.

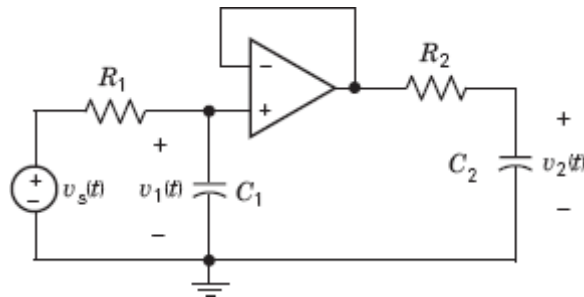



Figura P 9.2-11

P 9.2-12 A entrada do circuito da Figura P 9.2-12 é a tensão $v_s(t)$ da fonte de tensão. A saída é a tensão $v_o(t)$. Represente o circuito por uma equação diferencial de segunda ordem que mostre como a saída do circuito está relacionada à entrada.

Sugestão: Use o método dos operadores.

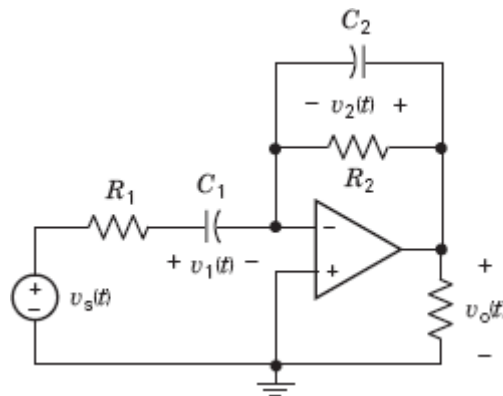



Figura P 9.2-12

P 9.2-13 A entrada do circuito da Figura P 9.2-13 é a tensão $v_s(t)$ da fonte de tensão. A saída é a tensão $v_o(t)$ do resistor R_2. Represente o circuito por uma equação diferencial de segunda ordem que mostre como a saída do circuito está relacionada à entrada.

Sugestão: Use o método direto.

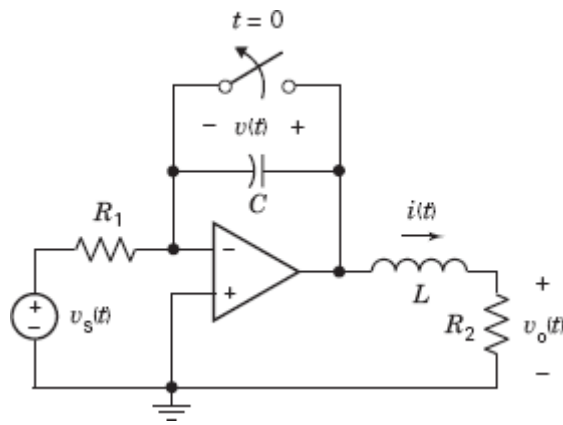



Figura P 9.2-13

P 9.2-14 A entrada do circuito da Figura P 9.2-14 é a tensão $v_s(t)$ da fonte de tensão. A saída é a tensão $v_2(t)$. Represente o circuito por uma equação diferencial de segunda ordem que mostre como a saída do circuito está relacionada à entrada.

Sugestão: Use o método direto.

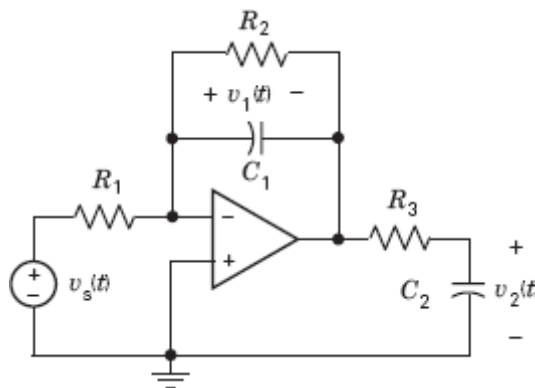



Figura P 9.2-14

P 9.2-15 Determine a equação diferencial de i_2 no circuito da Figura P 9.2-15 usando o método dos operadores.

Sugestão: Lembre-se de que o operador da integral é 1/s.

Resposta: $3\frac{d^2 i_2}{dt^2} + 4\frac{di_2}{dt} + 2i_2 = \frac{d^2 v_s}{dt^2}$

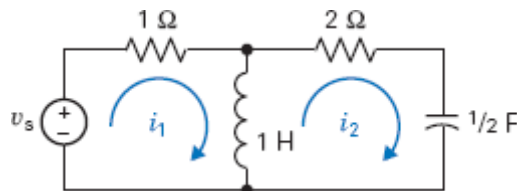



Figura P 9.2-15

Seção 9.3 Solução de uma Equação Diferencial de Segunda Ordem: A Resposta Natural

P 9.3-1 Determine a equação característica e suas raízes para o circuito da Figura P 9.2-2.

P 9.3-2 Determine a equação característica e suas raízes para o circuito da Figura P 9.3-2.

Resposta: $s^2 + 400s + 3 \times 10^4 = 0$

raízes: $s = -300$ e $s = -100$

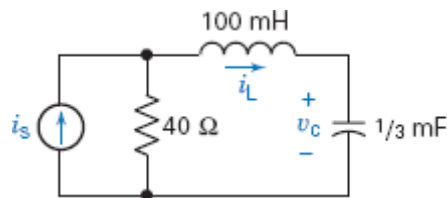



Figura P 9.3-2

P 9.3-3 Determine a equação característica e suas raízes para o circuito da Figura P 9.3-3.

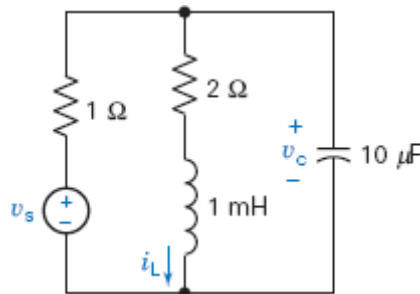



Figura P 9.3-3

P 9.3-4 A fábrica de automóveis Volkswagen, como parte de um programa para tornar os carros mais eficientes, lançou um modelo cujo motor economiza energia desligando-se automaticamente. O sistema *stop-start* faz parte de um movimento internacional para desenvolver automóveis que usem menos combustível e poluam menos que os modelos atuais. O sistema dispõe de um sensor que detecta os momentos em que o carro não precisa de combustível: quando está descendo uma ladeira, por exemplo, ou quando está parado em um sinal de trânsito. Nesses momentos, o motor é desligado, mas um pequeno volante continua a girar para que o carro possa entrar em movimento no momento em que o motorista pisar no acelerador.

A Figura P 9.3-4 mostra um modelo simplificado do circuito *stop-start*. Determine a equação característica e as frequências naturais do circuito.

Resposta: $s^2 + 20s + 400 = 0$

$$s = -10 \pm j17{,}3$$

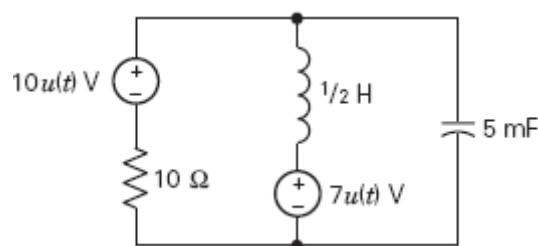



Figura P 9.3-4 Circuito *stop-start*.

Seção 9.4 Resposta Natural de um Circuito *RLC* Paralelo Não Forçado

P 9.4-1 Determine $v(t)$ no circuito da Figura P 9.4-1, com $L = 1$ H e $v_s = 0$, para $t \geq 0$. As condições iniciais são $v(0) = 6$ V e $dv(0)/dt = -3000$ V/s.

Resposta: $v(t) = -2e^{-100t} + 8e^{-400t}$ V

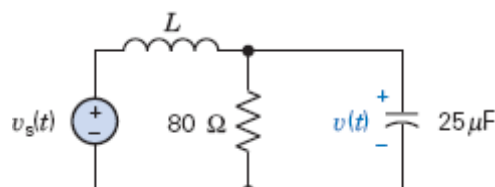



Figura P 9.4-1

P 9.4-2 No circuito *RLC* da Figura P 9.4-2, $v(0) = 2$ V. A chave permaneceu aberta por um longo tempo antes de ser fechada em $t = 0$. Determine e plote $v(t)$.

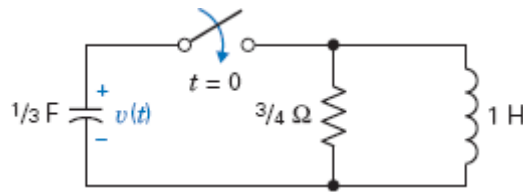



Figura P 9.4-2

P 9.4-3 Determine $i_1(t)$ e $i_2(t)$ no circuito da Figura P 9.4-3, sabendo que $i_1(0) = i_2(0) = 11$ A.

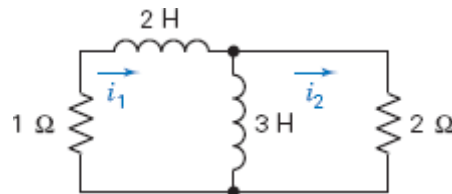



Figura P 9.4-3

P 9.4-4 O circuito da Figura P 9.4-4 contém uma chave que às vezes está aberta e às vezes está fechada. Determine o fator de amortecimento α, a frequência de ressonância ω_0 e a frequência de ressonância amortecida ω_d do circuito (a) quando a chave está aberta e (b) quando a chave está fechada.

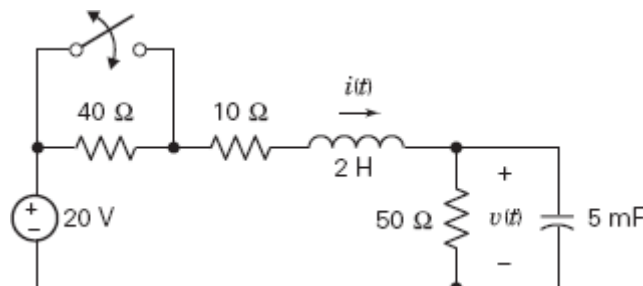



Figura P 9.4-4

P 9.4-5 O circuito da Figura P 9.4-5 é usado para detectar fumantes furtivos em aviões. O sensor aciona uma chave e o aumento momentâneo da tensão faz uma lâmpada de advertência piscar no posto dos comissários de bordo. Determine a resposta natural $v(t)$ do circuito.

Resposta: $v(t) = -1{,}16e^{-2{,}7t} + 1{,}16e^{-37{,}3t}$ V

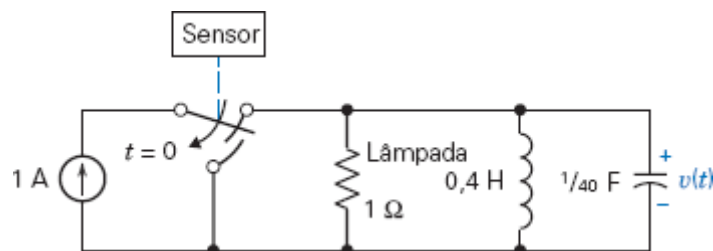



Figura P 9.4-5 Circuito de um detector de fumaça.

Seção 9.5 Resposta Natural de um Circuito *RLC* Paralelo Não Forçado Criticamente Amortecido

P 9.5-1 Determine $v_c(t)$ para $t > 0$ no circuito da Figura P 9.5-1.

Resposta: $v_c(t) = (3 + 6000t)\, e^{-2000t}$ V

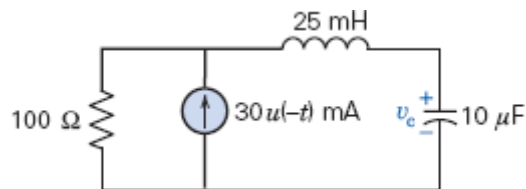



Figura P 9.5-1

P 9.5-2 Determine $v_c(t)$ para $t > 0$ no circuito da Figura P 9.5-2. Suponha que o circuito esteja no regime estacionário em $t = 0^-$.

Resposta: $v_c(t) = -8te^{-2t}$ V

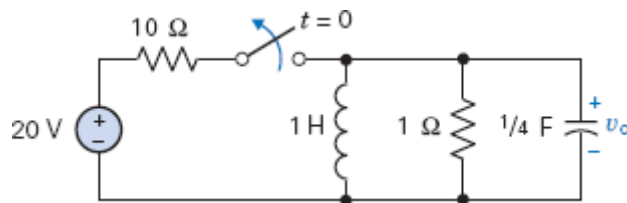



Figura P 9.5-2

P 9.5-3 Uma arma não letal usada pela polícia de vários países para imobilizar suspeitos produz uma série de pulsos de alta tensão e baixa corrente. A potência dos pulsos é suficiente para fazer os músculos da pessoa se contraírem involuntariamente, colocando-a fora de ação. O aparelho produz pulsos de até 50.000 V e correntes da ordem de 1 mA no centelhador. A Figura P 9.5-3 mostra um modelo do circuito para um período. Determine $v(t)$ para $0 < t < 1$ ms. O resistor R representa o centelhador. Escolha C para que a resposta seja criticamente amortecida.

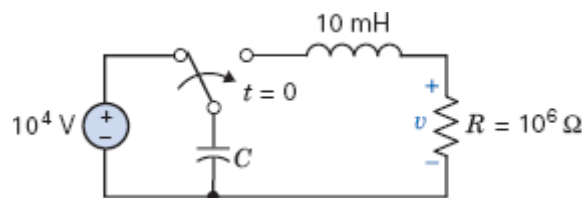



Figura P 9.5-3

P 9.5-4 Resolva novamente o Problema P 9.4-1 supondo que $L = 640$ mH e o outros parâmetros permanecem os mesmos.

Resposta: $v(t) = (6 - 1500t)\, e^{-250t}$ V

P 9.5-5 Um sistema de ignição para automóveis utiliza um dispositivo eletrônico de comutação. O circuito *RLC* da Figura P 9.5-5 é alimentado por um degrau de tensão de 6 V, $v(0) = 2$ V e $i(0) = 0$. A resistência R deve estar na faixa $2\ \Omega < R < 7\ \Omega$ para que a corrente $i(t)$ exceda 0,6 A por mais de 0,5 s e o comutador seja acionado. Uma resposta $i(t)$ criticamente amortecida é necessária para evitar oscilações da corrente do comutador. Escolha o valor de R e plote $i(t)$.

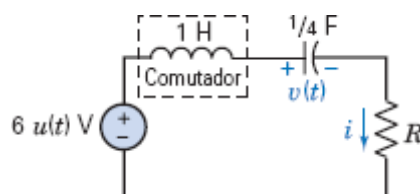



Figura P 9.5-5

Seção 9.6 Resposta Natural de um Circuito *RLC* Paralelo Não Forçado Subamortecido

P 9.6-1 Um sistema de comunicações de uma estação espacial usa pulsos de curta duração para controlar um robô que opera no espaço. A Figura P 9.6-1 mostra uma modelo do circuito do transmissor. Determine a tensão de saída $v_c(t)$ para $t > 0$. Suponha que o circuito esteja no regime estacionário em $t = 0^-$.

Resposta: $v_c(t) = e^{-400t}(3 \cos 300t + 4 \text{ sen } 300t)$ V

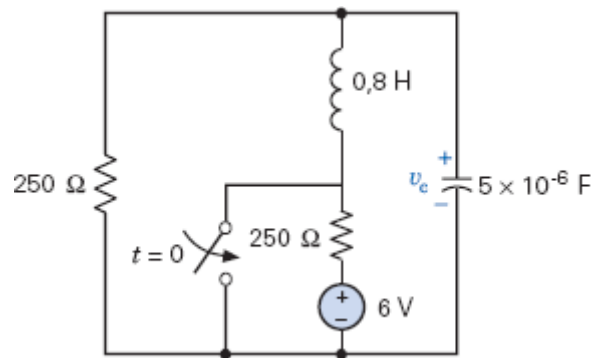



Figura P 9.6-1

P 9.6-2 A chave do circuito da Figura P 9.6-2 é aberta no instante $t = 0$. Determine e plote $v(t)$ para $C = 1/4$ F. Suponha que o circuito esteja no regime estacionário em $t = 0^-$.

Resposta: $v(t) = -4e^{-2t} \text{ sen } 2t$ V

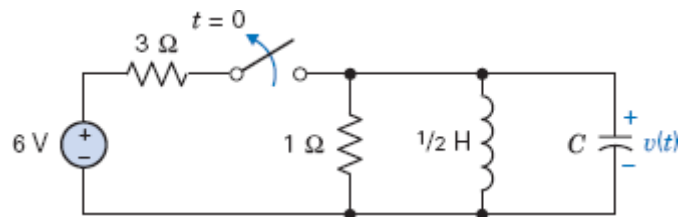
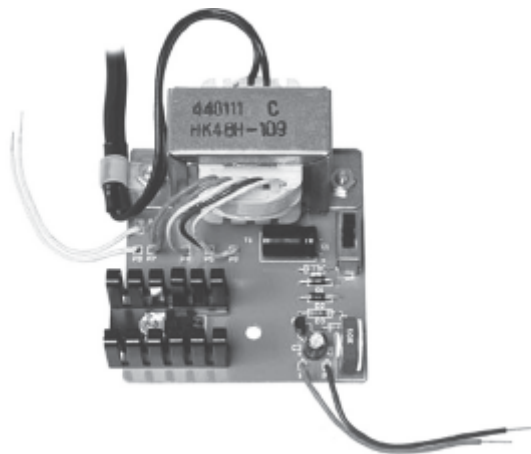



Figura P 9.6-2

P 9.6-3 A Figura P 9.3-3*a* mostra uma fonte de alimentação de 240 W, que possui um indutor e um capacitor de valores elevados. O modelo do circuito aparece na Figura P 9.6-3*b*. Determine $i_L(t)$ no circuito da Figura P 9.6-3*b* para $t > 0$. Suponha que o circuito esteja no regime estacionário em $t = 0^-$.

Resposta: $i_L(t) = e^{-2t}(-4 \cos t + 2 \text{ sen } t)$ A

© Cortesia de R.S.R. Electronics, Inc.

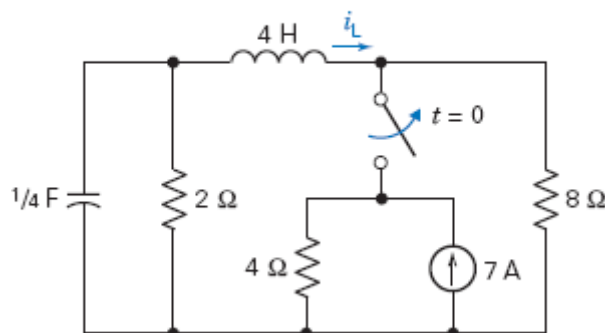
(*a*)

(*b*)

Figura P 9.6-3 (*a*) Uma fonte de alimentação. (*b*) Modelo do circuito da fonte de alimentação.

P 9.6-4 A resposta natural de um circuito *RLC* paralelo foi medida em função do tempo e o resultado aparece na Figura P 9.6-4. Determine uma expressão para $v(t)$ com base no gráfico da figura.

Sugestão: Observe que $v(t) = 260$ mV em $t = 5$ ms e que $v(t) = -200$ mV em $t = 7{,}5$ ms. Observe também que o intervalo de tempo entre o primeiro e terceiro cruzamento com o eixo horizontal é 5 ms.

Resposta: $v(t) = 544e^{-276t}$ sen $1257t$ V

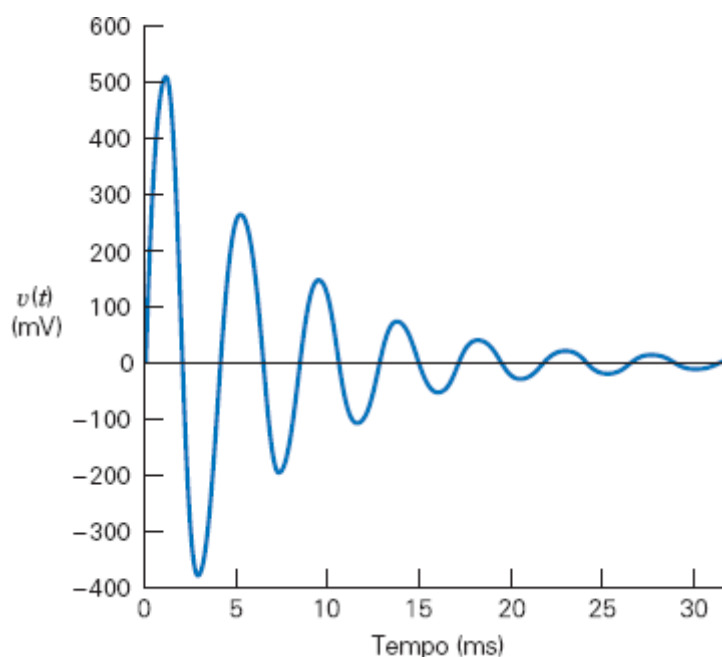



Figura P 9.6-4 Resposta natural de um circuito *RLC* paralelo.

P 9.6-5 As células solares de um modelo proposto de estação espacial (Figura P 9.6-5*a*) alimentam o circuito da Figura P 9.6-5*b* com uma tensão $v(t)$. A estação espacial entra na sombra da Terra no instante $t = 0$ com $v(0) = 2$ V e $i(0) = 1/10$ A. Determine e plote $v(t)$ para $t > 0$.

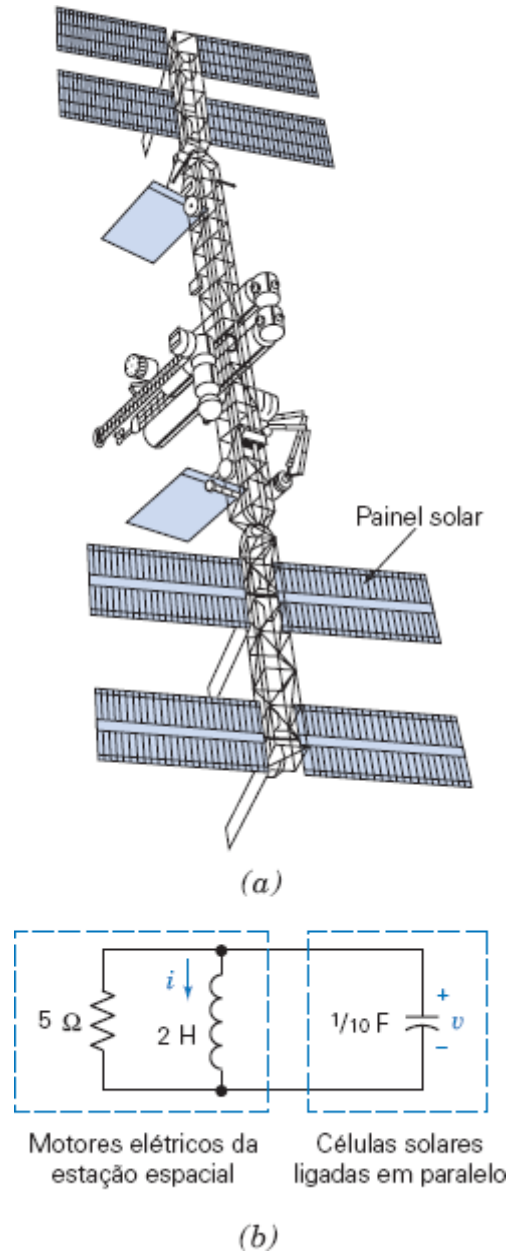



Figura P 9.6-5 (*a*) Painéis solares de uma estação espacial. (*b*) Circuito equivalente dos painéis solares.

Seção 9.7 **Resposta Forçada de um Circuito *RLC***

P 9.7-1 Determine a resposta forçada i_f da corrente do indutor do circuito da Figura P 9.7-1 (a) para $i_s = 1$ A; (b) para $i_s = 0,5t$ A; (c) para $i_s = 2e^{-250t}$ A.

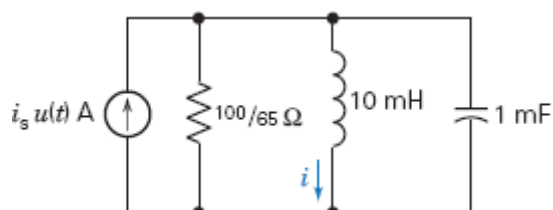



Figura P 9.7-1

P 9.7-2 Determine a resposta forçada da tensão v_f do capacitor do circuito da Figura P 9.7-2 (a) para $v_s = 2$ V; (b) para $v_s = 0,2t$ V; (c) para $v_s = e^{-30t}$ V.

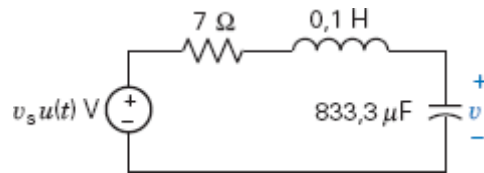



Figura P 9.7-2

P 9.7-3 Um circuito é descrito, para $t > 0$, pela equação

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + 5\frac{dv}{dt} + 6v = v_s$$

Determine a resposta forçada v_f (a) para $v_s = 8$ V; (b) para $v_s = 3e^{-4t}$ V; (c) para $v_s = 2e^{-2t}$ V.

Respostas: **(a)** $v_f = \frac{4}{3}$ V; **(b)** $v_f = \frac{3}{2}e^{-4t}$ V; **(c)** $v_f = 2te^{-2t}$ V

Seção 9.8 Resposta Completa de um Circuito *RLC*

P 9.8-1 Determine $i(t)$ para $t > 0$ no circuito da Figura P 9.8-1.

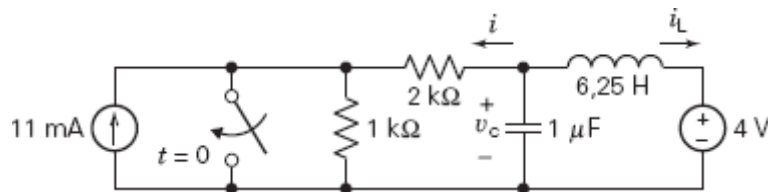



Figura P 9.8-1

P 9.8-2 Determine $i(t)$ para $t > 0$ no circuito da Figura P 9.8-2.

Sugestão: Mostre que $\frac{d^2}{dt^2}i(t) + 5\frac{d}{dt}i(t) + 5i(t) = 1$ para $t > 0$

Resposta: $i(t) = 0{,}2 + 0{,}246e^{-3{,}62t} - 0{,}646e^{-1{,}38t}$ A para $t > 0$

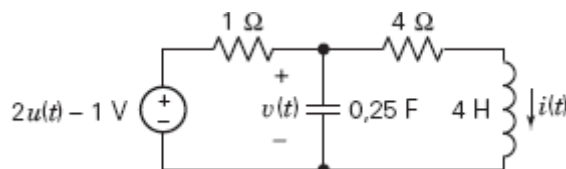



Figura P 9.8-2

P 9.8-3 Determine $v_1(t)$ para $t > 0$ no circuito da Figura P 9.8-3.

Resposta: $v_1(t) = 10 + e^{-2{,}4\times10^4 t} - 6e^{-4\times10^3 t}$ V para $t > 0$

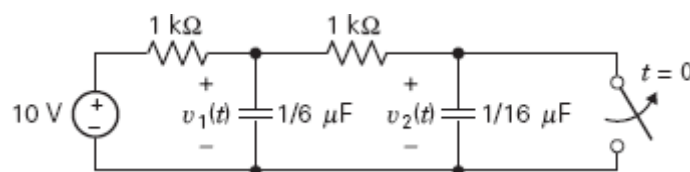



Figura P 9.8-3

P 9.8-4 Determine $v(t)$ para $t > 0$ no circuito da Figura P 9.8-4 supondo que $v(0) = 1$ V e $i_L(0) = 0$.

Resposta: $v = 25e^{-3t} - \frac{1}{17}(429e^{-4t} - 21\cos t + 33\,\text{sen}\,t)$ V

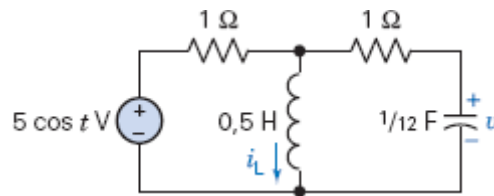



Figura P 9.8-4

P 9.8-5 Determine $v(t)$ para $t > 0$ no circuito da Figura P 9.8-5.

Resposta: $v(t) = (-16e^{-t} + 16e^{-3t} + 8)u(t) + [16e^{-(t-2)} - 16e^{-3(t-2)} - 8]u(t-2)$ V

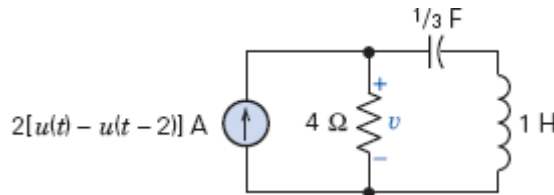



Figura P 9.8-5

P 9.8-6 Uma fonte de alimentação proposta para uma estação espacial é modelada pelo circuito da Figura P 9.8-6. Determine $v(t)$ para $t > 0$. Suponha que o circuito esteja no regime estacionário em $t = 0^-$.

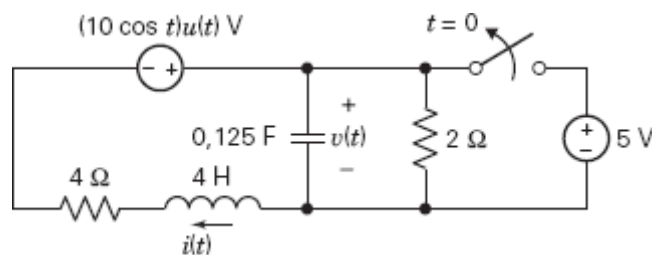



Figura P 9.8-6

P 9.8-7 Determine $v_c(t)$ para $t > 0$ no circuito da Figura P 9.8-7 supondo que (a) $C = 1/18$ F; (b) $C = 1/10$ F; (c) $C = 1/20$ F.

Respostas:

(a) $v_c(t) = 8e^{-3t} + 24te^{-3t} - 8$ V

(b) $v_c(t) = 10e^{-t} - 2e^{-5t} - 8$ V

(c) $v_c(t) = e^{-3t}(8 \cos t + 24 \text{ sen } t) - 8$ V

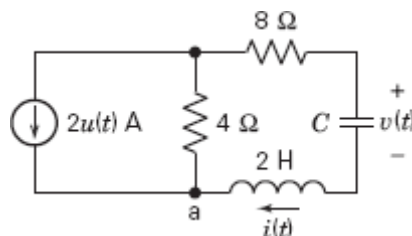



Figura P 9.8-7

P 9.8-8 Determine $v_c(t)$ para $t > 0$ no circuito da Figura P 9.8-8.

Sugestão: $\frac{d^2}{dt^2}v_c(t) + 6\frac{d}{dt}v_c(t) + 2v_c(t) = 2$ para $t > 0$

Resposta: $v_c(t) = 0{,}123e^{-5{,}65t} + 0{,}877e^{-0{,}35t} + 1$ V para $t > 0$

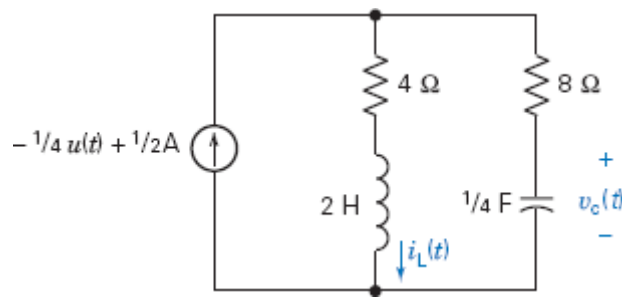



Figura P 9.8-8

P 9.8-9 Determine a corrente $i(t)$ do indutor da Figura P 9.8-9 para $i_s = 5u(t)$ A. Suponha que $i(0) = 0$ e $v_c(0) = 0$.

Resposta: $i(t) = 5 + e^{-2t}(-5 \cos 5t - 2 \text{ sen } 5t)$ A

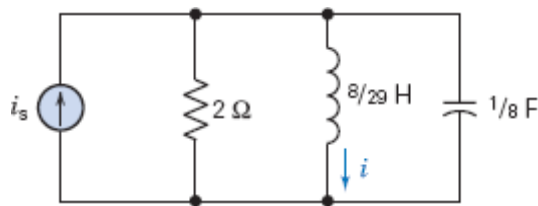



Figura P 9.8-9

P 9.8-10 As ferrovias usam rotineiramente um sistema elétrico de acompanhamento dos trens. Quando um trem passa por um ponto de controle, um detector situado nos trilhos ativa um módulo de radiofrequência. A antena do módulo, representada na Figura P 9.8-10*a*, envia um sinal para um transponder situado na locomotiva e recebe o sinal de volta. Um processador acoplado à antena extrai do sinal informações úteis como a localização, velocidade e direção do trem. A ferrovia utiliza essas informações para otimizar o uso de locomotivas, trens, pessoal e equipamentos.

A Figura P 9.8-10*b* mostra o circuito simplificado de um transponder, com um indutor de valor elevado $L = 5$ H. Determine $i(t)$ e $v(t)$. O sinal recebido é $i_s = 9 + 3e^{-2t}\,u(t)$ A.

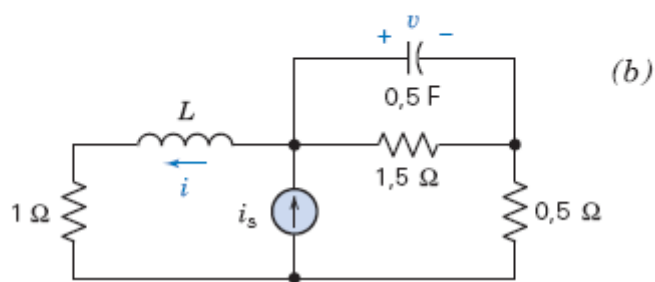
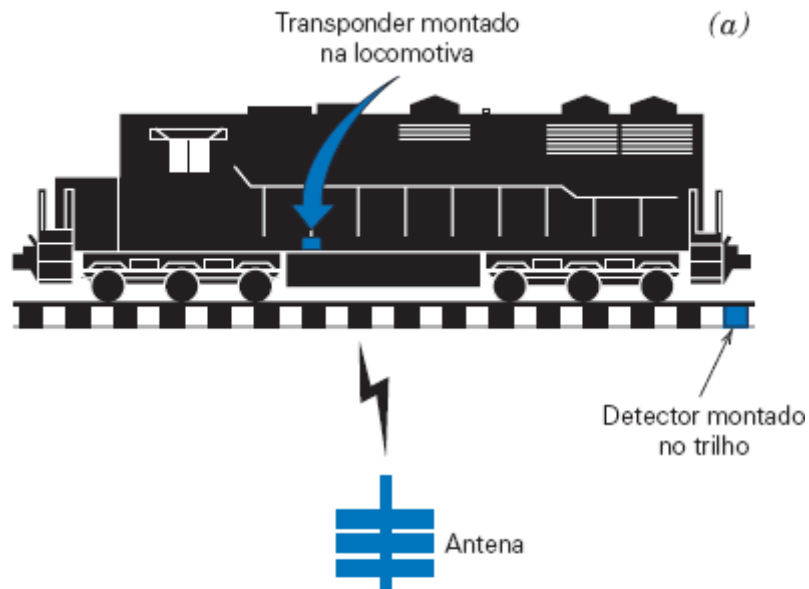



Figura P 9.8-10 (*a*) Sistema de identificação de trens. (*b*) Circuito do transponder.

P 9.8-11 Determine $v(t)$ para $t > 0$ no circuito da Figura P 9.8-11.

Resposta: $v_c(t) = 0{,}75e^{-4t} - 6{,}75e^{-36t} + 16$ V para $t > 0$

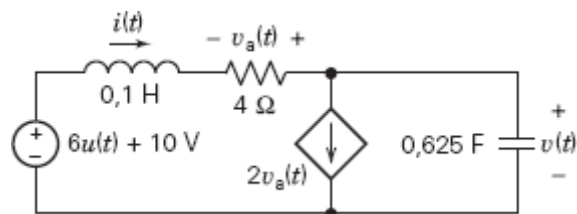



Figura P 9.8-11

P 9.8-12 O circuito da Figura P 9.8-12 está no regime estacionário no momento em que a chave é aberta. A corrente do indutor é dada por

$$i(t) = 240 + 193e^{-6{,}25t}\cos(9{,}27t - 102^{\circ}) \text{ mA para } t \geq 0$$

Determine o valor de R_1, R_3, C e L.

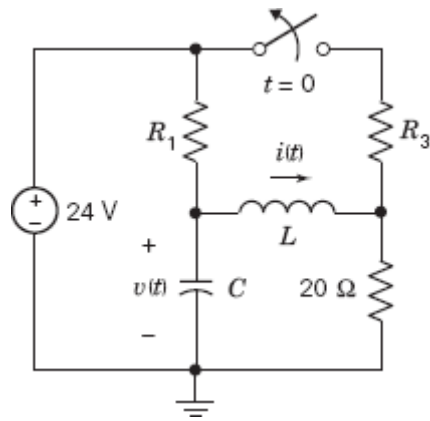



Figura P 9.8-12

P 9.8-13 O circuito da Figura P 9.8-13 está no regime estacionário no momento em que a chave é aberta. Determine a corrente $i(t)$ do indutor para $t > 0$.

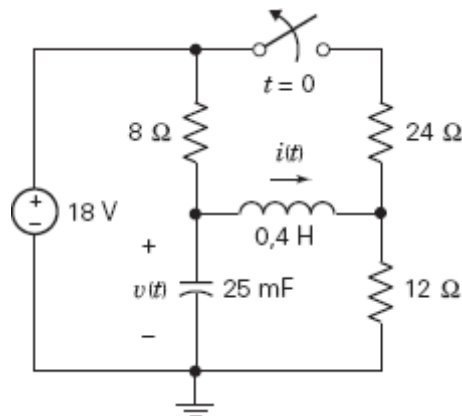



Figura P 9.8-13

P 9.8-14 O circuito da Figura P 9.8-14 está no regime estacionário no momento em que a chave é aberta. Determine a tensão do capacitor, $v(t)$, para $t > 0$.

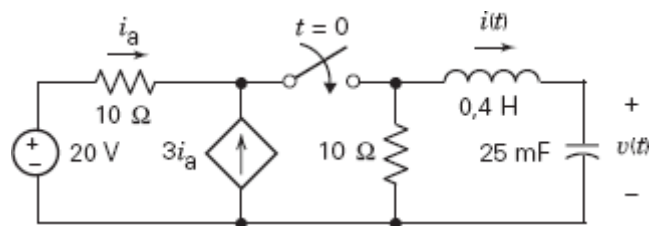



Figura P 9.8-14

P 9.8-15 O circuito da Figura P 9.8-15 está no regime estacionário no momento em que a chave é fechada. Determine a tensão do capacitor, $v(t)$, para $t > 0$.

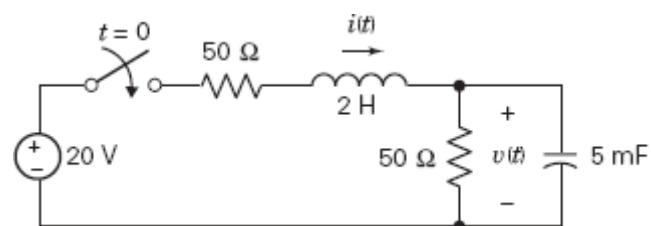



Figura P 9.8-15

P 9.8-16 O circuito da Figura P 9.8-16 está no regime estacionário no momento em que a chave é fechada. Determine a corrente do indutor, $i(t)$, para $t > 0$.

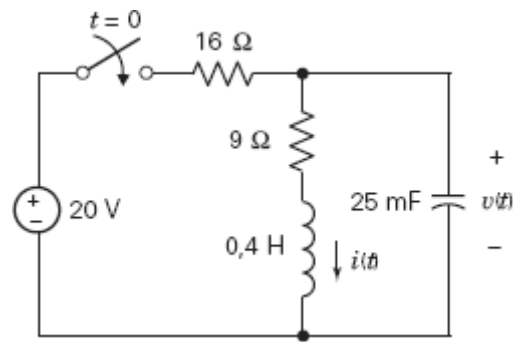



Figura P 9.8-16

P 9.8-17 O circuito da Figura P 9.8-17 está no regime estacionário no momento em que a chave é aberta. Determine a corrente do indutor, $i_2(t)$, para $t > 0$.

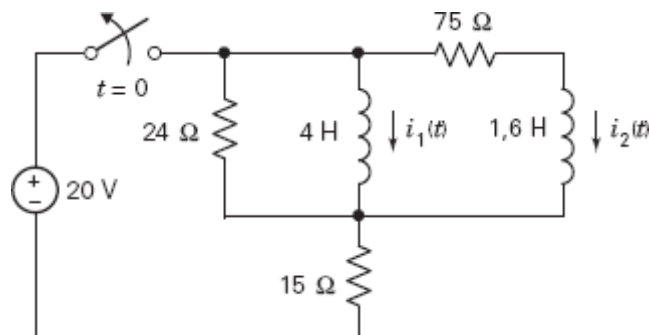



Figura P 9.8-17

P 9.8-18 O circuito da Figura P 9.8-18 está no regime estacionário no momento em que a chave é fechada. Determine a tensão do capacitor, $v(t)$, para $t > 0$.

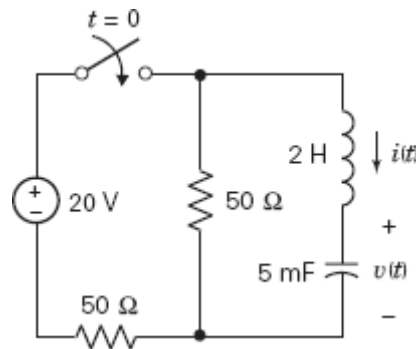



Figura P 9.8-18

P 9.8-19 Determine a equação diferencial de $v_c(t)$ no circuito da Figura P 9.8-19 usando o método direto. Determine $v_c(t)$ para $t > 0$ supondo que os componentes do circuito têm os seguintes valores:

(a) $C = 1$ F, $L = 0{,}25$ H, $R_1 = R_2 = 1{,}309$ Ω

(b) $C = 1$ F, $L = 1$ H, $R_1 = 3$ Ω, $R_2 = 1$ Ω

(c) $C = 0{,}125$ F, $L = 0{,}5$ H, $R_1 = 1$ Ω, $R_2 = 4$ Ω

Respostas:

(a) $v_c(t) = \frac{1}{2} - e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-4t}$ V

(b) $v_c(t) = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}t\right)e^{-2t}$ V

(c) $v_c(t) = 0{,}8 - e^{-2t}(0{,}8 \cos 4t + 0{,}4 \text{ sen } 4t)$ V

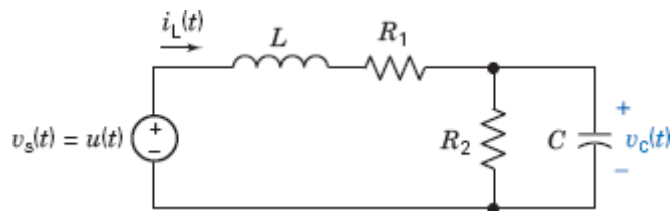



Figura P 9.8-19

P 9.8-20 Determine a equação diferencial de $v_o(t)$ no circuito da Figura P 9.8-20 usando o método direto. Determine $v_o(t)$ para $t > 0$ supondo que os componentes do circuito têm os seguintes valores:

(a) $C = 1$ F, $L = 0{,}25$ H, $R_1 = R_2 = 1{,}309\ \Omega$

(b) $C = 1$ F, $L = 1$ H, $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 3\ \Omega$

(c) $C = 0{,}125$ F, $L = 0{,}5$ H, $R_1 = 4\ \Omega$, $R_2 = 1\ \Omega$

Respostas:

(a) $v_o(t) = \frac{1}{2} - e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-4t}$ V

(b) $v_o(t) = \frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{2}t\right)e^{-2t}$ V

(c) $v_o(t) = 0{,}2 - e^{-2t}(0{,}2 \cos 4t + 0{,}4 \text{ sen } 4t)$ V

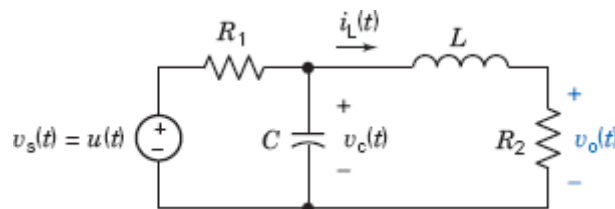



Figura P 9.8-20

Seção 9.9 O Método das Variáveis de Estado

P 9.9-1 Determine $v(t)$ no circuito da Figura P 9.9-1 para $t > 0$, usando o método das variáveis de estado da Seção 9.9 e supondo que $C = 1/5$ F. Plote $v(t)$ no intervalo $0 < t < 10$ s.

Resposta: $v(t) = -25e^{-t} + e^{-5t} + 24$ V

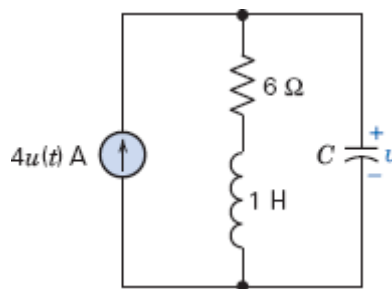



Figura P 9.9-1

P 9.9-2 Repita o Problema P 9.9-1 para $C = 1/10$ F. Plote $v(t)$ no intervalo $0 < t < 3$ s.

Resposta: $v(t) = e^{-3t}(-24 \cos t - 32 \text{ sen } t) + 24$ V

P 9.9-3 Determine a corrente $i(t)$ e a tensão $v(t)$ no circuito da Figura P 9.9-3.

Resposta: $i(t) = 3{,}08e^{-2{,}57t} - 0{,}08e^{-97{,}4t} - 6$ A

$v(t) = -1{,}58e^{-2{,}57t} + 1{,}58e^{-97{,}4t}$ V

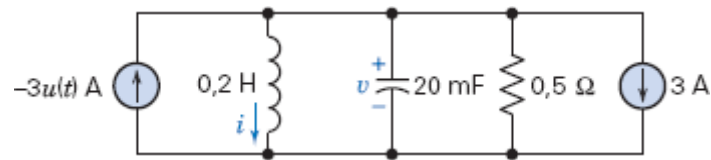



Figura P 9.9-3

P 9.9-4 As leis de proteção do meio ambiente estão estimulando a indústria automotiva a desenvolver carros elétricos. A Figura P 9.9-4*a* mostra um dos modelos propostos, que utiliza um motor de corrente alternada. O circuito de controle do motor aparece na Figura P 9.9-4*b*, em que L = 100 mH e C = 10 mF. Use o método das variáveis de estado para determinar $i(t)$ e $v(t)$, em que $i(t)$ é a corrente de controle do motor. As condições iniciais são $v(0)$ = 10 V e $i(0)$ = 0.

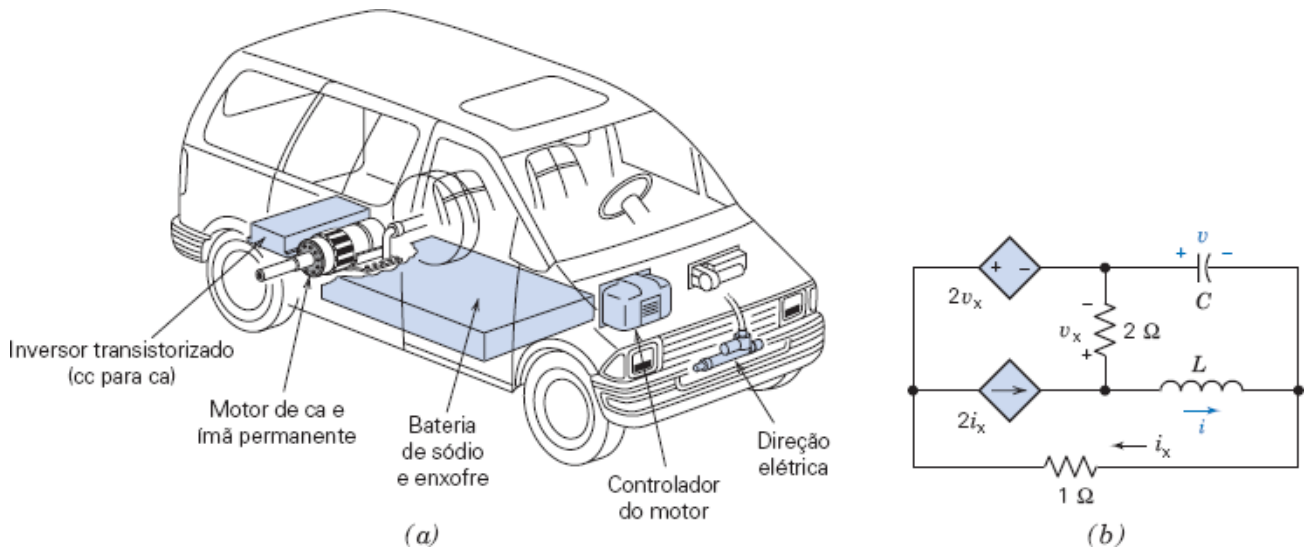



Figura P 9.9-4 (*a*) Carro elétrico. (*b*) Circuito de controle do motor.

P 9.9-5 Estudos de um inseto artificial estão sendo realizados com o objetivo de compreender o sistema nervoso dos animais. A Figura P 9.9-5 mostra o modelo de um neurônio do inseto artificial. A chave gera um pulso ao ser aberta em t = 0 e fechada em t = 0,5 s. Suponha que o circuito esteja no regime estacionário e que $v(0^-)$ = 10 V. Determine a tensão $v(t)$ para $0 < t < 2$ s.

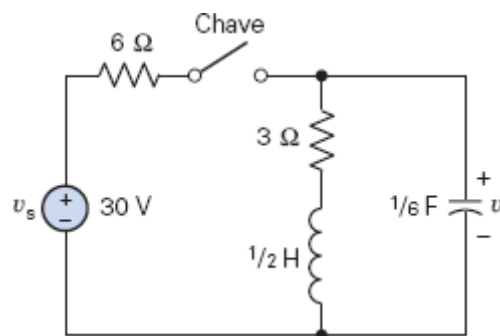



Figura P 9.9-5 Modelo de um neurônio.

Seção 9.10 **Raízes no Plano Complexo**

P 9.10-1 Determine as raízes da equação característica do circuito da Figura P 9.10-1 e plote as raízes no plano *s*.

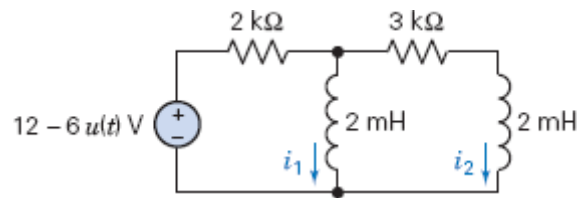



Figura P 9.10-1

P 9.10-2 Determine as raízes da equação característica do circuito da Figura P 9.6-1 e plote as raízes no plano *s*.

P 9.10-3 Determine as raízes da equação característica do circuito da Figura P 9.10-3 e plote as raízes no plano *s*.

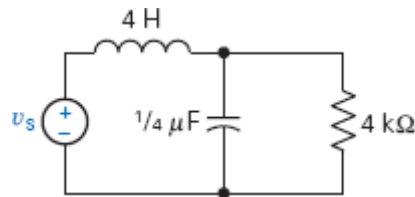



Figura P 9.10-3

P 9.10-4 A Figura P 9.10-4 mostra um circuito *RLC*.

(a) Escreva as duas equações de nó do circuito usando operadores.

(b) Escreva a equação característica do circuito.

(c) Plote as raízes da equação característica no plano *s*.

(d) Determine $v(t)$ para $t > 0$.

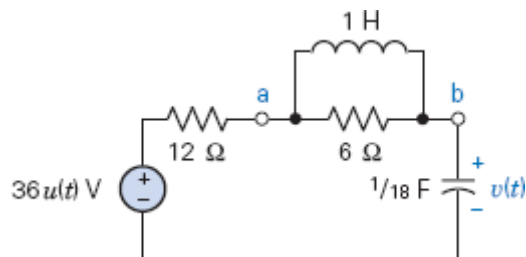



Figura P 9.10-4

Seção 9.11 Como Podemos Testar . . . ?

P 9.11-1 A Figura P 9.11-1*b* mostra um circuito *RLC*. A tensão $v_s(t)$ da fonte de tensão é a onda quadrada da Figura P 9.11-1*a*. A Figura P 9.11-1*c* mostra um gráfico da corrente do indutor, $i(t)$, que foi obtida simulando o circuito com o auxílio do programa PSpice. Verifique se o gráfico de $i(t)$ está correto.

Resposta: O gráfico está correto.

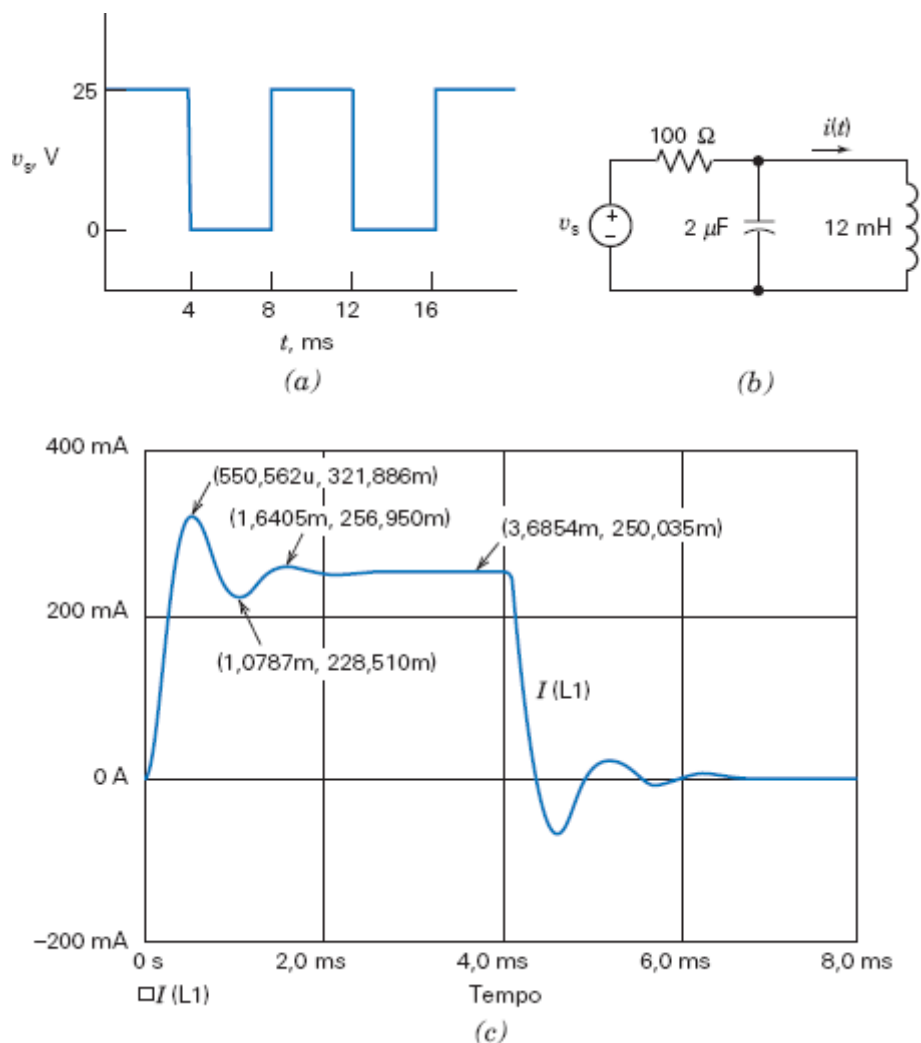



Figura P 9.11-1

P 9.11-2 A Figura P 9.11-2*b* mostra um circuito *RLC*. A tensão $v_s(t)$ da fonte de tensão é a onda quadrada da Figura P 9.11-2*a*. A Figura P 9.11-2*c* mostra um gráfico da corrente do indutor, $i(t)$, que foi obtida simulando o circuito com o auxílio do programa PSpice. Verifique se o gráfico de $i(t)$ está correto.

Resposta: O gráfico não está correto.

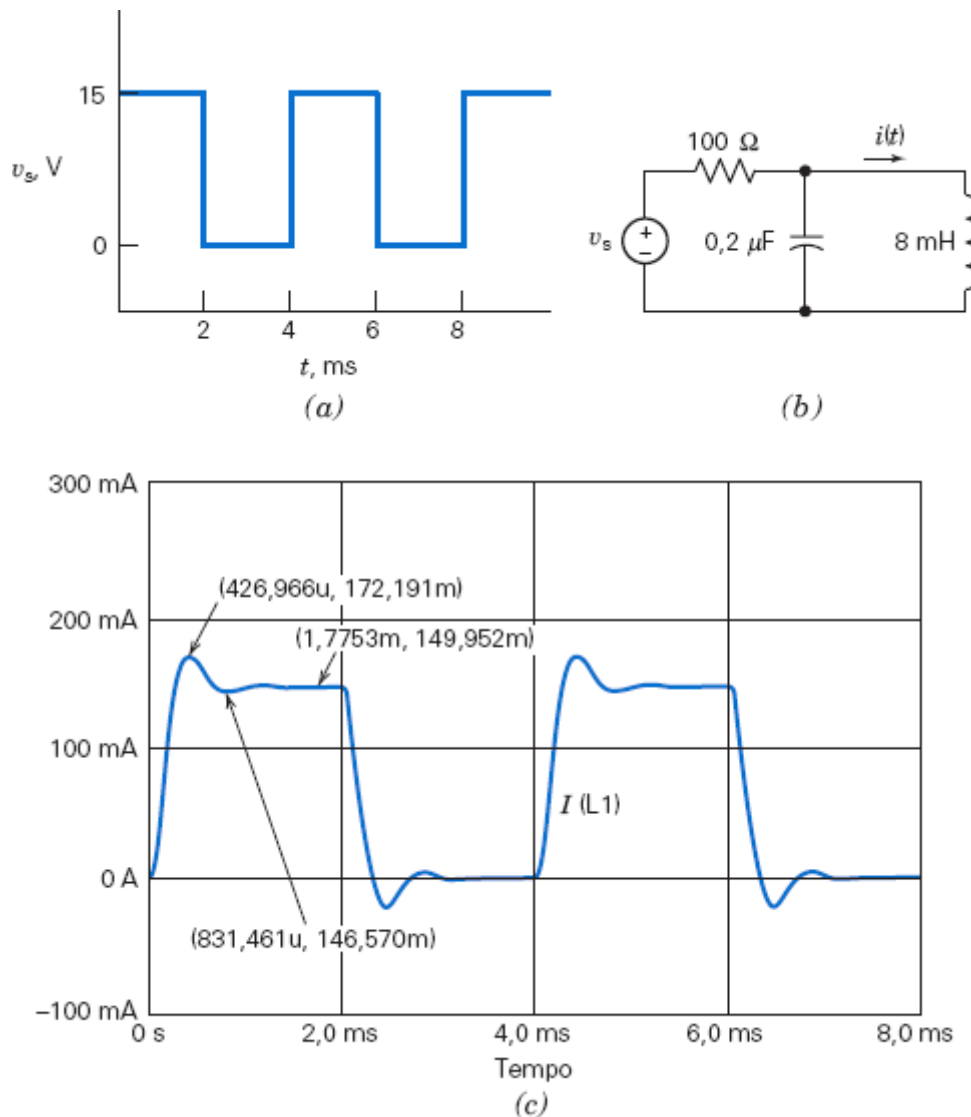



Figura P 9.11-2

Problemas com o PSpice

PS 9-1 A entrada do circuito da Figura PS 9-1 é a tensão da fonte de tensão, $v_i(t)$. A saída é a tensão do capacitor, $v_o(t)$. O gráfico mostra a tensão de entrada. Use o programa PSpice para plotar a tensão de saída, $v_o(t)$, nos seguinte casos:

(a) $C = 1$ F, $L = 0{,}25$ H, $R_1 = R_2 = 1{,}309\ \Omega$

(b) $C = 1$ F, $L = 1$ H, $R_1 = 3\ \Omega$, $R_2 = 1\ \Omega$

(c) $C = 0{,}125$ F, $L = 0{,}5$ H, $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 4\ \Omega$

Plote a saída para os três casos no mesmo gráfico.

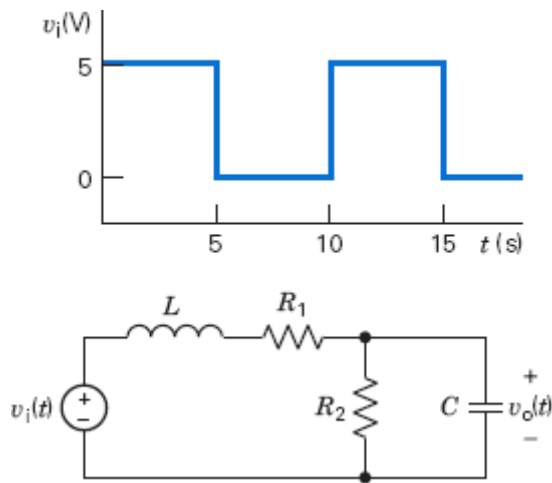



Figura PS 9.-1

Sugestão: Represente a fonte de tensão usado o módulo do PSpice chamado VPULSE.

PS 9-2 A entrada do circuito da Figura PS 9-2 é a tensão da fonte de tensão, $v_i(t)$. A saída é a tensão, $v_o(t)$, do resistor R_2. O gráfico mostra a tensão de entrada. Use o PSpice para plotar a tensão de saída, $v_o(t)$, nos seguinte casos:

(a) $C = 1$ F, $L = 0{,}25$ H, $R_1 = R_2 = 1{,}309\ \Omega$

(b) $C = 1$ F, $L = 1$ H, $R_1 = 3\ \Omega$, $R_2 = 1\ \Omega$

(c) $C = 0{,}125$ F, $L = 0{,}5$ H, $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 4\ \Omega$

Plote a saída para os três casos no mesmo gráfico.

Sugestão: Represente a fonte de tensão usando o módulo do PSpice chamado VPULSE.

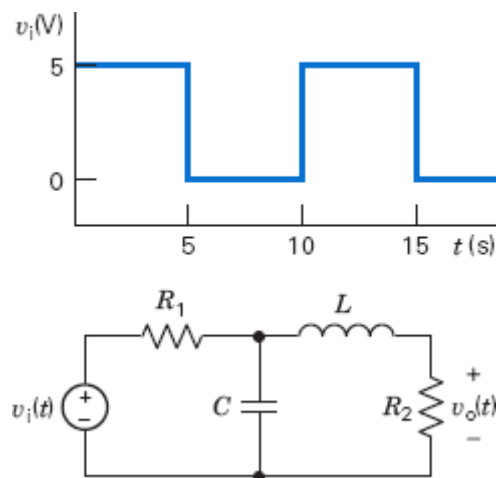



Figura PS 9.-2

PS 9-3 Determine e plote a tensão do capacitor do circuito da Figura PS 9-3*a*, $v(t)$, para $0 < t < 300\ \mu$s. Os sinas das fontes são os pulsos que aparecem nas Figuras PS 9-3*b* e 9-3*c*.

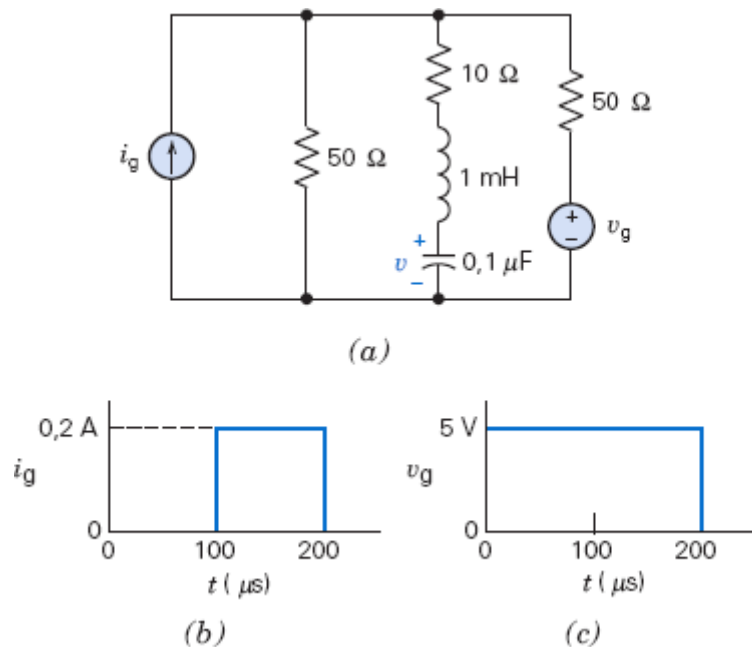



Figura PS 9.-3 (*a*) Circuito. (*b*) Pulso de corrente. (*c*) Pulso de tensão.

PS 9-4 Determine e plote $v(t)$ no circuito da Figura PS 9-4 com $v_s = 5u(t)$ V para $0 < t < 0{,}25$ s.

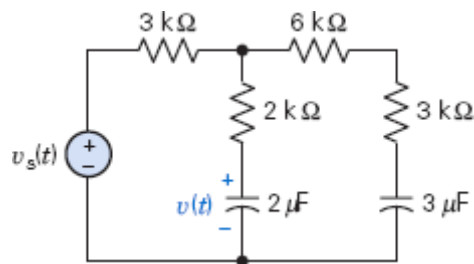



Figura PS 9.-4

Problemas de Projeto

PP 9-1 Projete o circuito da Figura PP 9-1 para que

$$v_c(t) = \frac{1}{2} + A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-4t} \text{ V} \quad \text{para } t > 0$$

Determine o valor das constantes A_1 e A_2.

Sugestão: O circuito é superamortecido e as frequências naturais são 2 e 4 rad/s.

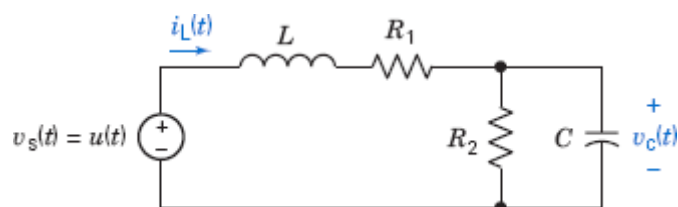



Figura PP 9-1

PP 9-2 Projete o circuito da Figura PP 9-1 para que

$$v_c(t) = \frac{1}{4} + (A_1 + A_2 t)e^{-2t} \text{ V} \quad \text{para } t > 0$$

Determine o valor das constantes A_1 e A_2.

Sugestão: O circuito é criticamente amortecido e a frequência natural é 2 rad/s.

PP 9-3 Projete o circuito da Figura PP 9-1 para que

$$v_c(t) = 0{,}8 + e^{-2t}\,(A_1 \cos 4t + A_2 \text{ sen } 4t) \text{ V} \quad \text{para} \quad t > 0$$

Determine o valor das constantes A_1 e A_2.

Sugestão: O circuito é subamortecido; a frequência de ressonância amortecida é 4 rad/s e o coeficiente de amortecimento é 2.

PP 9-4 Mostre que o circuito da Figura PP 9-1 não pode ser projetado de tal forma que

$$v_c(t) = 0{,}5 + e^{-2t}\,(A_1 \cos 4t + A_2 \text{ sen } 4t) \text{ V} \quad \text{para} \quad t > 0$$

Sugestão: Mostre que, em um circuito com essas especificações, $1/RC + 10RC = 4$, em que $R = R_1 = R_2$. Em seguida, mostre que não existe nenhum valor real para o produto RC tal que $1/RC + 10RC = 4$.

PP 9-5 Projete o circuito da Figura PP 9-5 para que

$$v_c(t) = \frac{1}{2} + A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-4t} \text{ V} \quad \text{para } t > 0$$

Determine o valor das constantes A_1 e A_2.

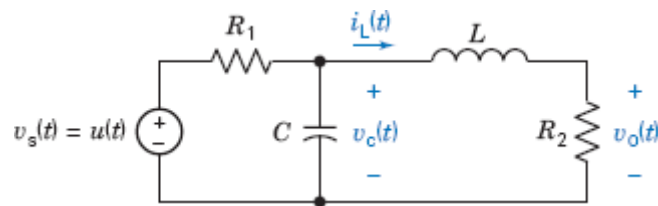



Figura PP 9-5

Sugestão: O circuito é subamortecido e as frequências naturais são 2 e 4 rad/s.

PP 9-6 Projete o circuito da Figura PP 9-5 para que

$$v_o(t) = \frac{3}{4} + (A_1 + A_2 t)e^{-2t} \text{ V} \quad \text{para } t > 0$$

Determine os valores das constantes A_1 e A_2.

Sugestão: O circuito é criticamente amortecido e a frequência natural é 2 rad/s.

PP 9-7 Projete o circuito da Figura PP 9-5 para que

$$v_c(t) = 0{,}2 + e^{-2t}\,(A_1 \cos 4t + A_2 \text{ sen } 4t) \text{ V} \quad \text{para } t > 0$$

Determine os valores das constantes A_1 e A_2.

Sugestão: O circuito é subamortecido; a frequência de ressonância amortecida é 4 rad/s e o coeficiente de amortecimento é 2.

PP 9-8 Mostre que o circuito da Figura PP 9-5 não pode ser projetado de tal forma que

$$v_c(t) = 0{,}5 + e^{-2t}\,(A_1 \cos 4t + A_2 \text{ sen } 4t) \text{ V} \quad \text{para } t > 0$$

Sugestão: Mostre que, em um circuito com essas especificações, $1/RC + 10RC = 4$, em que $R = R_1 = R_2$. Em seguida, mostre que não existe nenhum valor real para o produto RC tal que $1/RC + 10RC = 4$.

PP 9-9 Uma lâmpada fluorescente dispõe, nas duas extremidades, de catodos (filamentos de tungstênio de forma helicoidal, recobertos por uma substância emissora de elétrons) que fazem passar uma corrente elétrica em um tubo que contém vapor de mercúrio. Os elétrons dessa corrente arrancam elétrons dos átomos de mercúrio. Ao voltarem para suas órbitas, os elétrons dos átomos de mercúrio emitem energia, a maior parte da qual na forma de radiação ultravioleta. Os raios ultravioletas, que são invisíveis, excitam átomos de um revestimento de fósforo no interior do tubo, fazendo com que emitam luz branca ou azulada, um fenômeno conhecido como fluorescência.

Um tipo de lâmpada fluorescente pode ser representado pelo circuito *RLC* da Figura PP 9-9. Especifique o valor de L para que a corrente $i(t)$ atinja o valor máximo em aproximadamente $t = 0{,}5$ s e determine o valor máximo de $i(t)$. Suponha que a chave permaneceu na posição 1 por um longo tempo antes de passar para a posição 2 no instante $t = 0$.

Sugestão: Use o programa PSpice para plotar a resposta para vários valores de L.

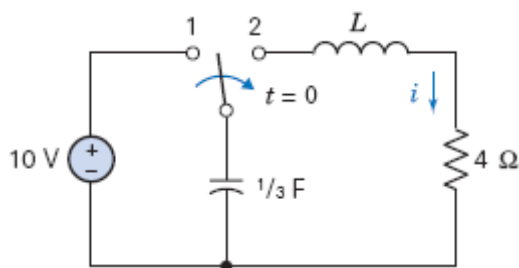



Figura PP 9-9 Circuito de uma lâmpada fluorescente.

[1] Nota: $\frac{dv(0)}{dt}$ é o mesmo que $\left.\frac{dv(t)}{dt}\right|_{t=0}$

[2] A identidade de Euler é discutida no Apêndice B.

CAPÍTULO 10 Análise de Circuitos no Regime Estacionário Senoidal

NESTE CAPÍTULO

10.1 *Introdução*

Considere o experimento ilustrado na Figura 10.1-1, no qual um gerador de funções aplica uma tensão variável à entrada de um circuito linear e um osciloscópio mostra a saída do circuito linear. O circuito linear é constituído por resistores, capacitores, indutores e, possivelmente, fontes dependentes e amplificadores operacionais. O gerador de funções permite escolher vários tipos de funções de entrada, que são chamados de formas de onda ou, simplesmente, ondas. Um gerador de funções típico pode produzir ondas quadradas, ondas pulsadas, ondas triangulares e ondas senoidais.

A saída do circuito possui duas componentes: uma componente transitória, cuja amplitude diminui com o passar do tempo, e uma componente estacionária, que persiste indefinidamente. Na maioria dos casos, a componente transitória decai rapidamente, em uma escala de tempo da ordem de milissegundos. Assim, esperamos que o osciloscópio da Figura 10.1-1 mostre a parte estacionária da saída do circuito linear quando um sinal de entrada é aplicado pelo gerador de funções.

Suponha que o sinal de entrada escolhido seja uma onda senoidal. O gerador de funções permite ajustar a amplitude, o ângulo de fase e a frequência do sinal. Sejam quais forem os valores escolhidos para os três parâmetros, a saída (estacionária) é sempre uma onda senoidal com a frequência do sinal de entrada. A amplitude e o ângulo de fase podem ser diferentes na entrada e na saída, mas a frequência é a mesma.

Suponha que a entrada escolhida seja uma onda quadrada. Nesse caso, a componente estacionária da saída não é necessariamente uma onda quadrada. Quando a entrada é uma onda pulsada ou triangular, a componente estacionária da saída também não tem necessariamente a mesma forma que a entrada.

Circuitos lineares cujo sinal de entrada é senoidal e que estão no regime estacionário são chamados de circuitos de corrente alternada ou circuitos de CA. O sistema de distribuição de energia elétrica para residências, escritórios e indústrias é um grande circuito de CA. Os circuitos de CA são o assunto principal deste capítulo. Em particular, vamos ver que:

- Associar um número complexo a uma senoide é um artifício conveniente, que permite definir fasores e impedâncias.

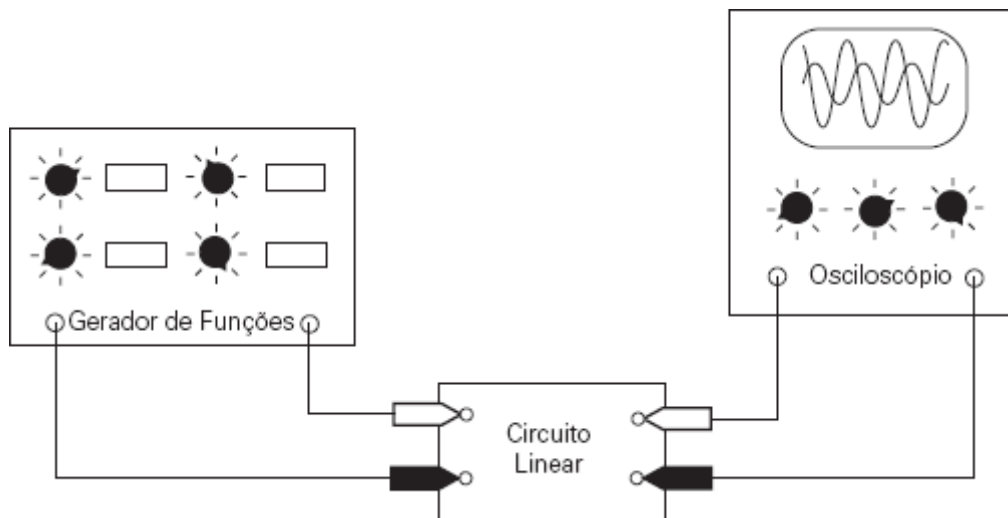



FIGURA 10.1-1 Aplicação de um sinal de entrada a um circuito linear e observação do sinal de saída.

- Usando fasores e impedâncias, obtemos uma representação dos circuitos lineares conhecida como "representação no domínio da frequência".
- Podemos analisar circuitos de CA no domínio da frequência para determinar a resposta estacionária.

10.2 *Tensões e Correntes Senoidais*

Neste capítulo, vamos discutir circuitos elétricos nos quais o sinal de entrada é uma função senoidal ou uma soma de funções senoidais. Esses circuitos desempenham um papel importante tanto nos sistemas de comunicação como nos sistemas de distribuição de energia elétrica.

Considere um circuito com entradas senoidais, ou seja, um circuito que contém fontes de tensão e/ou de corrente independentes que produzem tensões ou correntes senoidais. Por enquanto, vamos supor que todas as tensões e correntes têm a mesma frequência. Mais tarde, vamos discutir o caso em que as entradas podem ter frequências diferentes.

Como vimos nos Capítulos 8 e 9, a saída de um circuito linear com componentes que armazenam energia é a soma da resposta natural e da resposta forçada. Se a saída é uma tensão, por exemplo, temos:

$$v(t) = v_n(t) + v_f(t)$$

em que $v(t)$ é a tensão de saída, $v_n(t)$ é a resposta natural e $v_f(t)$ é a resposta forçada.

Se todas as entradas do circuito são senoides com a mesma frequência, a resposta forçada $v_f(t)$ é uma senoide com a mesma frequência que as entradas. Com o passar do tempo, a componente transitória da resposta diminui de amplitude e acaba por se tornar desprezível. A parte que resta da resposta é a

componente estacionária. Quando a componente transitória se torna desprezível, dizemos que o circuito atingiu o regime estacionário. No caso de entradas senoidais com a mesma frequência, a saída no regime estacionário é igual à resposta forçada, ou seja, uma senoide com a mesma frequência que as entradas.

Podemos escolher como saída de um circuito qualquer tensão ou corrente que nos interesse. Se todas as entradas do circuito são funções senoidais com a mesma frequência e o circuito está no estado estacionário, as tensões e correntes de todos os componentes são funções senoidais com a mesma frequência que as entradas. Os circuitos que atendem a essas condições são chamados de *circuitos de corrente alternada* ou *circuitos de CA*.

Considere a função senoidal

$$v(t) = A \text{ sen } (\omega t) \text{ V} \qquad (10.2\text{-}1)$$

cujo gráfico aparece na Figura 10.2-1. O parâmetro A da Eq. 10.2-1 e da Figura 10.2-1 é chamado de amplitude da senoide. A senoide é uma *função periódica*, pois apresenta a seguinte propriedade:

$$v(t + T) = v(t) \qquad (10.2\text{-}2)$$

para qualquer valor de t, em que T é conhecido como *período de oscilação*, ou, simplesmente, *período*. O recíproco de T é f, a *frequência* de oscilação:

$$f = \frac{1}{T} \qquad (10.2\text{-}3)$$

A unidade de frequência do SI é chamada de hertz (Hz) em homenagem ao cientista Heinrich Hertz, cuja fotografia aparece na Figura 10.2-2. A relação entre a frequência angular e a frequência de uma função senoidal é a seguinte:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \qquad (10.2\text{-}4)$$

em que ω é a frequência angular em radianos por segundo (rad/s).

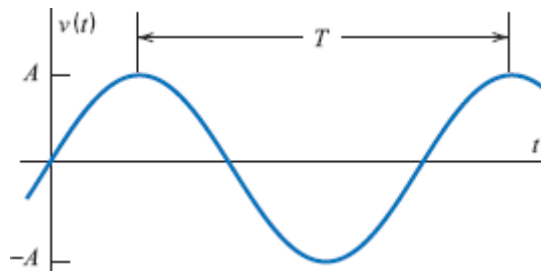



FIGURA 10.2-1 Uma função senoidal.

FIGURA 10.2-2 Heinrich R. Hertz (1857–1894).

Considere agora o efeito de substituir t por $t + t_a$, em que t_a é uma constante arbitrária. Como mostra a Figura 10.2-3, $v(t + t_a)$ é uma função senoidal com a mesma forma que $v(t)$, mas que está avançada em relação a $v(t)$; o intervalo de tempo entre as duas funções é t_a.

Temos também

$$v(t + t_a) = A\ \text{sen}[\omega(t - t_a)] = A\ \text{sen}(\omega t - \omega t_a) = A\ \text{sen}(\omega t + \theta)\ \text{V}$$

em que θ é chamado de ângulo de fase da senoide. O ângulo de fase, em radianos, é dado por

$$\theta = \omega t_a = \frac{2\pi}{T} t_a = 2\pi \frac{t_a}{T} \qquad (10.2\text{-}5)$$

Do mesmo modo, substituindo t por $t - t_r$, obtemos uma função senoidal com a mesma forma que $v(t)$, mas que está retardada em relação a $v(t)$. Temos:

$$v(t - t_r) = A\ \text{sen}[\omega(t - t_r)] = A\ \text{sen}(\omega t - \omega t_r) = A\ \text{sen}(\omega t - \theta)\ \text{V}$$

em que θ, o ângulo de fase, é dado por

$$\theta = -\omega t_r = -\frac{2\pi}{T} t_r = -2\pi \frac{t_r}{T} \qquad (10.2\text{-}6)$$

Note que um avanço ou um retardo de um período não muda a senoide, ou seja, $v(t \pm T) = v(t)$. Isso significa que um avanço de t_a é equivalente a um retardo de $T - t_a$ e que um retardo de t_r é equivalente a um avanço de $T - t_r$.

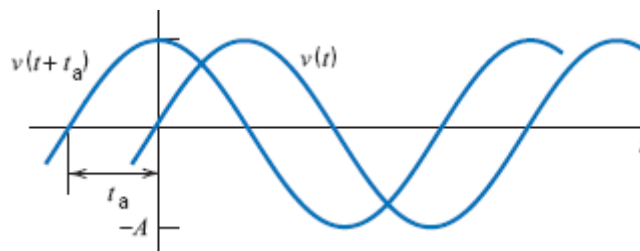



FIGURA 10.2-3 Duas senoides defasadas no tempo.

EXEMPLO 10.2-1 Diferença de Fase e Retardo

Determine a diferença de fase entre as senoides

$$v_1(t) = 10 \cos (200t + 45^\circ) \text{ V e } v_2(t) = 8 \text{ sen } (200t + 15^\circ) \text{ V}$$

e o tempo de retardo de uma das senoides em relação à outra.

Solução

As senoides têm amplitudes diferentes, mas têm a mesma frequência e, portanto, o mesmo período, que é dado por

$$200 = \frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{\pi}{100} = 0,0314159 = 31,4159 \text{ ms}$$

Para determinar a diferença de fase entre $v_1(t)$ e $v_2(t)$, precisamos expressar as duas senoides usando a mesma função trigonométrica, que vamos escolher como o cosseno. Nesse caso, temos

$$v_2(t) = 8 \text{ sen } (200t + 15^\circ) = 8 \cos (200t + 15^\circ - 90^\circ) = 8 \cos (200t - 75^\circ) \text{ V}$$

Chamando de θ_1 e θ_2 os ângulos de fase de $v_1(t)$ e $v_2(t)$, temos

$$\theta_2 - \theta_1 = -75^\circ - 45^\circ = -120^\circ = -\frac{2\pi}{3} \text{ rad}$$

O sinal negativo mostra que $v_2(t)$ está atrasada em relação a $v_1(t)$. Podemos converter a diferença de fase em tempo de retardo usando a Eq. 10.2-5:

$$\theta_2 - \theta_1 = 2\pi \frac{t_r}{T} \quad \Rightarrow \quad t_r = \frac{(\theta_2 - \theta_1)T}{2\pi} = \frac{-\frac{2\pi}{3}(0,0314159)}{2\pi} = -10,47 \text{ ms}$$

em que o sinal negativo mais uma vez indica que $v_2(t)$ está atrasada em relação a $v_1(t)$. A conclusão é que $v_2(t)$ tem um retardo de 10,47 ms em relação a $v_1(t)$. A Figura 10.2-4 mostra que $v_2(t)$ está realmente atrasada em relação a $v_1(t)$.

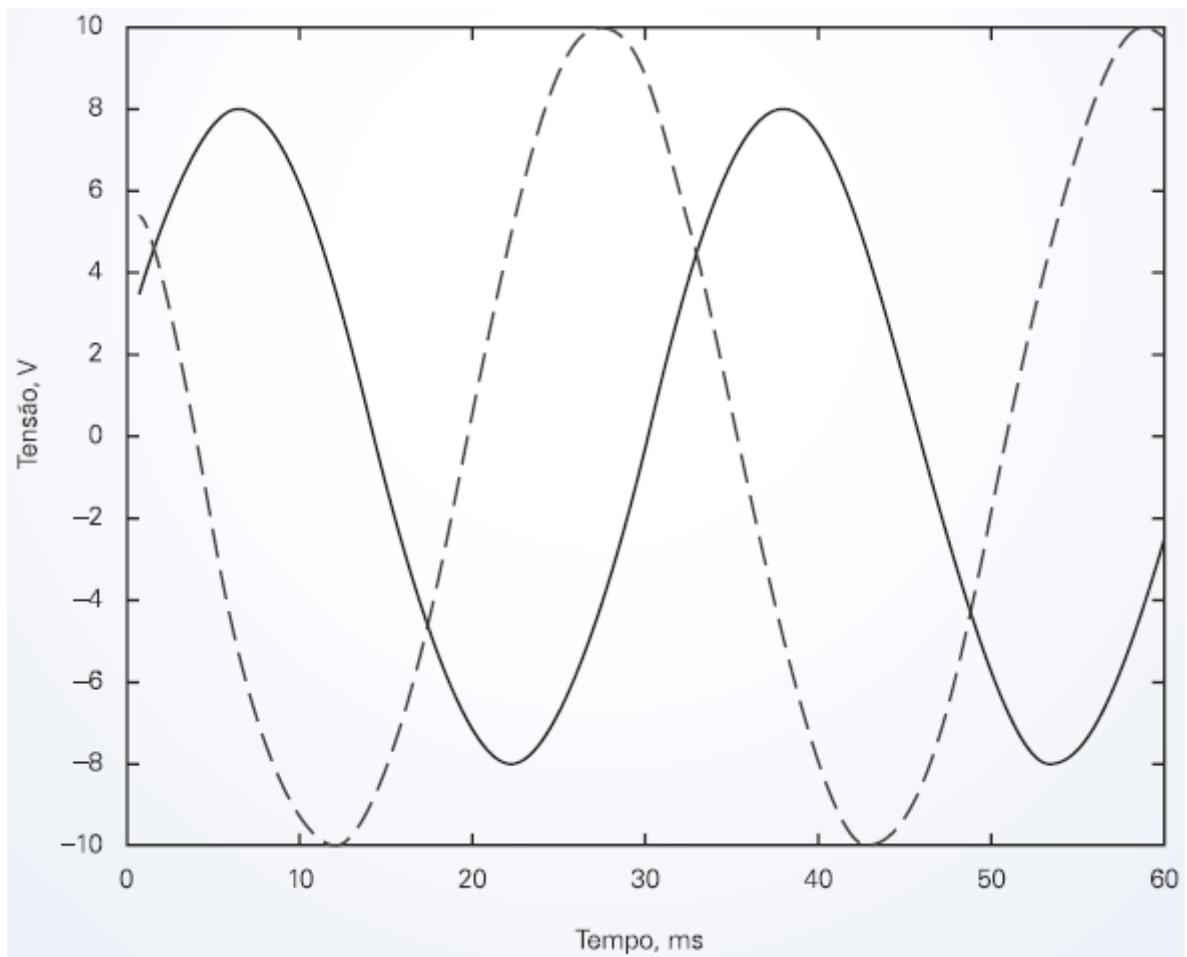



FIGURA 10.2-4 Gráfico de $v_1(t)$ e $v_2(t)$, traçado com auxílio do programa MATLAB, no qual se pode ver que $v_2(t)$ está atrasada em relação a $v_1(t)$.

Vamos considerar agora o problema, muito comum na prática, de obter uma representação analítica da forma A cos ($\omega t + \theta$) para uma senoide cujo gráfico é conhecido. Suponha que um engenheiro observe uma tensão senoidal em um osciloscópio e tenha necessidade de representá-la por uma equação. A representação analítica da senoide pode ser obtida em três etapas. As duas primeiras são imediatas, mas a terceira requer um pouco mais de atenção. O método está ilustrado na Figura 10.2-5, que mostra duas tensões senoidais.

1. Meça a amplitude A em volts. Como a posição do eixo do tempo nem sempre é óbvia quando a tensão senoidal é mostrada no osciloscópio, pode ser mais fácil medir a amplitude pico a pico $2A$, como mostra a Figura 10.2-5.

2. Meça o período T em segundos e calcule a frequência angular ω em radianos por segundo.

3. Escolha um instante de tempo e meça a tensão correspondente a esse instante. Assim, por exemplo, $t = t_1 = 0{,}15$ s é o ponto assinalado na Figura 10.2-5. Note que $v_1(t_1) = v_2(t_1) \approx 10{,}6$ V, mas as senoides $v_1(t)$ e $v_2(t)$ não são, evidentemente, descritas pela mesma equação. A informação adicional necessária para distinguir as duas senoides é o fato de que $v_1(t)$ está aumentando (ou seja, tem uma derivada positiva) no instante t_1, enquanto $v_2(t)$ está diminuindo (ou seja, tem uma derivada negativa) no mesmo instante. Finalmente, calcule o ângulo de fase θ da tensão senoidal usando uma das seguintes relações:

$$\theta = \begin{cases} -\cos^{-1}\left(\dfrac{v(t_1)}{A}\right) - \omega t_1 & \text{quando } v(t) \text{ está aumentando no instante } t_1 \\ \cos^{-1}\left(\dfrac{v(t_1)}{A}\right) - \omega t_1 & \text{quando } v(t) \text{ está diminuindo no instante } t_1 \end{cases}$$

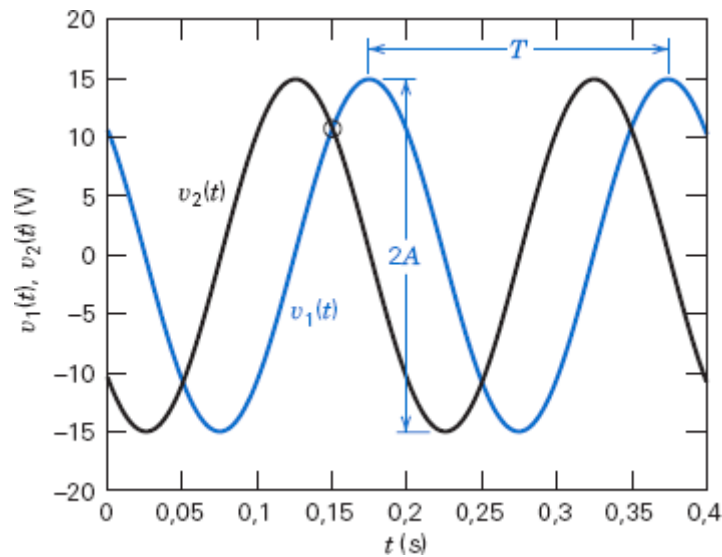



FIGURA 10.2-5 Duas senoides de mesma amplitude, mesmo período e ângulos de fase diferentes.

EXEMPLO 10.2-2 Representação Gráfica e Analítica de Senoides

Determine a representação analítica das tensões senoidais da Figura 10.2-5.

Solução

As funções $v_1(t)$ e $v_2(t)$ têm a mesma amplitude e o mesmo período:

$$2A = 30 \quad \Rightarrow \quad A = 15 \text{ V}$$

$$T = 0{,}2 \text{ s} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2\pi}{0{,}2} = 10\pi \text{ rad/s}$$

Como se pode ver na Figura 10.2-5, $v_1(t) = v_2(t) \approx 11$ V para $t = 0{,}15$ s. Como, nesse instante, $v_1(t)$ está aumentando, o ângulo de fase θ_1 da função senoidal $v_1(t)$ é dado por

$$\theta_1 = -\cos^{-1}\left[\frac{v(t_1)}{A}\right] - \omega t_1 = -\cos^{-1}\left(\frac{10{,}6}{15}\right) - (10\pi)(0{,}15)$$
$$= -0{,}79 - 4{,}71 \approx -5{,}5 \text{ rad} \approx -315^\circ = 45^\circ$$

(Note que, como o ângulo ωt_1 está expresso em radianos, $\cos^{-1}\left[\frac{v(t_1)}{A}\right]$ também deve ser calculado em radianos.) Assim, a expressão de $v_1(t)$ é

$$v_1(t) = 15 \cos(10\pi t + 45^\circ) \text{ V}$$

Como $v_2(t)$ está diminuindo no instante $t = 0{,}15$ s, o ângulo de fase da função senoidal $v_2(t)$ é dado por

$$\theta_2 = \cos^{-1}\left[\frac{v(t_1)}{A}\right] - \omega t_1 = \cos^{-1}\left(\frac{11}{15}\right) - (10\pi)(0{,}15)$$
$$= 0{,}79 - 4{,}71 \approx -3{,}92 \text{ rad} \approx -225^\circ = 135^\circ$$

Assim, a expressão de $v_2(t)$ é

$$v_2(t) = 15 \cos(10\pi t + 135^\circ) \text{ V}$$

10.3 Fasores e Senoides

Todas as correntes e tensões de um circuito de CA são senoides de mesma frequência, mas que podem ter diferentes amplitudes e constantes de fase.

Um fasor é um número complexo usado para representar a amplitude e o ângulo de fase de uma senoide. A relação entre uma senoide e um fasor é representada do seguinte modo:

$$A\cos(\omega t + \theta) \quad \leftrightarrow \quad A\angle\theta \qquad (10.3\text{-}1)$$

Convém chamar a atenção para três aspectos da relação expressa pela Eq. 10.3-1. Em primeiro lugar, a senoide é representada pela função cosseno e não pela função seno. Em segundo lugar, o fasor é um número complexo na forma polar. Finalmente, o módulo do fasor é igual à amplitude da senoide e o ângulo de fase do fasor é igual ao ângulo de fase da senoide.

EXEMPLO 10.3-1 Fasores e Senoides

Determine os fasores correspondentes às senoides

$$i_1(t) = 120\cos(400t + 60°)\text{ mA} \quad \text{e} \quad i_2(t) = 100\cos(400t + 75°)\text{ mA}$$

Solução

De acordo com a Eq. 10.3-1, temos

$$\mathbf{I}_1(\omega) = 120\angle 60°\text{ mA}$$

Para determinar o fasor correspondente a $i_2(t)$, precisamos expressar $i_2(t)$ como um cosseno. De acordo com uma das identidades do Apêndice C, temos

$$i_2(t) = 100\cos(400t - 75° - 90°) = 100\cos(400t - 165°)\text{ mA}$$

Assim, a Eq. 10.3-1 nos dá

$$\mathbf{I}_2(\omega) = 100\angle -165°\text{ mA}$$

O Exemplo 10.3-1 ilustra a convenção que vamos usar para designar os senoides e fasores que representam correntes e tensões em circuitos de CA. As letras minúsculas *i* e *v*, quase sempre com um índice inferior, serão usadas para indicar correntes e tensões senoidais. Às vezes, como no Exemplo 10.3-1, indicaremos explicitamente que a senoide é uma função do tempo, mas outras vezes escreveremos simplesmente i_1 em vez de $i_1(t)$. Usaremos as letras maiúsculas em negrito I e V, quase sempre com um índice inferior, para indicar fasores de corrente e tensão. Em geral, os fasores variam com a frequência. Como, porém, a frequência é fixa nos circuitos de CA, escreveremos simplesmente $\mathbf{I}_1$ em vez de $\mathbf{I}_1(\omega)$.

A Figura 10.3-1*a* mostra o fasor como um número complexo V, associado a um ponto no plano complexo. Na Figura 10.3-1*a*, um segmento de reta é traçado da origem do plano complexo até o ponto que representa o fasor. O ângulo θ desse segmento é medido no sentido anti-horário a partir do eixo real positivo e é chamado de ângulo do fasor. O comprimento do segmento de reta é chamado de *módulo* do fasor. Na chamada *forma*

***polar*, um fasor é representado pelo módulo e o ângulo. Para indicar que *A* é o módulo do fasor V e *θ* é o ângulo de V, usamos a seguinte notação:**

$$A = |\mathbf{V}| \text{ e } \theta = \angle\mathbf{V} \qquad (10.3\text{-}2)$$

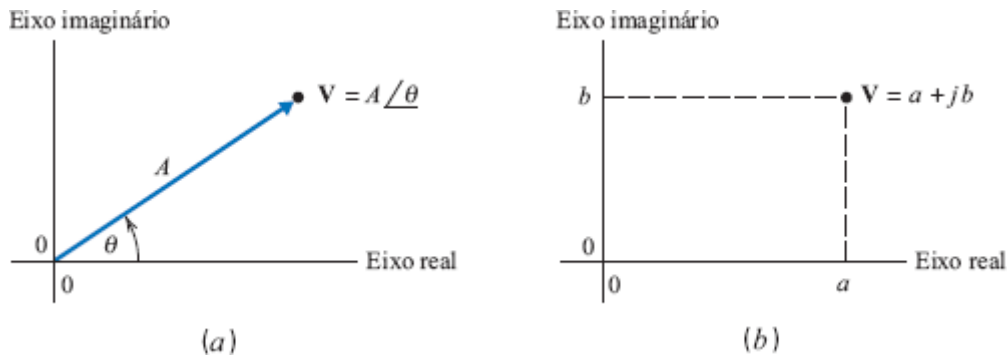



FIGURA 10.3-1 Forma polar (*a*) e forma retangular (*b*) de representar um tensor.

A Figura 10.3-1*b* mostra outra forma de representar o fasor V. Como na forma polar, o fasor V é associado a um ponto no plano complexo. Na Figura 10.3-1*b*, os números *a* e *b* são as coordenadas do ponto em relação aos eixos real e imaginário. Por essa razão, *a* é chamado de *parte real* de V e *b* é chamado de *parte imaginária* de V. Para indicar que *a* é a parte real de V e *b* é a parte imaginária de V, usamos a seguinte notação:

$$a = \text{Re}\{\mathbf{V}\} \text{ e } b = \text{Im}\{\mathbf{V}\} \qquad (10.3\text{-}3)$$

e representamos o fasor **V** na forma retangular como

$$\mathbf{V} = a + jb$$

em que $j = \sqrt{-1}$.

A Figura 10.3-2 mostra um fasor **V** com Re{**V**} < 0. Note que o ângulo de **V** é *θ*, e não *ϕ*. Como o mesmo fasor pode ser expresso na forma polar ou na forma retangular, temos

$$a + jb = \mathbf{V} = A \angle\theta \qquad (10.3\text{-}4)$$

Aplicando relações trigonométricas às Figuras 10.3-1 e 10.3-2, é possível obter as seguintes de equações de conversão da forma polar para a forma retangular e vice-versa:

$$a = A\cos(\theta),\ b = A\,\text{sen}(\theta) \qquad (10.3\text{-}5)$$

e

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \theta = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right) & a > 0 \\ 180^\circ - \tan^{-1}\left(\dfrac{b}{-a}\right) & a < 0 \end{cases} \qquad (10.3\text{-}6)$$

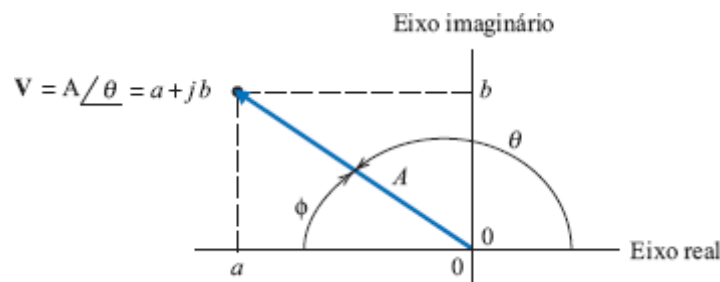



FIGURA 10.3-2 Um fasor com $a < 0$.

Vale a pena chamar a atenção para alguns casos especiais:

$$1 = 1\underline{/\ 0^\circ},\ j = 1\underline{/\ 90^\circ},\quad -1 = 1\underline{/\pm 180^\circ}\quad \text{e}\quad -j = 1\underline{/-90^\circ} = 1\underline{/\ 270^\circ} \qquad (10.3\text{-}7)$$

EXEMPLO 10.3-2 Forma Retangular e Forma Polar dos Fasores

Considere os fasores

$$\mathbf{V}_1 = 4{,}25\underline{/115^\circ}\ \text{e}\ \mathbf{V}_2 = -4 + j3$$

Converta $\mathbf{V}_1$ para a forma retangular e converta $\mathbf{V}_2$ para forma polar.

Solução

De acordo com as Eqs. 10.3-3 e 10.3-5,

$$\mathbf{V}_1 = \text{Re}\{\mathbf{V}_1\} + j\text{Im}\{\mathbf{V}_1\} = 4{,}25\cos(115^\circ) + j4{,}25\cos(115^\circ) = -1{,}796 + j3{,}852$$

De acordo com as Eqs. 10.3-2 e 10.3-6,

$$|\mathbf{V}_2| = |-4 + j3| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$$

Como $a = \text{Re}\{\mathbf{V}_2\} = -4 < 0$, a Eq. 10.3-6 também nos dá

$$\underline{/\mathbf{V}_2} = 180^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{3}{-(-4)}\right) = 143^\circ$$

e, portanto,

$$\mathbf{V}_2 = 5\underline{/143^\circ}$$

Vamos agora discutir algumas operações aritméticas com fasores. Considere dois fasores, $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$, expressos tanto na forma retangular como na forma polar:

$$\mathbf{V}_1 = a + jb = E\underline{/\ \theta}\ \text{e}\ \mathbf{V}_2 = c + jd = F\underline{/\ \phi}$$

Para somar ou subtrair fasores, é mais fácil trabalhar com a forma retangular, pois a parte real e a parte imaginária do vetor resultante podem ser calculadas separadamente, da seguinte forma:

$$\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 = (a + jb) + (c + jd) = (a + c) + j(b + d) \qquad (10.3\text{-}8)$$

$$\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2 = (1 + jb) - (c + jd) = (a - c) + j(b - d) \qquad (10.3\text{-}9)$$

Para multiplicar ou dividir fasores, é mais fácil trabalhar com a forma polar, pois a amplitude e o ângulo do vetor resultante podem ser calculados separadamente, da seguinte forma:

$$\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2 = \left(E\underline{/\theta}\right)\left(F\underline{/\phi}\right) = EF\underline{/(\theta + \phi)}\ \text{e}\ \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{V}_2} = \frac{A\underline{/\theta}}{B\underline{/\phi}} = \frac{A}{B}\underline{/(\theta - \phi)} \qquad (10.3\text{-}10)$$

O *conjugado* do fasor $\mathbf{V}_1 = a + jb$ é representado pelo símbolo $\mathbf{V}_1^*$ e definido da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1^* &= (a + jb)^* = a - jb \\ &= \left(E \angle \theta\right)^* = E \angle -\theta \end{aligned} \tag{10.3-11}$$

EXEMPLO 10.3-3 Aritmética dos Fasores

Considere os fasores

$$\mathbf{V}_1 = -1{,}796 + j3{,}852 = 4{,}25 \angle 115^\circ \quad \text{e} \quad V_2 = -4 + j3 = 5 \angle 143^\circ$$

Determine $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2$ e $\dfrac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{V}_2}$.

Solução

De acordo com a Eq. 10.3-8,

$$V_1 + V_2 = (-1{,}796 + j3{,}852) + (-4 + j3) = (-1{,}796 - 4) + j(3{,}852 + 3) = -5{,}796 + j6{,}852$$

De acordo com a Eq. 10.3-10,

$$\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2 = \left(4{,}25 \angle 115^\circ\right)\left(5 \angle 143^\circ\right) = (4{,}25)(5) \angle (115 + 143)^\circ = 21{,}25 \angle 258^\circ = 21{,}25 \angle -102^\circ$$

e

$$\frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{V}_2} = \frac{4{,}25 \angle 115^\circ}{5 \angle 143^\circ} = \left(\frac{4{,}25}{5}\right) \angle (115 - 143)^\circ = 0{,}85 \angle -28^\circ$$

Dois fasores, $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$, são iguais se e apenas se uma das seguintes condições for satisfeita:

1. $\text{Re}\{\mathbf{V}_1\} = \text{Re}\{\mathbf{V}_2\}$ e $\text{Im}\{\mathbf{V}_1\} = \text{Im}\{\mathbf{V}_2\}$
2. $|\mathbf{V}_1| = |\mathbf{V}_2|$ e $\angle \mathbf{V}_1 = \angle \mathbf{V}_2$

(As condições 1 e 2 não são independentes: se $\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2$, as duas condições são satisfeitas. Se uma das condições é satisfeita, $\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2$ e a outra condição é satisfeita.)

O uso de fasores para representar senoides se baseia na fórmula de Euler, segundo a qual

$$e^{j\phi} = \cos \phi + j \,\text{sen}\, \phi \tag{10.3-12}$$

e, portanto,

$$Ae^{j\phi} = A \cos \phi + jA \,\text{sen}\, \phi$$

De acordo com as Eqs. 10.3-4 e 10.3-5,

$$A \cos \phi + jA \,\text{sen}\, \phi = A \angle \phi$$

e, portanto,

$$A\, e^{j\phi} = A \angle \phi \tag{10.3-13}$$

$Ae^{j\phi}$ é chamada de *forma exponencial* do fasor. A conversão da forma exponencial para a forma polar é muito simples. Nas duas formas, A é a amplitude da senoide e ϕ é o ângulo de fase.

Considere agora a relação

$$A\,e^{j(\omega t+\theta)} = A\cos(\omega t+\theta) + j\,A\,\text{sen}(\omega t+\theta) \qquad (10.3\text{-}14)$$

Tomando a parte real de ambos os membros da Eq. 10.3-14, obtemos

$$A\cos(\omega t+\theta) = \text{Re}\left\{A\,e^{j(\omega t+\theta)}\right\} = \text{Re}\left\{A\,e^{j\theta}\,e^{j\omega t}\right\} \qquad (10.3\text{-}15)$$

Considere uma senoide e o fasor correspondente

$$v(t) = A\cos(\omega t+\theta)\text{ V} \quad \text{e} \quad \mathbf{V}(\omega) = A\underline{/\theta} = A\,e^{j\theta}\text{ V} \qquad (10.3\text{-}16)$$

Substituindo a Eq. 10.3-16 na Eq. 10.3-15, temos

$$v(t) = \text{Re}\left\{\mathbf{V}(\omega)\,e^{j\omega t}\right\} \qquad (10.3\text{-}17)$$

Considere uma equação obtida aplicando a LKT ou a LKC a um circuito de CA, como, por exemplo,

$$0 = \sum_i v_i(t) \qquad (10.3\text{-}18)$$

De acordo com a Eq. 10.3-17, podemos escrever a Eq. 10.3-18 na forma

$$0 = \sum_i \text{Re}\left\{\mathbf{V}_i(\omega)\,e^{j\omega t}\right\} = \text{Re}\left\{e^{j\omega t}\sum_i \mathbf{V}_i(\omega)\right\} \qquad (10.3\text{-}19)$$

A Eq. 10.3-19 deve ser satisfeita para qualquer valor de t. Se $t = 0$, e a Eq. 10.3-19 nos dá

$$0 = \text{Re}\left\{\sum_i \mathbf{V}_i(\omega)\right\} \qquad (10.3\text{-}20)$$

Se $t = \pi/2\omega$, $e^{j\omega t} = e^{-j\pi/2} = -j$ e a Eq. 10.3-19 se torna

$$0 = \text{Re}\left\{-j\sum_i \mathbf{V}_i(\omega)\right\} = \text{Im}\left\{\sum_i \mathbf{V}_i(\omega)\right\} \qquad (10.3\text{-}21)$$

De acordo com as Eqs. 10.3-20 e 10.3-21, os fasores 0 e $\sum_i \mathbf{V}_i(\omega)$ são iguais:

$$0 = \sum_i \mathbf{V}_i(\omega)$$

Resumindo, se uma soma de funções senoidais $v_i(t)$ satisfaz a equação obtida aplicando a LKT a uma malha de um circuito de CA, as tensões fasoriais correspondentes $\mathbf{V}_i(\omega)$ satisfazem a mesma equação. Do mesmo modo, se uma soma de correntes senoidais $i_i(t)$ satisfaz a equação obtida aplicando a LKC a um nó de um circuito de CA, as correntes fasoriais correspondents $\mathbf{I}_i(\omega)$ satisfazem a mesma equação.

EXEMPLO 10.3-4 Leis de Kirchhoff para Circuitos de CA

A entrada do circuito da Figura 10.3-3 é a tensão da fonte de tensão,

$$v_s(t) = 25 \cos(100t + 15°)\ \text{V}$$

A saída é a tensão do capacitor,

$$v_C(t) = 20 \cos(100t - 22°)\ \text{V}$$

Determine a tensão do resistor, $v_R(t)$.

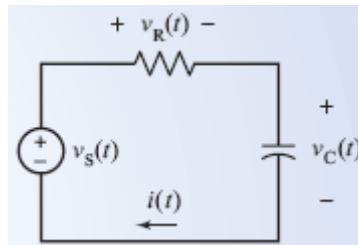



FIGURA 10.3-3 Circuito do Exemplo 10.3-4.

Solução

De acordo com a LKT, temos

$$v_R(t) = v_s(t) = v_C(t) = 25 \cos(100t + 15°) - 20 \cos(100t - 22°)$$

A equação equivalente usando fasores é

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_R(\omega) = \mathbf{V}_s(\omega) - \mathbf{V}_C(\omega) &= 25\angle 15° - 20\angle -22° \\ &= (24{,}15 + j6{,}47) - (18{,}54 - j7{,}49) \\ &= 5{,}61 + j13{,}96 \\ &= 15\angle 68{,}1°\ \text{V} \end{aligned}$$

Convertendo o fasor $\mathbf{V}_R(\omega)$ na senoide equivalente, temos

$$\mathbf{V}_R(\omega) = 15\angle 68{,}1°\ \text{V} \quad \Leftrightarrow \quad v_R(t) - 15 \cos(100t + 68{,}1°)\ \text{V}$$

Solução Alternativa

Também podemos resolver a equação da LKT usando trigonometria em vez de fasores. Para isso, precisamos de uma das identidades trigonométricas do Apêndice C:

$$\cos(a \pm \beta) = \cos(a)\,\text{sen}(\beta) \mp \text{sen}(a)\,\text{sen}(\beta)$$

De acordo com essa identidade trigonométrica,

$$\begin{aligned} 25 \cos(100t + 15°) &= 25\,[\cos(100t)\cos(15°) - \text{sen}(100t)\,\text{sen}(15°)] \\ &= 24{,}15 \cos(100t) - 6{,}47\ \text{sen}(100t) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} 20 \cos(100t - 22°) &= 20\,[\cos(100t)\cos(22°) + \text{sen}(100t)\,\text{sen}(22°)] \\ &= 18{,}54 \cos(100t) + 7{,}49\ \text{sen}(100t) \end{aligned}$$

Substituindo esses resultados na equação da LKT, obtemos:

$$\begin{aligned} v_R(t) &= v_s(t) - v_C(t) = 25\cos(100t + 15°) - 20\cos(100t - 22°) \\ &= [24{,}15\cos(100t) - 6{,}47\,\text{sen}(100t)] - [18{,}54\cos(100t) + 7{,}49\,\text{sen}(100t)] \\ &= 5{,}61\cos(100t) - 13{,}96\,\text{sen}(100t) \\ &= \sqrt{5{,}61^2 + 13{,}96^2}\cos\left(100t - \tan^{-1}\left(\frac{-16{,}96}{5{,}61}\right)\right) \\ &= 15\cos(100t + 68{,}1°)\ \text{V} \end{aligned}$$

Usando fasores, obtivemos o mesmo resultado com menos trabalho.

10.4 *Impedâncias*

Como vimos, todas as correntes e tensões de um circuito de CA são senoides de mesma frequência. A Figura 10.4-1*a* mostra um componente de um circuito de CA. A tensão e corrente do elemento são, respectivamente, $v(t)$ e $i(t)$. Podemos escrever

$$v(t) = V_m\cos(\omega t + \theta)\ \text{V} \quad \text{e} \quad i(t) = I_m\cos(\omega t + \phi)\ \text{A} \qquad (10.4\text{-}1)$$

onde V_m e I_m são as amplitudes da tensão e da corrente, θ e ϕ são os ângulos de fase da tensão e da corrente, e ω, é a frequência das tensões e correntes do circuito. Os fasores correspondentes são

$$\mathbf{V}(\omega) = V_m\angle\theta\ \text{V} \quad \text{e} \quad I(\omega) = \mathbf{I}_m\angle\phi\ \text{A}$$

A Figura 10.4-1*b* mostra novamente o componente do circuito, com a tensão e a corrente representadas pelos fasores $\mathbf{V}(\omega)$ e $\mathbf{I}(\omega)$. Note que, tanto na Figura 10.4-1*a* como na Figura 10.4-1*b*, a tensão e a corrente estão de acordo com a convenção passiva.

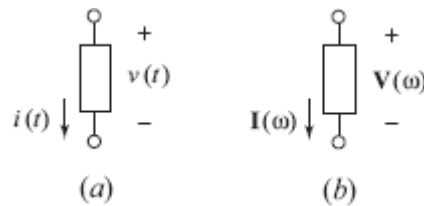



FIGURA 10.4-1 Componente de um circuito de CA representado (*a*) no domínio do tempo; (*b*) no domínio da frequência.

A impedância $\mathbf{Z}(\omega)$ de um componente de um circuito de CA é definida como a razão entre os fasores que representam a tensão e a corrente:

$$\mathbf{Z}(\omega) = \frac{\mathbf{V}(\omega)}{\mathbf{I}(\omega)} = \frac{V_m\angle\theta}{I_m\angle\phi} = \frac{V_m}{I_m}\angle(\theta - \phi)\ \Omega \qquad (10.4\text{-}2)$$

Assim,

$$\mathbf{V}(\omega) = \mathbf{Z}(\omega)\mathbf{I}(\omega) \qquad (10.4\text{-}3)$$

que é a **lei de Ohm para circuitos de CA**. A admitância $\mathbf{Y}(\omega)$ de um circuito de CA é o recíproco da impedância:

$$\mathbf{Y}(\omega) = \frac{1}{\mathbf{Z}(\omega)} = \frac{\mathbf{I}(\omega)}{\mathbf{V}(\omega)}$$

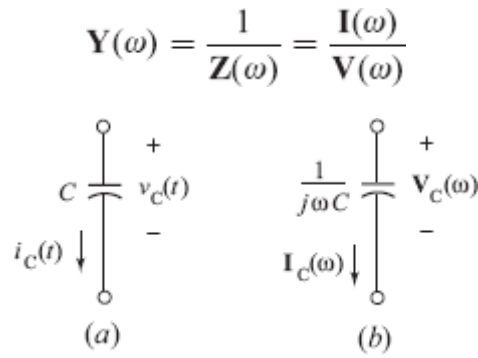



FIGURA 10.4-2 Um capacitor em um circuito de CA representado (*a*) no domínio do tempo; (*b*) no domínio da frequência.

Para distinguir as duas representações do componente da Figura 10.4-1, dizemos que a Figura 10.4-1*a* representa o componente no domínio do tempo e a Figura 10.4-1*b* representa o componente no domínio da frequência.

Considere um capacitor como o da Figura 10.4-2*a* em um circuito de CA. Como sabemos que a tensão de um capacitor é uma senoide com a mesma frequência que todas as outras tensões do circuito, podemos escrever

$$v_C(t) = A \cos(\omega t + \theta) \text{ V}$$

A corrente do capacitor é

$$i_C(t) = C\frac{d}{dt}v_C(t) = -C\omega A \text{ sen}(\omega t + \theta) = C\omega A \cos(\omega t + \theta + 90^\circ) \text{ A}$$

Os fasores que representam a tensão e a corrente do capacitor são

$$\mathbf{V}_C(\omega) = A\angle\theta \text{ V e } \mathbf{I}_C(\omega) = C\omega A\angle(\theta + 90^\circ) = \left(C\omega\angle 90^\circ\right)\left(A\angle\theta\right) = j\omega CA\angle\theta \text{ A}$$

A impedância do capacitor é dada pela razão entre o fasor que representa a tensão e o fasor que representa a corrente:

$$\mathbf{Z}_C(\omega) = \frac{\mathbf{V}_C(\omega)}{\mathbf{I}_C(\omega)} = \frac{A\angle\theta}{j\omega CA\angle\theta} = \frac{1}{j\omega C}\,\Omega \qquad (10.4\text{-}4)$$

A Figura 10.4-2*b* mostra um capacitor representado por sua impedância no domínio da frequência. De acordo com a Eq. 10.4-3, temos

$$\mathbf{V}_C(\omega) = \frac{1}{j\omega C}\mathbf{I}_C(\omega) \qquad (10.4\text{-}5)$$

Considere um indutor como o da Figura 10.4-3*a* em um circuito de CA. Como sabemos que a corrente em um indutor é uma senoide com a mesma frequência que todas as outras correntes do circuito, podemos escrever

$$i_L(t) = A \cos(\omega t + \theta) \text{ A}$$

A tensão do indutor é

$$v_L(t) = L\frac{d}{dt}i_L(t) = -L\omega A \text{ sen}(\omega t + \theta) = L\omega A \cos(\omega t + \theta + 90^\circ) \text{ V}$$

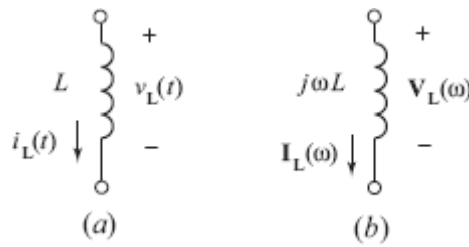



FIGURA 10.4-3 Um indutor em um circuito de CA representado (*a*) no domínio do tempo; (*b*) no domínio da frequência.

Os fasores que representam a corrente e a tensão do capacitor são

$$\mathbf{I}_L(\omega) = A\angle\theta \text{ A} \;\; \text{e} \;\; \mathbf{V}_L(\omega) = L\omega A\angle(\theta + 90°) = j\omega LA\angle\theta \text{ V}$$

A impedância do indutor é dada pela razão entre o fasor que representa a tensão e o fasor que representa a corrente:

$$\mathbf{Z}_L(\omega) = \frac{\mathbf{V}_L(\omega)}{\mathbf{I}_L(\omega)} = \frac{j\omega L A\angle\theta}{A\angle\theta} = j\omega L \ \Omega \qquad (10.4\text{-}6)$$

A Figura 10.4-3*b* mostra um indutor representado por sua impedância no domínio da frequência. De acordo com a Eq. 10.4-3, temos

$$\mathbf{V}_L(\omega) = j\omega L \mathbf{I}_L(\omega) \qquad (10.4\text{-}7)$$

Considere um resistor como a da Figura 10.4-4*a* em um circuito de CA. Como sabemos que a tensão em um resistor é uma senoide com a mesma frequência que todas as outras tensões do circuito, podemos escrever

$$v_R(t) = A\cos(\omega t + \theta)$$

A corrente do resistor é

$$i_R(t) = \frac{v_R(t)}{R} = \frac{A}{R}\cos(\omega t + \theta)$$

A impedância do resistor é dada pela razão entre o fasor que representa a tensão e o fasor que representa a corrente:

$$\mathbf{Z}_R(\omega) = \frac{\mathbf{V}_R(\omega)}{\mathbf{I}_R(\omega)} = \frac{A\angle\theta}{\frac{A}{R}\angle\theta} = R\ \Omega \qquad (10.4\text{-}8)$$

A impedância de um resistor é numericamente igual à resistência. De acordo com a Eq. 10.4-3, temos

$$\mathbf{V}_R(\omega) = R\mathbf{I}_R(\omega) \qquad (10.4\text{-}9)$$

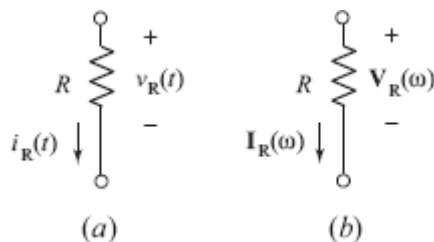



FIGURA 10.4-4 Um resistor em um circuito de CA representado (*a*) no domínio do tempo; (*b*) no domínio da frequência.

EXEMPLO 10.4-1 Impedâncias

A entrada do circuito de CA da Figura 10.4-5 é a tensão da fonte

$$v_S(t) = 12 \cos(1000t + 15°) \text{ V}$$

Determine (a) a impedância do capacitor, do indutor e do resistor; (b) a corrente $i(t)$.

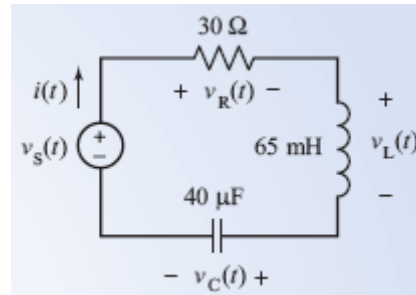



FIGURA 10.4-5 Circuito do Exemplo 10.4-1.

Solução

(a) A frequência de entrada é $\omega = 1000$ rad/s. De acordo com a Eq. 10.4-4, a impedância do capacitor é

$$\mathbf{Z}_C(\omega) = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j1000(40 \times 10^{-6})} = \frac{25}{j} = -j\,25\ \Omega$$

De acordo com a Eq. 10.4-6, a impedância do indutor é

$$\mathbf{V}_L(\omega) = j\omega L = j1000(0{,}065) = j65\ \Omega$$

De acordo com a Eq. 10.4-8, a impedância do resistor é

$$\mathbf{Z}_R(\omega) = R = 30\ \Omega$$

(b) Aplicando a LKT ao circuito, temos

$$12 \cos(1000t + 15°) = v_R(t) + v_L(t) + v_C(t)$$

A equação equivalente, em termos de fasores, é

$$12\angle 15° = \mathbf{V}_R(\omega) + \mathbf{V}_L(\omega) + \mathbf{V}_C(\omega) \qquad (10.4\text{-}10)$$

De acordo com as Eqs. 10.4-5, 10.4-7 e 10.4-9,

$$12\angle 15° = 30\,\mathbf{I}(\omega) + j65\,\mathbf{I}(\omega) - j25\,\mathbf{I}(\omega) = (30 + j\,40)\,\mathbf{I}(\omega) \qquad (10.4\text{-}11)$$

Explicitando $\mathbf{I}(\omega)$, obtemos

$$\mathbf{I}(\omega) = \frac{12\angle 15°}{30 + j\,40} = \frac{12\angle 15°}{50\angle 53{,}13°} = 0{,}24\angle 38{,}13°\ \text{A}$$

A senoide correspondente é

$$i(t) = 0{,}24 \cos(1000t + 38{,}13°)\ \text{A}$$

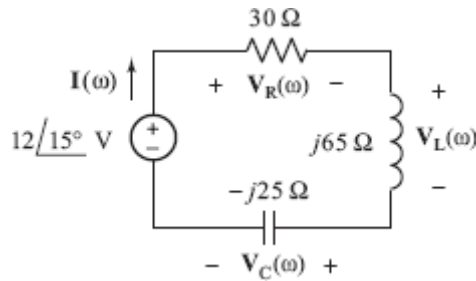



FIGURA 10.4-6 Circuito da Figura 10.4-5, representado no domínio da frequência.

Enquanto a Figura 10.4-5 mostra a representação do circuito no domínio do tempo, a Figura 10.4-6 mostra a representação do circuito no domínio da frequência. Note que, no domínio do tempo, as tensões e correntes são representadas como senoides, enquanto, no domínio da frequência, as tensões e correntes são representas como fasores. No domínio do tempo, os resistores, capacitores e indutores são representados por sua resistência, capacitância e indutância, respectivamente, enquanto, no domínio da frequência, tanto os resistores como os capacitores e os indutores são representados por sua impedância.

As informações necessárias para resolver o Exemplo 10.4-1 estão todas na Figura 10.4-6. Aplicando a LKT ao circuito da Figura 10.4-6, obtemos a Eq. 10.4-10. Aplicando a lei de Ohm para circuitos de CA à Eq. 10.4-10, obtemos a Eq. 10.4-11. Explicitando I(ω) na Eq. 10.4-11, usando a aritmética dos números complexos e convertendo o fasor resultante para o domínio do tempo, obtemos a corrente *i*(*t*).

EXEMPLO 10.4-2 Circuitos de CA no Domínio da Frequência

A entrada do circuito de CA da Figura 10.4-7 é a tensão da fonte

$$v_S(t) = 48\cos(500t + 75°)\ \text{V}$$

Determine a tensão $v(t)$.

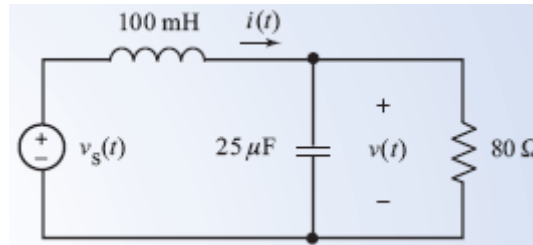



FIGURA 10.4-7 Circuito do Exemplo 10.4-2.

Solução

A frequência de entrada é $\omega = 500$ rad/s. As impedâncias do capacitor e do indutor são

$$\mathbf{Z}_C(\omega) = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j\,500(25\times10^{-6})} = \frac{80}{j} = -j80\ \Omega,$$

e

$$\mathbf{Z}_L(\omega) = j\omega L = j500(0{,}1) = j50\ \Omega$$

A Figura 10.4-8 mostra a representação do circuito no domínio da frequência. Note que

(a) A tensão da fonte é representada pelo fasor correspondente a $v_s(t)$.

(b) As correntes e as outras tensões do circuito são representadas pelos fasores $\mathbf{I}_R(\omega)$, $\mathbf{V}(\omega)$, $\mathbf{I}(\omega)$, $\mathbf{V}_L(\omega)$ e $\mathbf{I}_C(\omega)$.

(c) O resistor, o indutor e o capacitor são representados por suas impedâncias.

Aplicando a lei de Ohm às três impedâncias, obtemos

$$\mathbf{V}_L(\omega) = j50\,\mathbf{I}(\omega),\quad \mathbf{I}_C(\omega) = \frac{\mathbf{V}(\omega)}{-j80}\ \text{ e }\ \mathbf{I}_R(\omega) = \frac{\mathbf{V}(\omega)}{80}$$

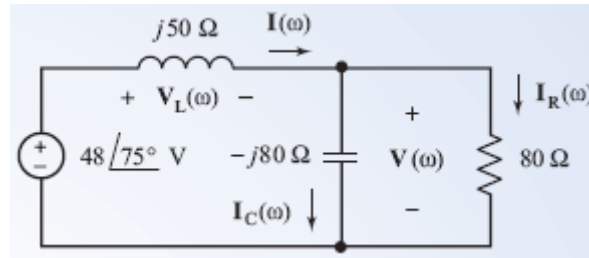



FIGURA 10.4-8 Circuito da Figura 10.4-7, representado no domínio da frequência.

Aplicando a LKC ao nó superior direito, temos

$$\mathbf{I}(\omega) = \mathbf{I}_C(\omega) + \mathbf{I}_R(\omega) = \frac{\mathbf{V}(\omega)}{-j80} + \frac{\mathbf{V}(\omega)}{80} \tag{10.4-12}$$

Aplicando a LKT à malha da esquerda, temos

$$48\angle 75^\circ = \mathbf{V}_L(\omega) + \mathbf{V}(\omega) = j50\,\mathbf{I}(\omega) + \mathbf{V}(\omega) \tag{10.4-13}$$

Combinando as Eqs. 10.4-12 e 10.4-13, obtemos:

$$48\angle 75^\circ = j50\left[\frac{\mathbf{V}(\omega)}{-j80} + \frac{\mathbf{V}(\omega)}{80}\right] + \mathbf{V}(\omega) = \left[\frac{j50}{-j80} + \frac{j50}{80} + 1\right]\mathbf{V}(\omega)$$
$$= [-0{,}625 + j\,0{,}625 + 1]\,\mathbf{V}(\omega) = (0{,}375 + j\,0{,}625)\,\mathbf{V}(\omega)$$

Explicitando **V**(ω), temos

$$\mathbf{V}(\omega) = \frac{48\angle 75^\circ}{0{,}375 + j\,0{,}625} = \frac{48\angle 75^\circ}{0{,}7289\angle 59^\circ} = 65{,}9\angle 16^\circ\ \text{V}$$

A senoide correspondente é

$$v(t) = 65{,}9\cos(500t + 16^\circ)\ \text{V}$$

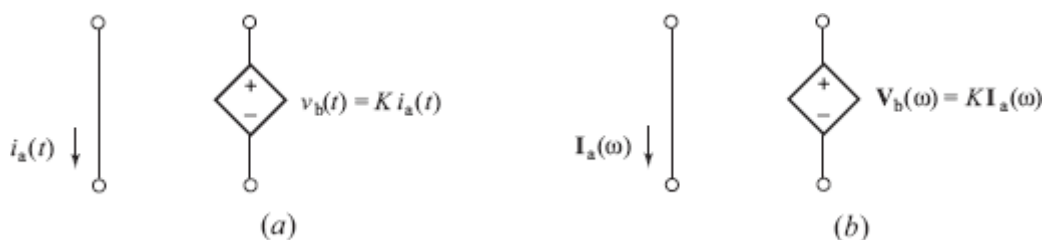



FIGURA 10.4-9 Uma FTCC em um circuito de CA representada (*a*) no domínio do tempo; (*b*) no domínio da frequência.

Considere uma fonte dependente como a da Figura 10.4-9*a* em um circuito de CA. A corrente de controle $i_a(t)$ é uma senoide dada por

$$i_a = A\cos(\omega t + \theta)$$

A tensão controlada é dada por

$$v_b(t) = K\, i_a\,(t) = K\, A \cos\,(\omega t + \theta)$$

Os fasores correspondentes são

$$\mathbf{I}_a(\omega) = A\angle\theta \;\text{ e }\; \mathbf{V}_b(\omega) = KA\angle\theta = K\,\mathbf{I}_a(\omega)$$

A Figura 10.4-9*b* mostra a representação da fonte dependente no domínio da frequência.

EXEMPLO 10.4-3 Circuitos de CA com uma Fonte Dependente

A entrada do circuito da Figura 10.4-10 é a tensão da fonte

$$v_S(t) = 12\cos(1000t + 45^\circ)\text{ V}$$

Determine a tensão $v_o(t)$.

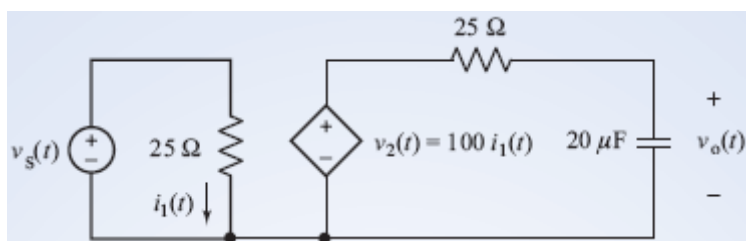



FIGURA 10.4-10 Circuito do Exemplo 10.4-3.

Solução

Como a frequência de entrada é $\omega = 1000$ rad/s, a impedância do capacitor é

$$\frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j\,1000\left(20\times10^{-6}\right)} = \frac{50}{j} = -j\,50\ \Omega$$

A Figura 10.4-11 mostra a representação do circuito no domínio do tempo. Note que

(a) A tensão da fonte é representada pelo fasor correspondente a $v_s(t)$.

(b) A corrente e a tensão da FTCC são representadas pelos fasores $\mathbf{I}_2(\omega)$ e $\mathbf{V}_2(\omega)$. O fasor correspondente à tensão controlada é expresso como o produto do ganho da FTCC pelo fasor correspondente à corrente de controle.

(c) O resistor e o capacitor são representados por suas impedâncias.

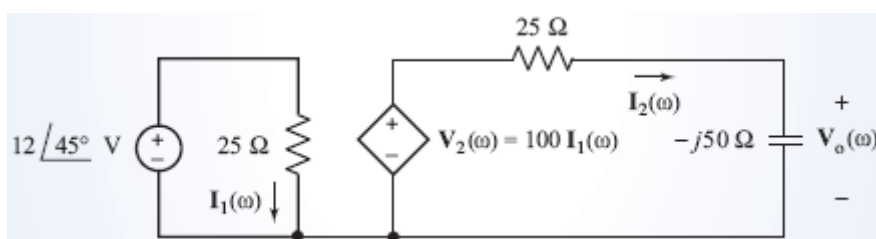



FIGURA 10.4-11 Circuito da Figura 10.4-10, representado no domínio da frequência.

A corrente de controle da FTCC da Figura 10.4-11 é

$$\mathbf{I}_1(\omega) = \frac{12\angle 45^\circ}{25} = 0,48\angle 45^\circ \text{ A}$$

Aplicando a LKT à malha da direita da Figura 10.4-11, obtemos

$$100\mathbf{I}_1(\omega) = 25\mathbf{I}_2(\omega) - j50\mathbf{I}_2(\omega)$$

Explicitando $\mathbf{I}_2(\omega)$, temos

$$\mathbf{I}_2(\omega) = \frac{100(0,48\angle 45^\circ)}{25 - j50} = 0,85865\angle 108,44^\circ \text{ A}$$

Finalmente,

$$\mathbf{V}_o(\omega) = -j50 * \mathbf{I}_2(\omega) = 42,933\angle 18,44^\circ \text{ V}$$

e a senoide correspondente é

$$v_o(t) = 42,933 \cos(1000t + 18,44^\circ) \text{ V}$$

10.5 Impedâncias em Série e em Paralelo

A Figura 10.5-1*a* mostra um circuito denominado Circuito A ligado em série com duas impedâncias. Aplicando a LKC ao circuito da Figura 10.5-1*a*, obtemos

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_2 = \mathbf{I} \qquad (10.5\text{-}1)$$

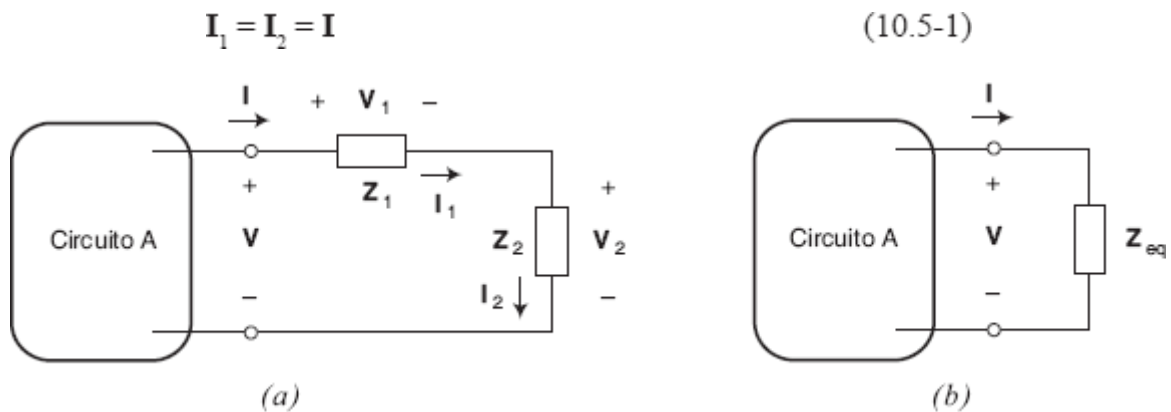



FIGURA 10.5-1 Impedâncias em série (*a*) e a impedância equivalente (*b*).

Aplicando a lei de Ohm às impedâncias da Figura 10.5-1*a*, temos

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{Z}_1\,\mathbf{I}_1 = \mathbf{Z}_1\,\mathbf{I} \quad \text{e} \quad \mathbf{V}_2 = \mathbf{Z}_2\,\mathbf{I}_2 = \mathbf{Z}_2\,\mathbf{I}$$

Aplicando a LKT à malha da Figura 10.5-1*a*, obtemos

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 = (\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2)\,\mathbf{I} \qquad (10.5\text{-}2)$$

A impedância da associação em série das impedâncias $\mathbf{Z}_1$ e $\mathbf{Z}_2$ é

$$\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2$$

Chamamos essa impedância de impedância equivalente das impedâncias $\mathbf{Z}_1$ e $\mathbf{Z}_2$ e escrevemos

$$\mathbf{Z}_{eq} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 \qquad (10.5\text{-}3)$$

Dizemos que a impedância $\mathbf{Z}_{eq}$ é a impedância equivalente da associação em série de $\mathbf{Z}_1$ e $\mathbf{Z}_2$ porque, substituindo $\mathbf{Z}_1$ e $\mathbf{Z}_2$ por $\mathbf{Z}_{eq}$ no circuito da Figura 10.5-1*a*, como mostra a Figura 10.5-1*b*, as tensões e correntes dos componentes do Circuito A permanecem as mesmas. Generalizando a Eq. 10.5-3 para o caso de n impedâncias em série, obtemos:

$$\mathbf{Z}_{eq} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \ldots + \mathbf{Z}_n \qquad (10.5\text{-}4)$$

As tensões das impedâncias $\mathbf{Z}_1$ e $\mathbf{Z}_2$ da Figura 10.5-1*a* são dadas por

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{Z}_1\mathbf{I} = \mathbf{Z}_1 \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} = \frac{\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2}\mathbf{V} \text{ e } \mathbf{V}_2 = \mathbf{Z}_2\mathbf{I} = \frac{\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2}\mathbf{V} \qquad (10.5\text{-}5)$$

Essas equações, que mostram como a tensão total **V** das impedâncias em série é distribuída pelas impedâncias, são conhecidas como equações de divisão da tensão.

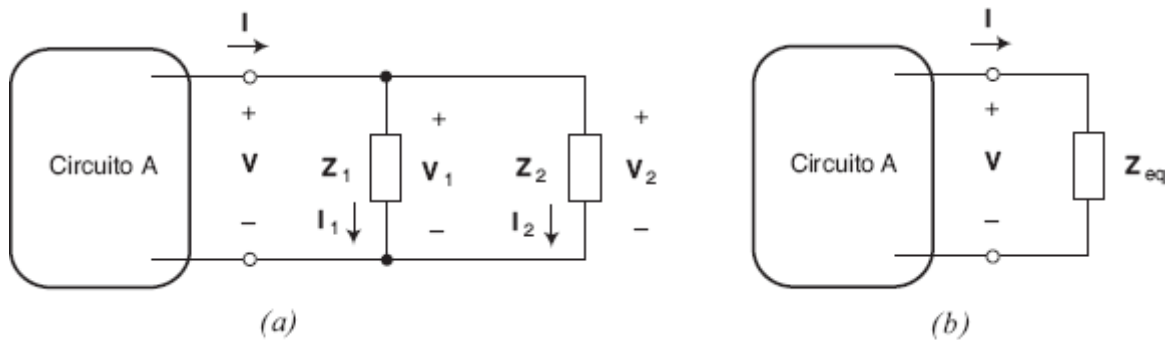



FIGURA 10.5-2 Impedâncias em paralelo (*a*) e a impedância equivalente (*b*).

A Figura 10.5-2*a* mostra um circuito denominado Circuito A ligado em paralelo com duas impedâncias. Aplicando a LKT ao circuito da Figura 10.5-2*a*, obtemos

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2 = \mathbf{V} \qquad (10.5\text{-}6)$$

Aplicando a lei de Ohm às impedâncias da Figura 10.5-2*a*, temos

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{Z}_1} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_1} \text{ e } \mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{Z}_2} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_2}$$

Aplicando a LKC ao nó superior da Figura 10.5-2*a*, obtemos:

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 = \left(\frac{1}{\mathbf{Z}_1} + \frac{1}{\mathbf{Z}_2}\right)\mathbf{V} \qquad (10.5\text{-}7)$$

A impedância da associação em paralelo das impedâncias $\mathbf{Z}_1$ e $\mathbf{Z}_2$ é

$$\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{1}{\frac{1}{\mathbf{Z}_1} + \frac{1}{\mathbf{Z}_2}}$$

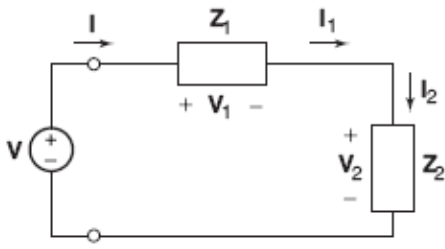
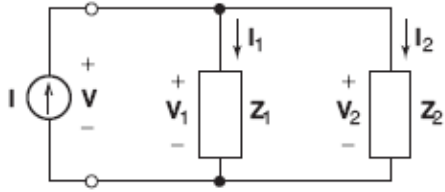
Chamamos essa impedância de impedância equivalente das impedâncias $\mathbf{Z}_1$ e $\mathbf{Z}_2$ e escrevemos

$$\mathbf{Z}_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{\mathbf{Z}_1} + \frac{1}{\mathbf{Z}_2}} \qquad (10.5\text{-}8)$$

Dizemos que a impedância $\mathbf{Z}_{eq}$ é a impedância equivalente da associação em paralelo de $\mathbf{Z}_1$ e $\mathbf{Z}_2$ porque, substituindo $\mathbf{Z}_1$ e $\mathbf{Z}_2$ por $\mathbf{Z}_{eq}$ no circuito da Figura 10.5-2*a*, como mostra a Figura 10.5-2*b*, as tensões e correntes dos componentes do Circuito A permanecem as mesmas. Generalizando a Eq. 10.5-8 para o caso de n impedâncias em paralelo, obtemos

$$\mathbf{Z}_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{\mathbf{Z}_1}+\frac{1}{\mathbf{Z}_2}+\ldots+\frac{1}{\mathbf{Z}_n}} \qquad (10.5\text{-}9)$$

Podemos também escrever a Eq. 10.5-9 em termos de admitâncias:

$$\mathbf{Y}_{eq} = \frac{1}{\mathbf{Z}_{eq}} = \frac{1}{\mathbf{Z}_1}+\frac{1}{\mathbf{Z}_2}+\ldots+\frac{1}{\mathbf{Z}_n} = \mathbf{Y}_1+\mathbf{Y}_2+\ldots+\mathbf{Y}_n \qquad (10.5\text{-}10)$$

As correntes das impedâncias $\mathbf{Z}_1$ e $\mathbf{Z}_2$ da Figura 10.5-2*a* são dadas por

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_1} = \frac{1}{\mathbf{Z}_1}\frac{\mathbf{I}}{\frac{1}{\mathbf{Z}_1}+\frac{1}{\mathbf{Z}_2}} = \frac{\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1+\mathbf{Z}_2}\mathbf{I} \quad \text{e} \quad \mathbf{I}_2\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_2} = \frac{\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_1+\mathbf{Z}_2}\mathbf{I} \qquad (10.5\text{-}11)$$

Essas equações, que mostram como a corrente total I das impedâncias em paralelo é distribuída pelas impedâncias, são conhecidas como equações de divisão da corrente.

As equações de divisão da tensão e de divisão da corrente são mostradas novamente na Tabela 10.5-1.

Tabela 10.5-1 Divisão de Tensão e Corrente no Domínio da Frequência

	CIRCUITO	EQUAÇÕES
Divisão de tensão	(circuito)	$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_2 = \mathbf{I}$ $\mathbf{V}_1 = \frac{\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_1+\mathbf{Z}_2}\mathbf{V}$ $\mathbf{V}_2 = \frac{\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1+\mathbf{Z}_2}\mathbf{V}$
Divisão de corrente	(circuito)	$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}$ $\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1+\mathbf{Z}_2}\mathbf{I}$ $\mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_1+\mathbf{Z}_2}\mathbf{I}$

EXEMPLO 10.5-1 Análise de um Circuito de CA Usando Impedâncias

Determine a corrente *i*(*t*) no circuito de CA da Figura 10.5-3*a*, usando fasores e impedâncias.

(*a*) (*b*)

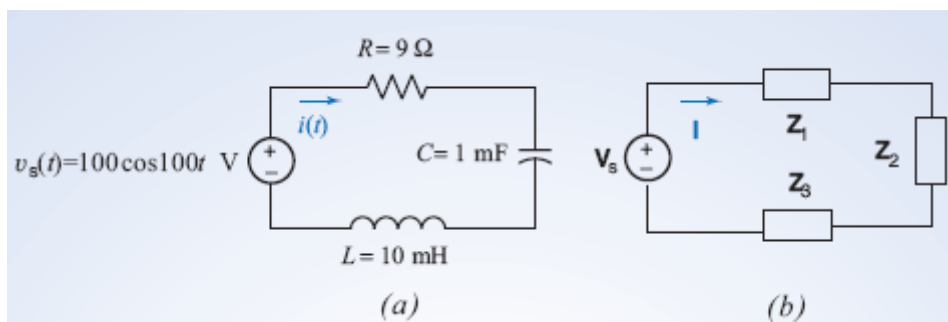



FIGURA 10.5-3 Circuito do Exemplo 10.5-1 representado (*a*) no domínio do tempo; (*b*) no domínio da frequência.

Solução

Para começar, representamos o circuito usando fasores e impedâncias, como mostra a Figura 10.5-3*b*. Como a frequência da fonte senoidal da Figura 10.5-3*a* é $\omega = 100$ rad/s, as impedâncias dos componentes da Figura 10.5-3*b* são

$$\mathbf{Z}_1 = R = 9\,\Omega,\ \mathbf{Z}_2 = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j(100)(0{,}001)} = \frac{10}{j} = -j10$$

e

$$Z_3 = j\omega L = j(100)(0{,}001) = j1\,\Omega$$

O fasor da entrada da Figura 10.5-3*b* é

$$\mathbf{V}_s = 100\angle 0^\circ\ \text{V}$$

Aplicando a LKT à malha da Figura 10.5-3*b*, obtemos

$$\mathbf{Z}_1\mathbf{I} + \mathbf{Z}_2\mathbf{I} + \mathbf{Z}_3\mathbf{I} = \mathbf{V}_s$$

Substituindo as impedâncias e o fasor da entrada por seus valores, obtemos

$$(9 - j10 + j1)\mathbf{I} = 100\angle 0^\circ$$

o que nos dá

$$\mathbf{I} = \frac{100\angle 0^\circ}{9 - j9} = \frac{10\angle 0^\circ}{9\sqrt{2}\angle -45^\circ} = 7{,}86\angle 45^\circ\ \text{A}$$

Assim, a corrente no domínio do tempo é

$$i(t) = 7{,}86\cos(100t + 45^\circ)\ \text{A}$$

EXEMPLO 10.5-2 Divisão de Tensão Usando Impedâncias

Considere o circuito de CA da Figura 10.5-4*a*. A entrada do circuito é a tensão da fonte,

$$v_s(t) = 7{,}28\cos(4t + 77^\circ)\ \text{V}$$

A saída é a tensão do indutor, $v_o(t)$. Determine $v_o(t)$.

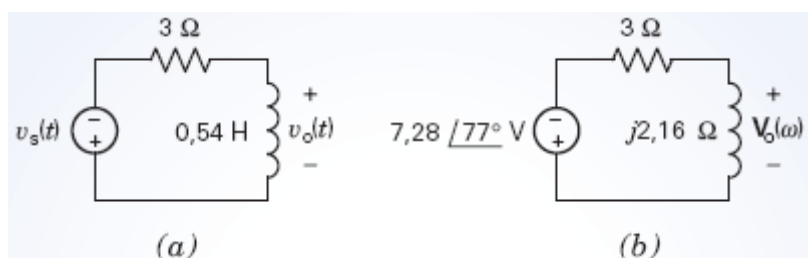



FIGURA 10.5-4 Circuito do Exemplo 10.5-2, representado (*a*) no domínio do tempo; (*b*) no domínio da frequência.

Solução

Como a tensão de entrada é senoidal, a tensão da saída também é senoidal, com a mesma frequência. Como o circuito da Figura 10.5-4*a* é um circuito de CA, pode ser representado no domínio da frequência, como mostra a Figura 10.5-4*b*, em que a impedância do indutor é $j\omega L = j(4)(0{,}54) = j2{,}16\ \Omega$.

Aplicando o método da divisão de tensão ao circuito da Figura 10.5-4*b*, obtemos

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_o(\omega) &= \frac{j2{,}16}{3 + j2{,}16}\left(-7{,}28\angle 77^\circ\right) = \frac{2{,}16\angle 90^\circ}{3{,}70\angle 36^\circ}\left(-7{,}28\angle 77^\circ\right)\\ &= \frac{(2{,}16)(-7{,}28)}{3{,}70}\angle (90^\circ + 77^\circ) - 36^\circ\\ &= -4{,}25\angle 131^\circ = 4{,}25\angle 311^\circ\ \text{V}\end{aligned}$$

No domínio do tempo, a tensão de saída é dada por

$$v_o(t) = 4{,}25 \cos(4t + 311^\circ)\ \text{V}$$

EXEMPLO 10.5-3 Análise de um Circuito de CA

Considere o circuito de CA da Figura 10.5-5*a*. A entrada do circuito é a tensão da fonte,

$$v_s(t) = 7{,}68 \cos(2t + 47^\circ)\ \text{V}$$

A saída é a tensão do resistor,

$$v_o(t) = 1{,}59 \cos(2t + 125^\circ)\ \text{V}$$

Determine a capacitância *C* do capacitor.

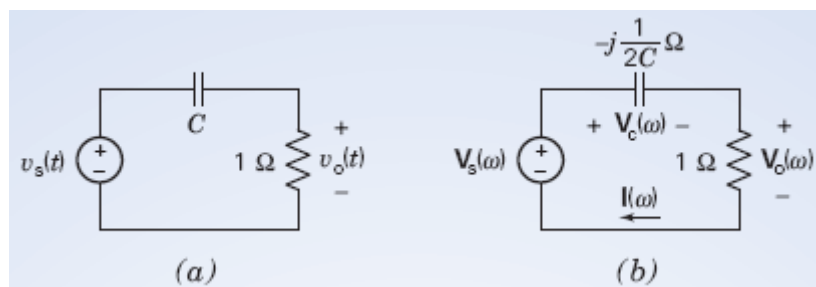



FIGURA 10.5-5 Circuito do Exemplo 10.5-3, representado (*a*) no domínio do tempo; (*b*) no domínio da frequência.

Solução

Como a tensão de entrada é senoidal, a tensão da saída também é senoidal, com a mesma frequência. Como o circuito da Figura 10.5-5*a* é um circuito de CA, pode ser representado no domínio da frequência, como mostra a Figura 10.5-4*b*, em que a impedância do capacitor é

$$\frac{1}{j\omega C} = \frac{j}{j^2 \omega C} = -\frac{j}{\omega C} = -\frac{j}{2\,C}$$

Os fasores correspondentes às tensões de entrada e saída são

$$\mathbf{V}_s(\omega) = 7{,}68\underline{/47^\circ}\ \text{V}$$

e

$$\mathbf{V}_o(\omega) = 1{,}59\underline{/125^\circ}\ \text{V}$$

A corrente **I**(ω) da Figura 10.5-5*b* é dada por

$$\mathbf{I}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{1} = \frac{1{,}59\underline{/125^\circ}}{1\underline{/0^\circ}} = 1{,}59\underline{/125^\circ}\ \text{A}$$

A tensão do capacitor $\mathbf{V}_C(\omega)$ na Figura 10.5-5*b* é dada por

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_c(\omega) = \mathbf{V}_s(\omega) - \mathbf{V}_o(\omega) &= 7{,}68\underline{/47^\circ} - 1{,}59\underline{/125^\circ} \\ &= (5{,}23 + j5{,}62) - (-0{,}91 + 1{,}30) \\ &= (5{,}23 + 0{,}91) + j(5{,}62 - 1{,}30) \\ &= 6{,}14 + j\,4{,}32 \\ &= 7{,}51\underline{/35^\circ}\ \text{V}\end{aligned}$$

A impedância do capacitor é dada por

$$-j\frac{1}{2C} = \frac{\mathbf{V}_c(\omega)}{\mathbf{I}(\omega)} = \frac{7{,}51\underline{/35^\circ}}{1{,}59\underline{/125^\circ}} = 4{,}72\underline{/-90^\circ}$$

Explicitando *C*, obtemos

$$C = \frac{-j}{2\left(4{,}72\underline{/-90^\circ}\right)} = \frac{1\underline{/-90^\circ}}{2(4{,}72\underline{/-90^\circ})} = 0{,}106\ \text{F}$$

EXEMPLO 10.5-4 Análise de um Circuito de CA

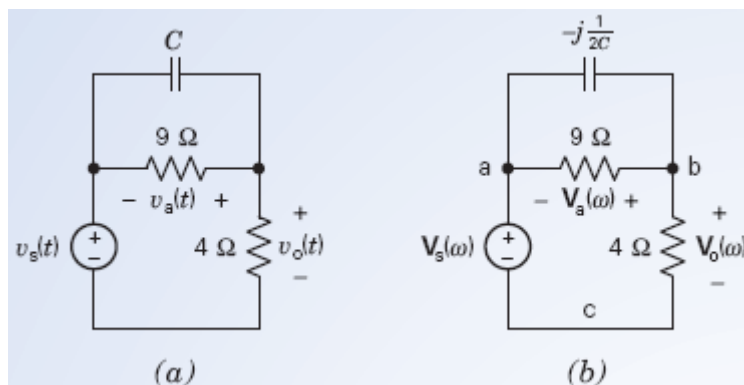



FIGURA 10.5-6 Circuito do Exemplo 10.5-4, representado (*a*) no domínio do tempo; (*b*) no domínio da frequência.

Considere o circuito de CA da Figura 10.5-6*a*. A entrada do circuito é a tensão da fonte, $v_s(t)$, e a saída é a tensão do resistor de 4 Ω, $v_o(t)$. Se a entrada é $v_s(t) = 8{,}93\cos(2t + 54^\circ)$ V, a saída é $v_o(t) = 3{,}83\cos(2t + 83^\circ)$ V. Determine a tensão $v_a(t)$ do resistor de 9 Ω e a capacitância *C* do capacitor.

Solução

Como a tensão de entrada é senoidal, a tensão da saída também é senoidal, com a mesma frequência. Como o circuito da Figura 10.5-6*a* é um circuito de CA, pode ser representado no domínio da frequência, como mostra a Figura 10.5-5*b*. As tensões $\mathbf{V}_s(\omega)$, $\mathbf{V}_a(\omega)$ e $\mathbf{V}_o(\omega)$ da Figura 10.5-6*b* são os fasores correspondentes às tensões $v_s(t)$, $v_a(t)$ e $v_o(t)$ da Figura 10.5-6*a*. O capacitor e os resistores estão representados como impedâncias na Figura 10.5-6*b*. A impedância do capacitor é $-j/\omega C = -j/2C$, em que 2 rad/s é a frequência de $v_s(t)$.

Os fasores correspondentes às tensões de entrada e de saída são, respectivamente,

$$\mathbf{V}_s(\omega) = 8,93\angle 54^\circ \text{ V}$$

e

$$\mathbf{V}_o(\omega) = 3,83\angle 83^\circ \text{ V}$$

Para começar, calculamos $\mathbf{V}_a(\omega)$. Aplicando a LKT à malha da Figura 10.5-6*b* formada pelos dois resistores e a fonte de tensão, obtemos

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_a(\omega) = \mathbf{V}_o(\omega) - \mathbf{V}_s(\omega) &= \left(3,83\angle 83^\circ\right) - \left(8,93\angle 54^\circ\right) \\ &= (0,47 + j3,80) - (5,25 + j7,22) \\ &= -4,78 - j3,42 \\ &= 5,88\angle 216^\circ\end{aligned}$$

A tensão $v_a(t)$ do resistor de 9 Ω é a senoide correspondente a $\mathbf{V}_a(\omega)$,

$$v_a(t) = 5,88 \cos(2t + 216^\circ) \text{ V}$$

Podemos determinar o valor da capacitância aplicando a LKC ao nó b da Figura 10.8-6*b*:

$$\frac{\mathbf{V}_a(\omega)}{-j\dfrac{1}{2C}} + \frac{\mathbf{V}_a(\omega)}{9} + \frac{\mathbf{V}_c(\omega)}{4} = 0$$

$$(j2C)\mathbf{V}_a(\omega) + \frac{\mathbf{V}_a(\omega)}{9} + \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{4} = 0$$

Explicitando *j2C*, obtemos

$$j2C = \frac{4\mathbf{V}_a(\omega) + 9\mathbf{V}_o(\omega)}{-36\mathbf{V}_a(\omega)}$$

Substituindo $\mathbf{V}_a(\omega)$ e $\mathbf{V}_o(\omega)$ por seus valores, obtemos

$$j2C = \frac{4(-4,78 - j3,42) + 9(0,47 + j3,80)}{-36\left(5,88\angle 216^\circ\right)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-14,89 + j20,52}{-36\left(5,88\angle 216^\circ\right)} \\
&= \frac{25,35\angle 126^\circ}{\left(36\angle -180^\circ\right)\left(5,88\angle 216^\circ\right)} \\
&= \frac{25,35}{(36)\,(5,88)}\angle 126^\circ - (-180^\circ + 216^\circ) \\
&= 0,120\angle 90^\circ \\
&= j\,0,120
\end{aligned}
$$

Assim, o valor da capacitância é $C = 0,12/2 = 0,06$ F $= 60$ mF.

EXEMPLO 10.5-5 Impedância Equivalente

Determine a impedância equivalente do circuito da Figura 10.5-7*a* para uma frequência $\omega = 1000$ rad/s.

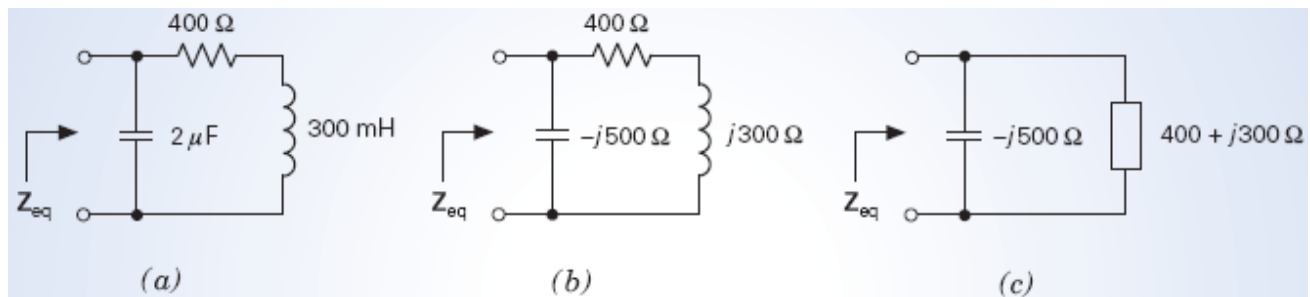



FIGURA 10.5-7 Circuito do Exemplo 10.5-5 (*a*) no domínio do tempo; (*b*) no domínio da frequência; (*c*) depois da substituição das impedâncias em série por uma impedância equivalente.

Solução

A Figura 10.5-7*b* mostra o circuito no domínio da frequência. Substituindo as impedâncias em série por uma impedância equivalente, obtemos o circuito da Figura 10.5-7*c*. A impedância equivalente do circuito, $\mathbf{Z}_{eq}$, é a impedância equivalente das impedâncias em paralelo da Figura 10.5-7*c*:

$$
\mathbf{Z}_{eq} = \frac{-j500(400 + j300)}{-j500 + 400 + j300} = \frac{150.000 - j200.000}{400 - j200} = \frac{250.000\angle -53,1^\circ}{447,2\angle -26,6^\circ} = 599,0\angle -26,5^\circ
$$

10.6 Equações de Nó e de Malha

É possível analisar um circuito de CA escrevendo e resolvendo um sistema de equações de nó ou de malha, obtido a partir da representação do circuito no domínio da frequência.

As equações de nó são um sistema de equações nas quais as incógnitas são tensões de nó. Para obter as equações de nó,

1. Expressamos as tensões e correntes dos componentes em termos das tensões de nó.
2. Aplicamos a LKC aos nós do circuito.

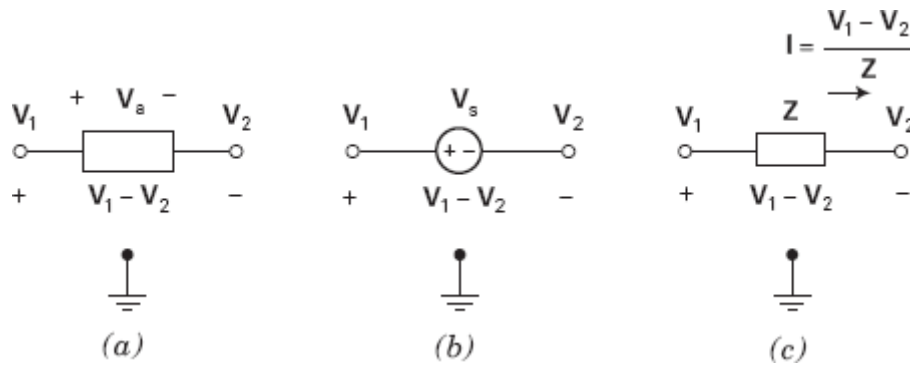



FIGURA 10.6-1 Tensões e corrente expressas em termos de tensões de nó.

Depois de escrever e resolver as tensões de nó, podemos determinar todas as tensões e correntes do circuito usando as leis de Ohm e de Kirchhoff.

A Figura 10.6-1 ilustra as técnicas usadas para expressar as tensões e correntes dos elementos a partir das tensões de nó. A Figura 10.6-1*a* mostra um componente genérico ligado entre os nós 1 e 2. Se a tensão do componente é $\mathbf{V}_a$ e as tensões dos nós são $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$, temos

$$\mathbf{V}_a = \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2 \tag{10.6-1}$$

(Para escrever corretamente a Eq. 10.6-1, basta lembrar que $\mathbf{V}_1$ é a tensão do nó que corresponde ao lado positivo da tensão $\mathbf{V}_a$ e $\mathbf{V}_2$ é a tensão do nó que corresponde ao lado negativo da tensão $\mathbf{V}_a$. Em outras palavras, é a tensão do nó que corresponde ao lado negativo da tensão $\mathbf{V}_a$ que recebe o sinal negativo.)

Na Figura 10.6-1*b*, o componente é uma fonte de tensão e $\mathbf{V}_s$ é o fasor que representa a tensão da fonte. Como $\mathbf{V}_1$ é a tensão do nó que corresponde ao lado positivo da tensão $\mathbf{V}_s$, temos

$$\mathbf{V}_s = \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2 \tag{10.6-2}$$

Na Figura 10.6-1*c*, o componente é uma impedância. Note que a tensão $\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2$ e a corrente $\mathbf{I}$ da impedância estão de acordo com a convenção passiva. De acordo com a lei de Ohm, temos

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2}{\mathbf{Z}} \tag{10.6-3}$$

EXEMPLO 10.6-1 Equações de Nó em um Circuito de CA

Determine a tensão $v_a(t)$ no circuito da Figura 10.6-2.

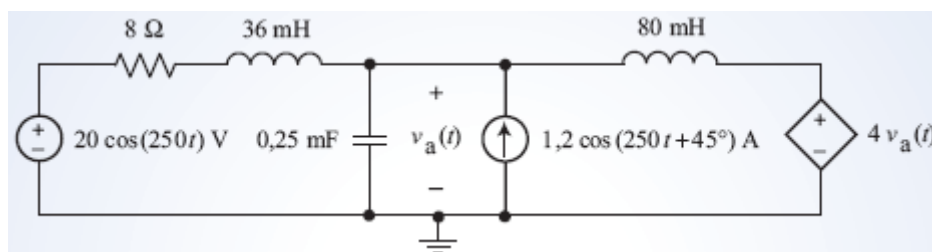



FIGURA 10.6-2 Circuito do Exemplo 10.6-1.

Solução

Para começar, representamos o circuito no domínio da frequência, como mostra a Figura 10.6-3. Em seguida, expressamos as correntes $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$ e $\mathbf{I}_3$ em termos das tensões dos nós. A Figura 10.6-4 ilustra o processo, mostrando separadamente as impedâncias percorridas pelas três correntes. A Figura 10.6-4*a* mostra

a impedância correspondente ao resistor de 8 Ω em série com o indutor de 36 mH. [Note que o sentido da corrente $\mathbf{I}_1$ é do nó cuja tensão é $20\angle 0^\circ$ V para o nó cuja tensão é $\mathbf{V}_a(\omega)$.] Comparando a Figura 10.6-4*a* com a Figura 10.6-1*c*, temos

$$\mathbf{I}_1 = \frac{20\angle 0^\circ - \mathbf{V}_a(\omega)}{8 - j9}$$

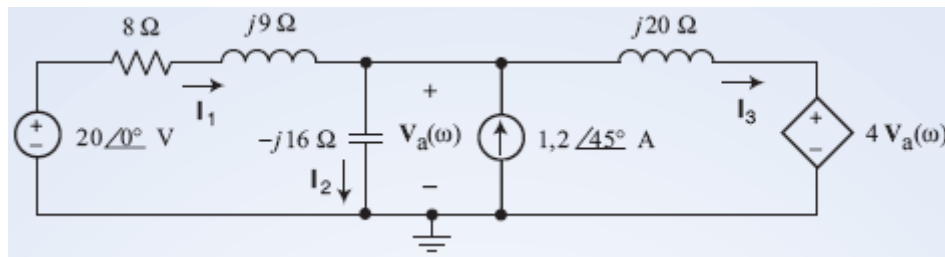



FIGURA 10.6-3 Representação do circuito da Figura 10.6-2 no domínio da frequência.

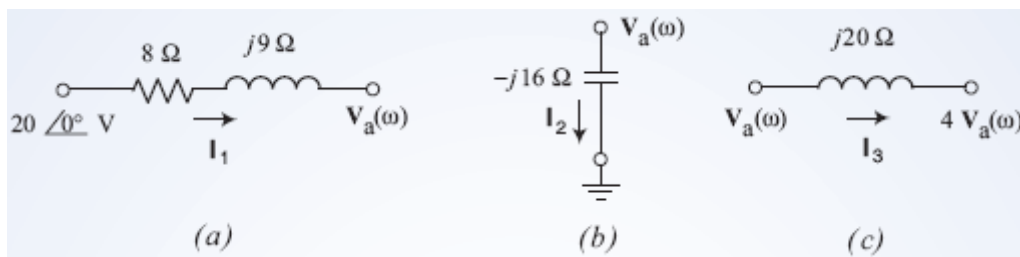



FIGURA 10.6-4 Relação entre as correntes $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$ e $\mathbf{I}_3$ e as tensões dos nós.

A Figura 10.6-4*b* mostra a impedância correspondente ao capacitor. Como a tensão do nó de referência é 0 V, temos

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{V}_a(\omega) - 0}{-j16} = \frac{\mathbf{V}_a(\omega)}{-j16}$$

A Figura 10.6-4*c* mostra a impedância correspondente ao indutor. Temos:

$$\mathbf{I}_3 = \frac{\mathbf{V}_a(\omega) - 4\mathbf{V}_a(\omega)}{j20} = -\frac{3\mathbf{V}_a(\omega)}{j20}$$

Aplicando a LKC ao nó de cima do capacitor, temos

$$\mathbf{I}_1 + 1,2\angle 45^\circ = \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3$$

Substituindo $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$ e $\mathbf{I}_3$ por seus valores, obtemos

$$\frac{20\angle 0^\circ - \mathbf{V}_a(\omega)}{8 - j9} + 1,2\angle 45^\circ = \frac{\mathbf{V}_a(\omega)}{-j16} + \left(-\frac{3\mathbf{V}_a(\omega)}{j20}\right)$$

Colocando $\mathbf{V}_a(\omega)$ em evidência, temos

$$\frac{20\angle 0^\circ}{8 - j9} + 1,2\angle 45^\circ = \left(\frac{1}{8 - j9} + \frac{1}{-j16} - \frac{3}{j20}\right)\mathbf{V}_a(\omega)$$

Explicitando $\mathbf{V}_a(\omega)$, possivelmente com a ajuda do MATLAB (veja a Figura 10.6-5), obtemos

$$\mathbf{V}_a(\omega) = 12,43\underline{/-81,2°}\ \text{V}$$

A senoide correspondente é

$$v_a(t) = 12,43\cos(250t - 81,2°)\ \text{V}$$

```
Command Window
>> Vs = 20;
>> Is = 1.2*exp(j*45*pi/180);
>> Va = (Vs/(8+9j) + Is) / (1/(8+9j) + 1/-16j + -3/20j)

Va =

   1.8929 -12.2816i

>> abs(Va)

ans =

   12.4267

>> angle(Va)*180/pi

ans =

  -81.2381

fx >>
```

FIGURA 10.6-5 Uso do MATLAB para calcular $\mathbf{V}_a(\omega)$ no Exemplo 10.6-1.

As equações de malha são um sistema de equações nas quais as incógnitas são correntes de malha. Para obter as equações de malha,

1. Expressamos as tensões e correntes dos componentes em termos de correntes de malha.
2. Aplicamos a LKT às malhas do circuito.

Depois de escrever e resolver as tensões de nó, podemos determinar todas as tensões e correntes do circuito usando as leis de Ohm e de Kirchhoff.

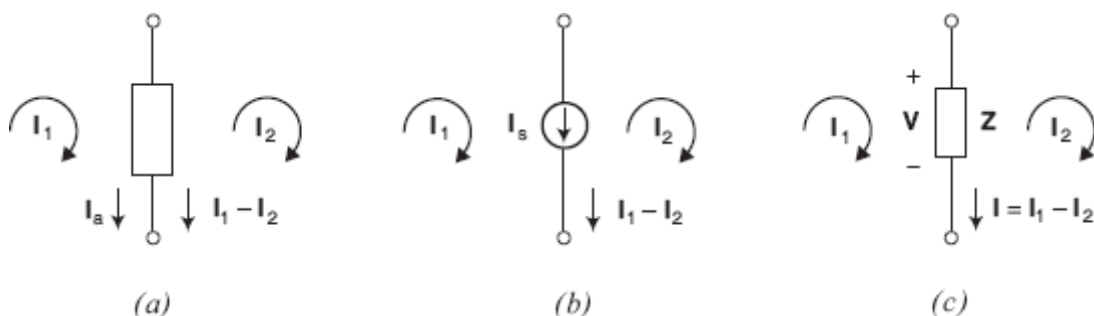



FIGURA 10.6-6 Tensões e correntes expressas em termos de correntes de malha.

A Figura 10.6-6 ilustra as técnicas usadas para expressar as tensões e correntes dos elementos a partir das correntes de malha. A Figura 10.6-6*a* mostra um componente genérico ligado entre as malhas 1 e 2. Se a corrente do componente é $\mathbf{I}_a$ e as correntes das malhas são $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$, temos

$$\mathbf{I}_a = \mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2 \tag{10.6-4}$$

(Para escrever corretamente a Eq. 10.6-4, basta lembrar que $\mathbf{I}_1$ tem o mesmo sentido que $\mathbf{I}_a$. Em outras palavras, é a corrente de malha que tem o sentido contrário ao da corrente $\mathbf{I}_a$ que recebe o sinal negativo.)

Na Figura 10.6-6*b*, o componente é uma fonte de corrente e $\mathbf{I}_s$ é o fasor que representa a tensão da fonte. Como $\mathbf{I}_1$ tem o mesmo sentido $\mathbf{I}_s$,

$$\mathbf{I}_s = \mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2 \tag{10.6-5}$$

Na Figura 10.6-6*c*, o componente é uma impedância. Note que a corrente $\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2$ e a tensão $\mathbf{V}$ da impedância estão de acordo com a convenção passiva. De acordo com a lei de Ohm, temos

$$\mathbf{V} = \mathbf{Z}(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2) \tag{10.6-6}$$

EXEMPLO 10.6-2 Equações de Malha em um Circuito de CA

Determine das correntes de malha do circuito da Figura 10.6-7.

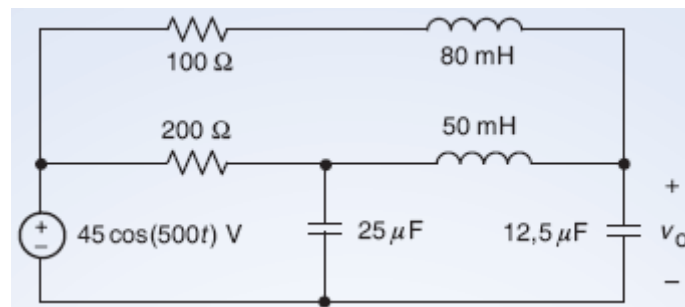



FIGURA 10.6-7 Circuito do Exemplo 10.6-2.

Solução

Para começar, representamos o circuito no domínio da frequência. As impedâncias dos capacitores e indutores são

$$-j\frac{1}{500(25\times10^{-6})} = -j\,80\ \Omega,\ -j\frac{1}{500(12{,}5\times10^{-6})} = -j\,160\ \Omega,\ j500(80\times10^{-3}) = j40\ \Omega$$

e

$$j\,500(50\times10^{-3}) = j\,25\ \Omega$$

A Figura 10.6-8 mostra a representação do circuito no domínio da frequência e as correntes de malha $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$ e $\mathbf{I}_3$. Em seguida, expressamos as correntes dos componentes em função de $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$ e $\mathbf{I}_3$, como mostra a Figura 10.6-9. As tensões dos componentes são chamadas de $\mathbf{V}_a$, $\mathbf{V}_b$, $\mathbf{V}_c$, $\mathbf{V}_d$, $\mathbf{V}_e$ e $\mathbf{V}_o$ na Figura 10.6-9. Cada uma dessas tensões pode ser expressa em termos das correntes de malha multiplicando a impedância do componente pela corrente que atravessa o componente. Assim, por exemplo,

$$\mathbf{V}_b = j\,40\mathbf{I}_1,\ \mathbf{V}_d = j\,25(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1) \quad \text{e} \quad \mathbf{V}_e = j\,80(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3)$$

Depois de expressar as correntes e tensões dos componentes em termos das correntes de malha, aplicamos a LKT a cada uma das malhas para obter o seguinte sistema de equações:

$$100\mathbf{I}_1 + j40\mathbf{I}_1 - j25(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1) - 100(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1) = 0$$
$$200\,(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_2) - j80(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3) - 45\angle 0^\circ = 0$$

e

$$-j\,25(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1) + (-j160)\mathbf{I}_3 - (-j80)(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3) = 0$$

Esse sistema de equações pode ser escrito como uma única equação matricial:

$$\begin{bmatrix} 300 + j65 & -200 & -j25 \\ -200 & 200 - j80 & j80 \\ -j25 & j80 & -j215 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 45 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema de equações, possivelmente com a ajuda do MATLAB, obtemos

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}374\angle 115^\circ \\ 0{,}575\angle 25^\circ \\ 0{,}171\angle 28^\circ \end{bmatrix}$$

No domínio do tempo, as correntes de malha são

$$i_1(t) = 374\cos(500t + 15^\circ)\text{ mA},\ i_2(t) = 575\cos(500t + 25^\circ)\text{ mA}$$

e

$$i_3(t) = 171\cos(500t + 28^\circ)\text{ mA}$$

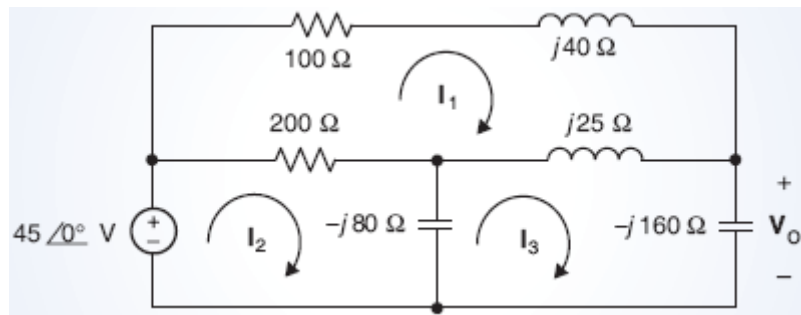



FIGURA 10.6-8 Representação do circuito da Figura 10.6-7 no domínio da frequência.

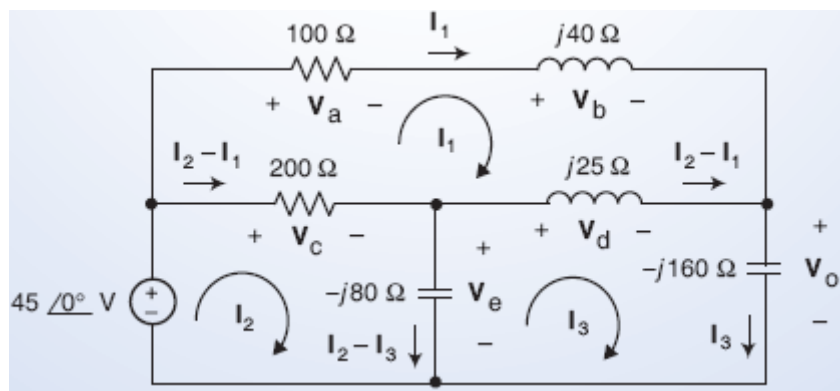



FIGURA 10.6-9 Tensões e correntes expressas em termos das correntes de malha.

Exemplo 10.6-3 Equações de Nó em um Circuito de CA com um Supernó

EXEMPLO 10.6-3 Equações de Nó em um Circuito de CA com um Supernó

A entrada do circuito da Figura 10.6-10 é a tensão da fonte de tensão independente

$$v_s(t) = 10 \cos(10t) \text{ V}$$

A saída é a corrente $i(t)$ do resistor R_1. Determine $i(t)$.

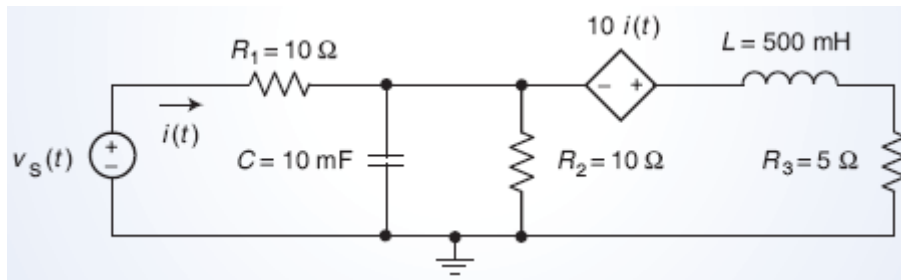



FIGURA 10.6-10 Circuito do Exemplo 10.6-3.

Solução

Para começar, representamos o circuito no domínio da frequência. As impedâncias do capacitor e do indutor são

$$Z_c = -j\frac{1}{10(0,010)} = -j10\ \Omega \quad e \quad Z_L = j10(0,5) = j5\ \Omega$$

A Figura 10.6-11 mostra a representação do circuito no domínio da frequência. Podemos analisar o circuito escrevendo e resolvendo equações de nó. Para simplificar o processo, substituímos as impedâncias em série e em paralelo por impedâncias equivalentes, como mostra a Figura 10.6-12. As impedâncias $\mathbf{Z}_1$ e $\mathbf{Z}_2$ da Figura 10.6-12 são dadas por

$$\mathbf{Z}_1 = 10 \,||\, (-j10) = \frac{10(-j10)}{10 - j10} = 5 - j5\ \Omega \quad \text{e} \quad \mathbf{Z}_3 = 5 + j5\ \Omega$$

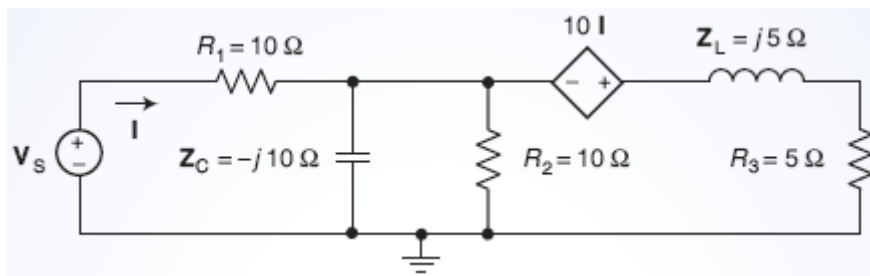



FIGURA 10.6-11 Representação do circuito da Figura 10.6-10 no domínio da frequência.

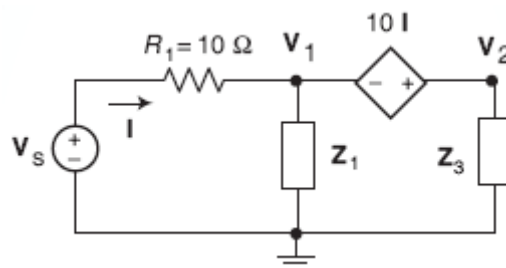



FIGURA 10.6-12 Circuito simplificado no domínio da frequência, mostrando o supernó associado à fonte de tensão dependente**.**

Em seguida, consideramos a fonte dependente da Figura 10.6-12. De acordo com a lei de Ohm, a corrente de controle **I** é dada por

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_s - \mathbf{V}_1}{R_1} \quad (10.6\text{-}7)$$

Aplicando a LKT à malha da esquerda, temos

$$10\,\mathbf{I} = \mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1$$

Aplicando a LKC ao supernó da Figura 10.6-12, temos

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{Z}_2} + \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{Z}_3} = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{Z}_2} + \frac{\mathbf{V}_1 + 10\mathbf{I}}{\mathbf{Z}_3} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3)\mathbf{V}_1 + \mathbf{Z}_2(10 - \mathbf{Z}_3)\mathbf{I} = 0 \quad (10.6\text{-}8)$$

O sistema de equações formado pelas Eqs. 10.6-7 e 10.6-8 pode ser escrito como uma única equação matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & R_1 \\ \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3 & \mathbf{Z}_2(10 - \mathbf{Z}_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_s \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema de equações, possivelmente com a ajuda do MATLAB, obtemos

$$\mathbf{V}_1 = 4{,}4721\underline{/63{,}4^\circ}\ \text{V} \quad \text{e} \quad \mathbf{I} = 0{,}89443\underline{/-26{,}6^\circ}\ \text{A}$$

No domínio do tempo, a corrente de saída é

$$i(t) = 0{,}89443 \cos(10t - 26{,}6^\circ)\ \text{A}$$

Exemplo 10.6-4 Circuito de CA com um Amplificador Operacional

A entrada do circuito de CA da Figura 10.6-13 é a tensão da fonte

$$v_s(t) = 125 \cos(5000t + 15^\circ)\ \text{mV}$$

Determine a tensão de saída $v_o(t)$.

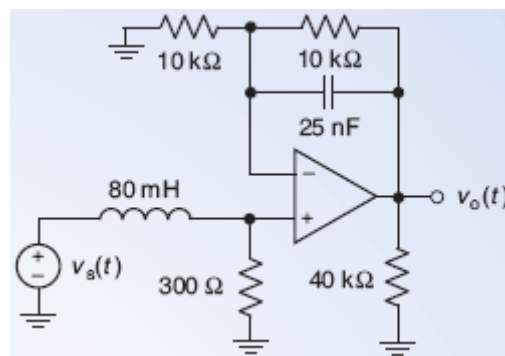



FIGURA 10.6-13 Circuito do Exemplo 10.6-4.

Solução

As impedâncias do capacitor e do indutor são

$$\mathbf{Z}_C = -j\frac{1}{5000(25 \times 10^{-9})} = -j8000\ \Omega \quad \text{e} \quad \mathbf{Z}_L = j5000(80 \times 10^{-3}) = j400\ \Omega$$

A Figura 10.6-14 mostra a representação do circuito no domínio da frequência.

Aplicando a LKC ao nó não inversor do amplificador operacional, obtemos

$$\frac{\mathbf{V}_s - \mathbf{V}_a}{j400} = \frac{\mathbf{V}_a}{300} + 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V}_s = \mathbf{V}_a\left(1 + \frac{j400}{300}\right)$$

Explicitando $\mathbf{V}_a$, temos

$$\mathbf{V}_a = \left(\frac{300}{300 + j400}\right)\mathbf{V}_s = \left(0{,}6\angle -53{,}1^\circ\right)\left(0{,}125\angle 15^\circ\right) = 0{,}075\angle -38{,}1^\circ \text{ V}$$

Aplicando a LKC ao nó inversor do amplificador operacional, obtemos

$$\frac{\mathbf{V}_a}{4000} + \frac{\mathbf{V}_a - \mathbf{V}_c}{10.000} + \frac{\mathbf{V}_a - \mathbf{V}_o}{-j8000} = 0$$

Multiplicando por 80.000, obtemos

$$0 = 20\mathbf{V}_a + 8(\mathbf{V}_a - \mathbf{V}_o) + j10(\mathbf{V}_a - \mathbf{V}_o)$$

Explicitando $\mathbf{V}_o$, temos

$$\mathbf{V}_o = \frac{28 + j10}{8 + j10}\mathbf{V}_a = \frac{29{,}73\angle 19{,}65^\circ}{12{,}81\angle 51{,}34^\circ}\left(0{,}075\angle -38{,}1^\circ\right) = 0{,}174\angle -69{,}79^\circ$$

No domínio do tempo, a tensão de saída é

$$v_o(t) = 174 \cos(500t - 69{,}79^\circ) \text{ mV}$$

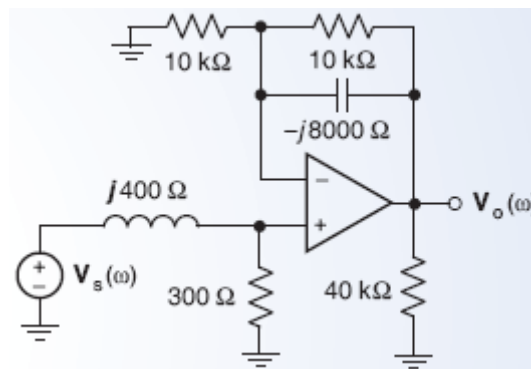



FIGURA 10.6-14 Representação do circuito da Figura 10.6-13 no domínio da frequência.

10.7 *Circuitos Equivalentes de Norton e de Thévenin*

Nesta seção, vamos determinar os circuitos equivalentes de Norton e de Thévenin de um circuito de CA.

A Figura 10.7-1 ilustra o uso de circuitos equivalentes de Norton e de Thévenin. Na Figura 10.7-1*a*, um circuito foi dividido em duas partes, o Circuito A e o Circuito B, ligadas por um único par de terminais. (Essa é a única ligação entre os dois circuitos. Em particular, se o circuito contém uma fonte dependente, as duas partes da fonte dependente devem estar no Circuito A ou no Circuito B.) Na Figura 10.7-1*b*, o Circuito A foi substituído pelo circuito equivalente de Thévenin, que é formado por uma fonte de tensão ideal em série com uma impedância. Na Figura 10.7-1*c*, o circuito A foi substituído pelo circuito equivalente de Norton, que é

formado por uma fonte de corrente ideal em paralelo com uma impedância. A substituição do circuito A por um circuito equivalente de Thévenin ou de Norton não altera a tensão e a corrente de nenhum componente do Circuito B. Isso significa que se alguém consultar uma lista de valores das correntes e tensões dos componentes do Circuito B, não poderá saber se esses valores foram obtidos com o Circuito B ligado ao circuito A ou com o Circuito B ligado ao circuito equivalente de Thévenin ou de Norton do Circuito A.

Para determinar o circuito equivalente de Thévenin ou de Norton do Circuito A, basta conhecer três parâmetros: a tensão de circuito aberto, V_{oc}, a corrente de curto-circuito, I_{sc}, e a impedância de Thévenin, Z_t. A Figura 10.7-2 ilustra o significado dos três parâmetros. Na Figura 10.7-2*a*, um circuito aberto é ligado aos terminais do Circuito A. A tensão entre os terminais desse circuito aberto é a tensão de circuito aberto, V_{oc}. Na Figura 10.7-2*b*, um curto-circuito é ligado aos terminais do Circuito A. A corrente nesse curto-circuito é a corrente de curto-circuito, I_{sc}.

A Figura 10.7-2*c* mostra que a impedância de Thévenin, Z_t, é a impedância equivalente do Circuito A*. O Circuito A* é obtido a partir do Circuito A substituindo todas as fontes de tensão *independentes* por curtos-circuitos e substituindo todas as fontes de corrente *independentes* por circuitos abertos. (A fontes *dependentes* de tensão e de corrente permanecem inalteradas.) Frequentemente, a impedância de Thévenin Z_t pode ser obtida substituindo repetidamente resistores em série e/ou em paralelo por resistores equivalentes.

A tensão de circuito aberto, $\mathbf{V}_{oc}$, a corrente de curto-circuito, $\mathbf{I}_{sc}$, e a impedância de Thévenin, $\mathbf{Z}_t$, estão relacionadas através da equação

$$\mathbf{V}_{oc} = \mathbf{Z}_t \mathbf{I}_{sc} \qquad (10.7\text{-}1)$$

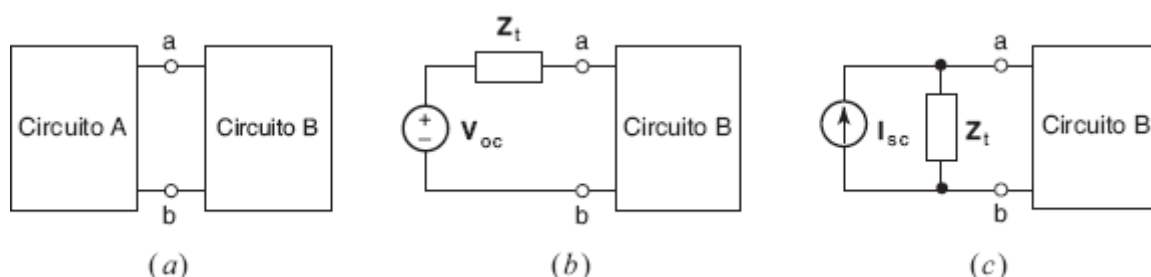



FIGURA 10.7-1 (*a*) Circuito dividido em duas partes: Circuito A e Circuito B. (*b*) Substituição do circuito A por um circuito equivalente de Thévenin. (c) Substituição do Circuito A por um circuito equivalente de Norton.

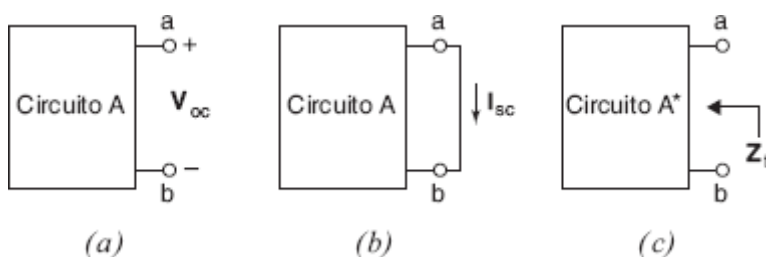



FIGURA 10.7-2 O circuito equivalente de Thévenin envolve três parâmetros: (a) a tensão de circuito aberto, $\mathbf{V}_{oc}$, (b) a corrente de curto-circuito, $\mathbf{I}_{sc}$, e (c) a impedância de Thévenin, $\mathbf{Z}_t$.

EXEMPLO 10.7-1 Circuito Equivalente de Thévenin

Determine o circuito equivalente de Thévenin do circuito de CA da Figura 10.7-3.

Solução

Para começar, representamos o circuito da Figura 10.7-3 no domínio da frequência. O resultado, que aparece na Figura 10.7-4, corresponde ao Circuito A das Figuras 10.7-1 e 10.7-2.

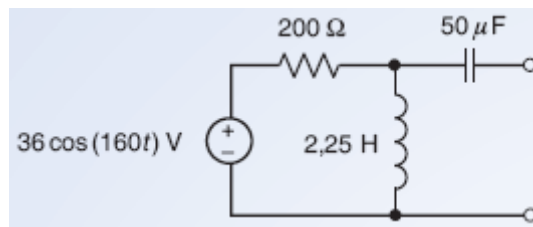



FIGURA 10.7-3 Circuito do Exemplo 10.7-1.

Em seguida, determinamos a tensão de circuito aberto usando o circuito da Figura 10.7-5*a*. Na Figura 10.7-5*a*, existe um circuito aberto entre os terminais do circuito da Figura 10.7-3. A tensão desse circuito aberto é a tensão de circuito aberto $\mathbf{V}_{oc}$. Como a corrente na impedância de $-j125\ \Omega$ é zero, podemos calcular $\mathbf{V}_{oc}$ usando o método da divisão de tensão:

$$\mathbf{V}_{oc} = \frac{j360}{200 + j360} 36\underline{/0^\circ} = 31{,}470\underline{/29{,}1^\circ}$$

A impedância de Thévenin pode ser determinada usando o circuito da Figura 10.7-5*b*, obtido fazendo a entrada do circuito da Figura 10.7-4 igual a zero. No circuito que estamos analisando, existe apenas uma entrada, a tensão da fonte de tensão. Como uma fonte de tensão de 0 V equivale a um curto-circuito, a fonte de tensão da Figura 10.7-4 foi substituída por um curto-circuito na Figura 10.7-5*b*. Substituindo as impedâncias em série e em paralelo por impedâncias equivalentes, obtemos

$$\mathbf{Z}_t = -j125 + \frac{200(j360)}{200 + j360} = 152{,}83 - j40{,}094\ \Omega = 158\underline{/-14{,}7^\circ}\ \Omega$$

A Figura 10.7-6 mostra o circuito equivalente de Thévenin, que é formado por uma fonte de tensão em série com uma impedância. A tensão da fonte é a tensão de circuito aberto $\mathbf{V}_{oc}$ e a impedância é a impedância de Thévenin $\mathbf{Z}_t$.

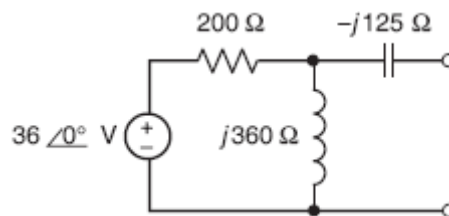



FIGURA 10.7-4 Representação do circuito da Figura 10.7-3 no domínio da frequência.

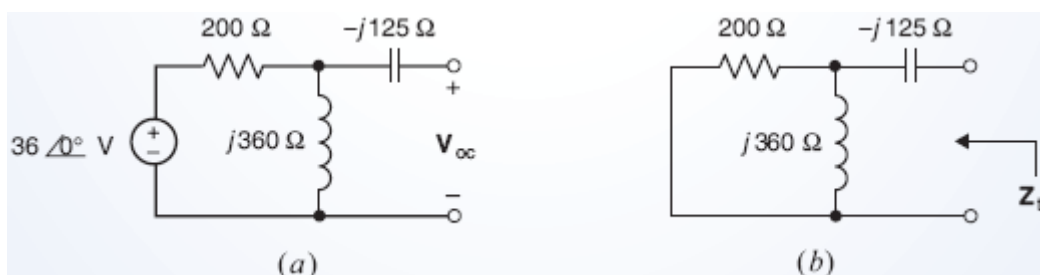



FIGURA 10.7-5 Determinação (*a*) da tensão de curto-circuito e (*b*) da impedância de Thévenin do circuito da Figura 10.7-4.

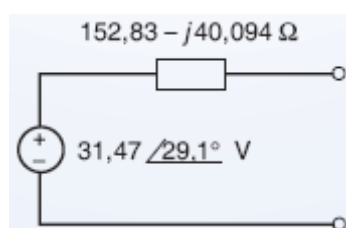



FIGURA 10.7-6 Circuito equivalente de Thévenin do circuito da Figura 10.7-3.

EXEMPLO 10.7-2 Circuito Equivalente de Norton

Determine o circuito equivalente de Norton do circuito de CA da Figura 10.7-7.

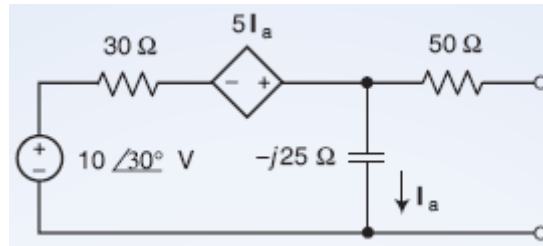



FIGURA 10.7-7 Circuito do Exemplo 10.7-2.

Solução

O circuito da Figura 10.7-7 já está representado no domínio da frequência. Esse circuito corresponde ao Circuito A das Figuras 10.7-1 e 10.7-2.

Para determinar a tensão de circuito aberto $\mathbf{V}_{oc}$, usamos o circuito da Figura 10.7-8. Como a corrente no resistor de 50 Ω é zero, a aplicação a LKT à malha da esquerda nos dá

$$30\mathbf{I}_a - 5\mathbf{I}_a + (-j25)\mathbf{I}_a = 10\angle 30^\circ$$

Explicitando $\mathbf{I}_a$, obtemos

$$\mathbf{I}_a = \frac{10\angle 30^\circ}{25 - j25} = 0{,}2828\angle 75^\circ \text{ A}$$

Aplicando a LKT à malha da esquerda, temos

$$\mathbf{V}_{oc} = -j25\mathbf{I}_a = (25\angle -90^\circ)\,0{,}2828\angle 75^\circ = 7{,}071\angle -15^\circ \text{ V}$$

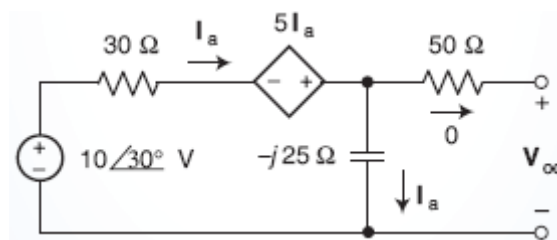



FIGURA 10.7-8 Circuito usado para determinar a tensão de circuito aberto do circuito da Figura 10.7-7.

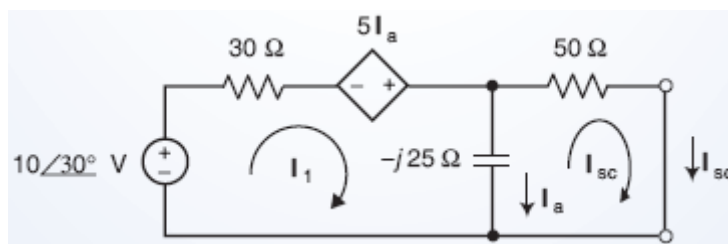



FIGURA 10.7-9 Circuito usado para determinar a corrente de curto-circuito do circuito da Figura 10.7-7.

O passo seguinte consiste em determinar a corrente de curto-circuito $\mathbf{I}_{sc}$ usando o circuito da Figura 10.7-9, no qual um curto-circuito foi ligado aos terminais do circuito da Figura 10.7-7. Na Figura 10.7-9, a corrente de controle da fonte dependente está relacionada às correntes de malha pela equação

$$\mathbf{I}_a = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_{sc}$$

Aplicando a LKT à malha da esquerda, obtemos

$$30\mathbf{I}_1 - 5(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_{sc}) - j25(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_{sc}) = 10\angle 30^\circ$$

Aplicando a LKT à malha da direita, obtemos

$$50\,\mathbf{I}_{sc} - (-j\,25)\,(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_{sc}) = 0$$

Esse sistema de equações pode ser escrito como uma única equação matricial:

$$\begin{bmatrix} 25 - j25 & 5 + j25 \\ j25 & 50 - j25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_{sc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10\angle 30^\circ \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema de equações, possivelmente com a ajuda do MATLAB, obtemos

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_{sc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2370\angle 61,4^\circ \\ 0,1060\angle -2^\circ \end{bmatrix}$$

De acordo com a Eq. 10.7-1, a impedância de Thévenin é dada por

$$\mathbf{Z}_t = \frac{\mathbf{V}_{oc}}{\mathbf{I}_{sc}} = \frac{7,071\angle -15^\circ}{0,1060\angle -2^\circ} = 66,71\angle -13^\circ\ \Omega$$

A Figura 10.7-10 mostra o circuito equivalente de Norton, formado por uma fonte de corrente em paralelo com uma impedância. A corrente da fonte de corrente é a corrente de curto-circuito $\mathbf{I}_{sc}$ e a impedância é a impedância de Thévenin $\mathbf{Z}_t$.

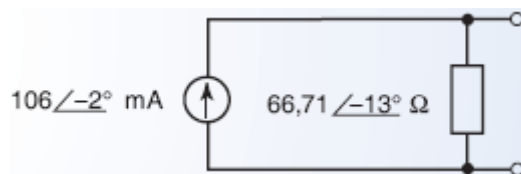



FIGURA 10.7-10 Circuito equivalente de Norton do circuito da Figura 10.7-7.

Os circuitos ligados ao Circuito B na Figura 10.7-11*a* e na Figura 10.7-11*b* são equivalentes. O circuito da Figura 11.7-11*b* é o circuito equivalente de Norton do circuito da Figura 11.7-11*a* e o circuito da Figura 11.7-11*a* é o circuito equivalente de Thévenin do circuito da Figura 11.7-11*b*. Isso significa que podemos substituir uma combinação em série de uma fonte de tensão e uma impedância por uma combinação em paralelo de uma fonte de corrente e uma impedância e vice-versa, sem mudar o valor das tensões e correntes do Circuito B. Essas substituições são chamadas de transformações de fonte. O exemplo a seguir ilustra a utilidade das transformações de fonte.

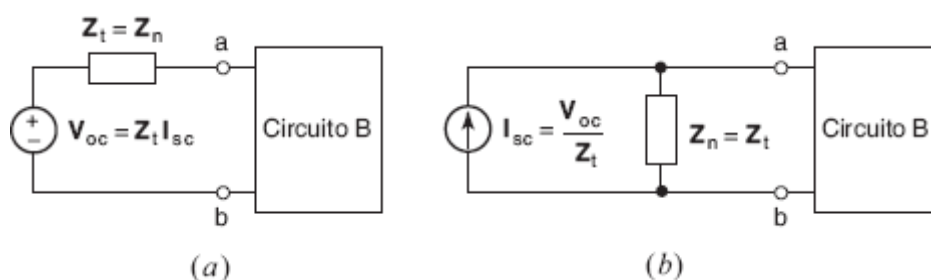



FIGURA 10.7-11 Transformações de fonte.

EXEMPLO 10.7-3 Transformações de Fonte

Use transformações de fonte e impedâncias equivalentes para determinar o circuito equivalente de Thévenin do circuito de CA da Figura 10.7-3.

Solução

A Figura 10.7-12 ilustra o processo. A Figura 10.7-12*a*, uma repetição da Figura 10.7-4, é a representação do circuito da Figura 10.7-3 no domínio da frequência. Uma transformação de fonte substitui a associação em série da fonte de tensão com uma impedância de 200 Ω por uma associação em paralelo de uma fonte de corrente com uma impedância de mesmo valor, como mostra a Figura 10.7-12*b*. As impedâncias do resistor e do indutor estão em paralelo na Figura 10.7-12*b* e podem ser substituídas por uma impedância equivalente dada por

$$200 \,||\, j360 = \frac{200(j360)}{200 + j360} = \frac{72000\angle 90^\circ}{411,8\angle 60,9^\circ} = 174,8\angle 29,1^\circ$$

como mostra a Figura 10.7-12*c*. A Figura 10.7-12*d* mostra que a parte esquerda do circuito da Figura 10.7-12*c* é uma associação em paralelo de uma fonte de corrente com uma impedância, que pode ser substituída por uma associação em série de uma fonte de tensão com uma impedância usando uma transformação de fonte, como mostra a Figura 10.7-12*e*. As duas impedâncias da Figura 10.7-12*e* estão em série e podem ser substituídas por uma impedância equivalente dada por

$$174,8\angle 29,1^\circ - j125 = 152,83 + j84,907 - j125 = 152,83 - j40,094$$

o que nos dá o circuito equivalente de Thévenin da Figura 10.7-12*f*.

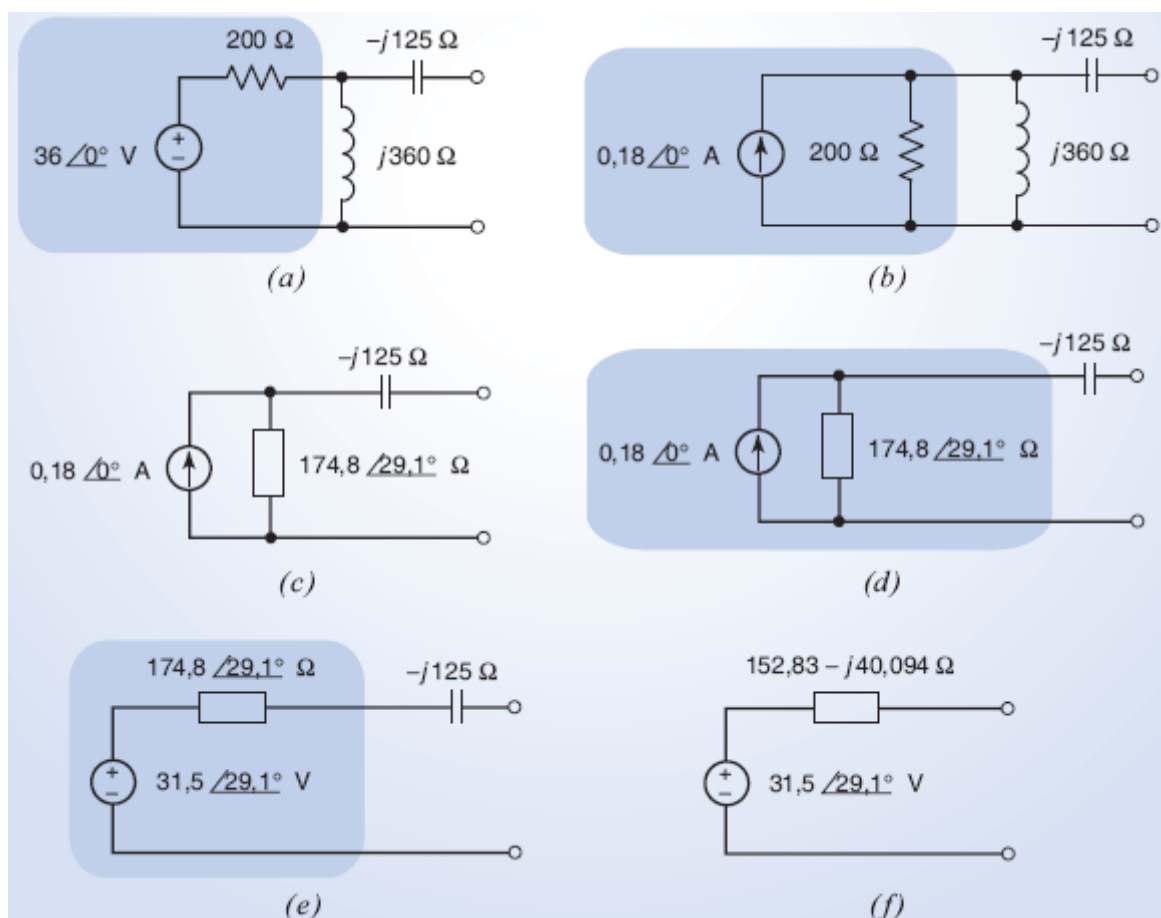



FIGURA 10.7-12 Transformações de fonte do Exemplo 10.7-3.

10.8 *Superposição*

Imagine um circuito no regime estacionário em que todas as entradas são senoidais, mas nem todas as senoides de entrada têm a mesma frequência. As correntes e tensões em um circuito com essas características não são senoidais, mas podemos analisá-lo como se fosse um circuito de CA, usando o princípio da superposição.

De acordo com o princípio da superposição, a saída de um circuito linear com várias entradas é igual à soma das saídas que seriam observadas se cada fonte agisse sozinha. As entradas do circuito são as tensões das fontes de tensão independentes e as correntes das fontes de corrente independentes.

Para eliminar todas as entradas exceto uma, fazemos as tensões de todas as outras fontes de tensão iguais a zero e as correntes de todas as outras fontes de corrente iguais a zero. Como uma fonte de tensão de 0 V equivale a um curto-circuito e uma fonte de corrente de 0 A equivale a um circuito aberto, substituímos as outras fontes por curtos-circuitos e circuitos abertos. O que resta é um circuito no estado estacionário com uma única fonte senoidal, que pode ser analisado usando fasores e impedâncias.

Assim, usamos o princípio da superposição para substituir um circuito com várias entradas senoidais de frequências diferentes por vários circuitos com uma única fonte senoidal. Analisamos esses circuitos de CA usando fasores e impedâncias para determinar a saída senoidal. A soma de todas as saídas senoidais é igual à saída do circuito original. O exemplo a seguir ilustra o processo.

EXEMPLO 10.8-1 Superposição

Determine a tensão $v_o(t)$ do resistor de 8 Ω no circuito da Figura 10.8-1.

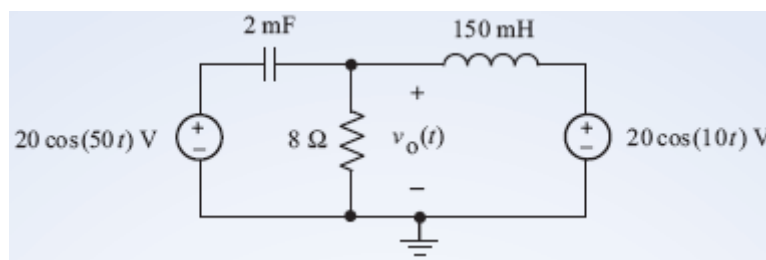



FIGURA 10.8-1 Circuito do Exemplo 10.8-1.

Solução

A tensão $v_o(t)$ é produzida por duas fontes senoidais, uma com uma frequência de 50 rad/s e outras com uma frequência de 10 rad/s. Seja $v_{o1}(t)$ a parte de $v_o(t)$ produzida pela fonte de 50 rad/s e $v_{o2}(t)$ a parte de $v_o(t)$ produzida pela fonte de 10 rad/s. A Figura 10.8-2*a* mostra o circuito usado para calcular $v_{o1}(t)$. A fonte de 10 rad/s foi substituída por uma fonte de 0 V representada por um curto-circuito. Analogamente, a Figura 10.8-2*b* mostra o circuito usado para calcular $v_{o2}(t)$, com a fonte de 50 rad/s substituída por uma fonte de 0 V representada por um curto-circuito.

Os dois circuitos da Figura 10.8-2 são circuitos de CA, pois estão no regime estacionário e possuem uma única entrada senoidal. As Figuras 10.8-3*a* e 10.8-3*b* mostram as representações desses circuitos no domínio da frequência. Observe, por exemplo, que o valor da impedância do indutor de 150 mH é $j7{,}5$ Ω na Figura 10.8-3*a* porque a frequência de entrada é 50 rad/s e $j1{,}5$ Ω na Figura 10.8-3*b* porque a frequência de entrada é 10 rad/s.

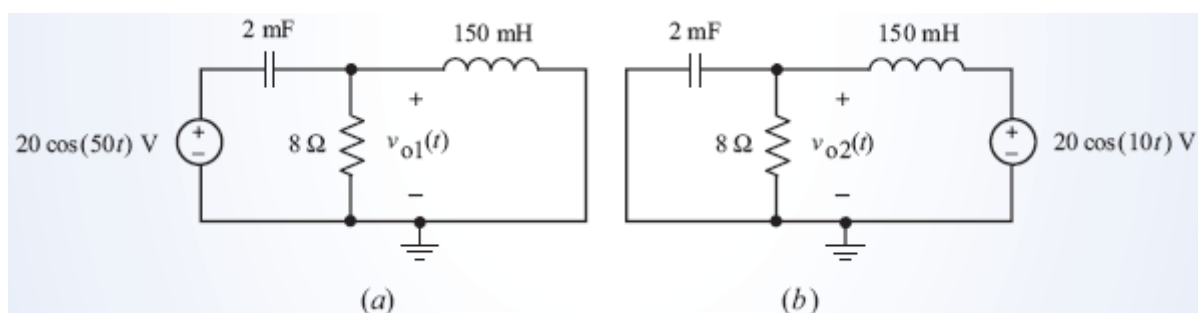



FIGURA 10.8-2 Uso do princípio da superposição para separar o circuito da Figura 10.8-1 em dois circuitos de CA.

Usando uma impedância equivalente e o método da divisão de tensão no circuito da Figura 10.8-3*a*, obtemos

$$\mathbf{V}_{o1} = \frac{\frac{8(j7,5)}{8+j7,5}}{-j10 + \frac{8(j7,5)}{8+j7,5}}\left(20\angle 0^\circ\right) = 15,46\angle 104,9^\circ \text{ V}$$

Usando uma impedância equivalente e o método da divisão de tensão no circuito da Figura 10.8-3*b*, obtemos

$$\mathbf{V}_{o2} = \frac{\frac{8(-j50)}{8-j50}}{-j1,5 + \frac{8(-j50)}{8-j50}}\left(20\angle 0^\circ\right) = 20,24\angle -10,94^\circ \text{ V}$$

As senoides correspondentes são

$$v_{o1}(t) = 15,46 \cos(50t + 104,9^\circ) \text{ V} \quad \text{e} \quad v_{o2}(t) = 20,24 \cos(10t + 10,94^\circ) \text{ V}$$

A resposta do circuito quando as duas senoides estão presentes é a soma das respostas quando as duas fontes estão agindo separadamente:

$$v_o(t) = v_{o1}(t) + v_{o2}(t) = 15,46 \cos(50t + 104,9^\circ) + 20,24 \cos(10t + 10,94^\circ) \text{ V}$$

A Figura 10.8-4 mostra um gráfico da tensão de saída $v_o(t)$. Como era de se esperar, a tensão de saída não é senoidal.

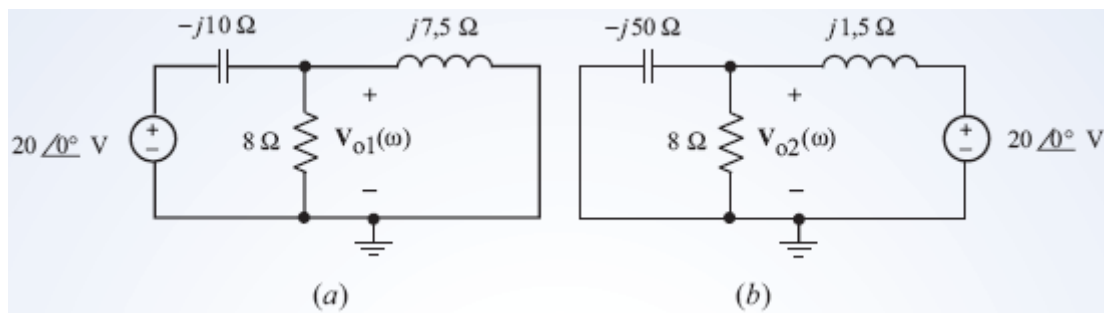



FIGURA 10.8-3 Representação dos circuitos da Figura 10.8-2 no domínio da frequência.

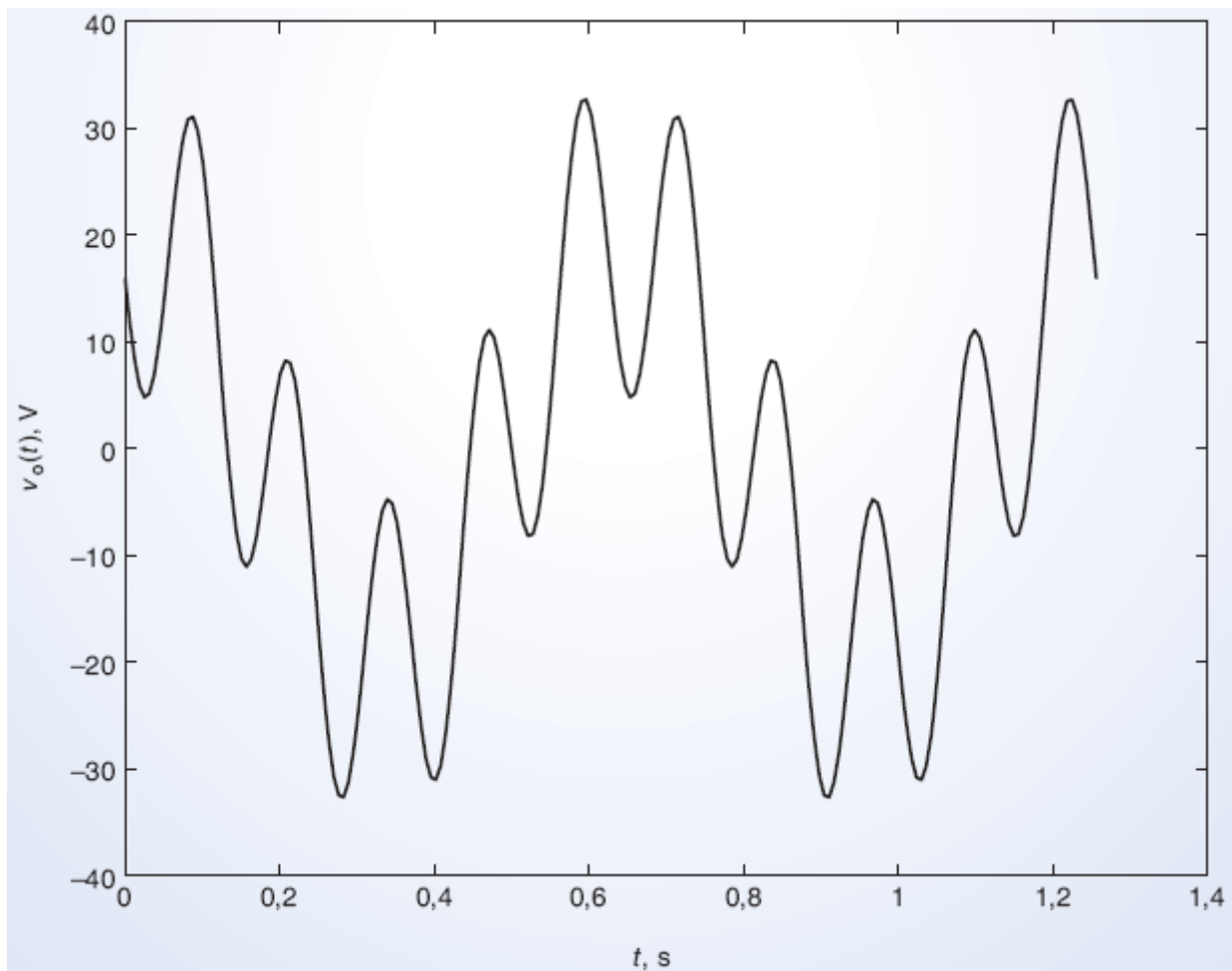



FIGURA 10.8-4 A tensão de saída $v_o(t)$ do circuito da Figura 10.8-1.

10.9 *Diagramas Fasoriais*

Os fasores associados às tensões e correntes de um circuito são transposições para o domínio da frequência de grandezas que variam com o tempo. Fasores são números complexos que podem ser representados graficamente no plano complexo, nos chamados *diagramas fasoriais*.

Diagrama fasorial é uma representação gráfica de fasores no plano complexo.

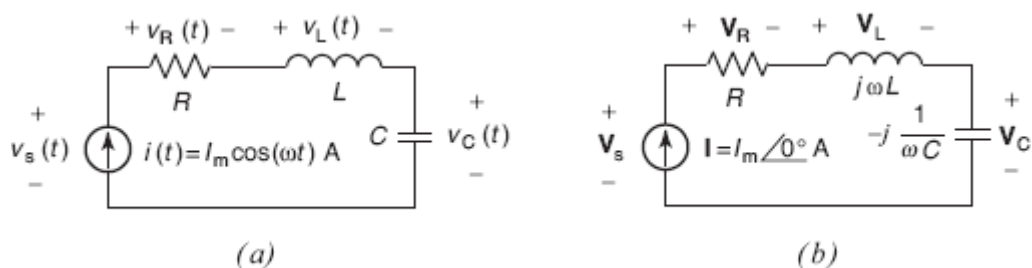



FIGURA 10.9-1 Um circuito *RLC* série representado (*a*) no domínio do tempo e (*b*) no domínio da frequência.

Considere o circuito *RLC* série representado no domínio do tempo na Figura 10.9-1*a* e no domínio da frequência na Figura 10.9-1*b*. O fasor que representa a corrente na Figura 10.9-1*b* é

$$\mathbf{I} = I_m \angle 0^\circ$$

Os fasores que representam as tensões das impedâncias da Figura 10.9-1*b* são dados por

$$\mathbf{V}_\mathrm{R} = R\left(I_m \angle 0^\circ\right) = RI_m \angle 0^\circ, \;\; \mathbf{V}_\mathrm{L} = j\omega L\left(I_m \angle 0^\circ\right) = \omega L\, I_m \angle 90^\circ$$

e

$$\mathbf{V}_\mathrm{C} = -j\frac{1}{\omega C}\left(I_m \angle 0^\circ\right) = \frac{I_m}{\omega C}\angle -90^\circ$$

A Figura 10.9-2*a* mostra esses fasores no plano complexo.

De acordo com a LKT, temos

$$\mathbf{V}_\mathrm{S} = \mathbf{V}_\mathrm{R} + \mathbf{V}_\mathrm{L} + \mathbf{V}_\mathrm{C} = \mathbf{V}_\mathrm{R} + (\mathbf{V}_\mathrm{L} + \mathbf{V}_\mathrm{C}) \qquad (10.9\text{-}1)$$

O fasor $\mathbf{V}_\mathrm{L} + \mathbf{V}_\mathrm{C}$ é dado por

$$\mathbf{V}_\mathrm{L} + \mathbf{V}_\mathrm{C} = j\omega L\left(I_m \angle 0^\circ\right) - j\frac{1}{\omega C}\left(I_m \angle 0^\circ\right) = j\omega L - j\frac{1}{\omega C}\left(I_m \angle 0^\circ\right)$$

De acordo com a Figura 10.9-1*a*, $|\mathbf{V}_\mathrm{L}| > |\mathbf{V}_\mathrm{C}|$ e, portanto,

$$\mathbf{V}_\mathrm{L} + \mathbf{V}_\mathrm{C} = j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\left(I_m \angle 0^\circ\right) = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\left(I_m \angle 90^\circ\right) \qquad (10.9\text{-}2)$$

A Figura 10.9-2*b* mostra esse fasor no plano complexo.

Substituindo a Eq. 10.9-2 na Eq. 10.9-1, obtemos

$$\mathbf{V}_\mathrm{S} = \mathbf{V}_\mathrm{R} + (\mathbf{V}_\mathrm{L} + \mathbf{V}_\mathrm{C}) = RI_m + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)(I_m) \qquad (10.9\text{-}3)$$

A Figura 10.9-2*c* mostra o fasor resultante no plano complexo.

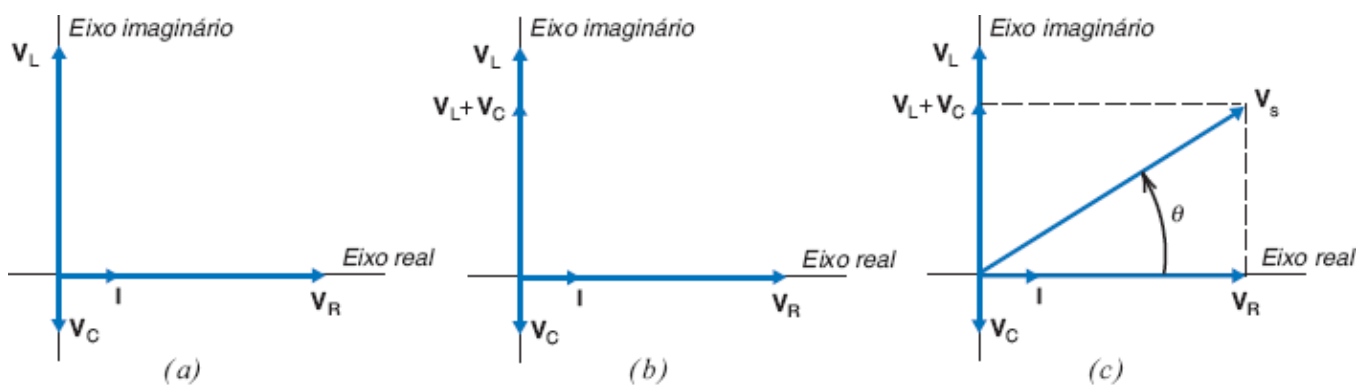



FIGURA 10.9-2 Diagramas fasoriais do circuito *RLC* da Figura 10.9-1.

EXEMPLO 10.9-1 Diagramas Fasoriais

Calcule os fasores dos diagramas fasoriais da Figura 10.9-2 se os valores dos componentes do circuito da Figura 10.9-1 forem $R = 80\ \Omega$, $L = 8$ H, $C = 5$ mF e $i(t) = 0{,}25 \cos(10t)$ A.

Solução

Para $\omega = 10$ rad/s, as impedâncias do indutor e do capacitor da Figura 10.9-1*a* são

$$j\omega L = j80\,\Omega \;\text{ e }\; -j = \frac{1}{\omega C} = -j\frac{1}{10\,(0{,}005)} = -j20\,\Omega$$

De acordo com a lei de Ohm, as tensões fasoriais das impedâncias da Figura 10.9-1*b* são

$$\mathbf{V}_R = 80\left(0{,}25\angle 0^\circ\right) = 20\angle 0^\circ\text{ V},\;\; \mathbf{V}_L = j80\left(0{,}25\angle 0^\circ\right) = j20 = 20\angle 90^\circ\text{ V}$$

e

$$\mathbf{V}_C = -j20\left(0{,}25\angle 0^\circ\right) = -j5 = 5\angle -90^\circ\text{ V}$$

Esses fasores estão representados no plano complexo na Figura 10.9-2*a*.

O fasor $\mathbf{V}_L + \mathbf{V}_C$ é dado por

$$\mathbf{V}_L + \mathbf{V}_C = (j20 - j5) = 15\angle -90^\circ\text{ V}$$

Esse fasor está representado no plano complexo na Figura 10.9-2*b*.

Aplicando a LKT à única malha do circuito da Figura 10.9-1*b*, obtemos

$$\mathbf{V}_S = \mathbf{V}_R + (\mathbf{V}_L + \mathbf{V}_C) = 20 + j15 = 25\angle 36{,}9^\circ\text{ V}$$

Esse fasor está representado no plano complexo na Figura 10.9-2*c*.

10.10 *Amplificadores Operacionais em Circuitos de CA*

No Capítulo 6, discutimos o comportamento de circuitos resistivos com amplificadores operacionais. Nesta seção, vamos discutir o comportamento de circuitos *RC* com amplificadores operacionais, usando fasores.

A Figura 10.10-1 mostra dois circuitos com amplificadores operacionais muito usados na prática, o amplificador inversor e o amplificador não inversor. Os circuitos foram representados usando impedâncias e fasores. Essa representação é apropriada quando a entrada é senoidal e o circuito está no regime estacionário. $\mathbf{V}_s$ é o fasor correspondente à tensão de entrada e $\mathbf{V}_o$ é o fasor correspondente à tensão de saída. Os dois circuitos contêm duas impedâncias, $\mathbf{Z}_1$ e $\mathbf{Z}_2$.

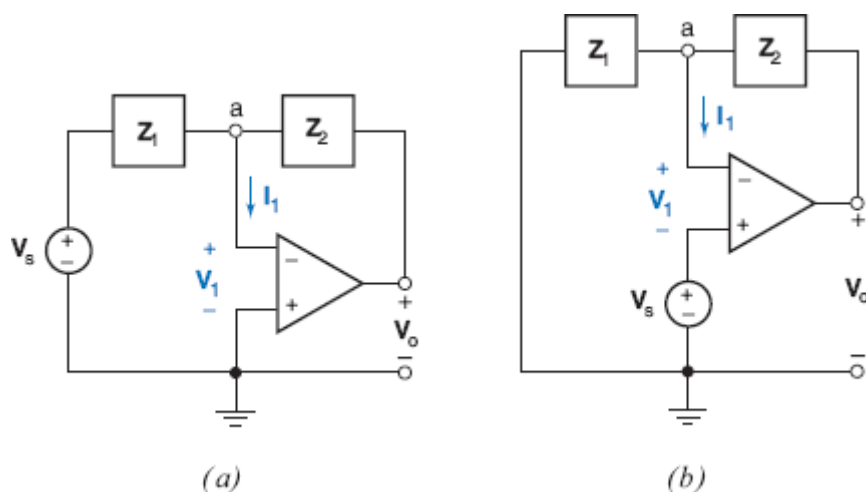



FIGURA 10.10-1 (*a*) Amplificador inversor e (*b*) amplificador não inversor.

Vamos determinar a razão $\mathbf{V}_o/\mathbf{V}_s$ entre a tensão de saída e a tensão de entrada do amplificador inversor da Figura 10.10-1*a*. Aplicando a LKC ao nó a, obtemos

$$\frac{\mathbf{V}_s - \mathbf{V}_1}{\mathbf{Z}_1} + \frac{\mathbf{V}_o - \mathbf{V}_1}{\mathbf{Z}_2} - \mathbf{I}_1 = 0 \qquad (10.10\text{-}1)$$

No caso de um amplificador operacional ideal, $\mathbf{V}_1 = 0$, $\mathbf{I}_1 = 0$ e, portanto,

$$\frac{\mathbf{V}_s}{\mathbf{Z}_1} + \frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{Z}_2} = 0 \qquad (10.10\text{-}2)$$

o que nos dá

$$\frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_s} = -\frac{\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1} \qquad (10.10\text{-}3)$$

Vamos agora determinar a razão V_o/V_s entre a tensão de saída e a tensão de entrada do amplificador não inversor da Figura 10.10-1*b*. Aplicando a LKC ao nó a, obtemos

$$\frac{(\mathbf{V}_s - \mathbf{V}_1)}{\mathbf{Z}_1} - \frac{\mathbf{V}_o - (\mathbf{V}_s + \mathbf{V}_1)}{\mathbf{Z}_2} + \mathbf{I}_1 = 0 \qquad (10.10\text{-}4)$$

No caso de um amplificador operacional ideal, $\mathbf{V}_1 = 0$, $\mathbf{I}_1 = 0$ e, portanto,

$$\frac{\mathbf{V}_s}{\mathbf{Z}_1} - \frac{\mathbf{V}_o - \mathbf{V}_s}{\mathbf{Z}_2} = 0$$

o que nos dá

$$\frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_s} = \frac{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1} \qquad (10.10\text{-}5)$$

Em geral, as impedâncias $\mathbf{Z}_1$ e $\mathbf{Z}_2$ são obtidas usando apenas resistores e capacitores. Naturalmente, também seria possível usar indutores, mas, como esses componentes são muito mais caros e volumosos que os capacitores, raramente são usados em circuitos de CA com amplificadores operacionais.

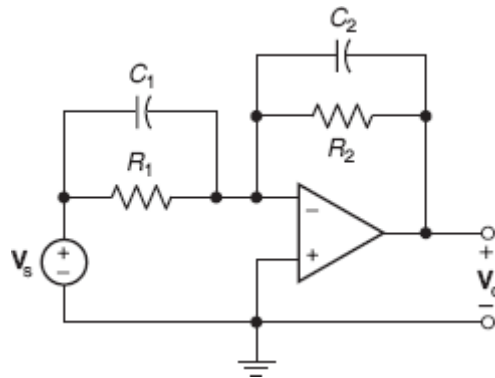



FIGURA 10.10-2 Amplificador operacional com dois circuitos *RC*.

A Figura 10.10-2 mostra um exemplo de amplificador inversor. Como as impedâncias $\mathbf{Z}_n$ são dadas pela associação em paralelo dos componentes R_n e C_n, em que n = 1 e 2, temos

$$\mathbf{Z}_n = \frac{R_n \dfrac{1}{j\omega C_n}}{R_n + \dfrac{1}{j\omega C_n}} = \frac{R_n}{1 + j\omega C_n R_n} \qquad (10.10\text{-}6)$$

Para calcular a razão $\mathbf{V}_o/\mathbf{V}_s$, basta usar as Eqs. 10.10-3 e 10.10-6.

EXEMPLO 10.10-1 Amplificador de CA

Determine a razão $\mathbf{V}_o/\mathbf{V}_s$ para o circuito da Figura 10.10-2 se os valores dos componentes são $R_1 = 1$ kΩ, $R_2 = 10$ kΩ, $C_1 = 0$, $C_2 = 0{,}1\ \mu$F e a frequência da fonte é $\omega = 1000$ rad/s.

Solução

O circuito da Figura 10.10-2 é um caso particular do amplificador inversor da Figura 10.10-1*a*. De acordo com as Eqs. 10.10-3 e 10.10-6, temos

$$\frac{\mathbf{V}_0}{\mathbf{V}_s} = -\frac{\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_2} = -\frac{\dfrac{R_2}{1 + j\omega C_2 R_2}}{\dfrac{R_1}{1 + j\omega C_1 R_1}} = -\frac{R_2(1 + j\omega C_1 R_1)}{R_1(1 + j\omega C_2 R_2)}$$

Substituindo os valores conhecidos de R_1, R_2, C_1, C_2 e ω, temos

$$\frac{\mathbf{V}_0}{\mathbf{V}_s} = -\frac{10^4(1 + j10^0(0)10^3)}{10^3(1 + j10^3(0{,}1 \times 10^{-6})10^4)} = -\frac{10}{1 + j} = 7{,}07\underline{/135^\circ}$$

EXERCÍCIO 10.10-1 Determine a razão $\mathbf{V}_o/\mathbf{V}_s$ para o circuito da Figura 10.10-2 se os valores dos componentes são $R_1 = R_2 = 1$ kΩ, $C_1 = 1\ \mu$F, $C_2 = 0$ e a frequência da fonte é $\omega = 1000$ rad/s.

Resposta: $\mathbf{V}_o/\mathbf{V}_s = -1 - j$

10.11 *A Resposta Completa*

Vamos agora examinar o caso de circuitos senoidais que estão sujeitos a variações bruscas, como acontece quando uma chave é aberta ou fechada. Para determinar a resposta completa desses circuitos,

- Representamos o circuito por uma equação diferencial.
- Obtemos a solução geral da equação diferencial homogênea, que é a resposta natural $v_n(t)$. A resposta natural envolve constantes a serem determinadas no final do processo.
- Obtemos uma solução particular da equação diferencial, que é a resposta forçada $v_f(t)$.
- Representamos a resposta do circuito na forma $v(t) = v_n(t) + v_f(t)$.
- Usamos as condições iniciais do circuito, como, por exemplo, os valores iniciais das correntes dos indutores e das tensões dos capacitores, para determinar o valor das constantes.

Considere o circuito da Figura 10.11-1. Antes do instante $t = 0$, o circuito está no regime estacionário e, portanto, todas as tensões e correntes são senoidais, com uma frequência de 5 rad/s. No instante $t = 0$, a chave é fechada, perturbando o circuito. Logo depois do instante $t = 0$, as tensões e correntes não são senoidais. Com o passar do tempo, a perturbação desaparece e o circuito volta a um regime estacionário (que, provavelmente, não é o mesmo que o regime estacionário inicial), no qual todas as tensões e correntes são senoidais, com uma frequência de 5 rad/s.

Dois regimes estacionários diferentes são usados para determinar a resposta completa do circuito. As condições iniciais são obtidas a partir do regime estacionário antes do fechamento da chave; o comportamento do circuito a longo prazo corresponde ao regime estacionário após o fechamento da chave.

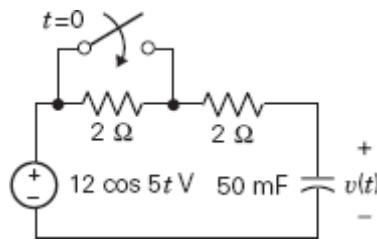



FIGURA 10.11-1 Circuito do Exemplo 10-11.1.

EXEMPLO 10.11-1 Resposta Completa

Determine $v(t)$, a tensão do capacitor da Figura 10.11-1, antes e depois do fechamento da chave.

Solução

1º passo: Para $t < 0$, a chave está aberta e o circuito está no regime estacionário.

Como a chave aberta se comporta como um circuito aberto, os dois resistores de 2 Ω estão ligados em série. Substituindo os resistores em série por um resistor equivalente, obtemos o circuito da Figura 10.11-2*a*. A Figura 10.11-2*b* mostra a representação do circuito no domínio da frequência.

Aplicando o método da divisão de tensão ao circuito da Figura 10.11-2*b*, obtemos

$$\mathbf{V}(\omega)=\left(\frac{-j4}{4-j4}\right)(12\angle 0^\circ)=\frac{48\angle -90^\circ}{5{,}66\angle -45^\circ}=8{,}485\angle -45^\circ \text{ V}$$

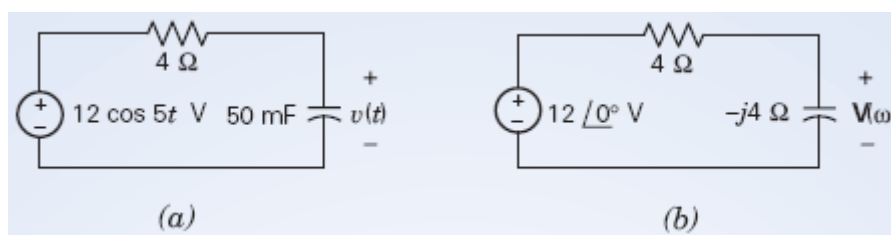



FIGURA 10.11-2 Circuito da Figura 10.11-1 antes do fechamento da chave, representado (*a*) do domínio do tempo e (*b*) no domínio da frequência.

A tensão correspondente no domínio do tempo é

$$v(t) = 8{,}485 \cos(5t + 45^\circ) \text{ V}$$

Imediatamente antes do fechamento da chave, a tensão do capacitor é

$$v(0^-) = \lim_{t\to 0^-} v(t) = 8{,}845 \cos(0 - 45^\circ) = 6 \text{ V}$$

Como a tensão de um capacitor não pode variar bruscamente, a tensão do capacitor imediatamente após o fechamento da chave é a mesma que imediatamente antes do fechamento da chave, ou seja,

$$v(0^+) = v(0^-) = 6 \text{ V}$$

2º passo: Para $t > 0$, a chave está fechada. Depois de um certo tempo, o circuito atinge um novo regime estacionário.

Como a chave fechada se comporta como um curto-circuito e um curto-circuito em paralelo com um resistor é equivalente a um curto-circuito, o circuito após o fechamento da chave é o que aparece na Figura 10.11-3*a*. A Figura 10.11-3*b* mostra a representação do circuito no domínio da frequência.

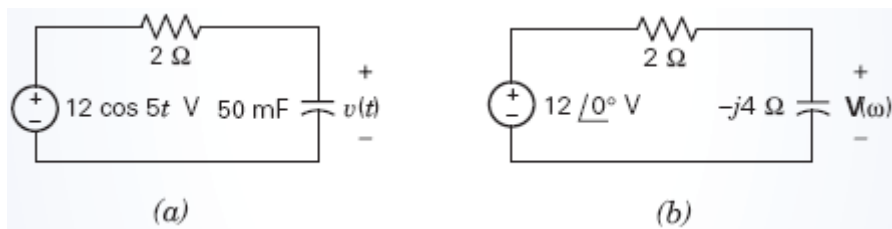



FIGURA 10.11-3 Circuito da Figura 10.11-1 após o fechamento da chave, representado (*a*) do domínio do tempo e (*b*) no domínio da frequência.

Aplicando o método da divisão de tensão ao circuito da Figura 10.11-3*b*, obtemos

$$\mathbf{V}(\omega) = \left(\frac{-j4}{2-j4}\right)\left(12\angle 0^\circ\right) = \frac{48\angle -90^\circ}{4,47\angle -63,4^\circ} = 10,74\angle -26,6^\circ \text{ V}$$

A tensão correspondente no domínio do tempo é

$$v(t) = 10{,}74 \cos(5t - 26{,}6^\circ) \text{ V}$$

3º passo: Imediatamente após o instante $t = 0$, a chave está fechada, mas o circuito não está no regime estacionário. Para conhecer o comportamento do circuito logo após o fechamento da chave, precisamos determinar a resposta completa de um circuito de primeira ordem.

Na Figura 10.11-3*a*, o capacitor está ligado a uma fonte de tensão em série com um resistor. Isso nos permite assimilar a tensão da fonte e a resistência do resistor à tensão de circuito aberto v_{oc} e à resistência de Thévenin R_t de um circuito equivalente de Thévenin, como mostra a Figura 10.11-4.

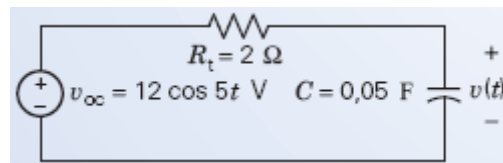



FIGURA 10.11-4 Identificação da fonte e do resistor da Figura 10.11-3*a* como v_{oc} e R_t de um circuito equivalente de Thévenin.

Assim, de acordo com a Seção 8.3, a constante de tempo do circuito é

$$\tau = R_t C = 2 \times 0{,}05 = 0{,}1$$

e a resposta natural do circuito é

$$v_n(t) = Ke^{-10t}$$

Como a resposta no regime estacionário após o fechamento da chave é a resposta forçada, temos

$$v_f(t) = 10{,}74 \cos(5t - 26{,}6^\circ) \text{ V}$$

e a resposta completa é

$$v_t(t) = v_n(t) + v_f(t) = Ke^{-10t} + 10{,}74 \cos(5t - 26{,}6^\circ)$$

A constante K pode ser determinada a partir do valor inicial da tensão do capacitor, $v(0^+)$:

$$6 = v(0^+) = Ke^{-0} + 10{,}74 \cos(0 - 26{,}6^\circ) = K + 9{,}6$$

Assim, $K = -3{,}6$ e

$$v(t) = -3{,}6e^{-10t} + 10{,}74 \cos(5t - 26{,}6^\circ) \text{ V}$$

4º passo: Resultado final.

A tensão do capacitor é

$$v(t)=\begin{cases} 8{,}485\cos(5t-45^\circ)\ \text{V} & \text{para } t\le 0 \\ -3{,}6e^{-10t}+10{,}74\cos(5t-26{,}6^\circ)\ \text{V} & \text{para } t\ge 0 \end{cases}$$

A Figura 10.11-5 mostra um gráfico da tensão do capacitor em função do tempo.

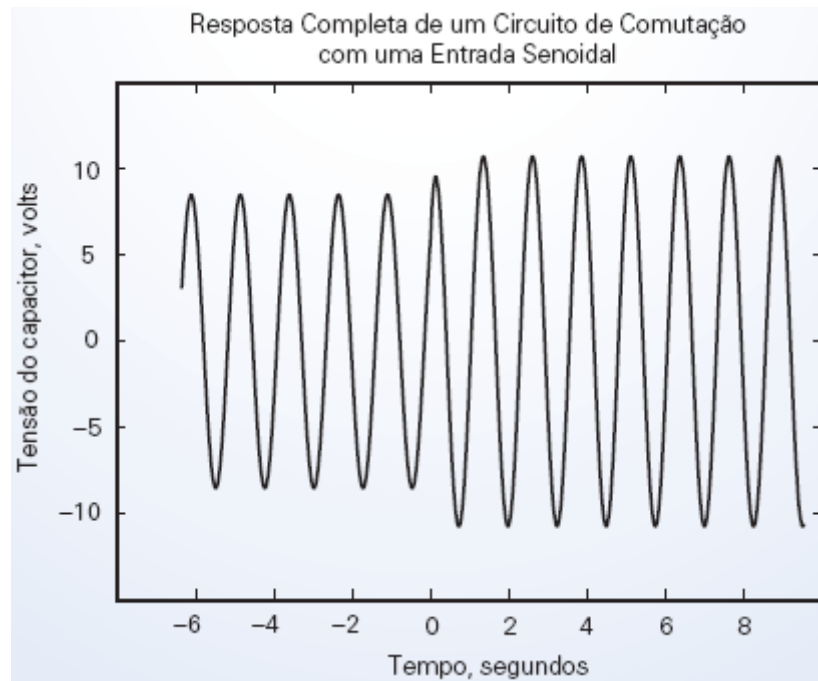



FIGURA 10.11-5 Resposta completa do circuito, plotada usando o MATLAB.

EXEMPLO 10.11-2 Respostas de Vários Tipos de Circuitos

A entrada dos circuitos da Figura 10.11-6 é a tensão de uma fonte de tensão. A saída é a corrente *i*(*t*). Determine a saída dos circuitos.

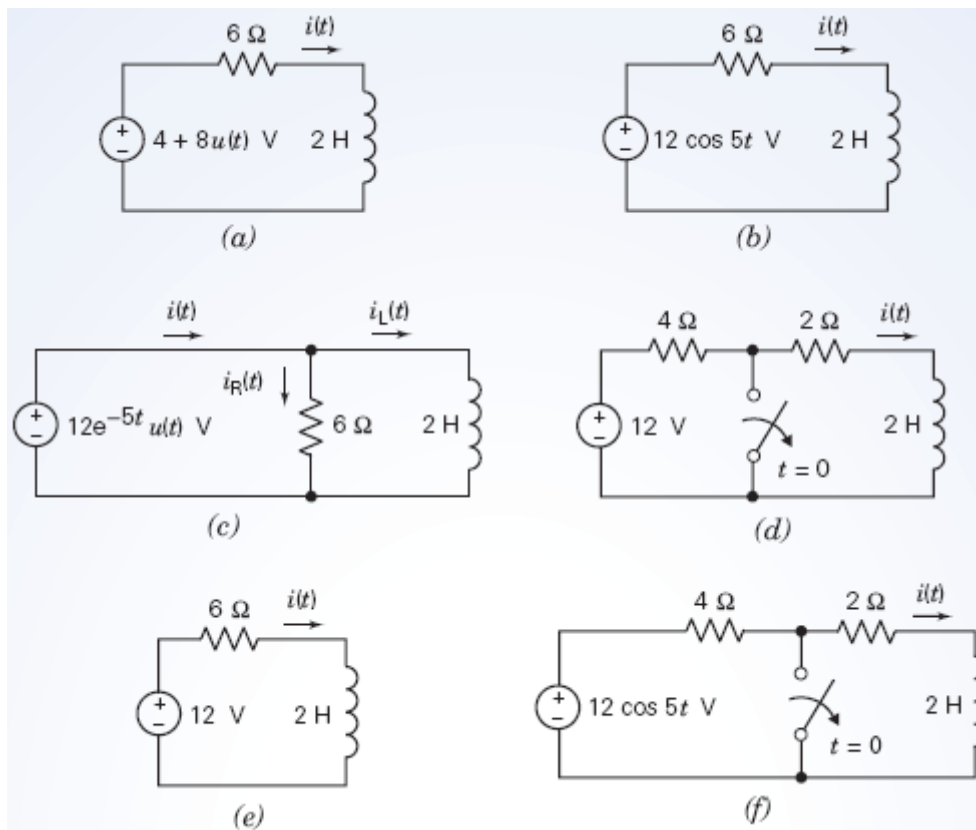



FIGURA 10.11-6 Circuitos do Exemplo 10.11-2.

Solução

Neste exemplo, são examinados circuitos semelhantes em diversas situações. Em alguns casos, o circuito muda abruptamente no instante $t = 0$ e, portanto, a resposta completa é composta de duas partes, a resposta transitória e a resposta estacionária. Em outros casos, não há mudança abrupta e a resposta consiste apenas na resposta estacionária. Em um caso, a entrada estabelece diretamente a tensão do indutor e podemos determinar a resposta usando a equação constitutiva do indutor.

Caso 1: O circuito da Figura 10.11-6*a* está no regime estacionário até o instante $t = 0$. Como a entrada é constante antes do instante $t = 0$, todas as tensões e correntes são constantes. No instante $t = 0$, a entrada muda abruptamente, perturbando o circuito. Com o passar do tempo, a perturbação desaparece e o circuito atinge um novo regime estacionário. Quando isso acontece, todas as tensões e correntes voltam a ser constantes, com valores diferentes dos iniciais, porque a entrada mudou.

Os três estágios estão ilustrados na Figura 10.11-7. A Figura 10.11-7*a* mostra o circuito para $t < 0$. A tensão da fonte é constante e o circuito está no regime estacionário; o indutor se comporta como um curto-circuito. A corrente do indutor é

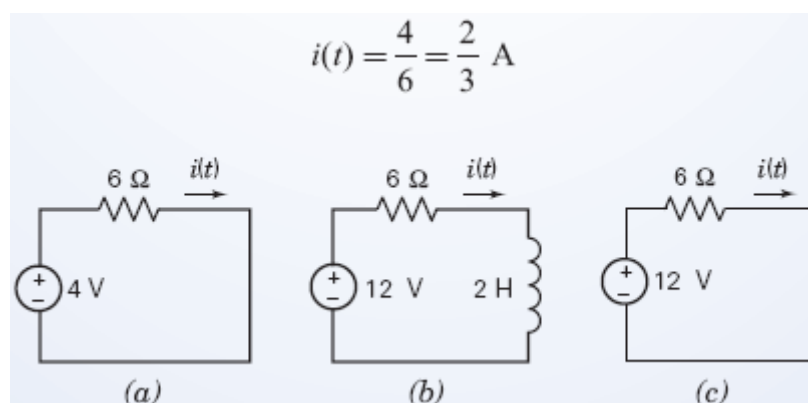



FIGURA 10.11-7 O circuito da Figura 10.11-6*a* (*a*) no regime estacionário para $t < 0$, (b) no regime transitório para $t > 0$, (c) no regime estacionário para $t > 0$.

Imediatamente antes do instante $t = 0$, $i(t) = i(0^-) = 0{,}667$ A. Como a corrente de um indutor não pode variar bruscamente,

$$i(0^+) = i(0^-) = 0{,}667 \text{ A}$$

A Figura 10.11-7*b* mostra o circuito imediatamente após o instante $t = 0$. A entrada é constante, mas, como o circuito ainda não atingiu o regime estacionário, o indutor não se comporta como um curto-circuito. A parte do circuito ligada ao indutor pode ser considerada um circuito equivalente de Thévenin com

$$R_t = 6\,\Omega \quad \text{e} \quad v_{oc} = 12 \text{ V}$$

e, portanto,

$$i_{sc} = \frac{12}{6} = 2 \text{ A}$$

e a constante de tempo do circuito é

$$\tau = \frac{L}{R_t} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Finalmente,

$$i(t) = i_{sc} + [i(0^+) - i_{sc}]e^{-t/\tau} = 2 + (0{,}667 - 2)e^{-3t} = 2 - 1{,}33e^{-3t} \text{ A}$$

A parte exponencial de $i(t)$ diminui com o passar do tempo até se tornar desprezível. Para $t = 5\tau = 1{,}667$ s,

$$i(t) = 2 - 1{,}33e^{-3(1{,}667)} = 2 - 0{,}009 \approx 2 \text{ A}$$

Como a parte da resposta que depende do tempo se tornou desprezível, concluímos que o circuito atingiu o regime estacionário e que a corrente no novo regime estacionário é $i(t) = 2$ A.

A Figura 10.11-7*c* mostra o circuito depois que a perturbação se tornou desprezível e o circuito atingiu o regime estacionário, ou seja, para $t > 5\tau$. Como a tensão da fonte é constante e o circuito está no regime estacionário, o indutor se comporta como um curto-circuito e a corrente no indutor é 2 A.

Caso 2: Como o circuito da Figura 10.11-6*b* não contém uma chave e a entrada não muda abruptamente, concluímos que o circuito está no regime estacionário. Como a entrada é senoidal, com uma frequência de 5 rad/s, todas as tensões e correntes devem ser senoidais, com uma frequência de 5 rad/s. Podemos determinar a resposta representando o circuito no domínio da frequência, como na Figura 10.11-8.

De acordo com a lei de Ohm, temos

$$\mathbf{I}(\omega) = \frac{12\angle 0^\circ}{6 + j10} = \frac{12\angle 0^\circ}{11{,}66\angle 59^\circ} = 1{,}03\angle -59^\circ \text{ A}$$

A corrente correspondente no domínio do tempo é

$$i(t) = 1{,}03 \cos(5t - 59^\circ) \text{ A}$$

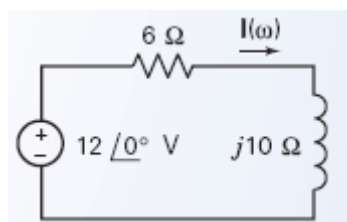



FIGURA 10.11-8 Representação do circuito da Figura 10.11-6*b* no domínio da frequência.

Caso 3: Como a fonte de tensão, o resistor e o indutor do circuito da Figura 10.11-6*c* estão ligados em paralelo, as tensões do resistor e do indutor são iguais à tensão da fonte. De acordo com a lei de Ohm, a corrente do resistor é

$$i_R(t) = \frac{12e^{-5t}}{6} = 2e^{-5t} \text{ A}$$

A corrente do indutor é

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_0^t v(\tau)\, d\tau + i_L(0) = \frac{1}{2}\int_0^t 12e^{-5\tau} d\tau + i_L(0)$$
$$= \frac{12}{2(-5)}(e^{-5t} - 1) + i_L(0) = -1{,}2e^{-5t} + 1{,}2 + i_L(0)$$

De acordo com a LKC, temos

$$i(t) = i_R(t) + i_L(t) = 2e^{-5t} - 1{,}2e^{-5t} + 1{,}2 + i_L(0) = 0{,}8e^{-5t} + 1{,}2 + i_L(0)$$

Antes do instante $t = 0$, a tensão da fonte era 0 e, portanto, se o circuito estava no regime estacionário, $i_L(0) = 0$. Assim,

$$i(t) = 0{,}8e^{-5t} + 1{,}2 \text{ A}$$

Caso 4: O circuito da Figura 10.11-6*d* está no regime estacionário até a chave ser aberta no instante $t = 0$. Como a tensão da fonte é constante, todas as tensões e correntes do circuito são constantes. No instante $t = 0$, a chave é aberta, perturbando o circuito. Com o passar do tempo, a perturbação desaparece e o circuito atinge um novo regime estacionário. Quando isso acontece, todas as tensões e correntes voltam a ser constantes, com valores diferentes dos iniciais, porque o circuito mudou.

Os três estágios estão ilustrados na Figura 10.11-9. A Figura 10.11-9*a* mostra o circuito para $t < 0$. A chave fechada é representada por um curto-circuito. Como a tensão da fonte é constante e o circuito está no regime estacionário, o indutor se comporta como um curto-circuito. Como o resistor de 2 Ω e o indutor estão em paralelo com um curto-circuito, a corrente do indutor é

$$i(t) = 0 \text{ A}$$

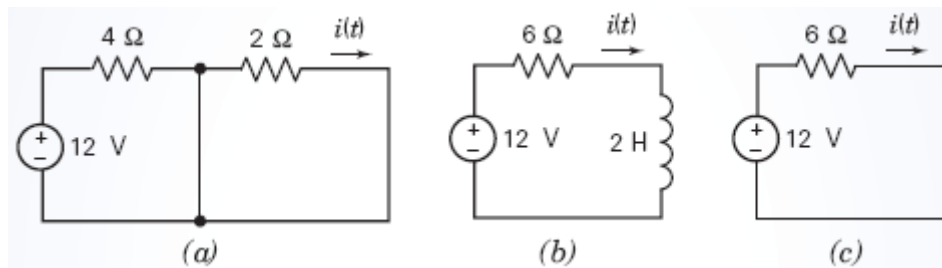



FIGURA 10.11-9 O circuito da Figura 10.11-6*d* (*a*) no regime estacionário para $t < 0$, (*b*) no regime transitório para $t > 0$ e (*c*) no regime estacionário para $t > 0$.

Em particular, imediatamente antes do instante $t = 0$, $i(0^-) = 0$ A. Como a corrente de um indutor não pode mudar bruscamente,

$$i(0^+) = i(0^-) = 0 \text{ A}$$

A Figura 10.11-9*b* mostra o circuito imediatamente após o instante $t = 0$. A entrada é constante, mas o circuito não está no regime estacionário e, portanto, o indutor não se comporta como um curto-circuito. A parte do circuito que está ligada ao indutor tem a forma de um circuito equivalente de Thévenin, com

$$R_t = 6\,\Omega \quad \text{e} \quad v_{oc} = 12 \text{ V}$$

Isso significa que

$$i_{sc} = \frac{12}{6} = 2 \text{ A}$$

e a constante de tempo é

$$\tau = \frac{L}{R_t} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Assim,

$$i(t) = i_{sc} + [i(0^+) - i_{sc}]e^{-t/\tau} = 2 + (0 - 2)e^{-3t} = 2 - 2e^{-3t} \text{ A}$$

A parte exponencial de $i(t)$ diminui com o passar do tempo até se tornar desprezível. Para $t = 5\tau = 1{,}667$ s,

$$i(t) = 2 - 2e^{-3(1{,}667)} = 2 - 0{,}013 \approx 2 \text{ A}$$

Como a parte da resposta que depende do tempo se tornou desprezível, concluímos que o circuito atingiu o regime estacionário e que a corrente no novo regime estacionário é $i(t) = 2$ A.

A Figura 10.11-9*c* mostra o circuito depois que a perturbação se tornou desprezível e o circuito atingiu o regime estacionário, ou seja, para $t > 5\tau$. Como a tensão da fonte é constante e o circuito está no regime estacionário, o indutor se comporta como um curto-circuito e a corrente no indutor é 2 A.

Caso 5: Como o circuito da Figura 10.11-6*e* não contém uma chave e a entrada não muda abruptamente, concluímos que o circuito está no regime estacionário. Como a tensão da entrada é constante, todas as tensões e correntes devem ser constantes. Como a tensão de entrada é constante e o circuito está no regime estacionário, o indutor se comporta como um curto-circuito. (Já encontramos este circuito duas vezes neste exemplo, no regime estacionário final dos casos 2 e 4.) A corrente é dada por

$$i(t) = \frac{12}{6} = 2 \text{ A}$$

Caso 6: O circuito da Figura 10.11-6*f* está no regime estacionário até a chave ser aberta no instante $t = 0$. No instante $t = 0$, a chave é aberta perturbando o circuito. Com o passar do tempo, a perturbação desaparece e o circuito atinge um novo regime estacionário. Vamos ver que a corrente do indutor é 0 antes da abertura da chave e senoidal depois que a chave é aberta e o circuito atinge o regime estacionário.

A Figura 10.11-10*a* mostra o circuito antes que a chave seja aberta. Como o resistor de 2 Ω e o indutor estão em paralelo com um curto-circuito, a corrente do indutor é

$$i(t) = 0$$

Em particular, imediatamente antes do instante $t = 0$, $i(0^-) = 0$ A. Como a corrente de um indutor não pode mudar bruscamente,

$$i(0^+) = i(0^-) = 0 \text{ A}$$

A Figura 10.11-10*b* mostra o circuito depois que a chave é fechada. Podemos determinar a corrente do indutor somando a resposta natural e a resposta forçada e usando a condição inicial para calcular a constante da resposta natural.

Começamos por determinar a resposta natural. A parte do circuito que está ligada ao indutor tem a forma de um circuito equivalente de Thévenin, com

$$R_t = 6 \ \Omega$$

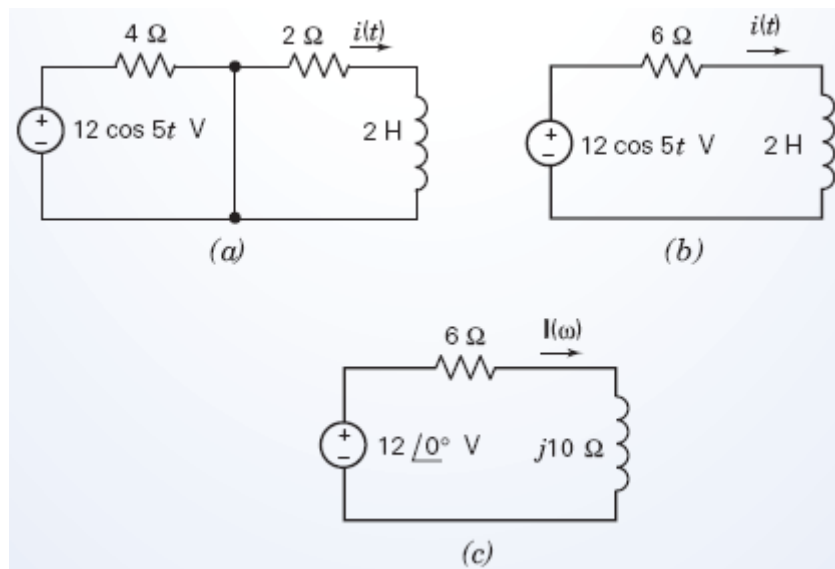



FIGURA 10.11-10 O circuito da Figura 10.11.6*f* (*a*) antes da abertura da chave, (*b*) depois que a chave é aberta e (*c*) representado no domínio do tempo depois que a chave é aberta.

Isso significa que a constante de tempo é

$$\tau = \frac{L}{R_t} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Assim, a resposta natural é

$$i_n(t) = K e^{-3t} \text{ A}$$

A resposta forçada é a resposta do circuito depois que a resposta natural se torna desprezível, ou seja, a resposta no regime estacionário final. Para determiná-la, representamos o circuito do domínio da frequência, como mostra a Figura 10.11-10*c*. Note que esse circuito é igual ao da Figura 10.11-8, que corresponde ao Caso 2. Assim, já conhecemos a solução: $\mathbf{I}(\omega) = 1{,}03\angle{-59^\circ}\text{ A}$. A corrente correspondente no domínio do tempo é

$$i_f(t) = 1{,}03 \cos(5t - 59^\circ) \text{ A}$$

Assim,

$$i(t) = i_n(t) + i_f(t) = Ke^{-3t} + 1{,}03 \cos(5t - 59^\circ) \text{ A}$$

Como

$$i(0) = 0 = Ke^{-0} + 1{,}03 \cos(-59^\circ) = K + 0{,}53$$

temos

$$K = -0{,}53$$

e

$$i(t) = -0{,}53e^{-3t} + 1{,}03 \cos(5t - 59^\circ) \text{ A}$$

10.12 *Uso do MATLAB para Analisar Circuitos de CA*

Para analisar circuitos lineares no regime estacionário com entradas senoidais (ou seja, circuitos de CA) usando fasores e impedâncias, é preciso realizar cálculos matemáticos que envolvem números complexos. O programa MATLAB pode ser usado para facilitar esses cálculos. Considere o circuito da Figura 10.12-1*a*. A entrada do circuito, $v_s(t)$, é uma tensão senoidal. No regime estacionário, a saída, $v_o(t)$, também é uma tensão senoidal, como mostra a Figura 10.12-1*a*. A Figura 10.12-1*b* mostra a representação do circuito no domínio da frequência. Para analisar o circuito, vamos chamar de $\mathbf{Z}_1$ a impedância da associação em série de R_1 e $j\omega L$:

$$\mathbf{Z}_1 = R_1 + j\omega L \tag{10.12-1}$$

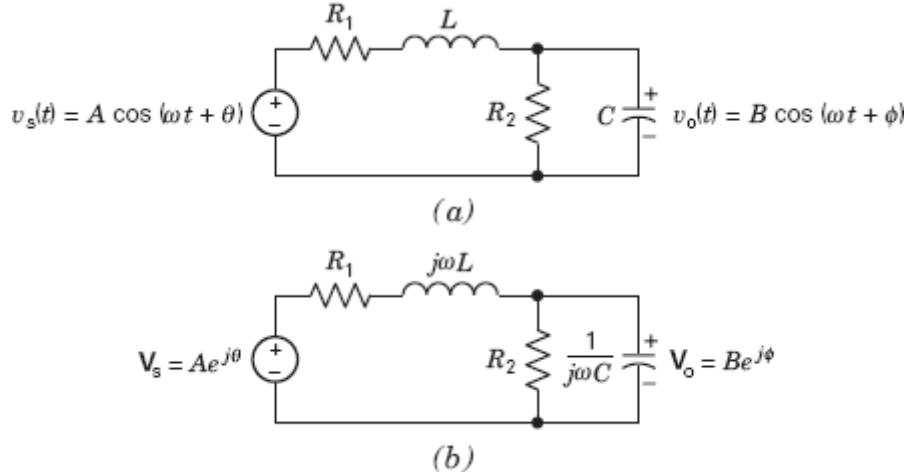



FIGURA 10.12-1 Representação de um circuito de CA (*a*) no domínio do tempo e (*b*) no domínio da frequência.

Além disso, vamos chamar de $\mathbf{Y}_2$ a admitância da associação em paralelo de R_2 e $1/j\omega C$,

$$\mathbf{Y}_2 = \frac{1}{R_2} + j\omega C \tag{10.12-2}$$

e de $\mathbf{Z}_2$ a impedância correspondente

$$\mathbf{Z}_2 = \frac{1}{\mathbf{Y}_2} \tag{10.12-3}$$

O valor de $\mathbf{V}_o$ pode ser calculado a partir de $\mathbf{V}_s$ usando o método da divisão de tensão:

$$\mathbf{V}_o = \frac{\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2}\mathbf{V}_s \tag{10.12-4}$$

A Figura 10.12-2 mostra um arquivo de entrada do MATLAB que usa as Eqs. 10.12-1 a 10.12-3 para determinar a resposta do circuito da Figura 10.12-1. A Eq. 10.12-4 é usada para determinar $\mathbf{V}_o$. Em seguida, são determinadas a amplitude $B = |\mathbf{V}_o|$ e a fase $\phi = \angle \mathbf{V}_o$ da tensão de saída no domínio do tempo. Note que todos os cálculos necessários são executados pelo MATLAB. Finalmente, o MATLAB produz o gráfico da Figura 10.12-3 que mostra as tensões de entrada e de saída em função do tempo.

```
%-------------------------------
% Descrever a fonte de tensão.
%-------------------------------
w = 2;
A = 12;
teta = (pi/180)*60;
Vs = A*exp(j*teta);
%---------------------------------------------------
% Descrever os resistores, o indutor e o capacitor.
%---------------------------------------------------
R1 = 6;
R2 = 4;
L = 4;
C = 1/24;
%---------------------------------------------------
% Calcular as impedâncias equivalentes do resistor
% e do indutor em série e do resistor e do capacitor
% em paralelo.
%---------------------------------------------------
Z1 = R1 + j*w*L                  % Eq. 10.12-1
Y2 = 1/R2 + j*w*C;               % Eq. 10.12-2
Z2 = 1/Y2                        % Eq. 10.12-3
%---------------------------------------------------
% Calcular o fasor correspondente à tensão de saída.
%---------------------------------------------------
Vo = Vs * Z2/(Z1 + Z2)           % Eq. 10.12-4
B = abs(Vo);
fi = angle(Vo)
%---------------------------------------------------
% Calcular os parâmetros do gráfico
%---------------------------------------------------
T = 2*pi/w;
tf = 2*T; N = 100; dt = tf/N;
t = 0 : dt : tf;
%---------------------------------------------------
% Plotar as tensões de entrada e de saída.
for k = 1 : 101
    vs(k) = A * cos(w * t(k) + teta);
    vo(k) = B * cos(w * t(k) + fi);
end
plot (t, vs, t, vo)
xlabel ('t, s')
ylabel ('vs e vo, V')
legend ('vs','vo','Location','NorthWest')
```

FIGURA 10.12-2 Arquivo de entrada do MATLAB para analisar o circuito da Figura 10.12-1.

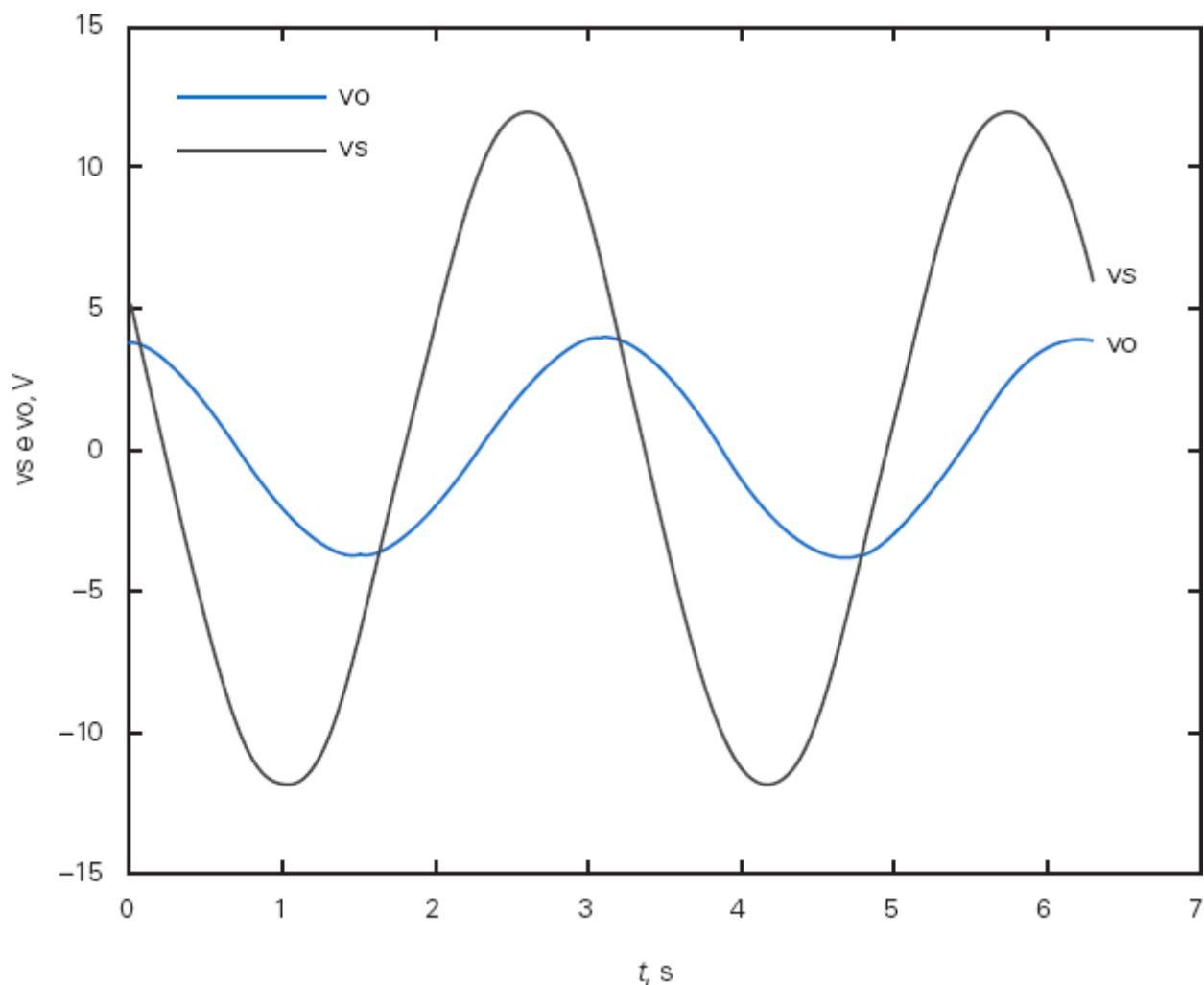



FIGURA 10.12-3 Gráfico do MATLAB mostrando as tensões de entrada e de saída do circuito da Figura 10.12-1.

10.13 *Uso do PSpice para Analisar Circuitos de CA*

Para analisar circuitos de CA usando o programa PSpice, é preciso fazer o seguinte:

1. Desenhar o circuito no espaço de trabalho OrCAD Capture.
2. Especificar uma simulação do tipo AC Sweep\Noise.
3. Executar a simulação.
4. Abrir um arquivo de saída para observar o resultado da simulação.

A Tabela 10.13-1 mostra alguns módulos do PSpice usados para analisar circuitos de CA. Nas simulações de circuitos de CA, representamos fontes de tensão e de corrente independentes usando os módulos VAC e IAC, respectivamente. Esses módulos do PSpice possuem parâmetros chamados ACMAG e ACPHASE que especificam a amplitude e o ângulo de fase da tensão ou corrente da fonte. (Os parâmetros ACMAG e ACPHASE também são usados para especificar a amplitude e o ângulo de fase de outras tensões e correntes do circuito.)

Tabela 10.13-1 **Módulos do PSpice para Circuitos de CA e as Bibliotecas Onde Podem Ser Encontrados**

SÍMBOLO	DESCRIÇÃO	NOME DO PSPICE	BIBLIOTECA
V? 1Vac 0Vdc	Fonte de tensão alternada	VAC	SOURCE
I? 1Aac 0Adc	Fonte de corrente alternada	IAC	SOURCE
	Imprimir tensão do elemento	VPRINT2	SPECIAL
	Imprimir tensão do nó	VPRINT1	SPECIAL
IPRINT	Imprimir corrente do elemento	IPRINT	SPECIAL

Os módulos VPRINT1, VPRINT2 e IPRINT da Tabela 10.13-1 podem ser usados para especificar as tensões e correntes do circuito cujos valores devem ser mostrados no arquivo de saída. Os parâmetros desses módulos, aos quais pode ser atribuído o valor Y (sim) ou N (não), são AC, REAL, IMAG, MAG e PHASE. No exemplo a seguir, é usado o valor Y para todos os parâmetros, o que faz com que o valor das tensões e correntes seja mostrado tanto na forma retangular como na forma polar.

EXEMPLO 10.13-1 Uso do PSpice para Analisar Circuitos de CA

Considere o circuito de CA da Figura 10.13-1, em que

$$v_s(t) = 12\cos(100t + 15°)\text{ V} \quad \text{e} \quad i_s(t) = 1{,}5\cos(100t + 135°)\text{ A}$$

Use o programa PSpice para determinar as tensões v_1 e v_3 e a corrente i_2.

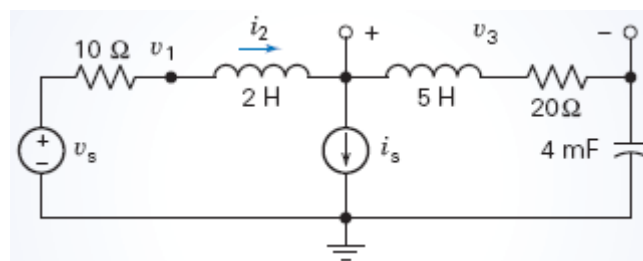



FIGURA 10.13-1 Circuito do Exemplo 10.13-1.

Solução

O primeiro passo é desenhar o circuito no espaço de trabalho OrCAD Capture, como mostra a Figura 10.13-2 (veja o Apêndice A). Note que os módulos VAC e IAC da Tabela 10.13-1 foram usados para representar as fontes. Os parâmetros ACMAG e ACPHASE das fontes foram especificados como ACMAG = 12 e ACPHASE = 15 para a fonte de tensão e ACMAG = 1,5 e ACPHASE = 135 para a fonte de corrente.

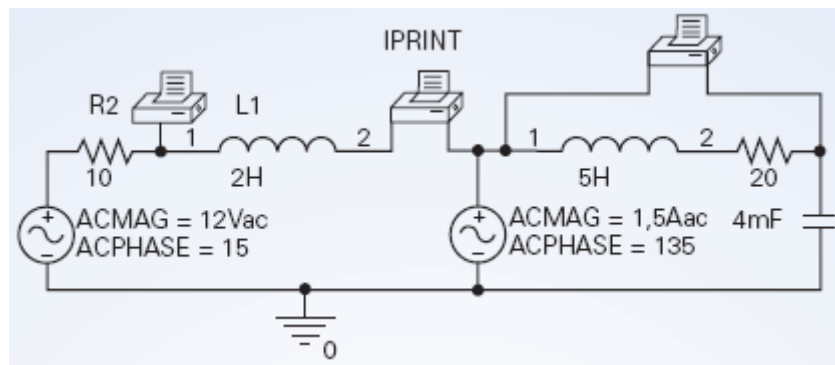



FIGURA 10.13-2 O circuito da Figura 10.13-1 da forma como aparece no espaço de trabalho OrCAD Capture do PSpice.

A Figura 10.13-2 mostra também que os módulos VPRINT1, IPRINT e VPRINT2 foram usados para medir v_1, i_2 e v_3. Esses módulos são ligados ao circuito da mesma forma como voltímetros e amperímetros seriam ligados a um circuito real para medir tensões e correntes. Repare no sinal negativo do lado direito dos três módulos. No caso dos medidores de tensão, esse sinal indica que a tensão é medida supondo que o terminal da direita é o lado mais negativo do circuito. No caso dos medidores de corrente, o sinal indica que a corrente é medida supondo que o sentido da corrente é do terminal da esquerda para o terminal da direita. O sinal negativo do medidor VPRINT1 pode ser ignorado, já que o módulo é usado para medir a tensão de nó do nó 1, que, por definição, é a tensão entre esse ponto do circuito e a terra.

Vamos executar uma simulação do tipo AC Sweep\Noise. (Selecione PSpice\New Simulation Profile no menu principal do programa OrCAD Capture, escolha um nome para a simulação e, em seguida, selecione AC Sweep\Noise na lista Analysis Type da caixa de diálogo Simulation Settings. Na subcaixa de diálogo AC Sweep Type, digite o valor $100/2\pi = 15{,}92$ nas caixas de entrada dos parâmetros Start Frequency (Frequência Inicial) e End Frequency (Frequência Final), digite o valor 1 na caixa de entrada Total Points (Número Total de Pontos) e clique na opção Linear. Selecione PSpice\Run no menu OrCad Capture para executar a simulação.)

Depois que a simulação termina, o programa abre uma janela Schematics. Selecione View\Output File no menu da janela Schematics. Role o arquivo de saída para localizar os valores medidos pelos módulos VPRINT1, IPRINT e VPRINT2:

FREQ 15.92E+00	VM(N615) 1.579E+01	VP(N615) −8.112E+00	VR(N615) 1.564E+01	VI(N615) −2.229E+00
FREQ 15.92E+00	IM(V_PRINT2) 6.694E−01	IP(V_PRINT2) 1.272E+02	IR(V_PRINT2) −4.045E−01	II (V_PRINT2) 5.334E−01
FREQ 15.92E+00	VM(N256,N761) 4.533E+01	VP(N256,N761) 2.942E+01	VR(N256,N761) 3.949E+01	VI(N256,N761) 2.227E+01

Essa forma de mostrar os resultados requer algumas explicações. Os símbolos VM, VP, VR e VI indicam o módulo, o ângulo, a parte real e a parte imaginária da tensão; os símbolos IM, IP, IR e II indicam o módulo, o ângulo, a parte real e a parte imaginária da corrente. Os rótulos N614, N615, N256 e N761 são números de nós criados pelo PSpice. VM(N615) indica uma tensão de nó, v_1, no caso. IM(V_PRINT2) indica uma corrente, i_2, no caso. VM(N256,N761) indica uma tensão entre dois nós, v_3, no caso. Assim, os resultados da simulação mostram que

$$v_t(t) = 15{,}79 \cos(100t - 8{,}1°) = 15{,}64 \cos(100t) + 2{,}220 \operatorname{sen}(100t) \text{ V},$$

$$i_2(t) = 0{,}6694 \cos(100t + 127{,}2°) = -0{,}4045 \cos(100t) - 0{,}5334 \operatorname{sen}(100t) \text{ V},$$

e

$$v_3(t) = 45{,}33 \cos(100t - 29{,}40) = 39{,}49 \cos(100t) - 22{,}27 \operatorname{sen}(100t) \text{ V}$$

10.14 Como Podemos Testar. . . ?

Os engenheiros são frequentemente encarregados de verificar se a solução de um problema está correta. As soluções de problemas de projeto, por exemplo, devem ser verificadas para confirmar que todas as especificações estão sendo atendidas. Além disso, os resultados obtidos com o auxílio de computadores devem ser revistos para evitar possíveis erros na digitação dos dados e as afirmações dos vendedores a respeito dos seus produtos devem ser confirmadas.

Os estudantes de engenharia muitas vezes também precisam verificar se os resultados que obtiveram estão corretos. Às vezes falta muito pouco tempo para terminar um exame e é importante poder identificar rapidamente as questões que precisam ser refeitas.

Os exemplos a seguir ilustram algumas técnicas que podem ser usadas para verificar se as soluções de problemas do tipo discutido neste capítulo estão corretas.

EXEMPLO 10.14-1 Como Podemos Testar os Cálculos com Números Complexos?

Sabe-se que

$$\frac{10}{R - j4} = A\underline{/53^\circ}$$

Um programa de computador fornece o resultado $A = 2$. **Como podemos verificar** se esse resultado está correto? (Suponha que o resultado tenha sido fornecido com dois algarismos significativos.)

Solução

A equação para o ângulo é

$$-\tan^{-1}\left(\frac{-4}{R}\right) = 53^\circ$$

Assim, temos

$$R = \frac{-4}{\tan(-53^\circ)} = 3{,}014$$

Escrevendo A em termos de R, obtemos

$$A = \frac{10}{(R^2 + 16)^{1/2}} = 1{,}997$$

Isso significa que $A = 2$ com uma precisão de dois algarismos significativos e, portanto, o resultado fornecido pelo computador está correto.

EXEMPLO 10.14-2 Como Podemos Verificar se a Análise de um Circuito de CA Está Correta?

Considere o circuito da Figura 10.14-1. Suponha que sejam dadas as tensões dos capacitores,

$$1{,}96\cos(100t - 101{,}3^\circ)\text{ V} \quad \text{e} \quad 4{,}39\cos(100t - 37{,}88^\circ)\text{ V}$$

mas que não seja informado qual das tensões é $v_1(t)$ e qual é $v_2(t)$. **Como podemos verificar** quais são as tensões corretas?

Solução

Vamos supor que

$$v_1(t) = 1{,}96\cos(100t - 101{,}3^\circ)$$

e

$$v_2(t) = 4{,}39 \cos(100t - 37{,}88°)$$

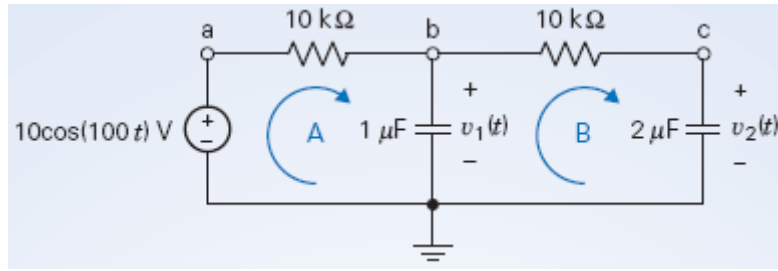



FIGURA 10.14-1 Circuito do Exemplo 10.14-2.

e verificar se essa escolha é compatível com as equações de nó do circuito, que são as seguintes:

$$\frac{10 - \mathbf{V}_1}{R_1} = j\omega C_1 \mathbf{V}_1 + \frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2}{R_2}$$

e

$$j\omega C_2 \mathbf{V}_2 = \frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2}{R_2}$$

onde $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$ são os fasores correspondentes a $v_1(t)$ e $v_2(t)$, ou seja,

$$\mathbf{V}_1 = 1{,}96e^{-j101{,}3°} \text{ e } \mathbf{V}_2 = 4{,}39e^{-j37{,}88°}$$

Substituindo o fasor $\mathbf{V}_1$ no lado esquerdo da primeira equação de nó, temos

$$\frac{10 - 1{,}96e^{-j101{,}3}}{10 \times 10^3} = 0{,}001 + j1{,}92 \times 10^{-4}$$

Substituindo os fasores $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$ no lado direito da primeira equação de nó, obtemos

$$j \cdot 100 \times 10^{-6} \cdot 1{,}96e^{-j101{,}3} + \frac{1{,}96e^{-j101{,}3} - 4{,}39e^{-j37{,}88}}{10 \times 10^3}$$
$$= -19{,}3 \times 10^{-4} + j3{,}89 \times 10^{-5}$$

Como o lado direito não é igual ao lado esquerdo, $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$ não satisfazem a equação de nó. Isso significa que os valores escolhidos para $v_1(t)$ e $v_2(t)$ não estão corretos. Vamos então inverter os valores, fazendo

$$v_1(t) = 4{,}39 \cos(100t - 37{,}88°)$$

e

$$v_2(t) = 1{,}96 \cos(100t - 101{,}3°)$$

Nesse caso, os fasores $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$ se tornam

$$\mathbf{V}_1 = 4{,}39e^{-j37{,}88°} \quad \text{e} \quad \mathbf{V}_2 = 1{,}96e^{-j101{,}3°}$$

Substituindo o novo valor de $\mathbf{V}_1$ no lado esquerdo da primeira equação de nó, temos

$$\frac{10-4,39e^{-j37,88}}{10\times 10^3}=6,353\times 10^{-4}+j2,696\times 10^{-4}$$

Substituindo os novos valores de $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$ no lado direito da primeira equação de nó, temos

$$\frac{10-4,39e^{-j37,88}}{10\times 10^3}=6,353\times 10^{-4}+j2,696\times 10^{-4}$$

Como o lado direito e o lado esquerdo da equação são praticamente iguais, $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$ satisfazem a primeira equação de nó. Isso significa que as tensões $v_1(t)$ e $v_2(t)$ estão provavelmente corretas. Para confirmar, verificamos também a segunda equação de nó. Substituindo o fasor $\mathbf{V}_2$ no lado esquerdo da segunda equação de nó, temos:

$$j\cdot 100\cdot 2\times 10^{-6}\cdot 1,96e^{-j101,3°}=+3,84\times 10^{-4}-j7,681\times 10^{-5}$$

Substituindo os fasores $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$ no lado direito da segunda equação de nó, temos:

$$\frac{4,39e^{-j37,88}-1,96e^{-j101,3}}{10\times 10^3}=3,85\times 10^{-4}-j7,735\times 10^{-5}$$

Como o lado direito e o lado esquerdo da equação são praticamente iguais, $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$ satisfazem a segunda equação de nó. Agora temos certeza de que

$$v_1(t)=4,39\cos(100t-37,88°)\text{ V}$$

e

$$v_2(t)=1,96\cos(100t-101,3°)\text{ V}$$

10.15 Exemplo de Projeto Circuito com um Amplificador Operacional

A Figura 10.15-1*a* mostra duas tensões senoidais, uma rotulada como entrada e outra rotulada como saída. Estamos interessados em projetar um circuito que transforme a senoide de entrada na senoide de saída. A Figura 10.15-1*b* mostra um possível circuito. Em primeiro lugar, precisamos verificar se o circuito proposto atende a nossas necessidades. Em seguida, se a resposta for afirmativa, devemos projetar o circuito, ou seja, determinar os valores apropriados de R_1 e R_2 e C.

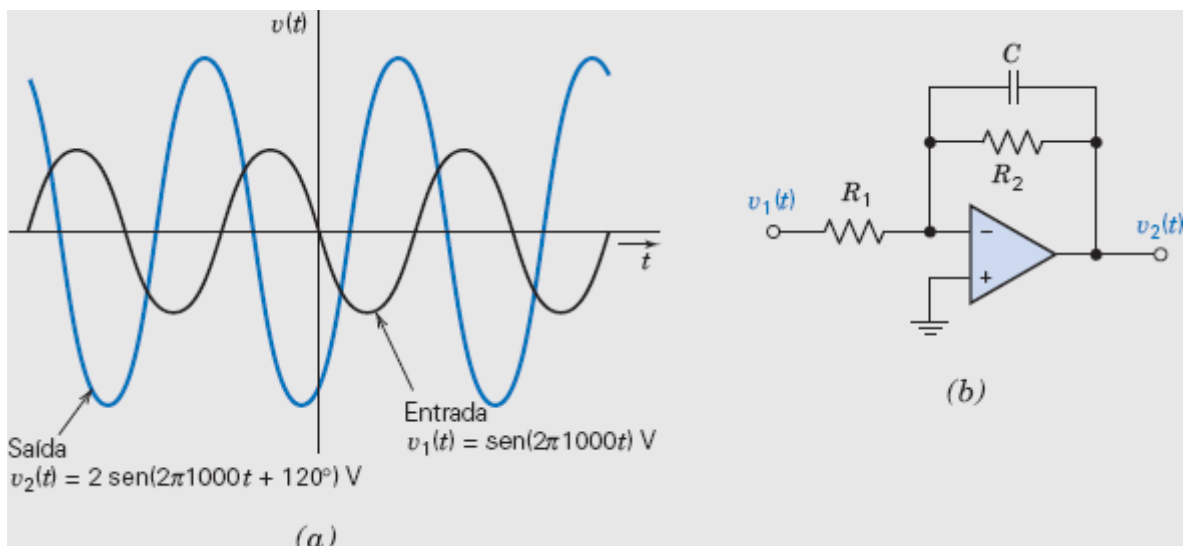



FIGURA 10.15-1 (*a*) Tensões de entrada e de saída. (*b*) Circuito proposto.

Descreva a Situação e as Hipóteses

As senoides de entrada e saída têm amplitudes e ângulos de fase diferentes, a mesma frequência

$$f = 1000 \text{ Hz}$$

e, portanto, a mesma frequência angular

$$\omega = 2\pi 1000 \text{ rad/s}$$

É essa igualdade das frequências que torna possível executar o projeto usando um circuito linear. Quando a entrada de um circuito linear é uma senoide, a saída estacionária é uma senoide com a mesma frequência.

Neste caso, a senoide de entrada é

$$v_1(t) = \text{sen}\,(2\pi 1000t) = \cos\,(2\pi 1000t - 90°) \text{ V}$$

e o fasor correspondente é

$$\mathbf{V}_1 = 1e^{-j90°} = 1\angle{-90°} \text{ V}$$

A senoide de saída é

$$v_2(t) = 2\,\text{sen}\,(2\pi 1000t + 120°) = 2\cos\,(2\pi 1000t + 30°) \text{ V}$$

e o fasor correspondente é

$$\mathbf{V}_2 = 2e^{j30°} \text{ V}$$

A razão dos dois fasores é

$$\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} = \frac{2\,e^{j30°}}{1\,e^{-j90°}} = 2e^{j120°}$$

O módulo dessa razão, G, é o ganho do circuito usado para transformar a senoide de entrada na senoide de saída:

$$G = \left|\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1}\right| = 2$$

O ângulo dessa razão, θ, é o deslocamento de fase introduzido pelo circuito:

$$\theta = \angle\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} = 120°$$

Assim, precisamos de um circuito com um ganho de 2 e um deslocamento de fase de 120°.

Estabeleça a Meta

Verificar se é possível projetar um circuito como o da Figura 10.15-1*b* que tenha um ganho de 2 e um deslocamento de fase de 120°. Se isso for possível, especificar os valores apropriados de R_1, R_2 e C.

Formule um Plano

Analisar o circuito da Figura 10.15-1*b* para determinar a razão entre o fasor de saída e o fasor de entrada, $\mathbf{V}_2/\mathbf{V}_1$. Verificar se o circuito pode ter um ganho de 2 e um deslocamento de fase de 120°. Caso a resposta seja afirmativa, calcular os valores de R_1, R_2 e C.

Execute o Plano

O circuito da Figura 10.15-1*b* é um caso especial do circuito da Figura 10.10-1. A impedância $\mathbf{Z}_1$ da Figura 10.10-1 corresponde ao resistor R_1 da Figura 10.15-1*b* e a impedância $\mathbf{Z}_2$ corresponde à associação em paralelo do resistor R_2 com o capacitor C. Assim,

$$\mathbf{Z}_1 = R_1$$

e

$$\mathbf{Z}_2 = \frac{R_2(1/j\omega C)}{R_2 + 1/j\omega C} = \frac{R_2}{1 + j\omega C R_2}$$

Nesse caso, de acordo com a Eq. 10.10-3,

$$\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} = \frac{\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1} = \frac{R_2/(1 + j\omega C R_2)}{R_1} = \frac{R_2/R_1}{1 + j\omega C R_2}$$

O deslocamento de fase do circuito da Figura 10.15-1*b* é dado por

$$\theta = \angle \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} = \angle -\frac{R_2/R_1}{1 + j\omega C R_2} = 180^\circ - \tan^{-1} \omega C R_2 \qquad (10.15\text{-}1)$$

Quais são os valores possíveis do deslocamento de fase? Observe que ω, C e R_2 são valores positivos, o que significa que

$$0^\circ \le \tan^{-1} \omega C R_2 \le 90^\circ$$

Assim, o circuito da Figura 10.15-1*b* pode ser usado para produzir deslocamentos de fase entre 90º e 180º, ou seja, podemos usar o circuito para produzir um deslocamento de fase de 120º.

O ganho do circuito da Figura 10.15-1*b* é dado por

$$\begin{aligned} G &= \left|\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1}\right| = \left|-\frac{R_2/R_1}{1 + j\omega C R_2}\right| \\ &= \frac{R_2/R_1}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R_2^2}} = \frac{R_2/R_1}{\sqrt{1 + \tan^2(180^\circ - \theta)}} \end{aligned} \qquad (10.15\text{-}2)$$

Usando a Eq. 10.15-1 para calcular o valor de R_2 e substituindo esse valor na Eq. 10.15-2, obtemos

$$R_2 = \frac{\tan(180^\circ - \theta)}{\omega C}$$

e

$$R_1 = \frac{R_2 / G}{\sqrt{1 + \tan^2(180^\circ - \theta)}}$$

Essas equações podem ser usadas para projetar o circuito. Para começar, escolhemos um valor conveniente para o capacitor, como, por exemplo,

$$C = 0{,}02\,\mu\text{F}$$

Em seguida, calculamos os valores de R_1 e R_2 a partir dos valores de ω, C, G e θ. Para $\omega = 6283$ rad/s, $C = 0{,}02\,\mu$F, $G = 2$ e $\theta = 120^\circ$, obtemos

$$R_1 = 3446\,\Omega \quad \text{e} \quad R_2 = 13{,}78\text{ k}\Omega$$

o que conclui o projeto.

Verifique se a Solução Proposta Está Correta

Para $C = 0{,}02\ \mu F$, $R_1 = 3446\ \Omega$ e $R_2 = 13{,}78\ k\Omega$, temos

$$\frac{V_2}{V_1} = -\frac{R_2/R_1}{1 + j\omega CR_2} = -\frac{4}{1 + j\omega(0{,}2756 \times 10^{-3})}$$

Como $\omega = 2\pi \times 10^3$, temos

$$\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} = -\frac{4}{1 + j(2\neq\times 10^3)\,(0{,}2756 \times 10^{-3})} = 2\angle 120^\circ$$

o que atende às especificações.

10.16 RESUMO

- Como a energia elétrica normalmente utilizada nas residências e indústrias está na forma de tensões e correntes senoidais, é importante que os engenheiros sejam capazes de analisar circuitos com fontes independentes senoidais.
- A resposta estacionária de um circuito linear a uma entrada senoidal é uma senoide com a mesma frequência que o sinal de entrada.
- Os circuitos que contêm indutores e capacitores são representados por equações diferenciais. Quando a entrada do circuito é senoidal, fasores e impedâncias podem ser usados para representar o circuito no domínio da frequência. No domínio da frequência, o circuito é representado por equações algébricas. A representação do circuito por uma equação diferencial com o tempo como variável independente é chamada de representação no domínio do tempo.
- A resposta estacionária de um circuito linear com uma entrada senoidal pode ser obtida da seguinte forma:
  1. Transformamos o circuito para o domínio da frequência, usando fasores e impedâncias.
  2. Representamos o circuito no domínio da frequência por equações algébricas, como, por exemplo, as equações de malha e as equações de nó.
  3. Resolvemos as equações algébricas para obter a resposta do circuito.
  4. Transformamos a resposta para o domínio do tempo.
- A Tabela 10.16-1 mostra as relações usadas para transformar um circuito do domínio do tempo para o domínio da frequência ou vice-versa.
- Quando um circuito contém várias fontes senoidais, dois casos são possíveis.
  1. Se todas as fontes senoidais têm a mesma frequência, a resposta é uma senoide com a mesma frequência e o problema pode ser resolvido como se o circuito tivesse apenas uma fonte.
  2. Se as fontes senoidais têm frequências diferentes, o princípio de superposição pode ser usado para dividir o circuito no domínio do tempo em vários circuitos, cada um com fontes senoidais de apenas uma frequência. Esses circuitos são analisados separadamente e as respostas são somadas, *no domínio do tempo*.
- O programa MATLAB pode ser usado para resolver equações de malha ou de nó com coeficientes complexos, facilitando assim a análise de circuitos de corrente alternada.

Tabela 10.16-1 Tensões e Correntes Senoidais no Domínio do Tempo e no Domínio da Frequência

COMPONENTE	DOMÍNIO DO TEMPO	DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA
Fonte de corrente	$i(t) = A\cos(\omega t + \theta)$	$\mathbf{I}(\omega) = Ae^{j\theta}$
Fonte de tensão	$v(t) = B\cos(\omega t + \phi)$	$\mathbf{V}(\omega) = Be^{j\phi}$
Resistor	$v(t) = R\,i(t)$	$\mathbf{V}(\omega) = R\,\mathbf{I}(\omega)$
Capacitor	$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,d\tau$	$\mathbf{V}(\omega) = \frac{1}{j\omega C}\,\mathbf{I}(\omega)$
Indutor	$v(t) = L\,\frac{d}{dt}i(t)$	$\mathbf{V}(\omega) = j\omega L\,\mathbf{I}(\omega)$
FTCC	$v(t) = K\,i_c(t)$	$\mathbf{V}(\omega) = K\,\mathbf{I}_c(\omega)$
Amplificador operacional ideal		$\mathbf{I}_1 = 0$, $\mathbf{I}_2 = 0$, $\mathbf{I}(\omega)$, $\mathbf{V}(\omega)$

PROBLEMAS

Seção 10.2 **Fontes Senoidais**

P 10.2-1 Dadas as senoides $v_1(t) = 8\cos(250t + 15°)$ V e $v_2(t) = 6\cos(250t - 45°)$ V, determine o tempo de avanço ou de retardo de $v_2(t)$ em relação a $v_1(t)$.

P 10.2-2 Dadas as senoides $v_1(t) = 8\cos(100t - 54°)$ V e $v_2(t) = 8\cos(100t - 102°)$ V, determine o tempo de avanço ou de retardo de $v_2(t)$ em relação a $v_1(t)$.

P 10.2-3 Uma corrente senoidal é dada por

$$i(t) = 125\cos(5000\pi t - 135°)\text{ mA}$$

Determine o período T da corrente e o instante t_1 em que é atingido o primeiro pico positivo após o instante $t =$ 0.

Resposta: $T = 0{,}4$ ms e $t_1 = 0{,}15$ ms.

P 10.2-4 Expresse a tensão da Figura P 10.2-7 na forma geral

$$v(t) = A \cos(\omega t + \theta) \text{ V}$$

em que $A \geq 0$ e $-180° \leq \theta \leq 180°$.

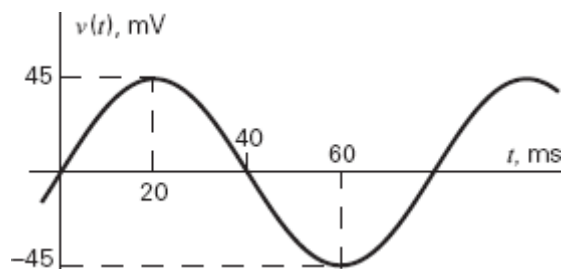



Figura P 10.2-4

P 10.2-5 A Figura P 10.2-5 mostra o gráfico de uma função senoidal, $v(t)$, em função do tempo t. Represente $v(t)$ por uma função da forma $A \cos(\omega t + \theta)$.

Resposta: $v(t) = 18 \cos(393t - 27°)$ V

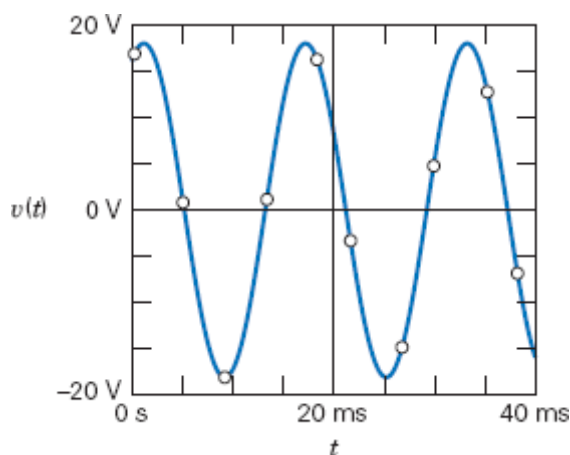



Figura P 10.2-5

P 10.2-6 A Figura P 10.2-6 mostra o gráfico de uma função senoidal, $v(t)$, em função do tempo t. Represente $v(t)$ por uma função da forma A $\cos(\omega t + \theta)$.

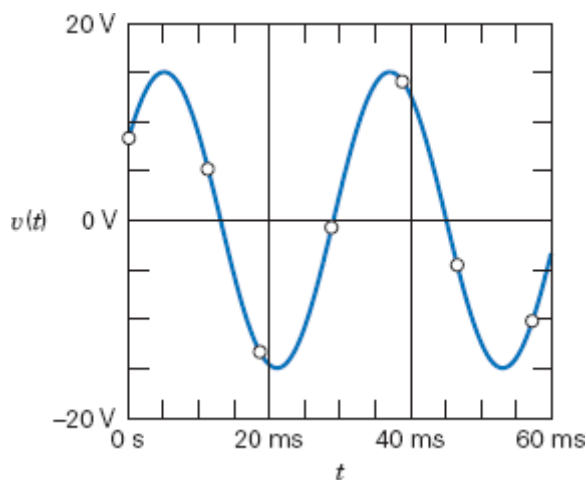



Figura P 10.2-6

Seção 10.3 **Fasores e Senoides**

P 10.3-1 Expresse a corrente

$$i(t) = 2\cos(6t + 120°) + 2\,\text{sen}\,(6t - 60°)\ \text{mA}$$

na forma geral

$$i(t) = A\cos(\omega t + \theta)\ \text{mA}$$

em que $A \geq 0$ e $-180° \leq \theta \leq 180°$.

P 10.3-2 Expresse a tensão

$$v(t) = 5\sqrt{2}\cos(8t) + 2\,\text{sen}(8t + 45°)\ \text{V}$$

na forma geral

$$v(t) = A\cos(\omega t + \theta)\ \text{V}$$

em que $A \geq 0$ e $-180° \leq \theta \leq 180°$.

P 10.3-3 Determine a forma polar da expressão

$$\frac{\left(25\angle 36{,}9°\right)\left(80\angle -53{,}1°\right)}{(4 + j8) + (6 - j8)}$$

Resposta: *Resposta:* $200\angle -16{,}2°$

P 10.3-4 Determine a forma polar e a forma retangular da expressão

$$5\angle +81{,}87°\left(4 - j3 + \frac{3\sqrt{2}\angle -45°}{7 - j1}\right)$$

Resposta: $88{,}162\angle 30{,}127°$; $76{,}2520 + j44{,}2506$

P 10.3-5 Determine a forma polar e a forma retangular da expressão

$$\frac{\left(60\angle 120°\right)\left(-16 + j12 + 20\angle 15°\right)}{5\angle -75°}$$

P 10.3-6 O circuito da Figura P 10.3-6 está no regime estacionário. As fontes de corrente são $i_1(t) = 10\cos(25t)$ mA e $i_3(t) = 10\cos(25t + 135°)$ mA. Determine a tensão $v_2(t)$.

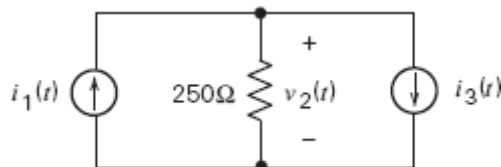



Figura P 10.3-6

P 10.3-7 O circuito da Figura P 10.3-7 está no regime estacionário. As entradas do circuito são a corrente da fonte de corrente

$$i_1(t) = 0{,}12\cos(100t + 45°)\ \text{A}$$

e a tensão da fonte de tensão

$$v_2(t) = 24\cos(100t - 60°)\ \text{V}$$

Determine a corrente $i_2(t)$.

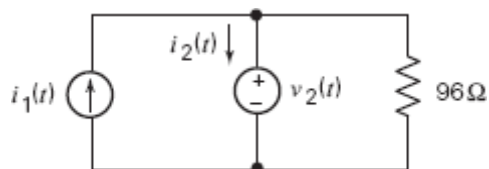



Figura P 10.3-7

P 10.3-8 Dado que

$$i_1(t) = 30 \cos(4t + 45°) \text{ mA}$$

$$i_2(t) = -40 \cos(4t) \text{ mA}$$

Determine $v(t)$ para o circuito da Figura P 10.3-8.

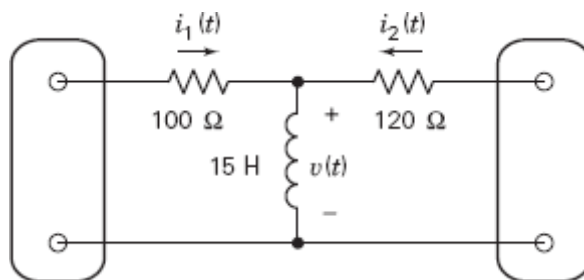



Figura P 10.3-8

P 10.3-9 Dado o circuito da Figura P 10.3-9, determine (a) as impedâncias $\mathbf{Z}_1$ e $\mathbf{Z}_2$ na forma polar; (b) a impedância total do circuito na forma polar; (c) a corrente $i(t)$ no regime estacionário.

Respostas:

(a) $\mathbf{Z}_1 = 5\angle 53{,}1°$; $\mathbf{Z}_2 = 8\sqrt{2}\angle -45°$

(b) $\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 = 11{,}7\angle -20°$

(c) $i(t) = (8{,}55) \cos(1250t + 20°)$ A

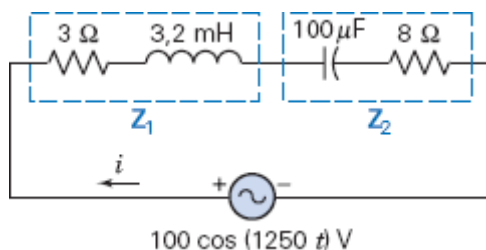



Figura P 10.3-9

P 10.3-10 O circuito da Figura P 10.3-10 está no regime estacionário. As tensões $v_s(t)$ e $v_2(t)$ são dadas por

$$v_s(t) = 7{,}68 \cos(2t + 47°) \text{ V}$$

e

$$v_2(t) = 1{,}59 \cos(2t - 125°) \text{ V}$$

Determine a tensão $v_1(t)$.

Resposta: $v_1(t) = 7{,}51 \cos(2t + 35°)$ V

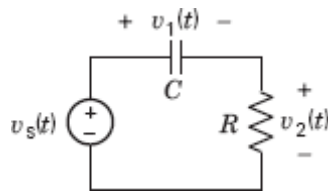



Figura P 10.3-10

P 10.3-11 O circuito da Figura P 10.3-11 está no regime estacionário. As correntes $i_1(t)$ e $i_2(t)$ são dadas por

$$i_1(t) = 744 \cos(2t - 118°) \text{ mA}$$

e

$$i_2(t) = 540{,}5 \cos(2t + 100°) \text{ mA}$$

Determine a corrente $i(t)$.

Resposta: $i(t) = 460 \cos(2t + 196°)$ mA

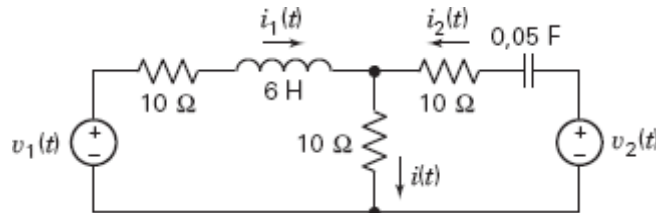



Figura P 10.3-11

P 10.3-12 Determine a corrente $i(t)$ no circuito *RLC* da Figura P 10.3-12 se a tensão da fonte é $v_s = 2 \cos(4t + 30°)$ V.

Resposta: $i(t) = 0{,}185 \cos(4t - 26{,}3°)$ A

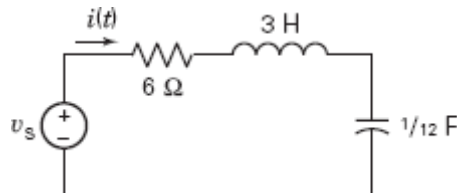



Figura P 10.3-12

Seção 10.4 **Impedâncias**

P 10.4-1 A Figura P 10.4-1*a* mostra um circuito representado no domínio do tempo. A Figura P 10.4-1*b* mostra o mesmo circuito representado no domínio da frequência, usando fasores e impedâncias. $\mathbf{Z}_R$, $\mathbf{Z}_C$, $\mathbf{Z}_{L1}$ e $\mathbf{Z}_{L2}$ são as impedâncias correspondentes ao resistor, ao capacitor e aos dois indutores da Figura P 10.4-1*a*. $\mathbf{V}_s$ é o fasor correspondente à tensão da fonte de tensão. Determine $\mathbf{Z}_R$, $\mathbf{Z}_C$, $\mathbf{Z}_{L1}$, $\mathbf{Z}_{L2}$ e $\mathbf{V}_s$.

Sugestão: $5 \text{ sen } 5t = 5 \cos(5t - 90°)$

Resposta:

$$\mathbf{Z}_R = 8\ \Omega,\ \mathbf{Z}_C = \frac{1}{j5\left(\frac{1}{12}\right)} = \frac{2,4}{j}$$

$$= \frac{j2,4}{j \times j} = -j2,4\ \Omega,\ \mathbf{Z}_{L1} = j5(2) = j10\ \Omega,$$

$$\mathbf{Z}_{L2} = j5(4) = j20\ \Omega \ \text{ e } \ \mathbf{V}_s = 5\angle{-90^\circ}\ \text{V}$$

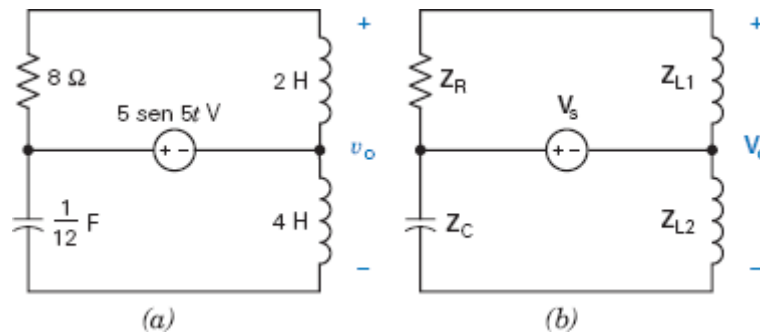



Figura P 10.4-1 Um circuito representado (a) no domínio do tempo e (b) no domínio da frequência.

P 10.4-2 A Figura P 10.4-2*a* mostra um circuito representado no domínio do tempo. A Figura 10.4-2*b* mostra o mesmo circuito representado no domínio da frequência, usando fasores e impedâncias. $\mathbf{Z}_R$, $\mathbf{Z}_C$, $\mathbf{Z}_{L1}$ e $\mathbf{Z}_{L2}$ são as impedâncias correspondentes ao resistor, ao capacitor e aos dois indutores da Figura P 10.4-2*a*.$\mathbf{I}_s$ é o fasor correspondente à corrente da fonte de corrente. Determine $\mathbf{Z}_R$, $\mathbf{Z}_C$, $\mathbf{Z}_{L1}$, $\mathbf{Z}_{L2}$ e $\mathbf{I}_s$.

Resposta:

$$\mathbf{Z}_R = 8\ \Omega,\ \mathbf{Z}_C = \frac{1}{j3\left(\frac{1}{12}\right)} = \frac{4}{j} = \frac{j4}{j \times j}$$

$$= -4\ \Omega,\ \mathbf{Z}_{L1} = j3(2) = j6\ \Omega,$$

$$\mathbf{Z}_{L2} = j3(4) = j12\ \Omega \ \text{ e } \ \mathbf{I}_s = 4\angle{15^\circ}\ \text{A}$$

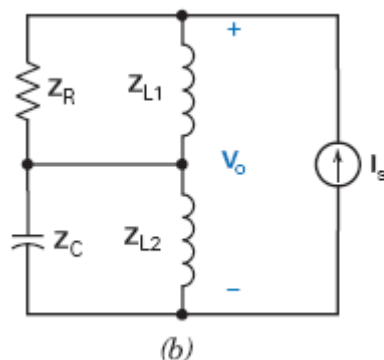
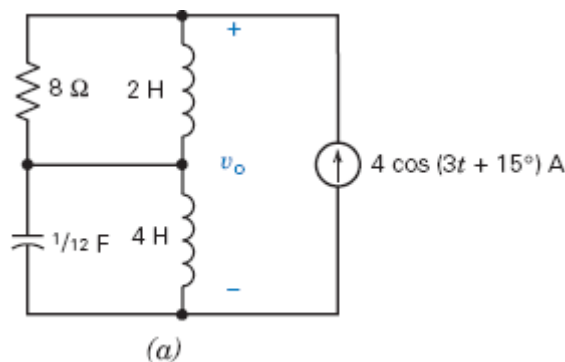



Figura P 10.4-2 Um circuito representado (a) no domínio do tempo e (b) no domínio da frequência.

P 10.4-3 Represente o circuito da Figura P 10.4-3 no domínio da frequência.

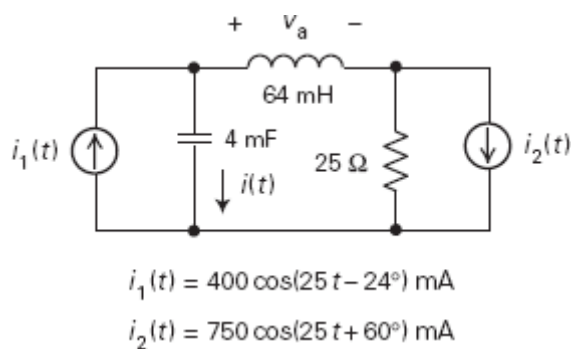



Figura P 10.4-3

P 10.4-4 Represente o circuito da Figura P 10.4-4 no domínio da frequência.

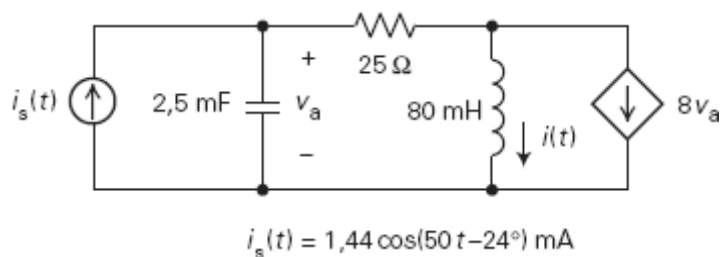



Figura P 10.4-4

P 10.4-5 Determine a corrente $i(t)$ no circuito da Figura P 10.4-5.

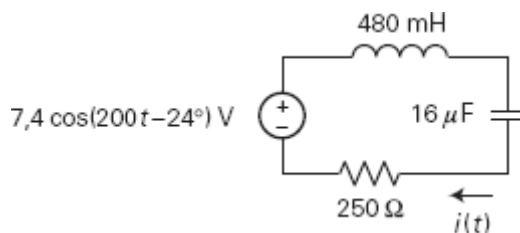



Figura P 10.4-5

P 10.4-6 A entrada do circuito da Figura P 10.4-6 é a corrente

$$i(t) = 120\cos(4000\,t)\ \text{mA}$$

Determine a tensão $v(t)$ do resistor.

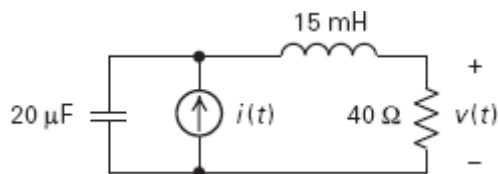



Figura P 10.4-6

P 10.4-7 A entrada do circuito da Figura P 10.4-7 é a corrente

$$i(t) = 82\cos(10000\,t)\ \mu\text{A}$$

Determine a tensão $v(t)$ do resistor de 50 kΩ.

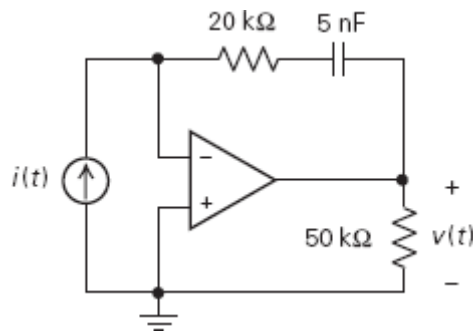



Figura P 10.4-7

P 10.4-8 Todos os pares de tensão e corrente em um componente mostrados a seguir estão de acordo com a convenção passiva. Indique se o componente é capacitivo, indutivo ou resistivo e calcule o valor do componente.

(a) $v(t) = 15 \cos(400t + 30^\circ)$; $i = 2 \text{ sen } (400t + 30^\circ)$

(b) $v(t) = 8 \text{ sen } (900t + 50^\circ)$; $i = 2 \text{ sen } (900t + 140^\circ)$

(c) $v(t) = 20 \cos(250t + 60^\circ)$; $i = 5 \text{ sen } (250t + 150^\circ)$

Respostas: **(a)** Indutivo: $L = 12{,}5$ mH. **(b)** Capacitivo: $C = 277{,}77\ \mu$F. **(c)** Resistivo: $R = 4\ \Omega$

P 10.4-9 A tensão e a corrente do circuito que aparece na Figura P 10.4-9 são

$$v(t) = 20 \cos(20t + 15^\circ);\ i(t) = 1{,}49 \cos(20t + 63^\circ) \text{ A}$$

Determine o valor da resistência R e da capacitância C.

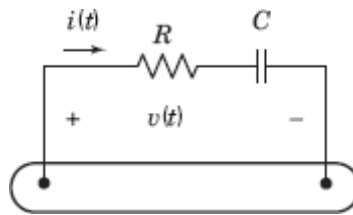



Figura P 10.4-9

P 10.4-10 A Figura P 10.4-10 mostra um circuito de CA representado no domínio do tempo e no domínio da frequência. Determine o valor de A, B, a e b.

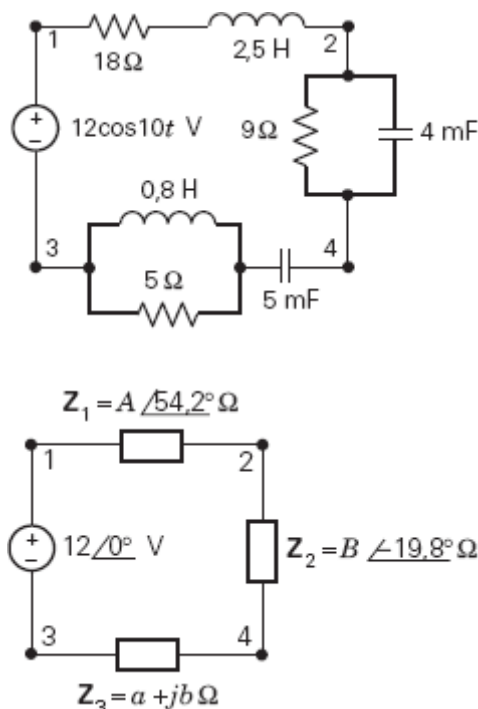



Figura P 10.4-10

P 10.4-11 Represente o circuito da Figura P 10.4-11 no domínio da frequência.

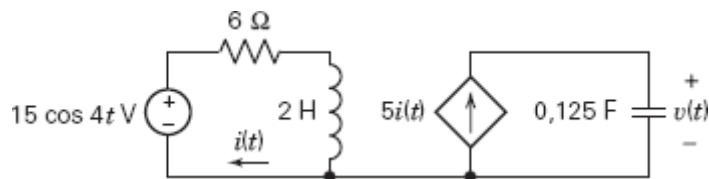



Figura P 10.4-11

P 10.4-12 Represente o circuito da Figura P 10.4-12 no domínio da frequência.

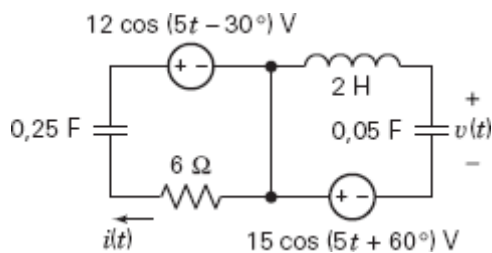



Figura P 10.4-12

P 10.4-13 Determine R e L no circuito da Figura P 10.4-13 se $v(t) = 10 \cos (\omega t + 40°)$ V, $i(t) = 2 \cos (\omega t + 15°)$ mA e $\omega = 2 \times 10^6$ rad/s.

Resposta: $R = 4{,}532$ kΩ e $L = 1{,}057$ mH

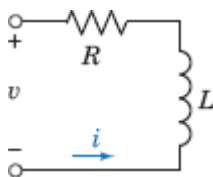



Figura P 10.4-13

Seção 10.5 Impedâncias em Série e em Paralelo

P 10.5-1 Determine a tensão $v(t)$ no circuito da Figura P 10.5-1.

Resposta: $v(t) = 32 \cos (250t - 57{,}9°)$ V

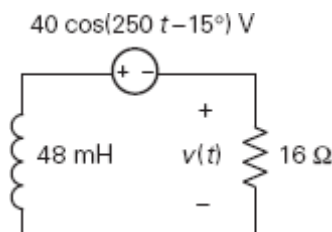



Figura P 10.5-1

P 10.5-2 Determine a tensão $v(t)$ no circuito da Figura P 10.5-2.

Resposta: $v(t) = 14{,}57 \cos (800t + 111{,}7°)$ V

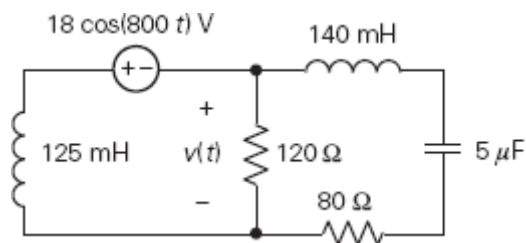



Figura P 10.5-2

P 10.5-3 Determine a tensão v(t) no circuito da Figura P 10.5-3.

Resposta: $v(t) = 14{,}1 \cos(2500t - 35{,}2^\circ)$ V

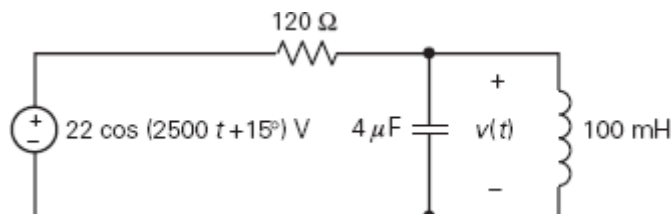



Figura P 10.5-3

P 10.5-4 A entrada do circuito da Figura P 10.5-4 é a corrente $i_s(t) = 48 \cos(25t)$ mA. Determine a corrente $i_1(t)$.

Resposta: $i_1(t) = 144 \cos(25t + 180^\circ)$ mA

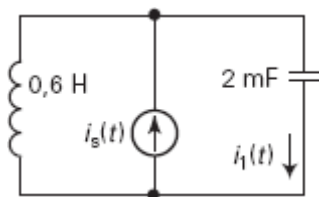



Figura P 10.5-4

P 10.5-5 A entrada do circuito da Figura P 10.5-5 é a corrente $i_s(t) = 48 \cos(25t)$ mA. Determine a corrente $i_2(t)$.

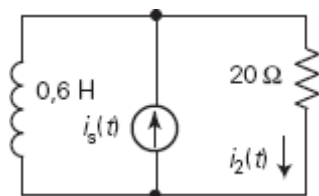



Figura P 10.5-5

P 10.5-6 A entrada do circuito da Figura P 10.5-6 é a corrente $i_s(t) = 48 \cos(25t)$ mA. Determine a corrente $i_3(t)$.

Resposta: $i_3(t) = 16{,}85 \cos(25t + 69{,}4^\circ)$ mA.

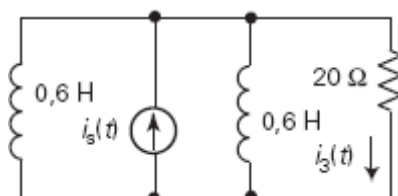



Figura P 10.5-6

P 10.5-7 A Figura P 10.5-7 mostra um circuito representado no domínio da frequência. Determine $\mathbf{V}_1$, o fasor da tensão indicada na figura.

Resposta: $V_1 = 14{,}59\ \angle -13{,}15°$ V

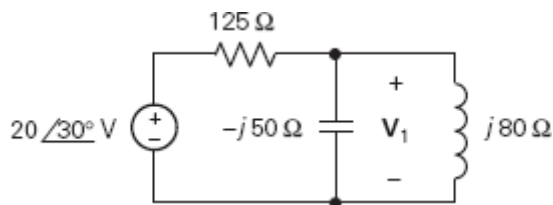



Figura P 10.5-7

P 10.5-8 A Figura P 10.5-8 mostra um circuito representado no domínio da frequência. Determine $\mathbf{I}_2$, o fasor da corrente indicada na figura.

Resposta: $I_2 = 18{,}48\ \angle -93{,}7°$ mA

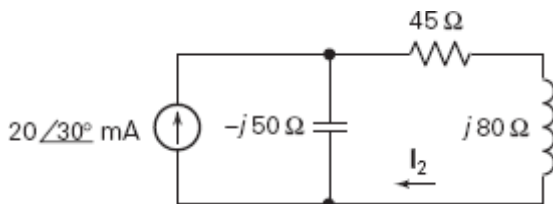



Figura P 10.5-8

P 10.5-9 A Figura P 10.5-9 mostra um circuito representado no domínio do tempo e no domínio da frequência. Se $\mathbf{Z}_1 = 15{,}3\ \angle -24{,}1°\ \Omega$ e $\mathbf{Z}_2 = 14{,}4\ \angle 53{,}1°\ \Omega$, determine a tensão $v(t)$ e o valor de R_1, R_2, L e C.

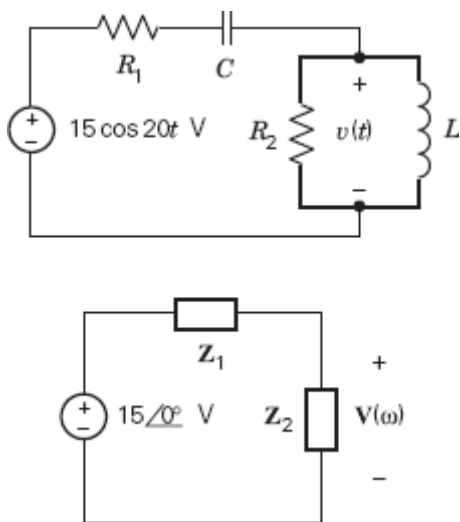



Figura P 10.5-9

P 10.5-10 Determine **Z** e **Y** no circuito da Figura P 10.5-10 para uma frequência de 10 kHz.

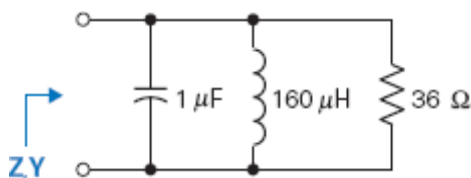



Figura P 10.5-10

P 10.5-11 Determine o valor de C no circuito da Figura P 10.5-11 se $\mathbf{Z} = 590{,}7\ \Omega$ para $f = 1$ MHz.

Resposta: $C = 0{,}27$ nF

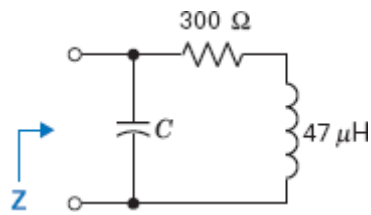



Figura P 10.5-11

P 10.5-12 Determine a impedância $\mathbf{Z}$ do circuito da Figura P 10.5-12.

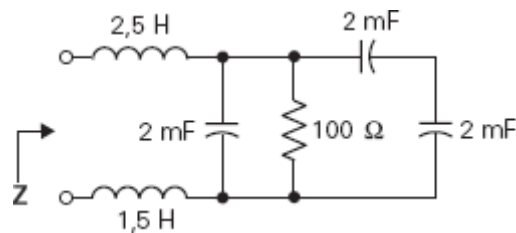



Figura P 10.5-12

P 10.5-13 Uma das atrações do filme *Quero Ser Grande* é um piano gigantesco tocado com os pés. O criador do piano usou um sintetizador acoplado a um alto-falante, como mostra a Figura P 10.5-13 (Gardner, 1988). Determine a corrente $i(t)$ para uma nota musical de 796 Hz se $C = 10\ \mu$F.

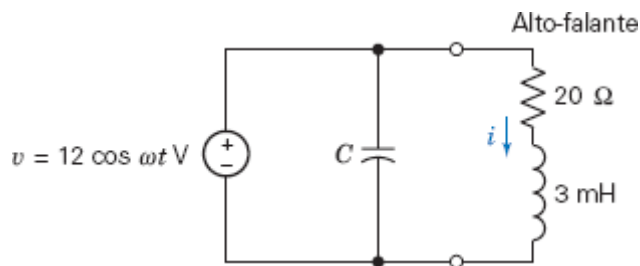



Figura P 10.5-13 Circuito de um sintetizador.

P 10.5-14 Determine B e L no circuito da Figura P 10.5-14 para $i(t) = B \cos (3t - 51{,}87°)$ A.

Resposta: $B = 1{,}6$ e $L = 2$H

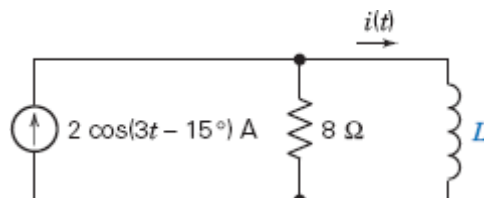



Figura P 10.5-14

P 10.5-15 Ferimentos na medula espinhal podem causar paralisia dos membros inferiores e perda do controle da bexiga. Muitos dispositivos elétricos têm sido propostos para substituir o estímulo nervoso que normalmente controla o funcionamento da bexiga. A Figura P 10.5-15 mostra o circuito de um sistema de controle da bexiga no qual $v_s = 20 \cos \omega t$ V e $\omega = 100$ rad/s. Determine a tensão do resistor de carga de 10 Ω no regime estacionário.

Resposta: $v(t) = 10\sqrt{2}\ \cos(100t + 45°)$ V

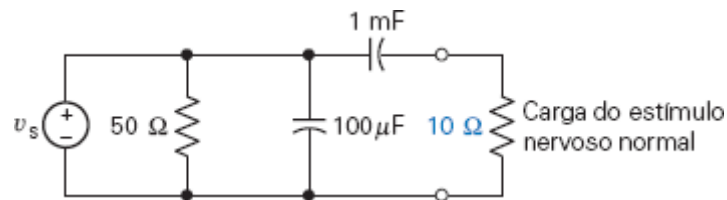



Figura P 10.5-15

P 10.5-16 Todo ano, 500 a 1000 pessoas morrem nos Estados Unidos por causa de choques elétricos. Se uma pessoa faz um bom contato elétrico com as mãos, o circuito pode ser representado pela Figura P 10.5-16, em que v_s = 160 cos ωt V e $\omega = 2\pi f$. Determine a corrente que atravessa o corpo, depois de atingido o regime estacionário, (a) para f = 60 Hz; (b) para f = 400 Hz.

Respostas: **(a)** $i(t)$ = 0,53 cos (120πt + 5,9º) A

(b) $i(t)$ = 0,625 cos (800πt + 59,9º) A

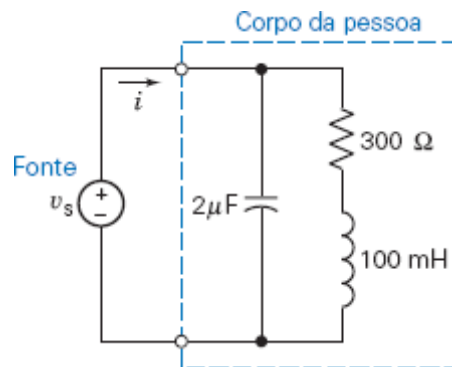



Figura P 10.5-16

P 10.5-17 Determine a tensão $v(t)$ e a corrente $i(t)$ nos circuitos da Figura P 10.5-17.

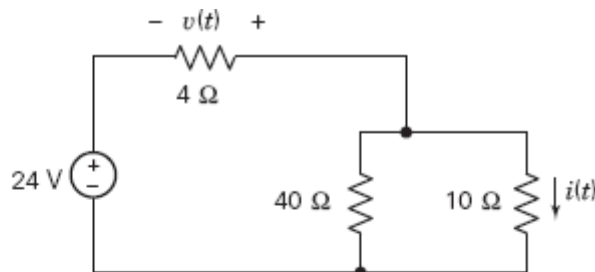
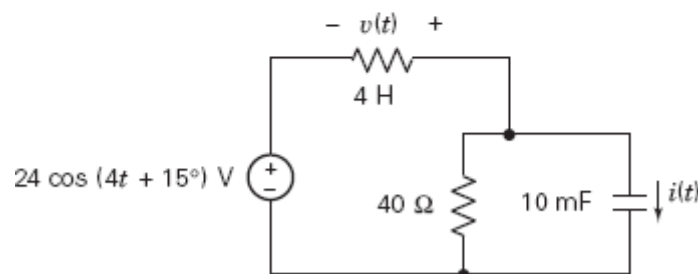



Figura P 10.5-17

P 10.5-18 Determine a corrente $i(t)$ no circuito da Figura P 10.5-18.

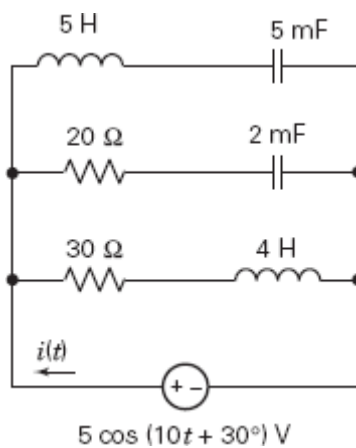



Figura P 10.5-18

P 10.5-19 Determine a tensão $v(t)$ no circuito da Figura P 10.5-19.

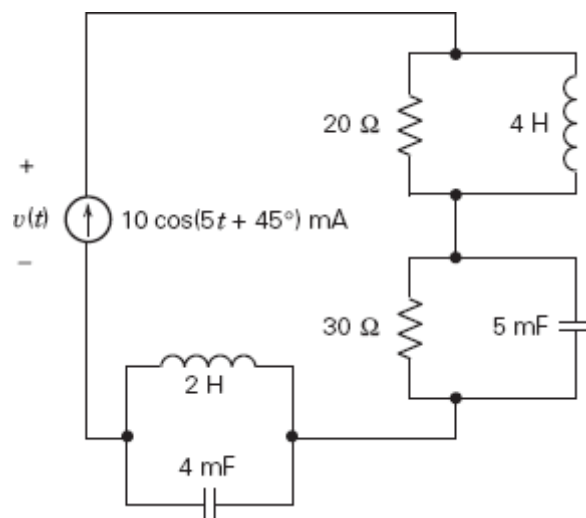



Figura P 10.5-19

P 10.5-20 Determine a tensão $v(t)$ no circuito da Figura P 10.5-20.

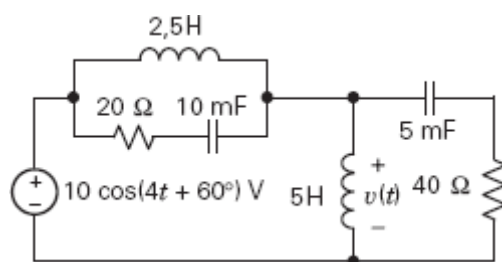



Figura P 10.5-20

P 10.5-21 A entrada do circuito da Figura P 10.5-21 é a corrente da fonte de corrente,

$$i_s(t) = 25 \cos (10t + 15°) \text{ mA}$$

A saída é a corrente $i_1(t)$. Determine a resposta $i_1(t)$.

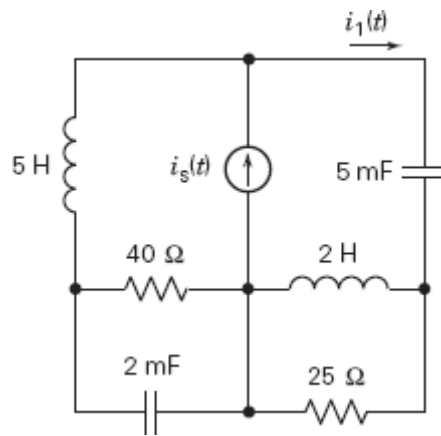



Figura P 10.5-21

P 10.5-22 Determine a tensão $v(t)$ e a corrente $i(t)$ nos circuitos da Figura P 10.5-22.

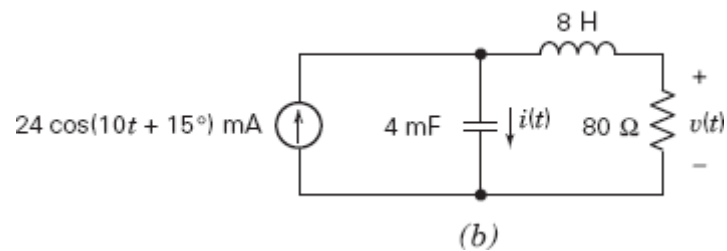
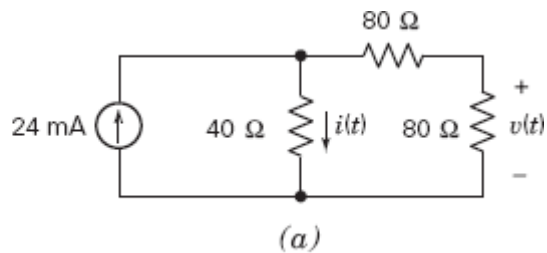



Figura P 10.5-22

P 10.5-23 Determine a corrente $i(t)$ no circuito da Figura P 10.5-23.

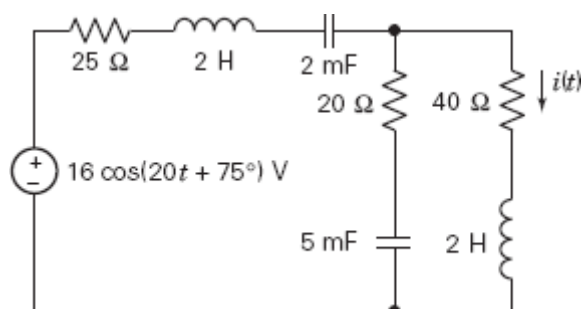



Figura P 10.5-23

P 10.5-24 Quando a chave do circuito da Figura P 10.5-24 está aberta e o circuito está no regime estacionário, a tensão do capacitor é

$$v(t) = 14{,}14 \cos(100t - 45^\circ)\ \text{V}$$

Quando a chave está fechada e o circuito está no regime estacionário, a tensão do capacitor é

$$v(t) = 17{,}89 \cos(100t - 26{,}6^\circ)\ \text{V}$$

Determine o valor das resistências R_1 e R_2.

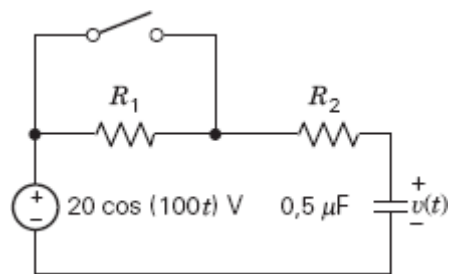



Figura P 10.5-24

P 10.5-25 Determine a corrente $i(t)$ no circuito da Figura P 10.5-25.

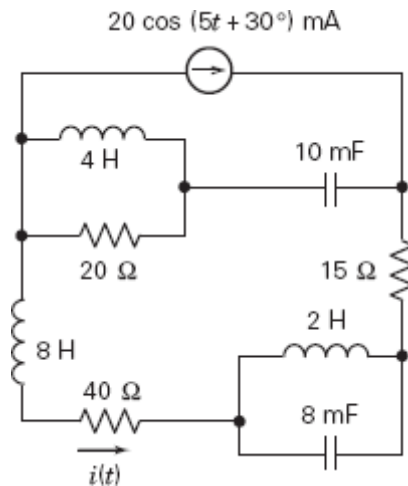



Figura P 10.5-25

P 10.5-26 Determine a tensão $v(t)$ e a corrente $i(t)$ nos circuitos da Figura P 10.5-26.

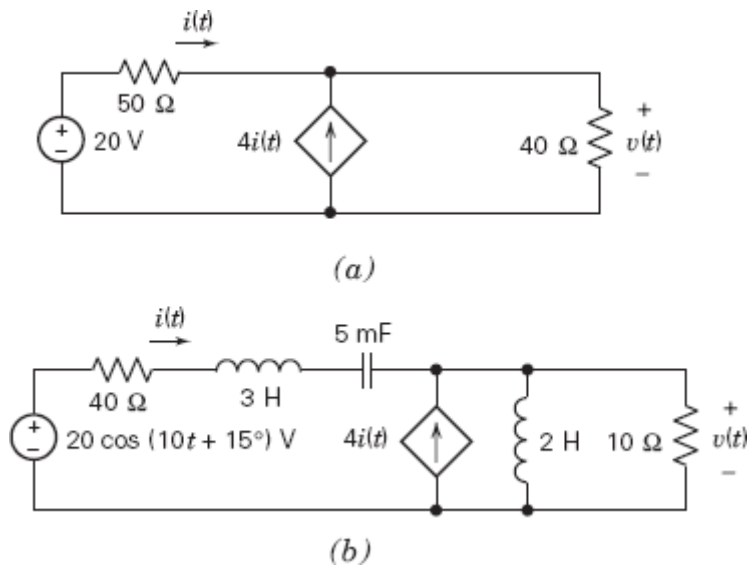



Figura P 10.5-26

P 10.5-27 Determine a tensão $v(t)$ nos circuitos da Figura P 10.5-27.

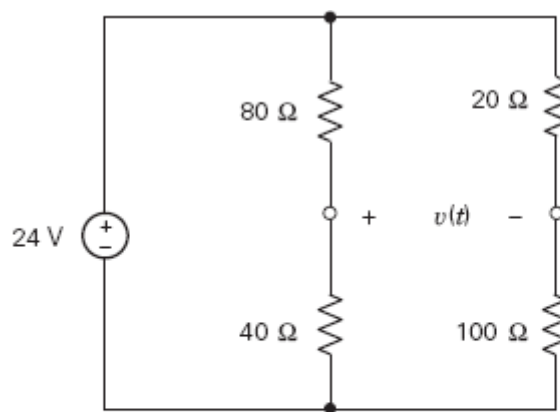
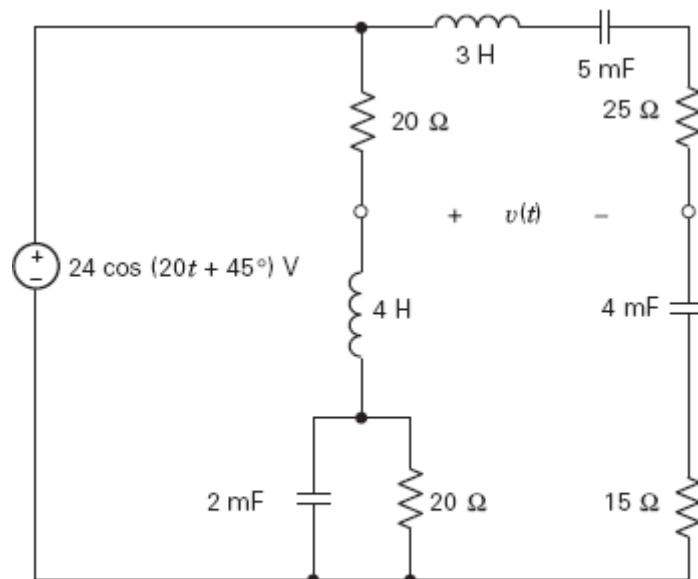



Figura P 10.5-27

P 10.5-28 A entrada do circuito da Figura P 10.5-28 é a tensão da fonte de tensão,

$$v_s(t) = 5\cos(2t + 45^\circ)\text{ V}$$

A saída é a tensão do indutor, $v(t)$. Determine a tensão de saída.

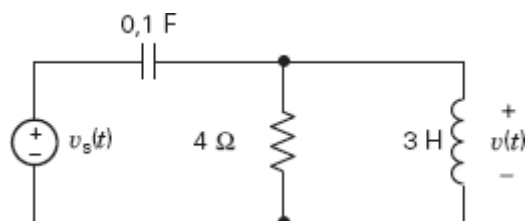



Figura P 10.5-28

P 10.5-29 Determine a tensão $v(t)$ no circuito da Figura P 10.5-29.

Sugestão: Analise o circuito no domínio da frequência, usando impedâncias e fasores. Use duas vezes o método da divisão de tensão. Some os resultados.

Resposta: $v(t) = 3{,}58\cos(5t + 47{,}2^\circ)$ V

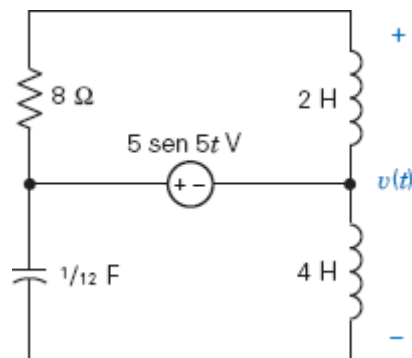



Figura P 10.5-29

P 10.5-30 Determine a tensão $v(t)$ no circuito da Figura P 10.5-30.

Sugestão: Analise o circuito no domínio da frequência, usando impedâncias e fasores. Substitua duas vezes as impedâncias em paralelo por uma impedância equivalente. Aplique a LKT.

Resposta: $v(t) = 14{,}4 \cos(3t - 22^\circ)$ V

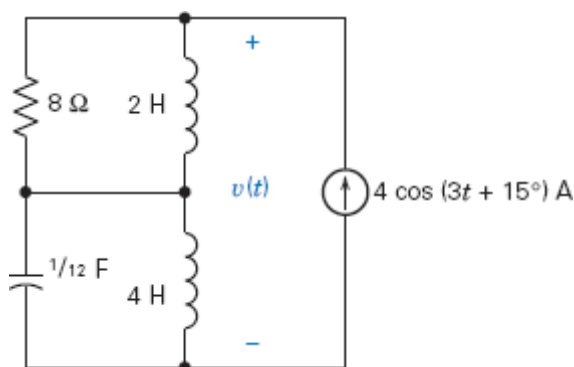



Figura P 10.5-30

P 10.5-31 A entrada do circuito da Figura P 10.5-31 é a tensão da fonte de tensão, $v_s(t)$, e a saída é a tensão $v_o(t)$. Quando a entrada é $v_s(t) = 8 \cos(40t)$ V, a saída é $v_o(t) = 2{,}5 \cos(40t + 14^\circ)$ V. Determine o valor das resistências R_1 e R_2.

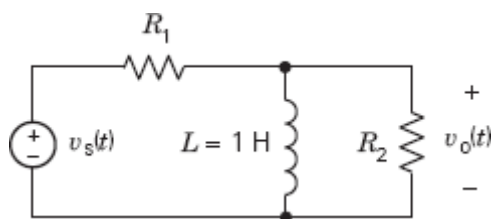



Figura P 10.5-31

Seção 10.6 **Equações de Nó e de Malha**

P 10.6-1 A entrada do circuito da Figura P 10.6-1 é a tensão

$$v_s(t) = 48 \cos(2500t + 45^\circ) \text{ V}$$

Escreva e resolva equações de nó para determinar a tensão de saída, $v_o(t)$.

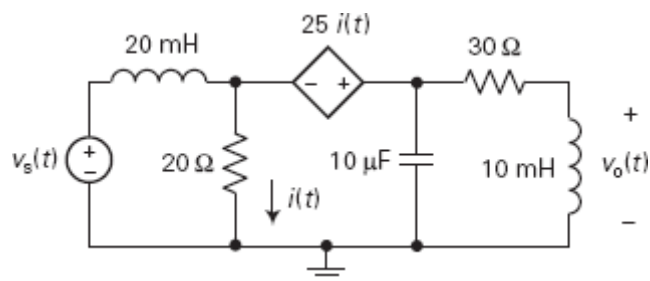



Figura P 10.6-1

P 10.6-2 A Figura P 10.6-2 mostra um circuito de CA representado no domínio da frequência. Determine o valor dos fasores $\mathbf{V}_b$ e $\mathbf{V}_c$.

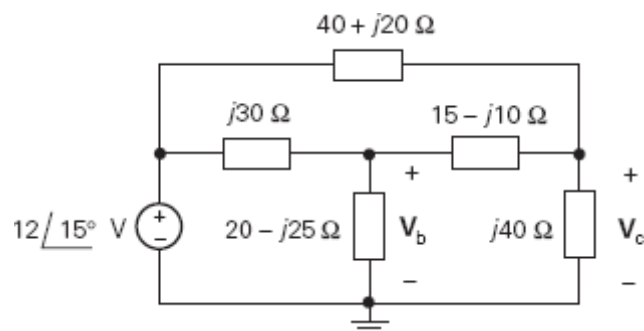



Figura P 10.6-2

Resposta: $\mathbf{V}_b = 7{,}69\ \angle{-19{,}8^\circ}$ e $\mathbf{V}_c = 10{,}18\ \angle{7{,}7^\circ}$

P 10.6-3 A Figura P 10.6-3 mostra um circuito de CA representado no domínio da frequência. Determine o valor do fasor **V.**

Resposta: $\mathbf{V} = 71{,}0346\ \angle{-39{,}627^\circ}$ V

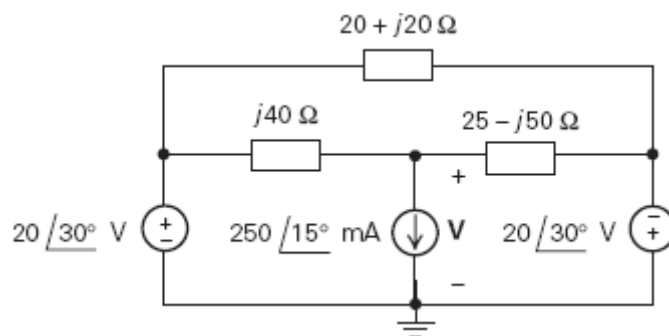



Figura P 10.6-3

P 10.6-4 A Figura P 10.6-4 mostra um circuito de CA representado no domínio da frequência. Determine o valor dos fasores $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$ e $\mathbf{I}_3$.

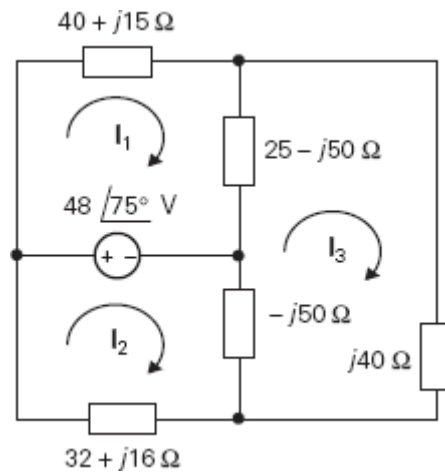



Figura P 10.6-4

P 10.6-5 Os aviões comerciais dispõem de sensores para indicar à tripulação que as portas e o compartimento de bagagem estão fechados. Um dispositivo chamado magnetômetro de bobina sensora, também conhecido como sensor de proximidade, produz um sinal quando um metal ou outro material condutor está próximo de uma bobina sensora. O funcionamento do dispositivo se baseia no fato de a indutância da bobina sensora ser maior quando existe um metal nas proximidades. A indutância da bobina sensora é comparada com a indutância de uma bobina de referência em um circuito chamado ponte de indutâncias (veja a Figura P 10.6-5). Na ponte de indutâncias, um sinal que indica a proximidade de um objeto metálico é observado entre os terminais a e b subtraindo v_b, a tensão do ponto b, de v_a, a tensão do ponto a (Lenz, 1990).

O circuito da ponte é excitado por uma tensão senoidal v_s = sen $(800\pi t)$ V. Os dois resistores têm valores iguais, $R = 100\ \Omega$. Quando a porta está aberta (ou seja, quando não existe nenhum metal nas proximidades da bobina sensora), a indutância da bobina sensora, L_S, é igual à indutância da bobina de referência,L_R = 40 mH. Neste caso, qual é o módulo do fasor $\mathbf{V}_a - \mathbf{V}_b$?

Quando a porta do avião está fechada, L_S = 60 mH. Qual é o módulo do fasor $\mathbf{V}_a - \mathbf{V}_b$ nesse caso?

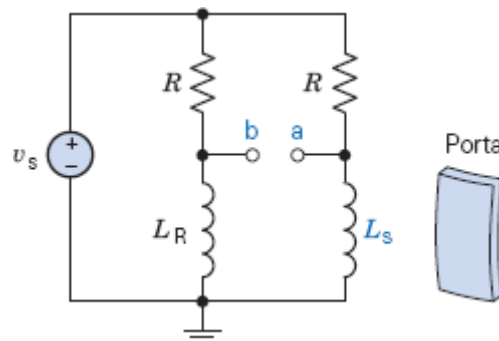



Figura P 10.6-5 Circuito do sensor de porta dos aviões.

P 10.6-6 Usando uma pequena broca de diamante girando a 190.000 rpm, os cardiologistas podem remover perigosos depósitos de gordura das artérias coronárias. O método é rápido, seguro e quase indolor (McCarty, 1991). O Rotablator, um sistema de angioplastia, é composto por um cateter, um fio-guia, um console e uma fonte de alimentação. O cateter contém uma pequena turbina que aciona o eixo flexível que faz girar a ponta da broca. O modelo do circuito de controle do instrumento aparece na Figura P 10.6-6. Determine $v(t)$, a tensão aplicada à turbina, para $v_s = \sqrt{2}$ cos $(40t - 135°)$ V.

Resposta: $v(t)$ = 1,414 cos $(40t + 135°)$ V

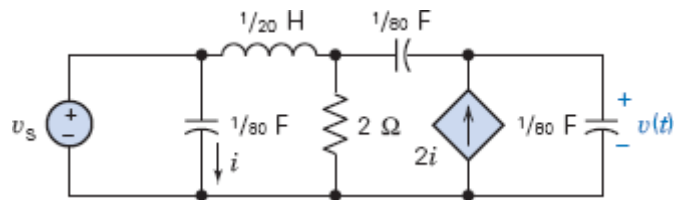



Figura P 10.6-6 Circuito de controle do Rotablator.

P 10.6-7 No circuito da Figura P 10.6-7, sabe-se que

$$v_2(t) = 0{,}7571 \cos(2t + 66{,}7°) \text{ V}$$

$$v_3(t) = 0{,}6064 \cos(2t - 69{,}8°) \text{ V}$$

Determine $i_1(t)$.

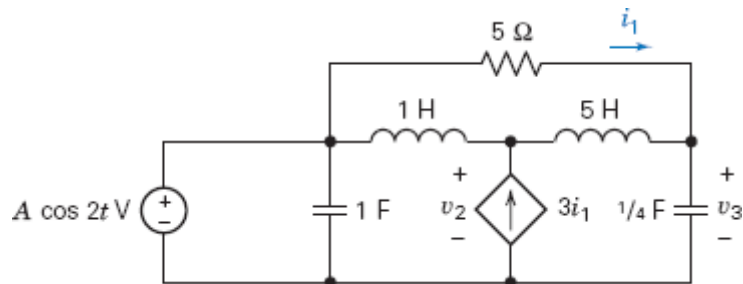



Figura P 10.6-7

P 10.6-8 A entrada do circuito da Figura P 10.6-8 é a tensão

$$v_s = 25 \cos(40t + 45°) \text{ V}$$

Determine as correntes de malha i_1 e i_2 e a tensão v_o.

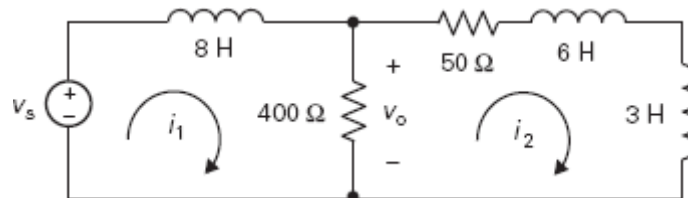



Figura P 10.6-8

P 10.6-9 A entrada do circuito da Figura P 10.6-9 é a tensão

$$v_s(t) = 42 \cos(800t + 60°) \text{ mV}$$

Determine a tensão de saída $v_o(t)$.

Resposta: $v_o(t) = 823{,}5 \cos(800t - 55{,}6°)$ mV

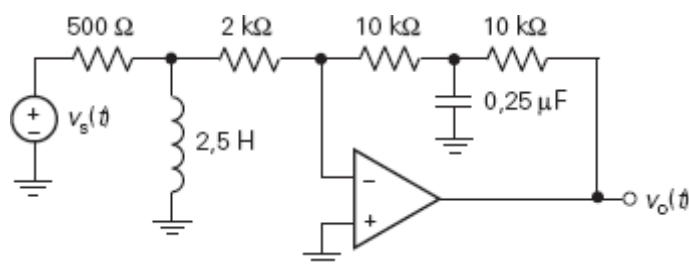



Figura P 10.6-9

P 10.6-10 A ideia de usar bobinas de indução em lâmpadas não é nova, mas esse tipo de lâmpada só começou a ser produzido em escala comercial na década de 1990. Uma bobina de indução produz correntes de alta frequência em vapor de mercúrio, excitando os átomos de mercúrio e fazendo-os emitir radiação ultravioleta, que o revestimento interno da lâmpada converte em luz visível. A lâmpada consome a mesma energia que uma lâmpada fluorescente comum, mas dura seis vezes mais, o que corresponde a 60 vezes a vida útil de uma lâmpada incandescente. A Figura P 10.6-10 mostra o circuito de uma lâmpada de indução. Determine a tensão $v(t)$ do resistor de 2 Ω para $C = 40\ \mu$F, $L = 40\ \mu$H, $v_s = 10 \cos(\omega_0 t + 30°)$ e $\omega_0 = 10^5$ rad/s.

Resposta: $v(t) = 6{,}45 \cos(10^5 t + 44°)$ V

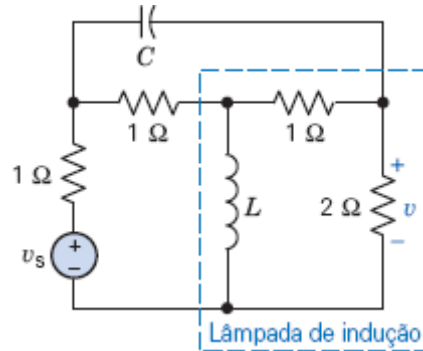



Figura P 10.6-10 Circuito de uma lâmpada de indução.

P 10.6-11 A construção de hotéis de turismo em regiões costeiras se tornou um negócio florescente em várias partes do mundo. A necessidade de uma proteção ecologicamente aceitável contra tubarões se tornou premente nos casos em que os hotéis são construídos em locais onde as águas estão infestadas de tubarões (Smith, 1991). Uma solução proposta é usar um fio eletrificado submerso na água para manter os tubarões à distância, como mostra a Figura P 10.6-11*a*. O circuito da cerca elétrica aparece na Figura P 10.6-11*b*, onde o tubarão está representado por uma resistência equivalente de 100 Ω. Determine a corrente $i(t)$ que atravessa o corpo do tubarão, supondo que $v_s = 375 \cos 400t$ V.

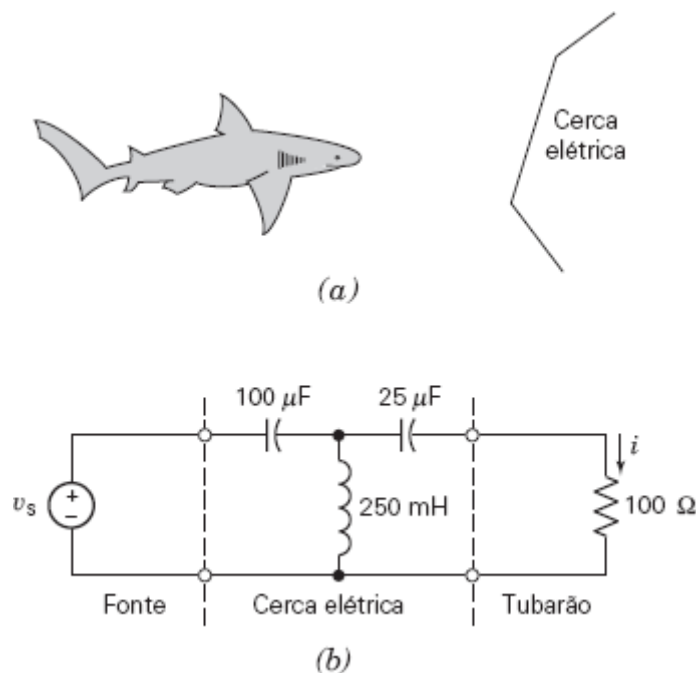



Figura P 10.6-11 Cerca elétrica para manter tubarões à distância.

P 10.6-12 Determine a tensão dos nós a e b dos circuitos da Figura P 10.6-12.

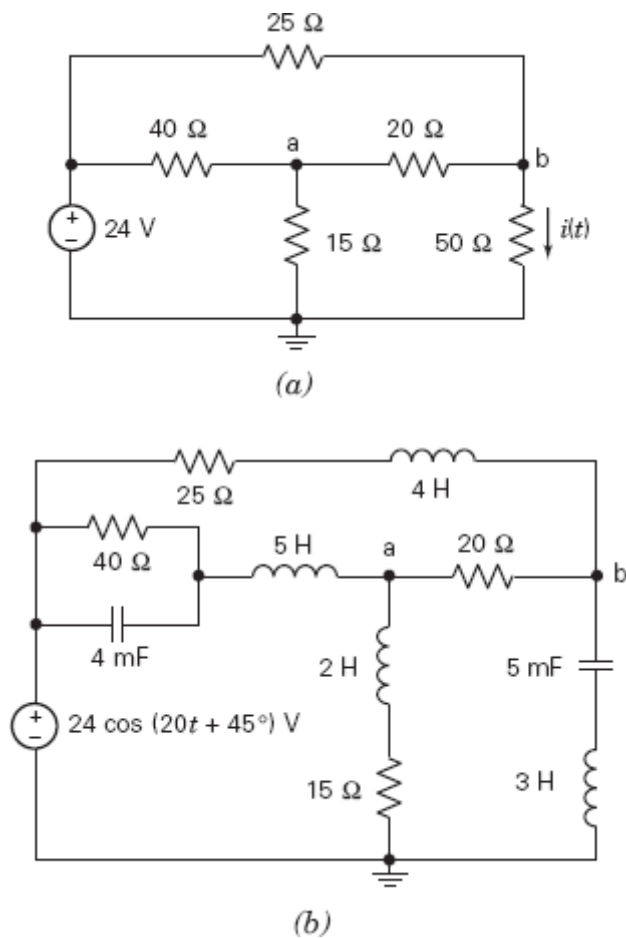



Figura P 10.6-12

P 10.6-13 Determine a tensão $v(t)$ no circuito da Figura P 10.6-13.

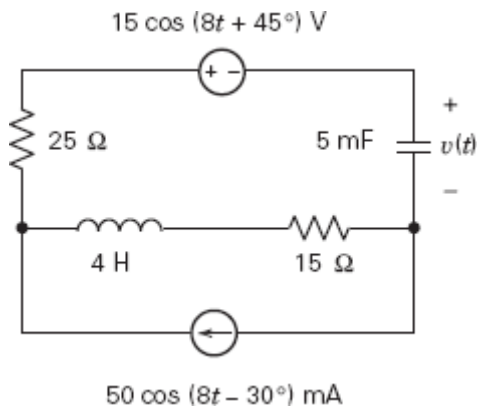



Figura P 10.6-13

P 10.6-14 A entrada do circuito da Figura P 10.9-14 é a tensão $v_s(t)$ da fonte de tensão. A saída é a tensão $v_o(t)$ do resistor. Determine a tensão de saída se o circuito está no regime estacionário e a entrada é

$$v_s(t) = 25 \cos (100t - 15°) \text{ V}$$

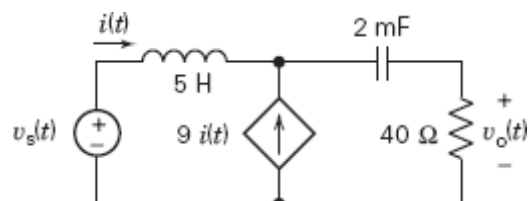



Figura P 10.6-14

P 10.6-15 Quando o circuito da Figura P 10.6-15 está no regime estacionário, a corrente de malha é

$$i(t) = 0{,}8394 \cos(10t + 138{,}5°) \text{ A}$$

Determine o valor de L e R.

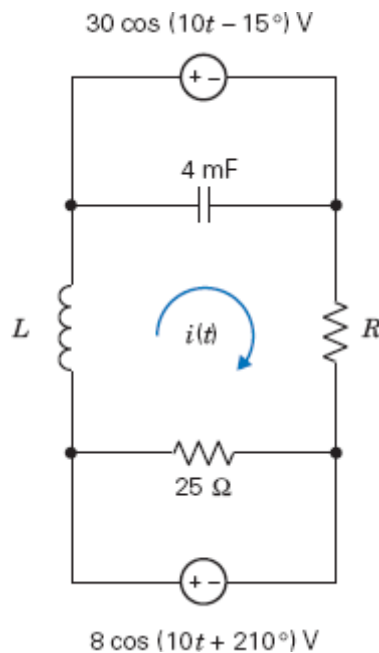



Figura P 10.6-15

P 10.6-16 O circuito da Figura P 10.6-16 tem duas entradas:

$$v_1(t) = 50 \cos(20t - 75°) \text{ V}$$

$$v_2(t) = 35 \cos(20t + 110°) \text{ V}$$

Quando o circuito está no regime estacionário, a tensão do resistor R é

$$v(t) = 21{,}25 \cos(20t - 168{,}8°) \text{ V}$$

Determine o valor de R e L.

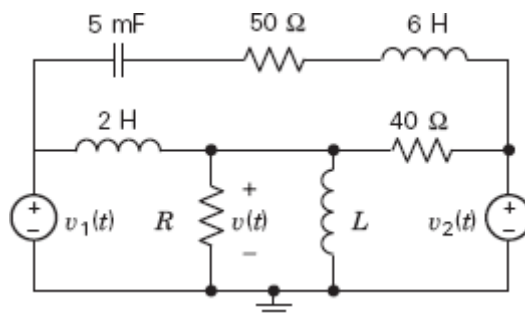



Figura P 10.6-16

P 10.6-17 Determine a corrente $i(t)$ no circuito da Figura P 10.6-17.

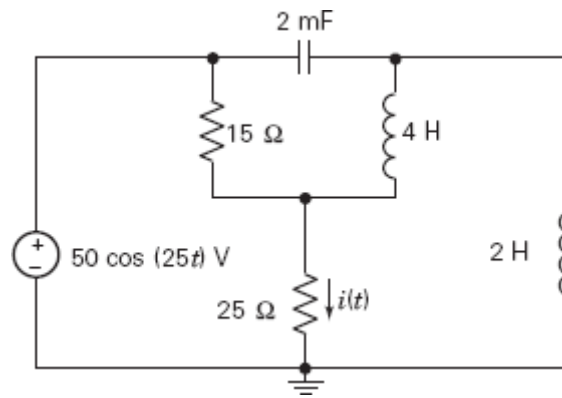



Figura P 10.6-17

P 10.6-18 Determine a corrente $i(t)$ no circuito da Figura P 10.6-18.

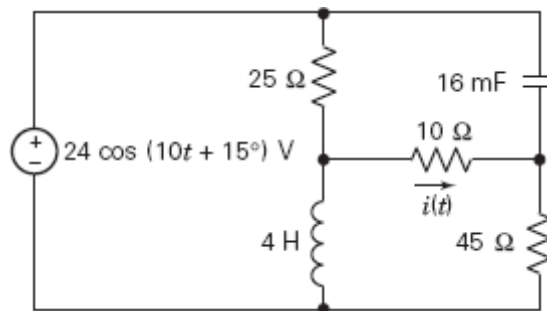



Figura P 10.6-18

P 10.6-19 Determine a tensão $v_o(t)$ no circuito da Figura P 10.6-19.

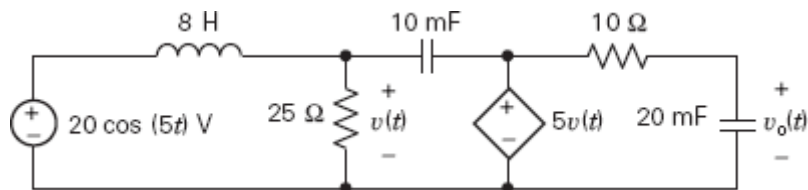



Figura P 10.6-19

P 10.6-20 Determine a corrente $i(t)$ nos circuitos da Figura P 10.6-20.

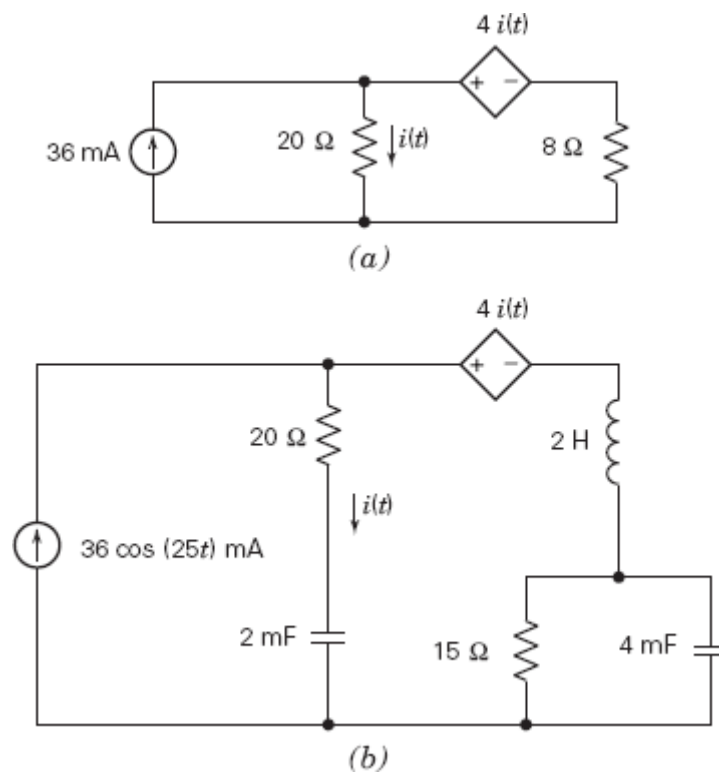



Figura P 10.6-20

P 10.6-21 A entrada do circuito da Figura P 10.6-21 é a corrente

$$i_s(t) = 50 \cos(200t) \text{ mA}$$

Determine a corrente de malha i_2.

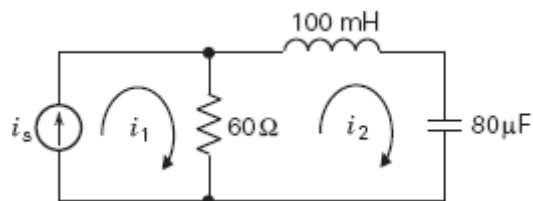



Figura P 10.6-21

P 10.6-22 A entrada do circuito da Figura P 10.6-22 é a corrente

$$i_s(t) = 80 \cos(250t) \text{ mA}$$

Se a corrente na malha da direita é

$$i_s(t) = 66{,}56 \cos(250t + 33{,}7^o) \text{ mA}$$

determine o valor da resistência R.

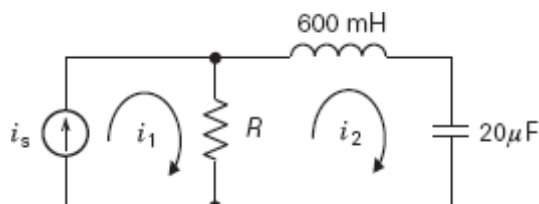



Figura P 10.6-22

P 10.6-23 O circuito da Figura P 10.6-23 está no regime estacionário. Se as tensões das fontes são

$$v_1(t) = 12 \cos(2t - 90°) \text{ V} \quad \text{e} \quad v_2(t) = 5 \cos(2t + 90°) \text{ V}$$

e as correntes dos ramos são

$$i_1(t) = 744 \cos(2t - 118) \text{ mA}, \; i_2(t) = 540 \cos(2t + 100°) \text{ mA}$$

determine o valor de R_1, R_2, L e C.

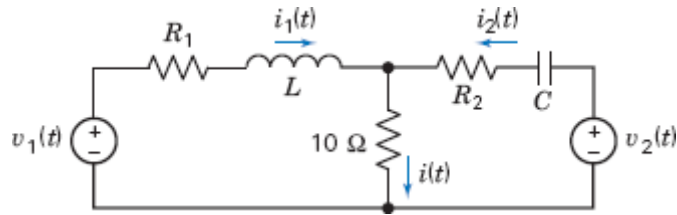



Figura P 10.6-23

Seção 10.7 **Circuitos Equivalentes de Norton e de Thévenin**

P 10.7-1 Determine o circuito equivalente de Thévenin do circuito da Figura P 10.7-1 se (a) $\omega = 1000$ rad/s, (b) $\omega = 2000$ rad/s e (c) $\omega = 4000$ rad/s.

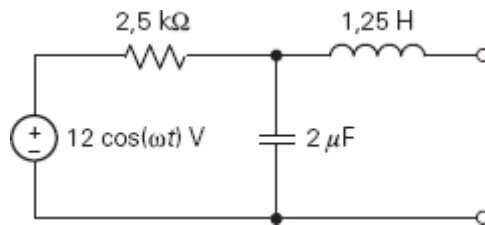



Figura P 10.7-1

P 10.7-2 Determine o circuito equivalente de Thévenin do circuito da Figura P 10.7-2 para $v_s = 5 \cos(4000t - 30°)$.

Resposta: $\mathbf{V}_t = 5{,}7\angle{-21{,}9°}$ V
$\mathbf{Z}_t = 23\angle{-81{,}9°}$ Ω

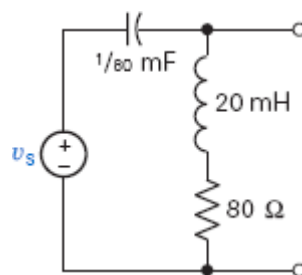



Figura P 10.7-2

P 10.7-3 Determine o circuito equivalente de Thévenin do circuito da Figura P 10.7-3, usando o método das correntes de malha.

Resposta: $\mathbf{V}_t = 3{,}71\angle{-16°}$ V
$\mathbf{Z}_t = 247\angle{-16°}$ Ω

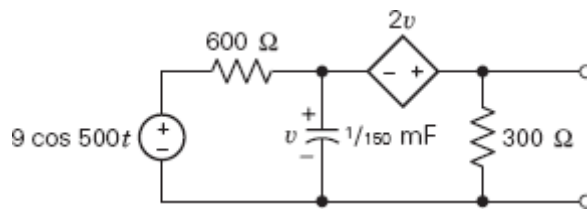



Figura P 10.7-3

P 10.7-4 Um CD player compacto utiliza o circuito amplificador da Figura P 10.7-4 com um sinal $v_s = 10 \cos (\omega t + 53{,}1°)$, onde $\omega = 10.000$ rad/s. Determine o circuito equivalente de Thévenin nos terminais de saída a e b.

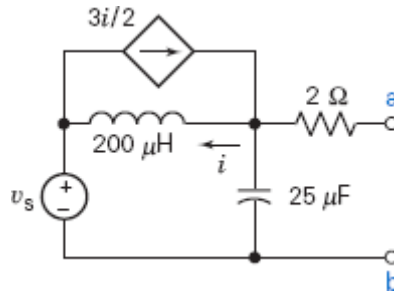



Figura P 10.7-4

P 10.7-5 Um receptor de rádio AM usa o circuito *RLC* paralelo da Figura P 10.7-5. Determine a frequência f_0 para a qual a admitância **Y** é uma condutância pura. O receptor de rádio recebe uma transmissão na frequência f_0. Qual é o "número" da estação no mostrador do rádio?

Resposta: $f_0 = 800$ kHz; o número no mostrador é 80.

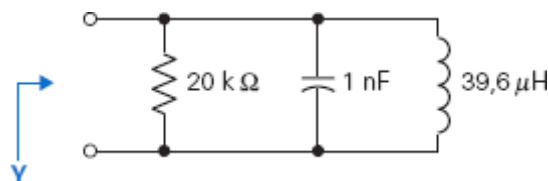



Figura P 10.7-5

P 10.7-6 Determine a corrente **I** no circuito da Figura P 10.7-6 usando o seguinte método: depois de executar uma série de transformações de fonte para reduzir a parte do circuito ligada ao resistor de 2 Ω a um circuito equivalente de Norton, determine a corrente no resistor de 2 Ω por divisão de tensão.

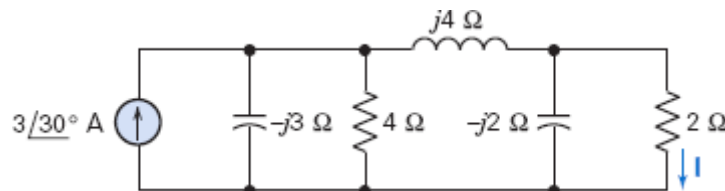



Figura P 10.7-6

P 10.7-7 Determine a corrente **I** no circuito da Figura P 10.7-7 executando uma série de transformações de fonte. A frequência angular da fonte é $\omega = 25 \times 10^3$ rad/s.

Resposta: $i(t) = 4 \cos (25.000t - 44°)$ mA.

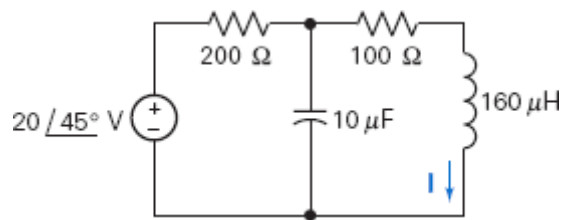



Figura P 10.7-7

P 10.7-8 Determine o valor de $\mathbf{V}_t$ e $\mathbf{Z}_t$ para que o circuito da Figura P 10.7-8*b* seja o circuito equivalente de Thévenin do circuito da Figura P 10.7-8*a*.

Resposta: $\mathbf{V}_t = 3{,}58\ \angle 47^\circ$ e $\mathbf{Z}_t = 4{,}9 + j1{,}2\Omega$

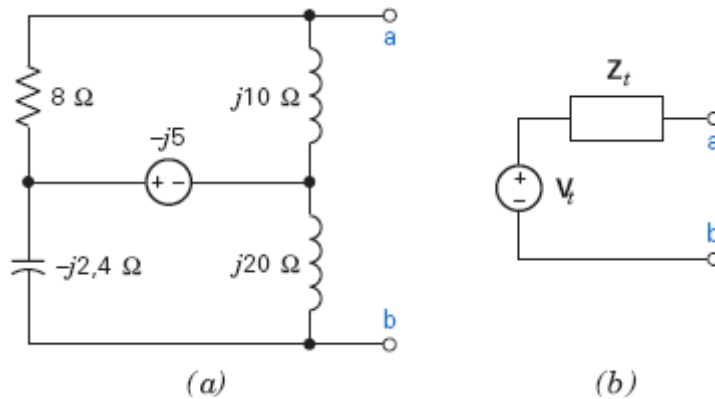



Figura P 10.7-8

Seção 10.8 **Superposição**

P 10.8-1 Determine a corrente $i(t)$ no circuito da Figura P 10.8-1 se as tensões das fontes forem

$$v_{s1}(t) = 12 \cos(2500\ t)\ \mathrm{V}$$

e

$$v_{s2}(t) = 12 \cos(4000\ t)\ \mathrm{V}$$

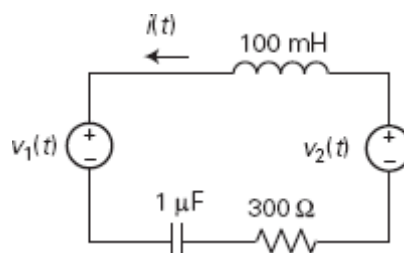



Figura P 10.8-1

P 10.8-2 Determine a tensão $v_o(t)$ no circuito da Figura P 10.8-2 se a frequência da fonte de corrente for (*a*) 400 rad/s e (*b*) 200 rad/s.

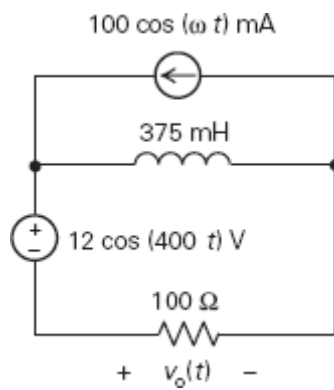



Figura P 10.8-2

P 10.8-3 Determine a corrente $i(t)$ no circuito da Figura P 10.8-3 se a tensão da fonte de tensão for

$$v_s(t) = 8 + 8 \cos(400t - 135°) \text{ V}$$

Resposta: $i(t) = 0{,}533 + 0{,}32 \cos(400t - 188°)$ A

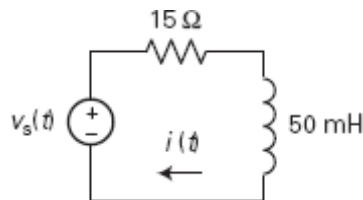



Figura P 10.8-3

P 10.8-4 Determine a corrente $i(t)$ no circuito da Figura P 10.8-4 se as tensões das fontes forem

$$v_{s1}(t) = 10 \cos(800t + 30°) \text{ V}$$

e

$$v_{s2}(t) = 15 \text{ sen}(200t - 30°) \text{ V}$$

Resposta: $i(t) = 44{,}7 \cos(800t - 33{,}4°) + 134{,}2 \cos(200t + 33{,}4°)$

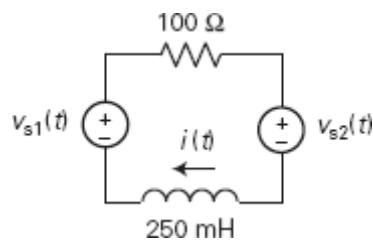



Figura P 10.8-4

P 10.8-5 A entrada do circuito da Figura P 10.8-5 é a corrente da fonte independente

$$i_s(t) = 36 \cos(25t) + 48 \cos(50t + 45°) \text{ mA}$$

Determine a corrente $i(t)$.

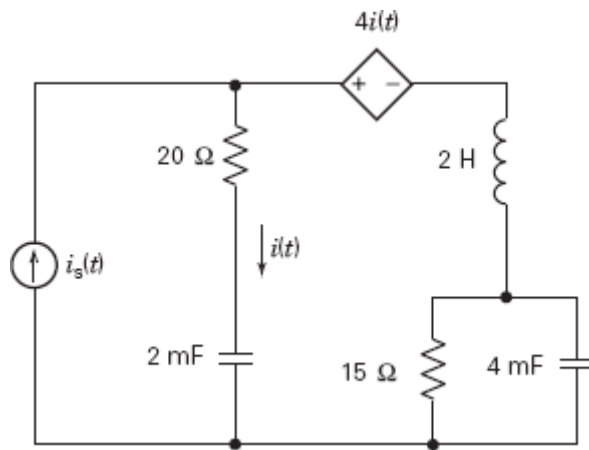



Figura P 10.8-5

P 10.8-6 As entradas do circuito da Figura P 10.8-6 são

$$v_{s1}(t) = 30 \cos (20t + 70^\circ) \text{ V}$$

e

$$v_{s2}(t) = 18 \cos (10t - 15^\circ) \text{ V}$$

Determine a corrente $i(t)$.

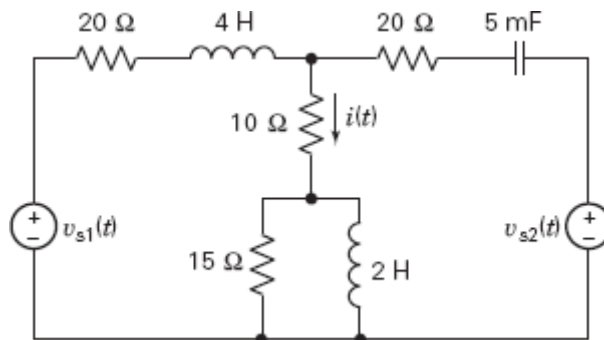



Figura P 10.8-6

P 10.8-7 A entrada do circuito da Figura P 10.8-7 é a tensão da fonte

$$v_s(t) = 5 + 30 \cos (100t) \text{ V}$$

Determine a corrente $i(t)$.

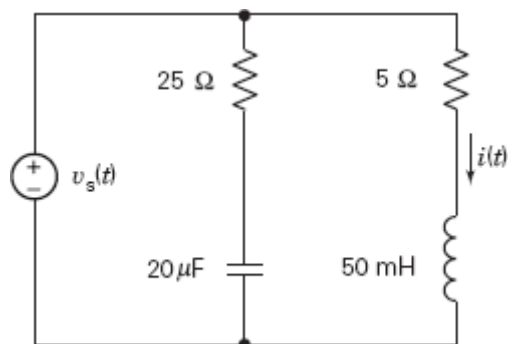



Figura P 10.8-7

P 10.8-8 Determine a tensão $v(t)$ no circuito da Figura P 10.8-8.

Resposta: $v(t) = 3{,}58 \cos (5t + 47{,}2^\circ) + 14{,}4 \cos (3t - 22^\circ)$ V

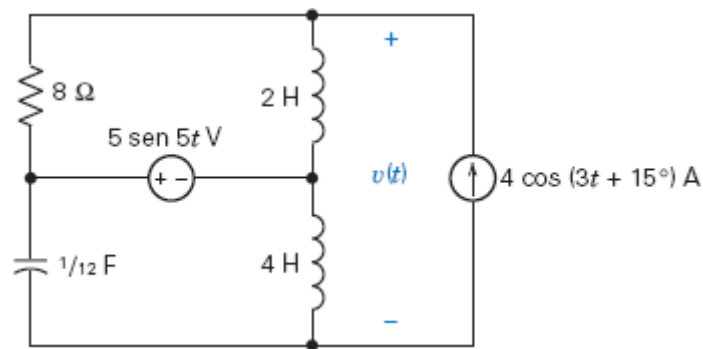



Figura P 10.8-8

P 10.8-9 Determine a corrente $i(t)$ no circuito da Figura P 10.8-9 se $v_1 = 10 \cos 10t$ V.

Resposta: $i(t) = -2 + 0{,}71 \cos (10t - 45°)$ A

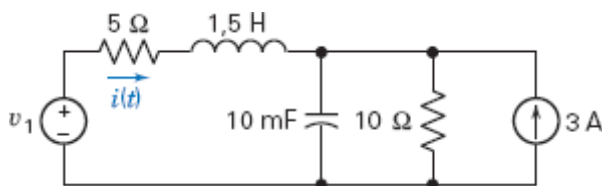



Figura P 10.8-9

Seção 10.9 **Diagramas Fasoriais**

P 10.9-1 Use um diagrama fasorial para determinar $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3^*$ para $\mathbf{V}_1 = 3 + j3$, $\mathbf{V}_2 = 4 + j2$ e $\mathbf{V}_3 = -3 -j2$. (Todas as tensões estão em volts.)

Resposta: $\mathrm{V} = 5 \angle 143{,}1°$ V

P 10.9-2 No circuito *RLC* série da Figura P 10.9-2, $R = 10\ \Omega$, $L = 1$ mH, $C = 100\ \mu$F e $\omega = 10^3$ rad/s. Determine a corrente **I** e desenhe o diagrama fasorial.

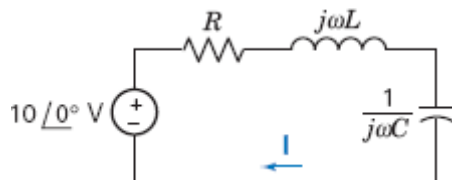



Figura P 10.9-2

Seção 10.10 **Amplificadores Operacionais em Circuitos de CA**

P 10.10-1 A entrada do circuito da Figura P 10.10-1 é a tensão

$$v_s(t) = 2{,}4 \cos (500t) \text{ V}$$

Determine a tensão de saída $v_o(t)$.

Resposta: $v_o(t) = 6{,}788 \cos (500t + 135°)$ V

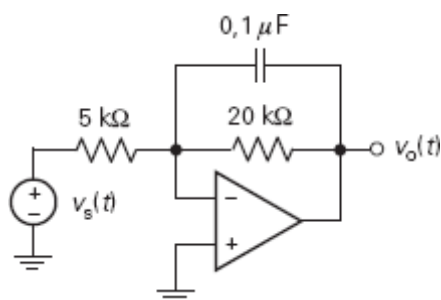



Figura P 10.10-1

P 10.10-2 A entrada do circuito da Figura P 10.10-2 é a tensão

$$v_s(t) = 1{,}2 \cos (400t + 20°) \text{ V}$$

Determine a tensão de saída $v_o(t)$.

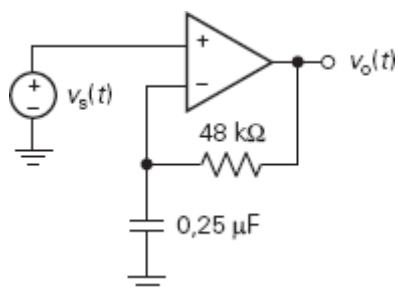



Figura P 10.10-2

P 10.10-3 A entrada do circuito da Figura P 10.10-3 é a tensão

$$v_s(t) = 3{,}2 \cos (200t) \text{ V}$$

Determine a tensão de saída $v_o(t)$.

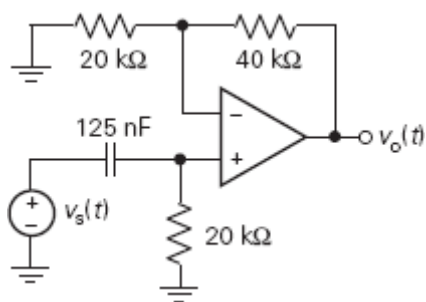



Figura P 10.10-3

P 10.10-4 A entrada do circuito da Figura P 10.10-4 é a tensão

$$v_s(t) = 1{,}2 \cos (2000t) \text{ V}$$

Determine a tensão de saída $v_o(t)$.

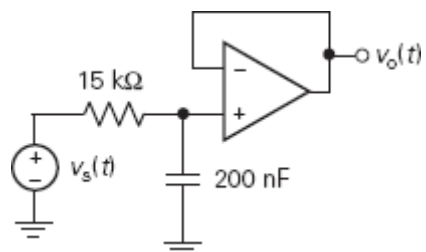



Figura P 10.10-4

P 10.10-5 A entrada do circuito da Figura P 10.10-5 é a tensão

$$v_s(t) = 1{,}2 \cos (2000t) \text{ V}$$

Determine a tensão de saída $v_o(t)$.

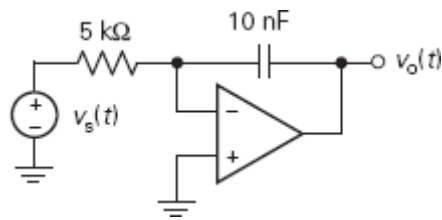



Figura P 10.10-5

P 10.10-6 Determine a razão $\mathbf{V}_o/\mathbf{V}_s$ no circuito da Figura P 10.10-6.

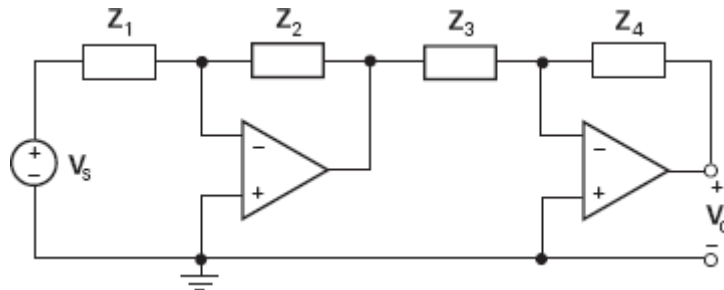



Figura P 10.10-6

P 10.10-7 Determine a razão $\mathbf{V}_o/\mathbf{V}_s$ no circuito da Figura P 10.10-7.

(a)

(b)

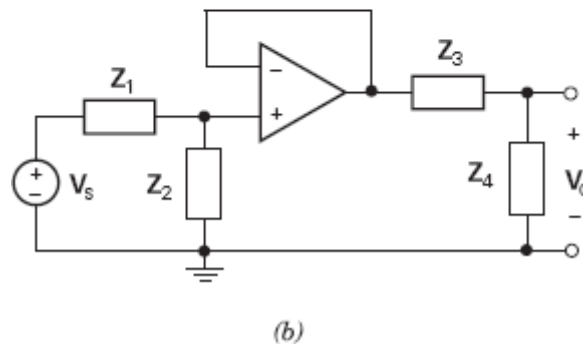
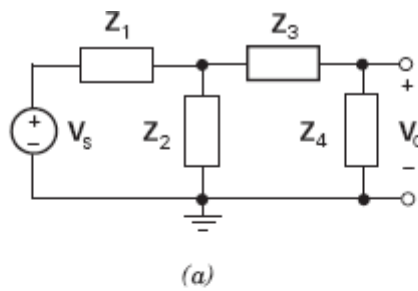



Figura P 10.10-7

P 10.10-8 Determine a razão $\mathbf{V}_o/\mathbf{V}_s$ no circuito da Figura P 10.10-8.

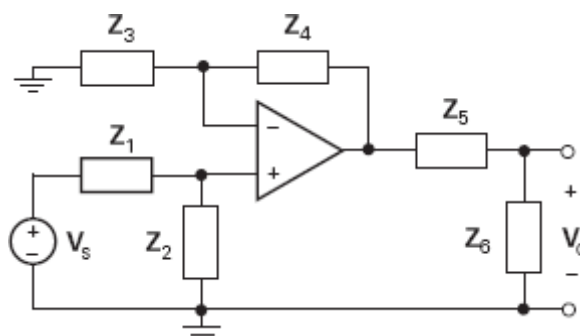



Figura P 10.10-8

P 10.10-9 Quando a tensão $v_s(t)$ da fonte do circuito da Figura P 10.10-9 é

$$v_s(t) = 2 \cos(1000t) \text{ V}$$

a tensão de saída $v_o(t)$ é

$$v_o(t) = 5 \cos(1000t - 71{,}6^\circ) \text{ V}$$

Determine o valor das resistências R_1 e R_2.

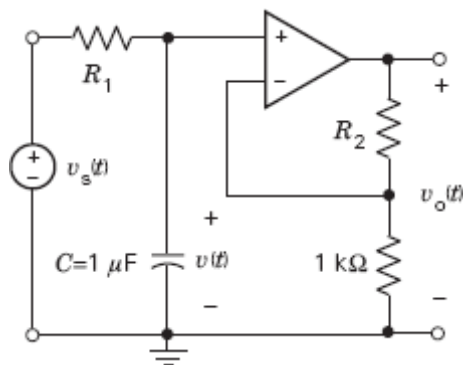



Figura P 10.10-9

P 10.10-10 Quando a tensão $v_s(t)$ da fonte do circuito da Figura P 10.10-9 é

$$v_s(t) = 4 \cos(1000t) \text{ V}$$

a tensão de saída $v_o(t)$ é

$$v_o(t) = 8 \cos(100t + 135^\circ) \text{ V}$$

Determine o valor de C e R.

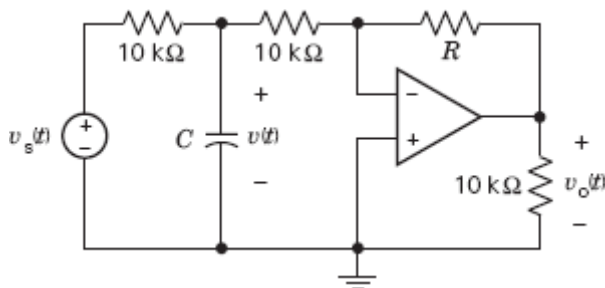



Figura P 10.10-10

P 10.10-11 A entrada do circuito da Figura P 10.10-11 é a tensão $v_s(t)$ da fonte e a saída é a tensão $v_o(t)$. Se a entrada é $v_o(t) = 2{,}5 \cos(1000t)$ V, a saída é $v_o(t) = 8 \cos(1000t + 104^\circ)$ V. Determine o valor das resistências R_1 e R_2.

Resposta: $R_1 = 1515\ \Omega$ e $R_2 = 20\ \text{k}\Omega$.

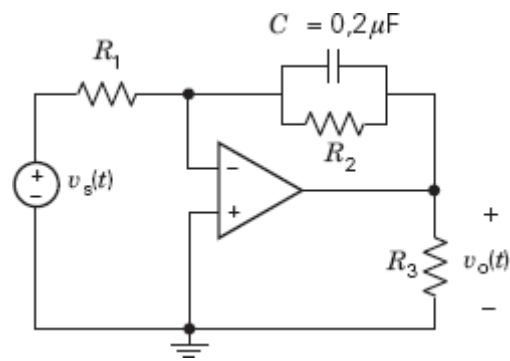



Figura P 10.10-11

Seção 10.11 **A Resposta Completa**

P 10.11-1 A entrada do circuito da Figura P 10.11-1 é a tensão v_s = 12 cos (4000t) V. A saída é a tensão v_o do capacitor. Determine v_o.

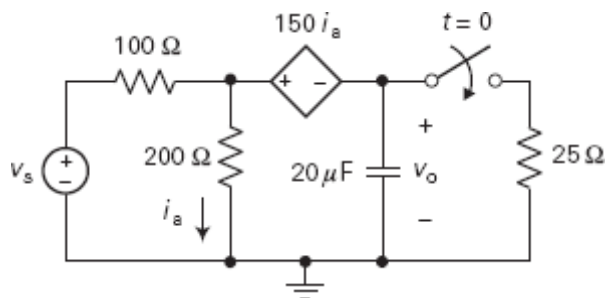



Figura P 10.11-1

P 10.11-2 A entrada do circuito da Figura P 10.11-2 é a tensão v_s = 12 cos (4000t) V. A saída é a tensão v_o do capacitor. Determine v_o.

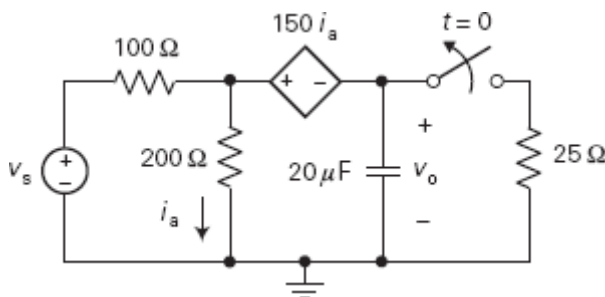



Figura P 10.11-2

Seção 10.12 **Uso do MATLAB para Analisar Circuitos de CA**

P 10.12-1 Determine as correntes de malha do circuito da Figura P 10.12-1 se

$$v_s(t) = 12 \cos (2500t + 60^\circ) \text{ V}$$

e

$$i_s(t) = 2 \cos (2500t - 15^\circ) \text{ mA}$$

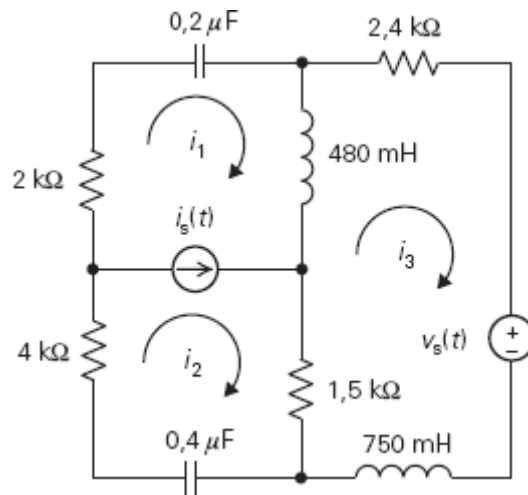



Figura P 10.12-1

P 10.12-2 Determine as tensões de nó do circuito da Figura P 10.12-2 se

$$v_s(t) = 12 \cos (400t + 45°) \text{ V}$$

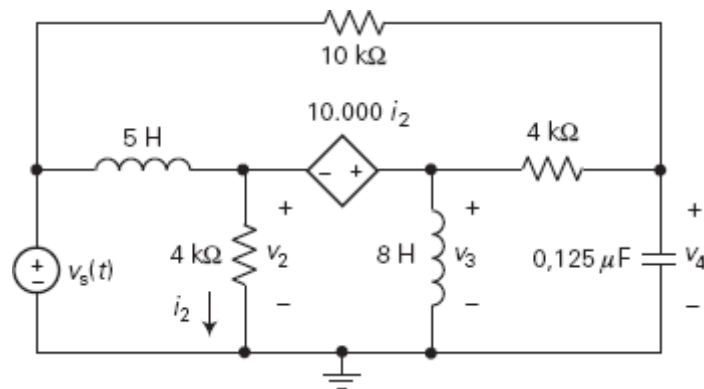



Figura P 10.12-2

P 10.12-3 Determine as correntes de malha do circuito da Figura P 10.12-3.

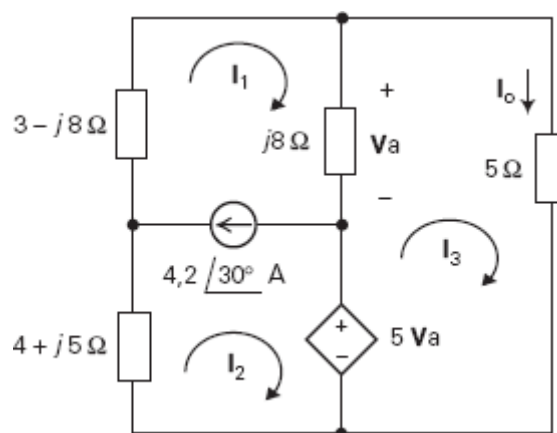



Figura P 10.12-3

P 10.12-4 Determine as tensões de nó do circuito da Figura P 10.12-4.

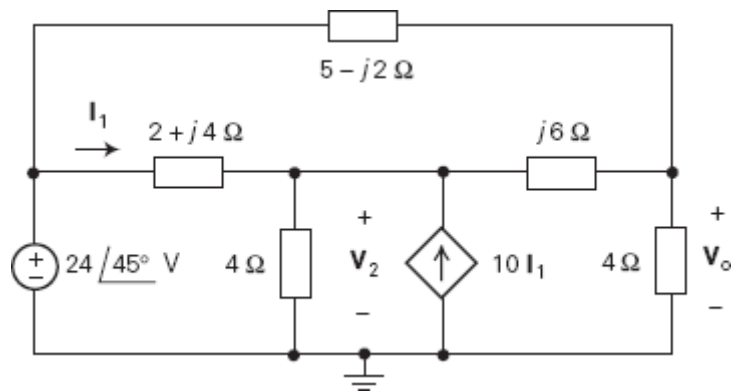



Figura P 10.12-4

P 10.12-5 A entrada do circuito da Figura P 10.12-5 é a tensão

$$v_s(t) = 12 \cos(20.000t + 60°) \text{ V}$$

e a saída é a tensão $v_o(t)$. Use o programa MATLAB para plotar as tensões de entrada e de saída do circuito.

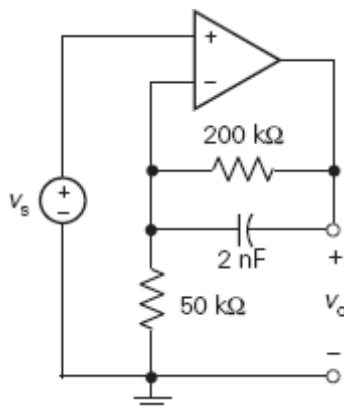



Figura P 10.12-5

P 10.12-6 A entrada do circuito da Figura P 10.12-6 é a tensão

$$v_s(t) = 3 \cos(4000t + 30°) \text{ V}$$

e a saída é a tensão $v_o(t)$. Use o programa MATLAB para plotar as tensões de entrada e de saída do circuito.

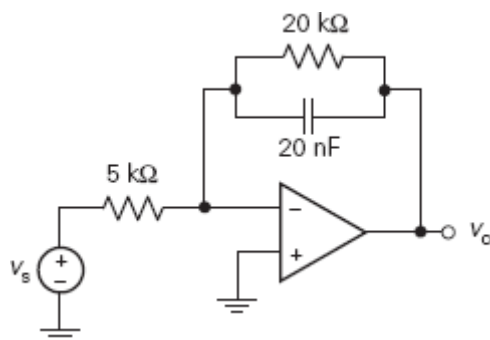



Figura P 10.12-6

Seção 10.14 Como Podemos Testar . . . ?

P 10.14-1 A análise em computador do circuito da Figura P 10.14-1 mostra que os valores das tensões de nó são $\mathbf{V}_1 = 20 \angle{-90°}$ e $\mathbf{V}_2 = 44{,}7 \angle{-63{,}4°}$. Esses valores estão corretos?

Sugestão: Calcule a corrente nos componentes do circuito usando os valores de V_1 e V_2 e verifique se a LKC é satisfeita em todos os nós do circuito.

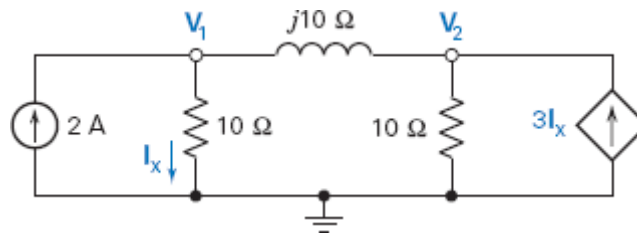



Figura P 10.14-1

P 10.14-2 A análise em computador do circuito da Figura P 10.14-2 mostra que as correntes de malha são $i_1(t) = 0{,}39 \cos(5t + 39^\circ)$ A e $i_2(t) = 0{,}28 \cos(5t + 180^\circ)$ A. A análise está correta?

Sugestão: Represente o circuito no domínio da frequência usando impedâncias e fasores. Calcule a tensão dos componentes do circuito usando os valores de $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ e verifique se a LKT é satisfeita em todas as malhas do circuito.

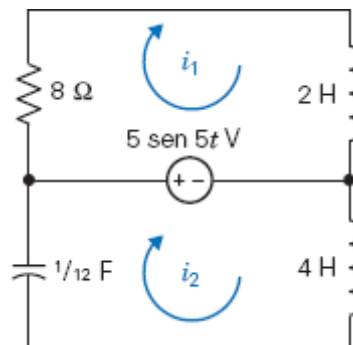



Figura P 10.14-2

P 10.14-3 A análise em computador do circuito da Figura P 10.14-3 mostra que os valores das tensões de nó são $v_1(t) = 19{,}2 \cos(3t + 68^\circ)$ V e $v_2(t) = 2{,}4 \cos(3t + 105^\circ)$ V. A análise está correta?

Sugestão: Represente o circuito no domínio da frequência usando impedâncias e fasores. Calcule a corrente nos componentes do circuito usando os valores de $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$ e verifique se a LKC é satisfeita em todos os nós do circuito.

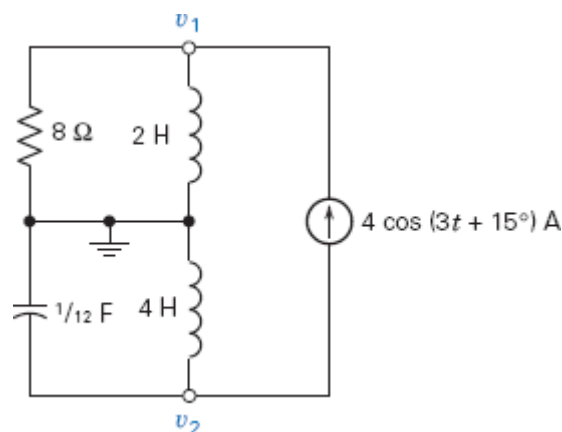



Figura P 10.14-3

P 10.14-4 Um programa de computador calcula que as correntes no circuito da Figura P 10.14-4 são $\mathbf{I} = 0{,}2 \angle 53{,}1^\circ$ A, $\mathbf{I}_1 = 632 \angle -18{,}4^\circ$ mA e $\mathbf{I}_2 = 190 \angle 71{,}6^\circ$ mA. Verifique se esses resultados estão corretos.

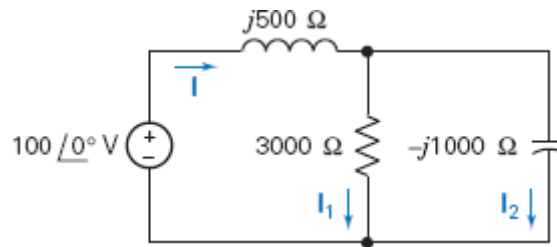



Figura P 10.14-4

P 10.14-5 O circuito da Figura P 10.14-5 foi montado usando um resistor de 2% com uma resistência nominal de 500 Ω e um capacitor de 10% com uma capacitância nominal de 5 μF. O valor medido da tensão estacionária do capacitor é

$$v(t) = 18{,}3 \cos(200t - 24^\circ) \text{ V}$$

A fonte de tensão representa um gerador de sinais. Suponha que o gerador de sinais seja ajustado de tal forma que os erros de amplitude, frequência e ângulo de fase da tensão da fonte de tensão sejam desprezíveis. A resposta medida pode ser explicada pelas tolerâncias? Em outras palavras, a tensão $v(t)$ medida poderia ter sido produzida por este circuito com uma resistência R de 500 Ω ± 10% e uma capacitância C de 5 μF ± 10%?

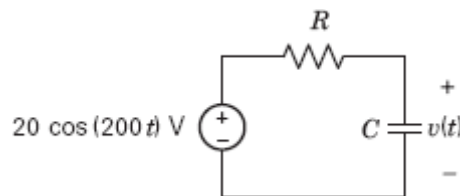



Figura P 10.14-5

Problemas com o PSpice

PS 10-1 O circuito da Figura PS 10-1 tem duas entradas, $v_s(t)$ e $i_s(t)$, e uma saída, $v(t)$. As entradas são dadas por

$$v_s(t) = 10 \text{ sen}(6t + 45^\circ) \text{ V}$$

e

$$i_s(t) = 2 \text{ sen}(6t + 60^\circ) \text{ A}$$

Use o programa PSpice para demonstrar o princípio de superposição. Simule três versões do circuito simultaneamente. (Desenhe o circuito no espaço de trabalho do PSpice. Use "cut" e "paste" para fazer duas cópias. Mude os nomes dos componentes nas cópias para não repetir nomes. Por exemplo: o resistor é chamado de R1 no circuito original. Mude R1 para R2 e R3 nas duas cópias.) Use os valores dados de $v_s(t)$ e $i_s(t)$ na primeira versão. Faça $i_s(t) = 0$ na segunda versão e $v_s(t) = 0$ na terceira versão. Plote a tensão do capacitor, $v(t)$, em função do tempo para as três versões do circuito. Mostre que a tensão do capacitor na primeira versão do circuito é igual à soma das tensões no capacitor das outras duas versões.

Sugestão: Use os módulos do PSpice VSIN e ISIN para simular a fonte de tensão e a fonte de corrente. O PSpice não trabalha com frequências angulares em radianos por segundo e sim com frequências em hertz.

Observação: Note que $v(t)$ é senoidal e tem a mesma frequência que $v_s(t)$ e $i_s(t)$.

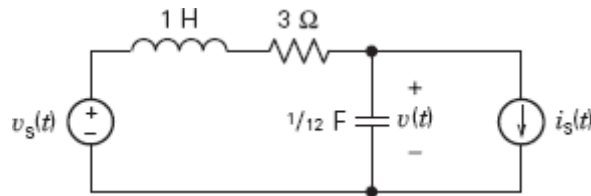



Figura PS 10.1

PS 10-2 O circuito da Figura PS 10-1 tem duas entradas, $v_s(t)$ e $i_s(t)$, e uma saída, $v(t)$. As entradas são dadas por

$$v_s(t) = 10 \text{ sen } (6t + 45°) \text{ V}$$

e

$$i_s(t) = 2 \text{ sen } (18t + 60°) \text{ A}$$

Use o programa PSpice para demonstrar o princípio de superposição. Simule três versões do circuito simultaneamente. (Desenhe o circuito no espaço de trabalho do PSpice. Use "cut" e "paste" para fazer duas cópias. Mude os nomes dos componentes nas cópias para não repetir nomes. Por exemplo: o resistor é chamado de R1 no circuito original. Mude R1 para R2 e R3 nas duas cópias.) Use os valores dados de $v_s(t)$ e $i_s(t)$ na primeira versão. Faça $i_s(t) = 0$ na segunda versão e $v_s(t) = 0$ na terceira versão. Plote a tensão do capacitor, $v(t)$, em função do tempo para as três versões do circuito. Mostre que a tensão do capacitor na primeira versão do circuito é igual à soma das tensões no capacitor das outras duas versões.

Sugestão: Use os módulos do PSpice VSIN e ISIN para simular a fonte de tensão e a fonte de corrente. O PSpice não trabalha com frequências angulares em radianos por segundo e sim com frequências em hertz.

Observação: Note que $v(t)$ não é senoidal.

PS 10-3 O circuito da Figura PS 10-1 tem duas entradas, $v_s(t)$ e $i_s(t)$, e uma saída, $v(t)$. As entradas são dadas por

$$v_s(t) = 10 \text{ sen } (6t + 45°) \text{ V}$$

e

$$i_s(t) = 0{,}8 \text{ A}$$

Use o programa PSpice para demonstrar o princípio de superposição. Simule três versões do circuito simultaneamente. (Desenhe o circuito no espaço de trabalho do PSpice. Use "cut" e "paste" para fazer duas cópias. Mude os nomes dos componentes nas cópias para não repetir nomes. Por exemplo: o resistor é chamado de R1 no circuito original. Mude R1 para R2 e R3 nas duas cópias.) Use os valores dados de $v_s(t)$ e $i_s(t)$ na primeira versão. Faça $i_s(t) = 0$ na segunda versão e $v_s(t) = 0$ na terceira versão. Plote a tensão do capacitor, $v(t)$, em função do tempo para as três versões do circuito. Mostre que a tensão do capacitor na primeira versão do circuito é igual à soma das tensões no capacitor das outras duas versões.

Sugestão: Use os módulos do PSpice VSIN e IDC para simular a fonte de tensão e a fonte de corrente. O PSpice não trabalha com frequências angulares em radianos por segundo e sim com frequências em hertz.

Observação: Note que, apesar da aparência, $v(t)$ não é senoidal por causa da componente contínua.

PS 10-4 O circuito da Figura PS 10-1 tem duas entradas, $v_s(t)$ e $i_s(t)$, e uma saída, $v(t)$. As entradas são dadas por

$$v_s(t) = V_m \text{ sen } 6t \text{ V}$$

e

$$i_s(t) = I_m \text{ A}$$

e a saída é

$$v_o(t) = A \text{ sen } (6t + \theta) + B \text{ V}$$

De acordo com o princípio da linearidade, A é proporcional a V_m e B é proporcional a I_m. Em consequência, podemos escrever $A = k_1 V_m$ e $B = k_2 I_m$, em que k_1 e k_2 são constantes a serem determinadas.

(a) Use o programa PSpice para determinar o valor de k_1, simulando o circuito para $V_m = 1$ V e $I_m = 0$.

(b) Use o programa PSpice para determinar o valor de k_2, simulando o circuito para $V_m = 0$ e $I_m = 1$.

(c) Conhecendo k_1 e k_2, determine os valores de V_m e I_m para que

$$v_o(t) = 5 \text{ sen } (6t + \theta) + 5 \text{ V}$$

Simule o circuito, usando o PSpice, para verificar se os valores encontrados para V_m e I_m produzem a tensão de saída desejada.

Problemas de Projeto

PP 10-1 Projete o circuito da Figura PP 10-1 para que a tensão de saída seja $v_o(t) = 8 \cos(1000t + 104°)$ se a tensão de entrada for $v_i(t) = 2{,}5 \cos(1000t)$ V.

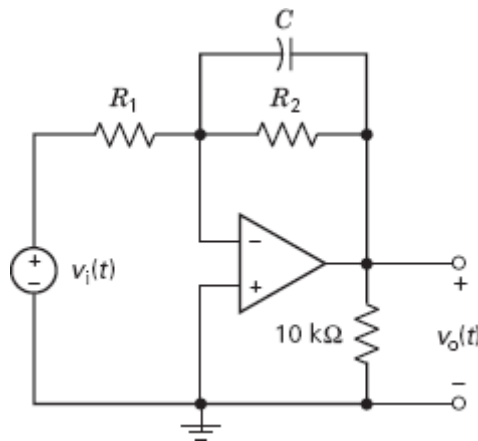



Figura PP 10-1

PP 10-2 Projete o circuito da Figura PP 10-2 para que a tensão de saída seja $v_o(t) = 2{,}5 \cos(1000t - 76°)$ se a tensão de entrada for $v_i(t) = 12 \cos(1000t)$ V.

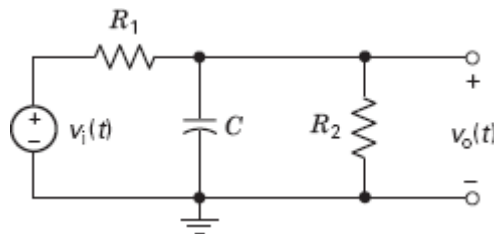



Figura PP 10-2

PP 10-3 Projete o circuito da Figura PP 10-3 para que a tensão de saída seja $v_o(t) = 2{,}5 \cos(40t + 14°)$ se a tensão de entrada for $v_i(t) = 8 \cos(40t)$ V.

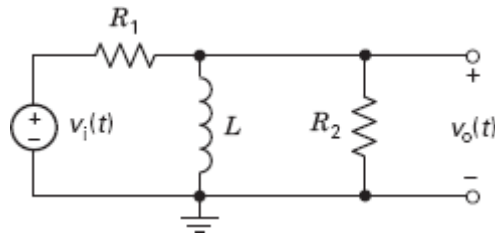



Figura PP 10-3

PP 10-4 Mostre que não é possível projetar o circuito da Figura PP 10-4 para que a tensão de saída seja $v_o(t) = 2{,}5 \cos(40t - 24^\circ)$ se a tensão de entrada for $v_i(t) = 8 \cos(40t)$ V.

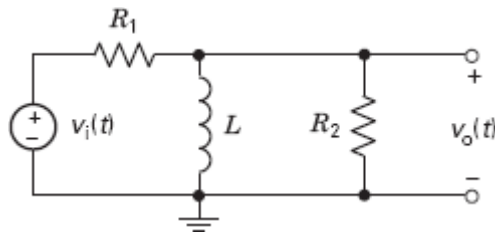



Figura PP 10-4

PP 10-5 A Figura PP 10-5 mostra um circuito com valores de R, L e C a serem especificados. A entrada é a corrente da fonte, $i_s = 10 \cos 1000t$ A, e o objetivo é escolher os valores de R, L e C para que a tensão v seja dada por $v = 80 \cos 1000t$ V.

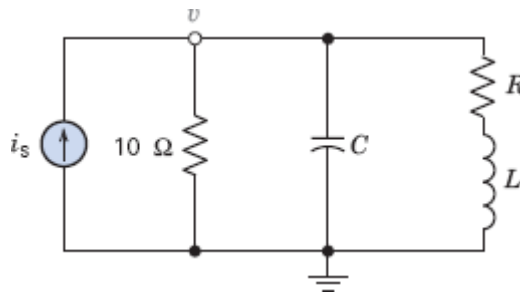



Figura PP 10-5

PP 10-6 A entrada do circuito da Figura PP 10-6 é a tensão da fonte de tensão

$$v_s(t) = 10 \cos(1000t) \text{ V}$$

A saída é a tensão do capacitor no regime estacionário

$$v_o(t) = A \cos(1000t + \theta) \text{ V}$$

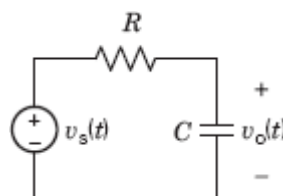
(a) Especifique valores de R e C para $\theta = -30^\circ$. Determine o valor resultante de A.

(b) Especifique valores de R e C para $A = 5$ V. Determine os valores resultantes de θ.

(c) É possível especificar valores de R e C para $A = 4$ e $\theta = -60^\circ$? (Caso a resposta seja negativa, justifique sua resposta. Caso a resposta seja positiva, especifique os valores de R e C.)

(d) É possível especificar valores de R e C para $A = 4$ e $\theta = -45^\circ$? (Caso a resposta seja negativa, justifique sua resposta. Caso a resposta seja positiva, especifique os valores de R e C.)

Figura PP 10-6

CAPÍTULO 11 Potência no Regime Estacionário Senoidal

NESTE CAPÍTULO

11.1 *Introdução*

Neste capítulo, vamos continuar nosso estudo dos circuitos de corrente alternada. Em particular, serão examinados os seguintes fatos:

- A potência fornecida ou recebida por um componente de um circuito de corrente alternada pode ser calculada com mais facilidade se o circuito for representado no domínio da frequência.

A potência nos circuitos de CA é um tópico importante. Os engenheiros criaram vários parâmetros para descrever a potência nos circuitos de corrente alternada. Vamos falar de potência média, potência real, potência reativa, potência complexa, fator de potência, valor rms e muito mais.

- Os circuitos de CA que contêm indutores acoplados e/ou transformadores ideais são mais fáceis de analisar no domínio da frequência.

Tanto os indutores acoplados como os transformadores são formados por enrolamentos acoplados magneticamente. (O acoplamento entre os indutores pode ser frouxo ou cerrado. O acoplamento entre os enrolamentos de um transformador é sempre cerrado.) Depois de representar os indutores acoplados e transformadores no domínio da frequência, vamos analisar circuitos de CA que contêm esses componentes.

11.2 *Energia Elétrica*

O progresso da civilização humana depende, em grande parte, da capacidade de controlar e distribuir energia, e a eletricidade é um modo excelente de fazer a energia chegar aos usuários. A energia contida em um combustível ou na água de uma represa é convertida em energia elétrica e fornecida nessa forma aos consumidores. Através de linhas de transmissão, a energia elétrica pode ser transmitida a residências, indústrias e edifícios comerciais.

A energia elétrica pode ser facilmente transportada com baixas perdas, e métodos seguros para lidar com a energia elétrica foram desenvolvidos nos últimos 90 anos. Além da energia dos combustíveis fósseis e nucleares e da energia hidrelétrica, a energia solar, a energia geotérmica, a energia das marés e a energia eólica também podem ser convertidas em energia elétrica.

FIGURA 11.2-1 Linhas de transmissão de alta-tensão.

FIGURA 11.2-2 Uma usina hidrelétrica.

FIGURA 11.2-3 Uma turbina eólica para produção de energia elétrica.

A necessidade de transmitir energia elétrica a grandes distâncias levou à instalação de linha de transmissão de alta-tensão entre as usinas de energia elétrica e os centros de consumo de energia. A Figura 11.2-1 mostra uma linha de transmissão moderna.

A maioria das usinas de energia elétrica utiliza a água, o carvão ou o urânio como fonte de energia. Um exemplo de usina hidrelétrica de grande porte aparece na Figura 11.2-2. Uma usina hidrelétrica típica é capaz de gerar 1000 MW. Por outro lado, em várias partes do mundo, os consumidores estão recorrendo a pequenos geradores, como o gerador movido por uma turbina eólica que aparece na Figura 11.2-3. Um conjunto típico gerador-turbina eólica é capaz de gerar uma potência de 75 kW.

Um elemento importante dos sistemas de transmissão dos Estados Unidos é a existência de múltiplas ligações entre as usinas. Embora a eletricidade seja gerada por várias empresas independentes, as usinas dessas empresas estão ligadas por linhas de transmissão. Isso permite que uma empresa economize dinheiro comprando eletricidade de outra empresa e fornecendo essa eletricidade, através de suas linhas de transmissão a uma terceira empresa.

A Figura 11.2-4 mostra as tensões e correntes típicas de diferentes dispositivos e fenômenos elétricos.

11.3 *Potência Instantânea e Potência Média*

Estamos interessados em determinar a potência gerada e absorvida em um circuito ou em um componente de um circuito. Os engenheiros eletricistas falam de diferentes tipos de potência, como, por exemplo, potência instantânea, potência média e potência complexa. Vamos começar com uma discussão da potência instantânea, que é o produto, no domínio do tempo, da tensão e da corrente associadas a um componente ou a um conjunto de componentes de um circuito. A potência instantânea pode ser uma função complicada do tempo, o que nos leva a buscar uma medida mais simples da potência, como a potência média.

Considere o componente da Figura 11.3-1. Note que a tensão do componente, $v(t)$, e a corrente, $i(t)$, estão de acordo com a convenção passiva. A potência instantânea fornecida ao componente é o produto da tensão $v(t)$ pela corrente $i(t)$:

$$P(t) = v(t)\, i(t) \qquad (11.3\text{-}1)$$

A unidade de potência é o watt (W). Podemos sempre calcular a potência instantânea, já que não há restrições à forma de $v(t)$ e $i(t)$. A potência instantânea pode ser uma função complicada de t se $v(t)$ ou $i(t)$ for uma função complicada de t.

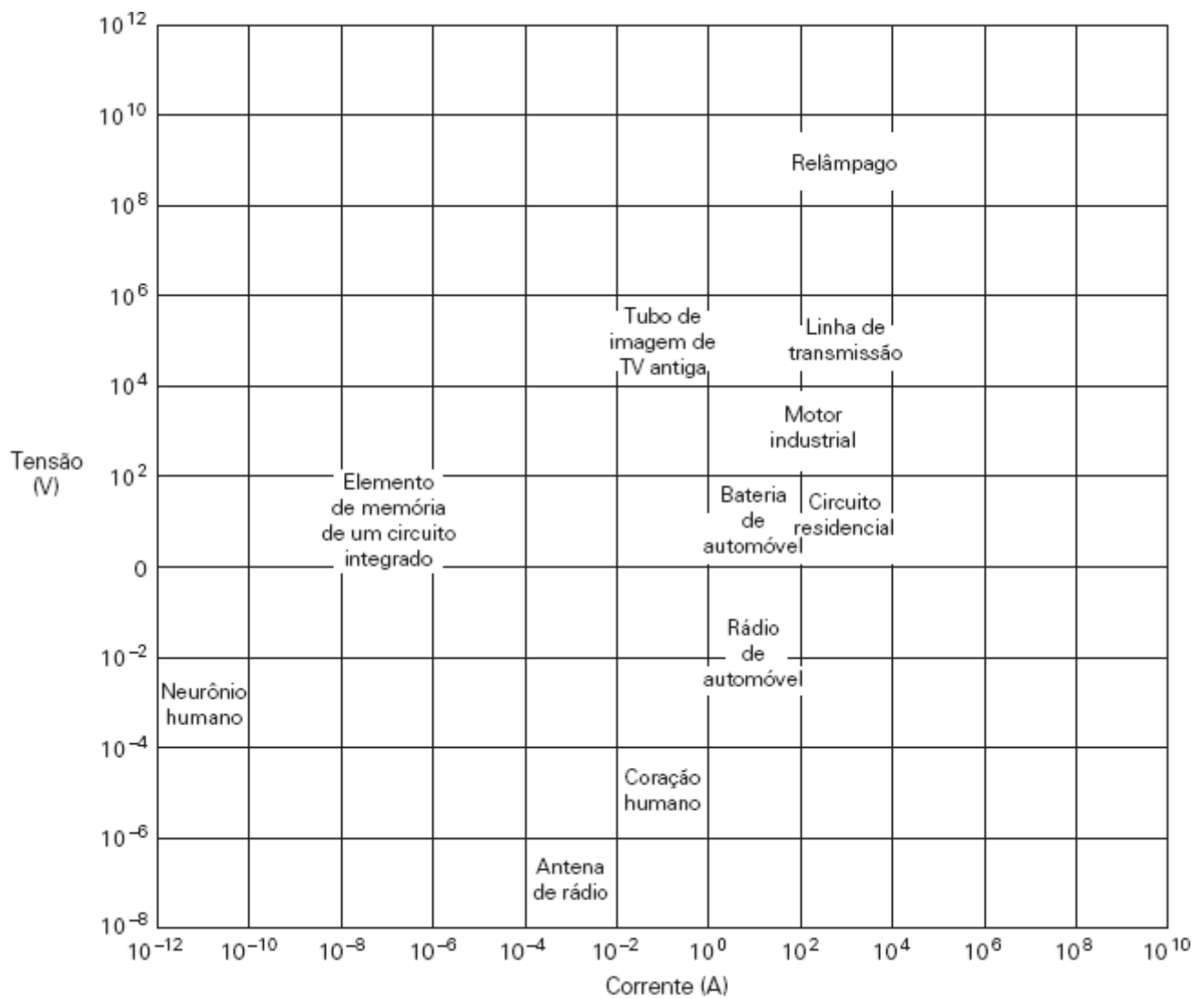



FIGURA 11.2-4 Tensões e correntes típicas de diferentes dispositivos e fenômenos elétricos.

Suponha que a tensão $v(t)$ seja uma função periódica de período T. Nesse caso,

$$v(t) = v(t + T)$$

já que a tensão se repete a cada T segundos. Nesse caso, se o circuito for linear, a corrente será uma função periódica com o mesmo período, ou seja,

$$i(t) = i(t + T)$$

Assim, a potência instantânea será

$$\begin{aligned} p(t) &= v(t)i(t) \\ &= v(t+T)i(t+T) \end{aligned}$$

O *valor médio* de uma função periódica do tempo é a integral da função para um período completo, dividida pelo período. Chamando de P a potência média e a p a potência instantânea, a potência média é dada por

$$P = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} p(t)\,dt \qquad (11.3\text{-}2)$$

em que t_0 é um instante inicial escolhido arbitrariamente.

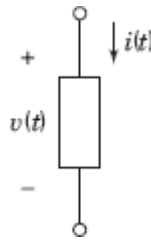



FIGURA 11.3-1 Componente de um circuito.

Vamos supor agora que a tensão $v(t)$ é senoidal, ou seja, que

$$v(t) = V_m(\cos \omega t + \theta_V)$$

Nesse caso, se o circuito for linear e estiver no regime estacionário, a corrente também será senoidal e terá a mesma frequência, ou seja,

$$i(t) = I_m(\cos \omega t + \theta_I)$$

O período e a frequência da $v(t)$ e $i(t)$ estão relacionados pela equação

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

A potência instantânea fornecida ao componente é

$$p(t) = V_m I_m \cos(\omega t + \theta_V) \cos(\omega t + \theta_I)$$

Usando a identidade trigonométrica para o produto de duas funções cosseno (veja o Apêndice C), temos

$$p(t) = \frac{V_m I_m}{2}[\cos(\theta_V - \theta_I) + \cos(2\omega t + \theta_V + \theta_I)]$$

Vemos que a potência instantânea tem dois termos. O primeiro termo da expressão entre colchetes não depende do tempo e o segundo varia senoidalmente com o tempo, com uma frequência duas vezes maior que $v(t)$ e $i(t)$.

A potência média fornecida ao componente é

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{V_m I_m}{2}[\cos(\theta_V - \theta_I) + \cos(2\omega t + \theta_V + \theta_I)]\,dt$$

em que escolhemos $t_0 = 0$. Nesse caso, temos

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{V_m I_m}{2}\cos(\theta_V - \theta_I)dt + \frac{1}{T}\int_0^T \frac{V_m I_m}{2}[\cos(2\omega t + \theta_V + \theta_I)]\,dt \\ &= \frac{V_m I_m \cos(\theta_V - \theta_I)}{2T}\int_0^T dt + \frac{V_m I_m}{2T}\int_0^T \cos(2\omega t + \theta_V + \theta_I)\,dt \end{aligned}$$

A segunda integral é zero, já que o valor médio da função cosseno para um período completo é zero. Assim, temos

$$P = \frac{V_m I_m}{2}\cos(\theta_V - \theta_I) \qquad (11.3\text{-}3)$$

EXEMPLO 11.3-1 Potência Média

Determine a potência média fornecida a um resistor R se a corrente no resistor é a corrente $i(t)$ da Figura 11.3-2.

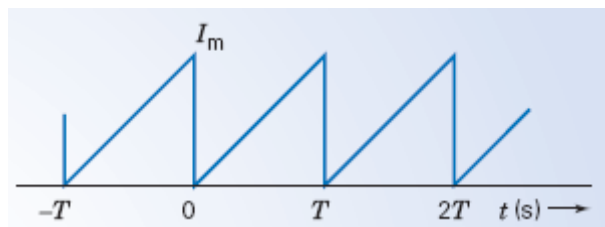



FIGURA 11.3-2 Corrente no resistor do Exemplo 11.3-1.

Solução

A forma de onda da corrente se repete a cada T segundos e apresenta um valor máximo de I_m. No período de $t = 0$ a $t = T$, temos

$$I = \frac{I_m}{T} t \quad 0 \leq t < T$$

A potência instantânea é

$$p = i^2 R = \frac{i_m^2 t^2}{T^2} R \quad 0 \leq t < T$$

Só é necessário calcular a potência média no intervalo $0 < t < T$, já que a potência é periódica com período T. A potência média é dada por

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{I_m^2 R}{T^2} t^2 \, dt$$

Integrando, temos

$$P = \frac{I_m^2 R}{T^3} \int_0^T t^2 \, dt = \frac{I_m^2 R}{T^3} \frac{T^3}{3} = \frac{I_m^2 R}{3} \text{ W}$$

EXEMPLO 11.3-2 Potência Média

O circuito da Figura 11.3-3 está no regime estacionário. A corrente de malha é

$$i(t) = 721 \cos(100t - 41°) \text{ mA}$$

As tensões dos componentes são

$$v_s(t) = 20 \cos(100t - 15°) \text{ V}$$
$$v_R(t) = 18 \cos(100t - 41°) \text{ V}$$
$$v_L(t) = 8{,}66 \cos(100t + 49°) \text{ V}$$

Determine a potência média *fornecida* a cada componente do circuito.

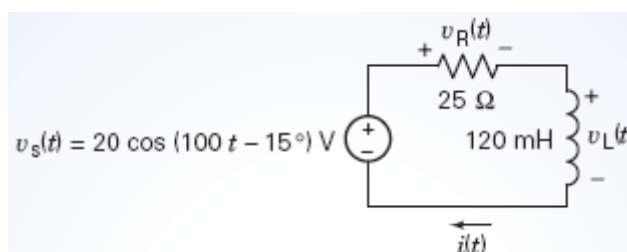



FIGURA 11.3-3 Circuito *RL* com uma fonte de tensão senoidal.

Solução

Observe que $v_s(t)$ e $i(t)$ não estão de acordo com a convenção passiva e, portanto, $v_s(t)i(t)$ é a potência *fornecida* pela fonte de tensão. Assim, a potência média calculada usando a Eq. 11.3-3 é a potência média fornecida pela fonte de tensão. A potência média fornecida pela fonte de tensão é, portanto,

$$P_s = \frac{(20)\,(0,721)}{2}\ \cos\,(-15° - (-41°)) = 6,5\ \text{W}$$

Isto significa que a potência média *fornecida* à fonte de tensão é –6,5 W.

Como $v_R(t)$ e $i(t)$ estão de acordo com a convenção passiva, a potência média calculada usando a Eq. 11.3-3 é a potência média *fornecida* ao resistor. Assim, a potência fornecida ao resistor é dada por

$$P_R = \frac{(18)\,(0,721)}{2}\ \cos\,(-41° - (-41°)) = 6,5\ \text{W}$$

A potência fornecida ao indutor é dada por

$$P_L = \frac{(8,66)\,(0,721)}{2}\ \cos\,(49° - (-41°)) = 0\ \text{W}$$

Por que a potência média fornecida ao indutor é zero? O ângulo de fase da tensão do indutor é 90º maior que o ângulo de fase da corrente. Como cos (90º) = 0, a potência média fornecida ao indutor é zero. Na verdade, como o ângulo de fase da tensão de um indutor é sempre 90º maior que a corrente do indutor, a potência média fornecida a um indutor é sempre zero.

EXERCÍCIO 11.3-1 Determine a potência instantânea fornecida a um componente e faça um gráfico de $p(t)$ supondo que o componente é (a) uma resistência R; (b) um indutor L. A tensão do componente é $v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta)$ V.

Respostas:

(a) $P_R = \dfrac{V_m^2}{2R}[1 + \cos\,(2\omega t + 2\theta)]$ W

(b) $P_L = \dfrac{V_m^2}{2\omega L}\cos\,(2\omega t + 2\theta - 90°)$ W

11.4 Valor Eficaz de uma Forma de Onda Periódica

A tensão disponível na tomada de uma instalação elétrica residencial é considerada como 110 V. Naturalmente, não se trata do valor médio da tensão senoidal, já que sabemos que o valor médio de qualquer função senoidal é zero. Também não se trata do valor instantâneo nem do valor máximo, V_m, da tensão $v = V_m \cos \omega t$.

O valor eficaz de uma tensão é uma medida da capacidade da tensão de fornecer energia (ou potência) a um resistor de carga. O conceito de *valor eficaz* é resultado de um desejo de fornecer a um resistor de carga a mesma potência média que uma tensão (ou corrente) contínua. Como mostra a Figura 11.4-1, a intenção é determinar o valor da tensão contínua V_{ef} (ou da corrente contínua I_{ef}) que forneceria a mesma potência média ao resistor que uma tensão ou corrente variável.

A potência média fornecida ao resistor *R* por uma corrente periódica é

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T i^2\ R\,dt \qquad (11.4\text{-}1)$$

em que escolhemos o período T da corrente periódica como intervalo de integração.

A potência fornecida por uma corrente contínua é

$$P = I_{\text{ef}}^2\ R \tag{11.4-2}$$

em que I_{ef} é a corrente contínua que fornece a mesma potência que a corrente variável. Em outras palavras, I_{ef} é definida como a corrente contínua que tem o mesmo efeito, do ponto de vista da potência fornecida, que uma corrente que varia periodicamente.

Igualando as Eqs. 11.4-1 e 11.4-2, obtemos:

$$I_{\text{ef}}^2\ R = \frac{R}{T}\int_0^T i^2\ dt$$

Explicitando I_{ef}, temos

$$I_{\text{ef}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2\ dt} \tag{11.4-3}$$

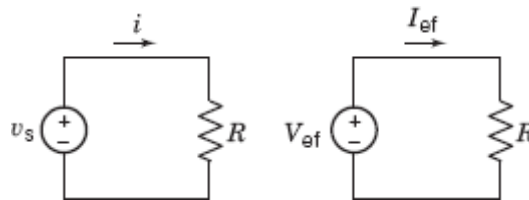



FIGURA 11.4-1 O objetivo é determinar a tensão contínua, V_{ef}, que forneceria a R uma potência igual à potência média fornecida por uma fonte de tensão alternada $v_s(t)$.

Vemos que I_{ef} é a raiz quadrada da média do quadrado da corrente. Por essa razão, a corrente eficaz I_{ef} também é conhecida como valor médio quadrático da corrente e representada pelo símbolo I_{rms} (as iniciais de “root mean square”, que significa valor médio quadrático em inglês).

O valor eficaz de uma corrente variável é, portanto, a corrente contínua que transfere para uma carga resistiva a mesma potência média que a corrente dada.

O valor eficaz da tensão em um circuito pode ser definido de forma análoga:

$$V_{\text{ef}}^2 = V_{\text{rms}}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T v^2\ dt$$

o que nos dá

$$V_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v^2\ dt}$$

Vamos agora calcular o valor de I_{rms} para uma corrente senoidal $i = I_m \cos \omega t$. Usando a Eq. 11.4-3 e uma fórmula trigonométrica do Apêndice C, obtemos

$$I_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_m^2 \cos^2 \omega t\ dt} = \sqrt{\frac{I_m^2}{T}\int_0^T \frac{1}{2}(1+\cos 2\omega t)\ dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \tag{11.4-4}$$

já que a integral de cos $2\omega t$ para o período T é zero. Observe que a Eq. 11.4-4 é válida apenas para correntes senoidais.

Na prática, devemos ter a cautela de verificar se uma tensão senoidal está expressa em termos do valor eficaz ou do valor máximo I_m. No caso da transmissão de energia elétrica e sua utilização residencial,

costuma-se dizer que a tensão é 110 V ou 220 V e fica implícito que esses valores se referem ao valor rms ou valor eficaz da tensão senoidal.

Nos circuitos dos aparelhos eletrônicos, como computadores e receptores de televisão, quando se diz que a tensão é 10 V, por exemplo, está implícito que se trata do valor máximo da tensão, V_m. Daqui em diante, usaremos V_m para representar o valor máximo e V_{rms} para representar o valor médio quadrático ou valor eficaz. Às vezes só é possível saber se se trata de V_{rms} ou de V_m pelo contexto no qual a informação foi dada.

EXEMPLO 11.4-1 Valor Eficaz

Determine o valor eficaz da corrente dente de serra da Figura 11.4-2.

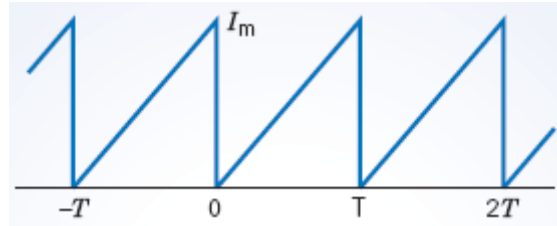



FIGURA 11.4-2 Corrente dente de serra.

Solução

Para começar, expressamos a forma de onda da corrente no intervalo $0 \leq t < T$:

$$i = \frac{I_m}{T} t \quad 0 \leq t < T$$

O valor eficaz é dado por

$$I_{ef}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T i^2\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{I_m^2}{T^2} t^2\, dt = \frac{I_m^2}{T^3}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^T = \frac{I_m^2}{3}$$

Explicitando I_{ef}, obtemos

$$I_{ef} = \frac{I_m}{\sqrt{3}}$$

Observe que o valor médio quadrático de uma forma de onda dente de serra de amplitude I_m é diferente do valor médio quadrático de uma onda senoidal de amplitude I_m.

EXEMPLO 11.4-2 Potência Média em Circuitos de CA e de CC

As fontes dos circuitos de ca e de cc da Figura 11.4-3 fornecem a mesma potência média ao resistor de 20 Ω. Determine a potência média fornecida pelas fontes e a amplitude da tensão senoidal.

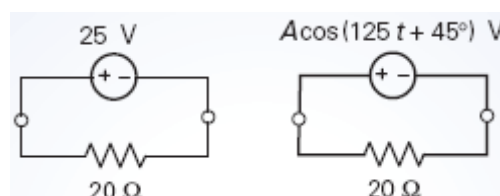



FIGURA 11.4-3 Circuitos do Exemplo 11.4-2.

Solução

A potência média fornecida pela fonte de cc é igual à potência dissipada pelo resistor, que é dada por

$$P_{\text{méd}} = \frac{25^2}{20} = 31,25\ \text{W}$$

Para que a fonte de ca forneça a mesma potência média que a fonte de cc, o valor rms da tensão da fonte senoidal deve ser igual à tensão da fonte de cc. Assim,

$$\frac{A}{\sqrt{2}} = 25 \quad \Rightarrow \quad A = 25\sqrt{2} = 35,355\ \text{V}$$

EXERCÍCIO 11.4-1 Determine o valor eficaz das seguintes correntes: (a) cos $3t$ + cos $3t$; (b) sen $3t$ + cos ($3t$ + 60º); (c) 2 cos $3t$ + 3 cos $5t$.

Respostas: (a) $\sqrt{2}$; (b) 0,366; (c) 2,55

11.5 *Potência Complexa*

Suponha que um circuito linear com uma entrada senoidal esteja no regime estacionário. Nesse caso, todas as tensões e correntes dos componentes serão senoidais, com a mesma frequência que a entrada. Um circuito desse tipo pode ser analisado no domínio da frequência, usando fasores e impedâncias. Em particular, usando fasores e impedâncias, é possível calcular a potência gerada ou absorvida no circuito ou em qualquer componente do circuito no domínio da frequência.

A Figura 11.5-1 mostra a tensão e corrente de um componente no domínio do tempo e no domínio da frequência. Observe que a corrente e a tensão do componente estão de acordo com a convenção passiva. Em uma seção anterior, a potência instantânea e a potência média foram calculadas a partir das representações da corrente e da tensão no domínio do tempo, *i*(*t*) e *v*(*t*). Vamos agora voltar nossa atenção para as representações da corrente e da tensão no domínio da frequência,

$$I(\omega) = I_m \angle \theta_I \quad \text{e} \quad V(\omega) = V_m \angle \theta_V \qquad (11.5\text{-}1)$$

FIGURA 11.5-1 Componente linear excitado por uma entrada senoidal. O circuito está no regime estacionário. A tensão e a corrente do componente podem ser representadas (a) no domínio do tempo ou (b) no domínio da frequência.

A **potência complexa S** fornecida a um componente é definida através da equação

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{VI}^*}{2} = \frac{(V_m \angle \theta_V)(I_m \angle \theta_I)}{2} = \frac{V_m I_m}{2} \angle \theta_V - \theta_I \qquad (11.5\text{-}2)$$

em que **I*** é o complexo conjugado de **I** (veja o Apêndice B). O módulo de **S**

$$|\mathbf{S}| = \frac{V_m I_m}{2} \tag{11.5-3}$$

é chamado de **potência aparente**.

Convertendo a potência complexa S da forma polar para a forma retangular, obtemos

$$\mathbf{S} = \frac{V_m I_m}{2} \cos(\theta_V - \theta_I) + j\frac{V_m I_m}{2} \operatorname{sen}(\theta_V - \theta_I) \tag{11.5-4}$$

A parte real de **S** é igual à potência média que foi calculada anteriormente no domínio do tempo! (Veja a Eq. 11.3-3.) Essa potência média foi representada pelo símbolo *P*. Podemos representar a potência complexa como

$$\mathbf{S} = P + jQ \tag{11.5-5}$$

em que

$$P = \frac{V_m I_m}{2} \cos(\theta_V - \theta_I) \tag{11.5-6}$$

é a **potência média** e

$$Q = \frac{V_m I_m}{2} \operatorname{sen}(\theta_V - \theta_I) \tag{11.5-7}$$

é a **potência reativa**. Tanto a potência complexa como a potência média e a potência reativa são o produto de uma tensão e uma corrente. Mesmo assim, é costume usar unidades diferentes para os três tipos de potência. Já vimos que a unidade de potência média é o watt (W). A unidade de potência complexa é o volt-ampère (VA) e a unidade de potência reativa é o volt-ampère reativo (VAR). A Tabela 11.5-1 mostra as fórmulas usadas para calcular os três tipos de potência no domínio da frequência.

Vamos voltar à Figura 11.5-1*b*. No domínio da frequência, a impedância do componente é dada por

$$\mathbf{Z}(\omega) = \frac{\mathbf{V}(\omega)}{\mathbf{I}(\omega)} = \frac{V_m \angle \theta_V}{I_m \angle \theta_I} = \frac{V_m}{I_m} \angle \theta_V - \theta_I \tag{11.5-8}$$

Convertendo a impedância Z da forma polar para a forma retangular, obtemos

$$\mathbf{Z}(\omega) = \frac{V_m}{I_m} \cos(\theta_V - \theta_I) + j\frac{V_m}{I_m} \operatorname{sen}(\theta_V - \theta_I) \tag{11.5-9}$$

Tabela 11.5-1 Expressões para a Potência no Domínio da Frequência

GRANDEZA	USANDO VALORES DE PICO	USANDO VALORES RMS	UNIDADE
Tensão, $v(t)$	$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_V)$	$v(t) = V_{rms}\sqrt{2}\cos(\omega t + \theta_V)$	V
Corrente, $i(t)$	$i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta_I)$	$i(t) = I_{rms}\sqrt{2}\cos(\omega t + \theta_I)$	A
Potência complexa, S	$\mathbf{S} = \frac{V_m I_m}{2}\cos(\theta_V - \theta_I) + j\frac{V_m I_m}{2}\text{sen}(\theta_V - \theta_I)$	$\mathbf{S} = V_{rms}I_{rms}\cos(\theta_V - \theta_I) + jV_{rms}I_{rms}\text{sen}(\theta_V - \theta_I)$	VA
Potência aparente, |S|	$\lvert\mathbf{S}\rvert = \frac{V_m I_m}{2}$	$\lvert\mathbf{S}\rvert = V_{rms}I_{rms}$	VA
Potência média, P	$P = \frac{V_m I_m}{2}\cos(\theta_V - \theta_I)$	$P = V_{rms}I_{rms}\cos(\theta_V - \theta_I)$	W
Potência reativa, Q	$Q = \frac{V_m I_m}{2}\text{sen}(\theta_V - \theta_I)$	$Q = V_{rms}I_{rms}\text{sen}(\theta_V - \theta_I)$	VAR

Podemos representar a impedância na forma

$$\mathbf{Z}(\omega) = R + jX$$

em que $R = \frac{V_m}{I_m}\cos(\theta_V - \theta_I)$ é a resistência e $X = \frac{V_m}{I_m}\text{sen}(\theta_V - \theta_I)$ é a reatância.

A semelhança entre as Eqs. 11.5-9 e 11.5-4 sugere que a potência complexa pode ser expressa em termos da impedância:

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= \frac{V_m I_m}{2}\cos(\theta_V - \theta_I) + j\frac{V_m I_m}{2}\text{sen}(\theta_V - \theta_I) \\ &= \left(\frac{I_m^2}{2}\right)\frac{V_m}{I_m}\cos(\theta_V - \theta_I) + j\left(\frac{I_m^2}{2}\right)\frac{V_m}{I_m}\text{sen}(\theta_V - \theta_I) \\ &= \left(\frac{I_m^2}{2}\right)\text{Re}(\mathbf{Z}) + j\left(\frac{I_m^2}{2}\right)\text{Im}(\mathbf{Z})\end{aligned} \tag{11.5-10}$$

Em particular, a potência média fornecida ao componente é dada por

$$P = \left(\frac{I_m^2}{2}\right)\text{Re}(\mathbf{Z}) \tag{11.5-11}$$

Se o componente é um resistor, Re($\mathbf{Z}$) = R e

$$P_R = \left(\frac{I_m^2}{2}\right)R$$

Se o componente é um capacitor ou um indutor, Re($\mathbf{Z}$) = 0; isso significa que a potência média fornecida a um capacitor ou a um indutor é sempre zero.

A Figura 11.5-2 mostra a representação gráfica das Eqs. 11.5-9 e 11.5-4 na forma (a) de um triângulo de impedâncias e (b) de um triângulo de potências, respectivamente.

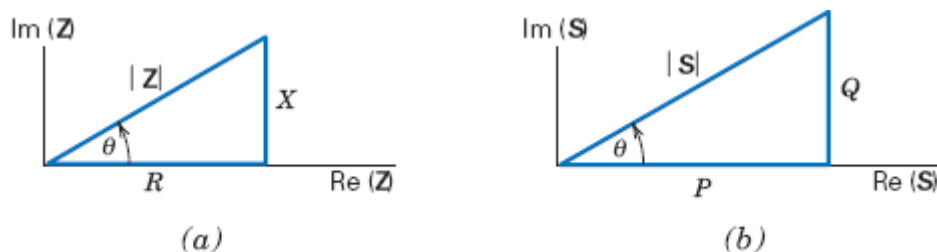



FIGURA 11.5-2 (a) Triângulo de impedâncias, em que $\mathbf{Z} = R + jX$. (b) Triângulo de potências, em que $\mathbf{S} = P + jQ$.

EXEMPLO 11.5-1 Potência Complexa

O circuito da Figura 11.5-3 é formado por uma fonte e uma carga. A corrente da fonte de corrente é

$$i(t) = 1{,}25 \cos(5t - 15^\circ) \text{ A}$$

(a) Qual é o valor da potência complexa fornecida pela fonte à carga para $R = 20\ \Omega$ e $L = 3$ H?

(b) Qual deve ser o valor da resistência R e da indutância L para que a fonte forneça à carga $11{,}72 + j11{,}72$ VA?

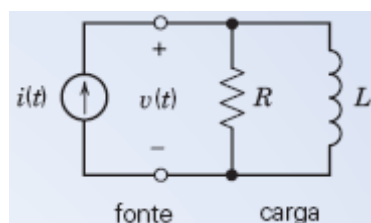



FIGURA 11.5-3 Circuito do Exemplo 11.5-1.

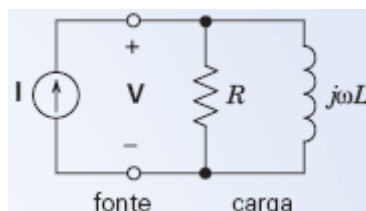



FIGURA 11.5-4 Representação do circuito da Figura 11.5-3 no domínio da frequência.

Solução

A Figura 11.5-4 mostra o mesmo circuito no domínio da frequência, em que $\mathbf{I} = 1{,}25\ \underline{/-15^\circ}$ A. A impedância equivalente do resistor e indutor em paralelo é

$$\mathbf{Z} = \frac{j\omega LR}{R + j\omega L}$$

(a) Para $R = 20\ \Omega$ e $L = 3$ H, a impedância equivalente é

$$\mathbf{Z} = \frac{j300}{20 + j15} = 12\ \underline{/53^\circ}\ \Omega$$

A tensão da impedância é

$$\mathbf{V} = \mathbf{IZ} = (1{,}25\ \underline{/-15^\circ})\,(12\ \underline{/53^\circ}) = 15\ \underline{/38^\circ}\ \text{V}$$

A potência complexa fornecida pela fonte é

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{VI}^*}{2} = \frac{(15\angle 38^\circ)(1{,}25\angle -15^\circ)^*}{2} = \frac{(15\angle 38^\circ)(1{,}25\angle 15^\circ)^*}{2} = 9{,}375\angle 53^\circ \text{ VA}$$

(b) A tensão da impedância equivalente pode ser calculada a partir da potência complexa e da corrente:

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{VI}^*}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V} = \frac{2\mathbf{S}}{\mathbf{I}^*}$$

Para $\mathbf{S} = 11{,}72 + j11{,}72 = 16{,}57\angle 45^\circ$ VA

$$\mathbf{V} = \frac{2\mathbf{S}}{\mathbf{I}^*} = \frac{2(16{,}57\angle 45^\circ)}{(1{,}25\angle -15^\circ)^*} = \frac{2(16{,}57\angle 45^\circ)}{(1{,}25\angle 15^\circ)} = 26{,}52\angle 30^\circ \text{ V}$$

A impedância equivalente é

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{26{,}52\angle 30^\circ}{1{,}25\angle -15^\circ} = 21{,}21\angle 45^\circ \ \Omega$$

É conveniente calcular o recíproco:

$$\frac{1}{R} - j\frac{1}{\omega L} = \frac{1}{21{,}21\angle 45^\circ} = 0{,}033338 - j\,0{,}033338$$

Assim,

$$R = \frac{1}{0{,}033338} = 30\,\Omega \quad \text{e} \quad 5L = \frac{1}{0{,}033338} = 30 \quad \Rightarrow \quad L = 6 \text{ H}$$

EXEMPLO 11.5-2 Cargas em Paralelo

O circuito da Figura 11.5-5 é formado por uma fonte e duas cargas ligadas em paralelo. A tensão da fonte de tensão é

$$v(t) = 24 \cos(5t + 30^\circ) \text{ V}$$

A potência complexa recebida pela carga A é

$$\mathbf{S}_A = 9{,}216 + j6{,}912 \text{ VA}$$

A impedância da carga B é

$$\mathbf{Z}_B = 42{,}426\angle 45^\circ \text{ VA}$$

(a) Determine o valor da potência complexa total fornecida pela fonte às duas cargas.

(b) Determine o valor da impedância equivalente das duas cargas.

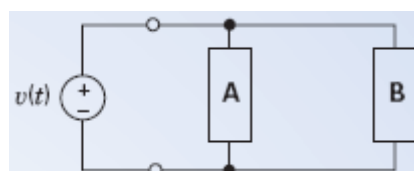



FIGURA 11.5-5 Circuito do Exemplo 11.5-2.

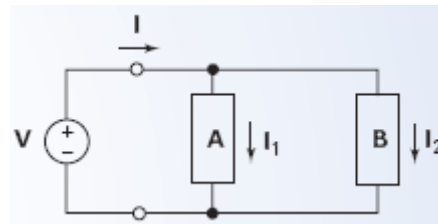



FIGURA 11.5-6 Representação do circuito da Figura 11.5-5 no domínio da frequência.

Solução

Representamos o circuito no domínio da frequência da forma indicada na Figura 11.5-6, em que $\mathbf{V} = 24 \angle 30^\circ$ V. A corrente na carga A pode ser calculada a partir da potência complexa recebida pela carga A através da relação

$$\mathbf{S}_A = \frac{\mathbf{V}\mathbf{I}_1^*}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{I}_1 = \left(\frac{2\mathbf{S}_A}{\mathbf{V}}\right)^*$$

Para $\mathbf{S}_A = 9{,}216 + j6{,}912 = 11{,}52 \angle 36{,}9^\circ$ VA,

$$I_1 = \left(\frac{2(11{,}52 \angle 36{,}9^\circ)}{24 \angle 30^\circ}\right)^* = (0{,}96 \angle 7^\circ)^* = 0{,}96 \angle -7^\circ \text{ A}$$

A corrente da carga B pode ser calculada usando a relação

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_B} = \frac{24 \angle 30^\circ}{42{,}426 \angle 45^\circ} = 0{,}566 \angle -15^\circ \text{ A}$$

A corrente da fonte é

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 = 1{,}522 \angle -9{,}9^\circ \text{ A}$$

(a) A potência complexa fornecida pela fonte é

$$\mathbf{S}_A = \frac{\mathbf{V}\mathbf{I}_1^*}{2} = \frac{(24 \angle 30^\circ)(1{,}522 \angle -9{,}9^\circ)^*}{2} = 18{,}265 \angle 39{,}9^\circ = 14{,}02 + j11{,}71 \text{ VA}$$

(b) A impedância equivalente das duas cargas é

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{24 \angle 30^\circ}{1{,}522 \angle -9{,}9^\circ} = 15{,}768 \angle 39{,}9^\circ \ \Omega$$

A potência complexa é conservada, ou seja, a soma das potências complexas absorvidas por todos os componentes de um circuito é zero. Esse fato pode ser expresso pela equação

$$\sum_{\substack{\text{todos os} \\ \text{componentes}}} \frac{\mathbf{V}_k \mathbf{I}_k^*}{2} = 0 \qquad (11.5\text{-}12)$$

em que $\mathbf{V}_k$ e $\mathbf{I}_k$ são os fasores correspondentes à tensão e à corrente do componente k do circuito. Os fasores $\mathbf{V}_k$ e $\mathbf{I}_k$ devem estar de acordo com a convenção passiva para que $\mathbf{V}_k\mathbf{I}_k{}^*/2$ seja a potência complexa *absorvida* pelo componente k. O somatório da Eq. 11.5-12 deve incluir as potências complexas de todos os componentes do circuito. Quando o componente é uma fonte que está fornecendo potência ao circuito, $\mathbf{V}_k\mathbf{I}_k{}^*/2$ recebe um sinal negativo para indicar que a potência complexa está sendo fornecida em vez de absorvida. A conservação da potência complexa também pode ser expressa na forma

$$\sum_{\textit{fontes}} \frac{\mathbf{V}_k \mathbf{I}_k^*}{2} = \sum_{\substack{\textit{todos os} \\ \textit{componentes}}} \frac{\mathbf{V}_k \mathbf{I}_k^*}{2} \tag{11.5-13}$$

em que os fasores $\mathbf{V}_k$ e $\mathbf{I}_k$ estão de acordo com a convenção passiva no caso dos "outros componentes" mas não estão de acordo com a convenção passiva no caso das fontes. Quando $\mathbf{V}_k$ e $\mathbf{I}_k$ não estão de acordo com a convenção passiva, $\mathbf{V}_k\mathbf{I}_k{}^*/2$ é a potência complexa *fornecida* pelo componente k. Interpretamos a Eq. 11.5-13 como querendo dizer que a potência complexa total fornecida pelas fontes é igual à potência complexa total absorvida pelos outros componentes do circuito.

De acordo com a Eq. 11.5-12,

$$\sum_{\substack{\textit{todos os} \\ \textit{componentes}}} \mathrm{Re}\left(\frac{\mathbf{V}_k \mathbf{I}_k^*}{2}\right) = 0$$

e

$$\sum_{\substack{\textit{todos os} \\ \textit{componentes}}} \mathrm{Im}\left(\frac{\mathbf{V}_k \mathbf{I}_k^*}{2}\right) = 0$$

o que nos dá

$$\sum_{\substack{\textit{todos os} \\ \textit{componentes}}} P_k = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{\substack{\textit{todos os} \\ \textit{componentes}}} Q_k = 0$$

Em outras palavras, tanto a potência média como a potência reativa são conservadas.

EXEMPLO 11.5-3 Conservação da Potência Complexa

Mostre que a potência complexa é conservada no circuito da Figura 11.5-7, em que $v_s = 100 \cos 1000t$ V.

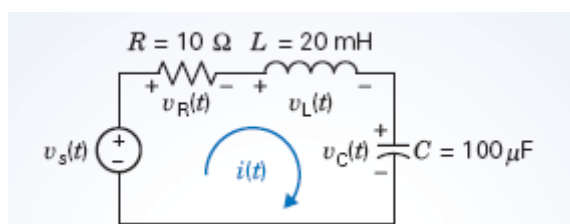



FIGURA 11.5-7 Circuito dos Exemplos 11.5-3 e 11.5-4.

Solução

O fasor correspondente à tensão da fonte é

$$\mathbf{V}_s(\omega) = 100 \angle 0 \text{ V}$$

Escrevendo e resolvendo uma equação de malha, constatamos que o fasor correspondente à corrente de malha é

$$\mathbf{I}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_s(\omega)}{R + j\omega L - j\dfrac{1}{\omega C}} = \frac{100}{10 + j(1000)(0,02) - j\dfrac{1}{(1000)10^{-4}}} = 7,07 \angle -45^\circ \text{ A}$$

Os fasores correspondentes às tensões dos componentes podem ser calculados aplicando a lei de Ohm:

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_R(\omega) &= R\,\mathbf{I}(\omega) = 10(7,07 \angle -45^\circ) = 70,7 \angle -45^\circ \text{ V} \\
\mathbf{V}_L(\omega) &= j\omega L\,\mathbf{I}(\omega) = j(1000)(0,02)(7,07 \angle -45^\circ) \\
&= (20 \angle 90^\circ)(7,07 \angle -45^\circ) = 141,4 \angle 45^\circ \text{ V} \\
\mathbf{V}_C(\omega) &= -j\frac{1}{\omega C}\mathbf{I}(\omega) = -j\frac{1}{(1000)(10^{-4})}(7,07 \angle -45^\circ) \\
&= (10 \angle 90^\circ)(7,07 \angle -45^\circ) = 70,7 \angle -135^\circ \text{ V}
\end{aligned}$$

Considere a fonte de tensão. Os fasores $\mathbf{V}_s$ e $\mathbf{I}$ não estão de acordo com a convenção passiva. A potência complexa

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_V &= \frac{\mathbf{V}_s\mathbf{I}^*}{2} = \frac{100(7,07 \angle -45^\circ)^*}{2} = \frac{100(7,07 \angle 45^\circ)}{2} \\
&= \frac{100(7,07)}{2} \angle 45^\circ = 353,5 \angle 45^\circ \text{ VA}
\end{aligned}$$

é a potência complexa fornecida pela fonte de tensão.

Os fasores $\mathbf{I}$ e $\mathbf{V}_R$ estão de acordo com a convenção passiva. A potência complexa

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_R &= \frac{\mathbf{V}_R\mathbf{I}^*}{2} = \frac{(70,7 \angle -45^\circ)(7,07 \angle -45^\circ)^*}{2} \\
&= \frac{(70,7 \angle -45^\circ)(7,07 \angle 45^\circ)}{2} = \frac{(70,7)(7,07)}{2} \angle -45^\circ + 45^\circ = 250 \angle 0 \text{ VA}
\end{aligned}$$

é a potência complexa absorvida pelo resistor. Analogamente,

$$\mathbf{S}_L = \frac{\mathbf{V}_L\mathbf{I}^*}{2} = \frac{(141,4 \angle 45^\circ)(7,07 \angle 45^\circ)}{2} = \frac{(141,4)(7,07)}{2} \angle 45^\circ + 45^\circ = 500 \angle 90^\circ \text{ VA}$$

é a potência complexa fornecida ao indutor e

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_C &= \frac{\mathbf{V}_C\mathbf{I}^*}{2} = \frac{(70,7 \angle -135^\circ)(7,07 \angle 45^\circ)}{2} = \frac{(70,7)(7,07)}{2} \angle -135^\circ + 45^\circ \\
&= 250 \angle -90^\circ \text{ VA}
\end{aligned}$$

é a potência complexa fornecida ao capacitor.

Para mostrar que a potência complexa é conservada, calculamos a potência complexa absorvida pelos "outros componentes" e a comparamos com a potência complexa fornecida pela fonte:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_R + \mathbf{S}_L + \mathbf{S}_C &= 250 \angle 0^\circ + 500 \angle 90^\circ + 250 \angle -90^\circ \\ &= (250 + j0) + (0 + j500) + (0 - j250) \\ &= 250 + j250 = 353{,}5 \angle 45^\circ = \mathbf{S}_V \end{aligned}$$

Como era de se esperar, a potência complexa fornecida pela fonte é igual à potência complexa absorvida pelos outros componentes do circuito.

EXEMPLO 11.5-4 Conservação da Potência Média

Mostre que a potência média é conservada no circuito da Figura 11.5-7, em que $v_s = 100 \cos 1000t$ V.

Solução

O fasor correspondente à tensão da fonte é

$$\mathbf{V}_s(\omega) = 100 \angle 0 \text{ V}$$

Escrevendo e resolvendo uma equação de malha, constatamos que o fasor correspondente à corrente de malha é

$$\mathbf{I}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_s(\omega)}{R + j\omega L - j\dfrac{1}{\omega C}} = \frac{100}{10 + j(1000)(0,02) - j\dfrac{1}{(1000)10^{-4}}} = 7{,}07 \angle -45^\circ \text{ A}$$

A potência média absorvida pelo resistor, pelo capacitor e pelo indutor pode ser calculada usando a relação

$$P = \left(\frac{I_m^2}{2}\right) \text{Re}\,(\mathbf{Z})$$

Como Re($\mathbf{Z}$) = 0 para o capacitor e o indutor, a potência média absorvida pelos dois componentes é zero. Como Re($\mathbf{Z}$) = R para o resistor, temos:

$$P_R = \left(\frac{I_m^2}{2}\right) R = \frac{(7{,}07^2)}{2} 10 = 250 \text{ W}$$

A potência média fornecida pela fonte é

$$P_V = \text{Re}(\mathbf{S}_V) = \text{Re}\left(\frac{\mathbf{V}_s \mathbf{I}^*}{2}\right) = \text{Re}\left(\frac{100\,(7{,}07)}{2} \angle 45^\circ\right) = \text{Re}(353{,}5 \angle 45^\circ) = 250 \text{ W}$$

Para mostrar que a potência média é conservada, calculamos a potência média absorvida pelos "outros componentes" e a comparamos com a potência média fornecida pela fonte:

$$P_R + P_L + P_C = 250 + 0 + 0 = 250 = P_V$$

Como era de se esperar, a potência média fornecida pela fonte é igual à potência média absorvida pelos outros componentes do circuito.

EXERCÍCIO 11.5-1 Determine a potência média fornecida a cada componente do circuito da Figura E 11.5-1. Mostre que a potência média é conservada.

Resposta: 4,39 + 0 = 4,39 W

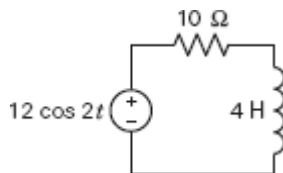



FIGURA E 11.5-1

EXERCÍCIO 11.5-2 Determine a potência complexa fornecida a cada componente do circuito da Figura E 11.5-2. Mostre que a potência complexa é conservada.

Resposta: $6{,}606 + j5{,}248 + j3{,}303 + 6{,}606 + j1{,}982$ VA.

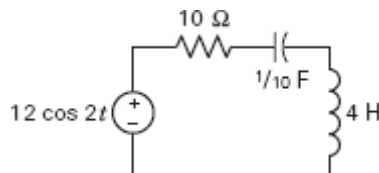



FIGURA E 11.5-2

11.6 *Fator de Potência*

Nesta seção, como na seção anterior, vamos considerar um circuito linear, com uma entrada senoidal, que já atingiu o regime estacionário. Nesse caso, todas as tensões e correntes dos componentes são senoidais e têm a mesma frequência que a entrada. Um circuito desse tipo pode ser analisado no domínio da frequência usando fasores e impedâncias. Em particular, podemos calcular a potência gerada ou absorvida em um circuito ou em um componente de um circuito, no domínio da frequência, usando fasores e impedâncias.

Como vimos na Seção 11.5, a potência média absorvida pelo componente da Figura 11.5-1 é dada por

$$P = \frac{V_m I_m}{2} \cos(\theta_V - \theta_I)$$

e a potência aparente é dada por

$$|S| = \frac{V_m I_m}{2}$$

A razão entre a potência média e a potência aparente é chamada de **fator de potência** (*fp*). O fator de potência é dado por

$$fp = \cos(\theta_V - \theta_I)$$

O ângulo $\theta_V - \theta_I$ é chamado de ângulo do fator de potência. A potência média absorvida pelo componente da Figura 11.5-1 pode ser expressa na forma

$$P = \frac{V_m I_m}{2} fp \qquad (11.6\text{-}1)$$

O cosseno é uma função par, ou seja, cos (θ) = cos ($-\theta$). Assim,

$$fp = \cos(\theta_V - \theta_I) = \cos(\theta_I - \theta_V)$$

Isso dá origem a uma ambiguidade; não podemos calcular $\theta_V - \theta_I$ a partir de *fp* sem uma informação adicional. Suponha, por exemplo, que $fp = 0{,}8$. É fácil mostrar que

$$36{,}87^\circ = \cos^{-1}(0{,}8)$$

mas isso não é suficiente para determinar $\theta_V - \theta_I$. Como o cosseno é uma função par, tanto cos (36,87º) = 0,8 como cos (−36,87º) = 0,8. Isso significa que podemos ter $\theta_V - \theta_I = 36{,}87^\circ$ ou $\theta_V - \theta_I = -36{,}87^\circ$. O problema é resolvido rotulando o fator de potência como *adiantado* ou *atrasado*. Se $\theta_V - \theta_I > 0$, dizemos que o fator de potência está atrasado; se $\theta_V - \theta_I < 0$, dizemos que o fator de potência está adiantado. Se o fator de potência é especificado como 0,8 adiantado, isso significa que $\theta_V - \theta_I = -36{,}87^\circ$; se o fator de potência é especificado como 0,8 atrasado, isso significa que $\theta_V - \theta_I = 36{,}87^\circ$.

A importância do fator de potência está ilustrada no circuito da Figura 11.6-1. O circuito é um modelo da transmissão de energia elétrica de uma usina para um consumidor. A carga do consumidor está ligada à usina de energia elétrica por uma linha de transmissão. Na grande maioria dos casos, a energia é fornecida com uma tensão constante. A usina deve fornecer tanto a energia usada pelo consumidor como a energia absorvida pela linha de transmissão. A potência absorvida pela linha de transmissão é perdida; não realiza nenhum trabalho útil e existe todo o interesse em minimizá-la.

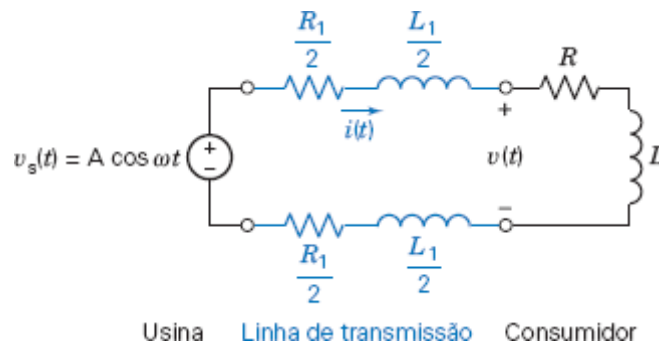



FIGURA 11.6-1 Transmissão de energia elétrica de uma usina para um consumidor. A carga do consumidor está ligada à usina de energia elétrica por uma linha de transmissão.

O circuito da Figura 11.6-2 é um modelo da transmissão de energia elétrica de uma usina para um consumidor no domínio da frequência, usando impedâncias e fasores. Nosso objetivo é descobrir uma forma de reduzir a potência absorvida pela linha de transmissão. Nesse tipo de situação, a linha de transmissão não pode ser alterada, de modo que não podemos mudar os valores de R_1 e $j\omega L_1$. Além disso, como o consumidor está interessado em receber uma potência média específica com uma tensão específica, também não podemos mudar os valores de P e V_m. Vamos ver que é possível ajustar o fator de potência acrescentando uma impedância de compensação à carga do consumidor. Vamos manter o fator de potência *fp* como uma variável em nossa análise porque pretendemos fazer variar o fator de potência de modo a reduzir a potência absorvida pela linha de transmissão.

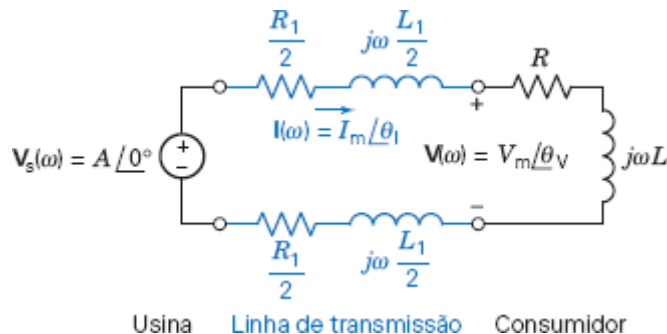



FIGURA 11.6-2 Representação no domínio da frequência da transmissão de energia elétrica de uma usina para um consumidor.

A impedância da linha é

$$\mathbf{Z}_{\text{LINHA}}(\omega) = \frac{R_1}{2} + j\omega\frac{L_1}{2} + \frac{R_1}{2} + j\omega\frac{L_1}{2} = R_1 + j\omega L_1$$

A potência média absorvida pela linha é

$$P_{\text{LINHA}} = \frac{I_{\text{m}}^2}{2} \text{Re}(\mathbf{Z}_{\text{LINHA}}) = \frac{I_{\text{m}}^2}{2} R_1$$

Como o consumidor está interessado em receber uma potência específica a uma tensão específica, vamos tratar a tensão da carga, V_{m}, e a potência média fornecida à carga, P, como grandezas fixas. De acordo com a Eq. 11.6-1,

$$P = \frac{V_{\text{m}} I_{\text{m}}}{2} fp$$

Explicitando I_{m}, obtemos

$$I_{\text{m}} = \frac{2P}{V_{\text{m}} fp}$$

o que nos dá

$$P_{\text{LINHA}} = 2\left(\frac{P}{V_m fp}\right)^2 R_1$$

Assim, quanto maior é o valor de fp, menor é a potência absorvida pela linha de transmissão. Como o fator de potência é o cosseno de um ângulo, o valor máximo de fp é 1. Observe que fp é máximo para $\theta_{\text{V}} = \theta_{\text{I}}$, ou seja, para uma carga puramente resistiva.

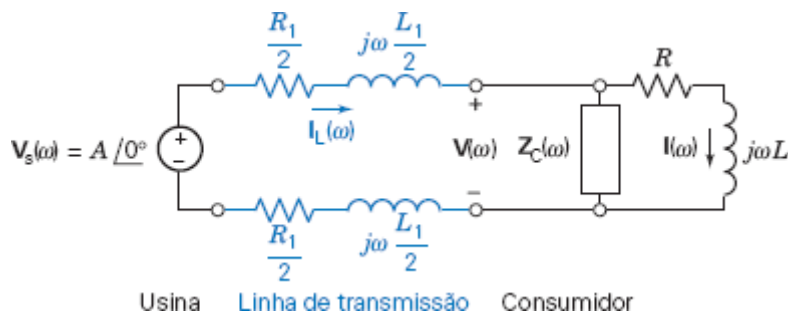



FIGURA 11.6-3 Transmissão de energia elétrica de uma usina para um consumidor. Uma impedância de compensação foi ligada em paralelo com a carga do consumidor para corrigir o fator de potência.

Na Figura 11.6-3, uma impedância de compensação foi ligada em paralelo com a carga para ajustar o fator de potência do consumidor. Como é vantajoso tanto para a empresa de energia elétrica como para o consumidor manter o fator de potência o mais próximo possível da unidade, dizemos que a impedância de compensação tem por objetivo *corrigir* o fator de potência da carga. Chamando o fator de potência corrigido de *fpc* e o ângulo de fase correspondente de θ_{C}, temos

$$fpc = \cos \theta_{\text{C}}$$

Podemos representar a impedância da carga como

$$\mathbf{Z} = R + jX$$

Do mesmo modo, podemos representar a impedância de compensação como

$$\mathbf{Z}_{\text{C}} = R_{\text{C}} + jX_{\text{C}}$$

A vantagem de usar uma impedância de compensação é que, através dessa impedância, é possível ajustar a impedância total da carga para que seja puramente resistiva. Naturalmente, não queremos que a potência média

absorvida por $\mathbf{Z}_C$ seja diferente de zero; assim, escolhemos um componente puramente reativo, ou seja

$$\mathbf{Z}_C = jX_C$$

A impedância total da carga, $\mathbf{Z}_P$, é dada pela associação em paralelo de $\mathbf{Z}$ e $\mathbf{Z}_C$:

$$\mathbf{Z}_P = \frac{\mathbf{Z}\mathbf{Z}_C}{\mathbf{Z}+\mathbf{Z}_C}$$

Essa impedância pode ser escrita na forma

$$\mathbf{Z}_P = R_P + jX_P = Z_P \angle \theta_P$$

e o fator de potência da nova carga é

$$fpc = \cos\theta_P = \cos\left(\tan^{-1}\frac{X_P}{R_P}\right) \qquad (11.6\text{-}2)$$

em que fpc é o fator de potência corrigido e a fase corrigida, θ_C, é igual a θ_P. Para calcular R_P e X_P, basta realizar algumas manipulações algébricas:

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}_P &= \frac{(R+jX)\,jX_C}{R+jX+jX_C}\\ &= \frac{RX_C^2 + j[R^2X_C + (X_C+X)X\,X_C]}{R^2+(X+X_C)^2}\\ &= \frac{RX_C^2}{R^2+(X+X_C)^2} + j\frac{R^2X_C+(X_C+X)X\,X_C}{R^2+(X+X_C)^2}\end{aligned}$$

Assim, a razão entre X_P e R_P é dada por

$$\frac{X_P}{R_P} = \frac{R^2+(X_C+X)X}{RX_C} \qquad (11.6\text{-}3)$$

A Eq. 11.6-2 pode ser escrita na forma

$$\frac{X_P}{R_P} = \tan\left(\cos^{-1} fpc\right) \qquad (11.6\text{-}4)$$

Combinando as Eqs. 11.6-3 e 11.6-4 e explicitando X_C, obtemos

$$X_C = \frac{R^2+X^2}{R\,\tan\left(\cos^{-1} fpc\right) - X} \qquad (11.6\text{-}5)$$

Observe que X_C pode ser positiva ou negativa, dependendo do valor escolhido para fpc e dos valores de R e X da carga. O fator $\tan[\cos^{-1}(fpc)]$ é positivo se o fpc for especificado como atrasado, negativo se o fpc for especificado como adiantado e nulo se o fpc for especificado como 1.

Na maioria dos casos, a carga do consumidor é indutiva e, portanto, precisamos introduzir no circuito uma impedância capacitiva $\mathbf{Z}_C$. No caso de um capacitor,

$$\mathbf{Z}_C = \frac{-j}{\omega C} = jX_C \qquad (11.6\text{-}6)$$

Isso significa que, na maioria dos casos, a reatância de compensação deve ser negativa. Combinando as Eqs. 11.6-5 e 11.6-6, temos:

$$\frac{-1}{\omega C} = \frac{R^2 + X^2}{R \tan\left(\cos^{-1} fpc\right) - X}$$

Explicitando ωC, obtemos

$$\omega C = \frac{X - R\tan\left(\cos^{-1} fpc\right)}{R^2 + X^2} = \frac{R}{R^2 + X^2}\left(\frac{X}{R} - \tan\left(\cos^{-1} fpc\right)\right)$$

Fazendo $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{X}{R}\right)$, obtemos

$$\omega C = \frac{R}{R^2 + X^2}\left(\tan\theta - \tan\theta_C\right) \qquad (11.6\text{-}7)$$

em que $\theta = \cos^{-1}(fp)$ e $\theta_C = \cos^{-1}(fpc)$.

EXEMPLO 11.6-1 Cargas em Paralelo

Em uma fábrica, duas cargas estão ligadas em paralelo às linhas de transmissão de energia elétrica. A primeira carga, um aquecedor de 50 kW, é puramente resistiva. A segunda é um conjunto de motores que funcionam com um fator de potência atrasado de 0,86. A potência total consumida pelos motores é 100 kVA. A tensão fornecida à fábrica é 10.000 V rms. Determine a corrente total no circuito de alimentação da fábrica e o fator de potência correspondente.

Solução

A Figura 11.6-4*a* mostra o que é conhecido a respeito dos circuitos elétricos da fábrica.

Considere, para começar, o aquecedor elétrico. Como essa carga é resistiva, a potência reativa é zero. Assim,

$$\mathbf{S}_1 = P_1 = 50 \text{ kW}$$

Em seguida, considere os motores. Como o fator de potência é atrasado, $\theta_2 > 0°$:

$$\theta = \cos^{-1}(fp_2) = \cos^{-1}(0{,}86) = 30{,}7°$$

A potência complexa absorvida pelos motores é

$$\mathbf{S}_2 = |\mathbf{S}_2| \angle\theta_2 = 100 \angle 30{,}7° \text{ kVA}$$

A potência média e a potência reativa absorvida pelos motores podem ser calculadas convertendo a potência complexa para a forma retangular:

$$\mathbf{S}_2 = |\mathbf{S}_2| \cos\theta_2 + j|\mathbf{S}_2| \text{ sen } \theta_2 = 100 \cos 30{,}7° + j \text{ sen } 30{,}7° = 86 + j51 \text{ kVA}$$

Assim,

$$P_2 = 86 \text{ kW e } Q_2 = 51 \text{ kVAR}$$

A potência complexa total **S** fornecida à carga total é a soma das potências complexas fornecidas às duas cargas:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 = 50 + (86 + j51) = 136 + j51 \text{ kVA}$$

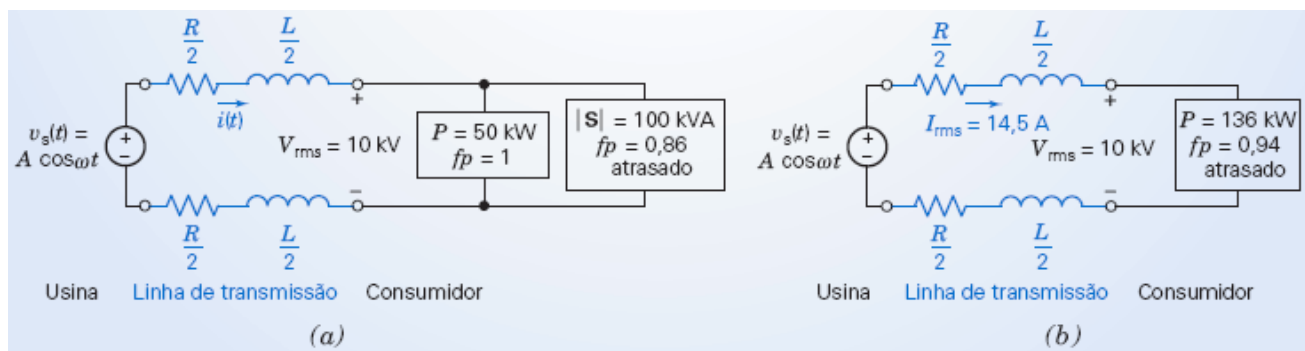



FIGURA 11.6-4 Circuito do Exemplo 11.6-1.

A potência média total e a potência reativa total são, portanto,

$$P = 136\text{ kW} \quad \text{e} \quad Q = 51\text{ kVAR}$$

Para calcular o fator de potência da carga total, convertemos **S** para a forma polar:

$$\mathbf{S} = 145,2\angle 20,6^\circ \text{ kVA}$$

o que nos dá

$$fp = \cos(20,6^\circ) = 0,94 \text{ atrasado}$$

A corrente total no circuito de alimentação da fábrica pode ser calculada a partir da potência aparente absorvida pela carga e da tensão fornecida à fábrica. Temos:

$$|\mathbf{S}| = \frac{V_m I_m}{2} = V_{rms} I_{rms}$$

Explicitando a corrente, obtemos

$$I_{rms} = \frac{|\mathbf{S}|}{V_{rms}} = \frac{145.200}{10^4} = 14,52 \text{ A rms}$$

A Figura 11.6-4*b* mostra os resultados deste exemplo.

EXEMPLO 11.6-2 Correção do Fator de Potência

A carga da Figura 11.6-5 tem uma impedância **Z** = 100 + *j*100 Ω. Determine a capacitância que deve ser ligada em paralelo com a carga para corrigir o fator de potência (a) para 0,95 atrasado e (b) para 1,0. Suponha que a frequência angular da tensão é $\omega = 377$ rad/s.

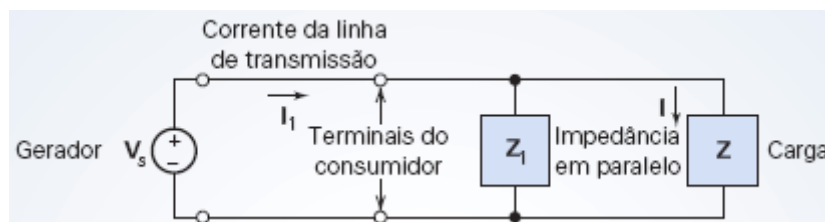



FIGURA 11.6-5 Circuito do Exemplo 11.6-2.

Solução

Como o ângulo de fase da impedância é $\theta = 45^\circ$, o fator de potência original está atrasado, com

$$\cos\theta = \cos 45° = 0{,}707$$

No item (a), queremos corrigir o fator de potência para *fpc* = 0,95 atrasado. De acordo com a Eq. 11.6-5, temos:

$$X_C = \frac{100^2 + 100^2}{100 \tan(\cos^{-1} 0{,}95) - 100} = -297{,}9\ \Omega$$

O valor da capacitância pode ser calculado a partir da relação

$$-\frac{1}{\omega C} = X_C$$

Para $\omega = 377$ rad/s, temos

$$C = -\frac{1}{\omega X_C} = \frac{-1}{377(-297{,}9)} = 8{,}9\ \mu\text{F}$$

No item (b), queremos corrigir o fator de potência para *fpc* = 1. Assim,

$$X_C = \frac{2\times 10^4}{100 \tan(\cos^{-1} 1) - 100} = -200$$

O valor da capacitância é

$$C = \frac{-1}{\omega X_C} = \frac{-1}{377(-200)} = 13{,}3\ \mu\text{F}$$

Como o fator de potência não corrigido está atrasado, podemos também usar a Eq. 11.6-7 para determinar o valor de *C*. Assim, por exemplo, para que *fpc* = 1, devemos ter $\theta_C = 0°$ e, portanto,

$$\omega C = \frac{100}{2\times 10^4}(\tan\theta - \tan\theta_C) = (5\times 10^{-3})(\tan(45°) - \tan(0°)) = 5\times 10^{-3}$$

e

$$C = \frac{5\times 10^{-3}}{377} = 13{,}3\ \mu\text{F}$$

Como era de se esperar, este valor de capacitância é o mesmo que foi calculado usando a Eq. 11.6-5.

Exemplo 11.6-3 Potência Complexa

A entrada do circuito da Figura 11.6-6*a* é a tensão da fonte de tensão,

$$v_s(t) = 7{,}28 \cos(4t + 77°)\ \text{V}$$

A saída é a tensão do indutor,

$$v_o(t) = 4{,}254 \cos(4t + 311°)\ \text{V}$$

Determine:

(a) A potência média fornecida pela fonte de tensão.

(b) A potência média recebida pelo resistor.

(c) A potência média recebida pelo indutor.

(d) O fator de potência da impedância da associação em série do resistor com o indutor.

Solução

A tensão de entrada é senoidal. A tensão de saída também é senoidal e tem a mesma frequência que a tensão de entrada. Vamos supor que o circuito se encontra no regime estacionário. Nesse caso, o circuito da Figura 11.6-6*a* pode ser representado no domínio da frequência, usando fasores e impedâncias. A Figura 11.6-6*b* mostra a representação no domínio da frequência do circuito da Figura 11.6-6*a*. A impedância do indutor é $j\omega L = j(4)(0{,}54) = j2{,}16\ \Omega$, como mostra a Figura 11.6-6*b*.

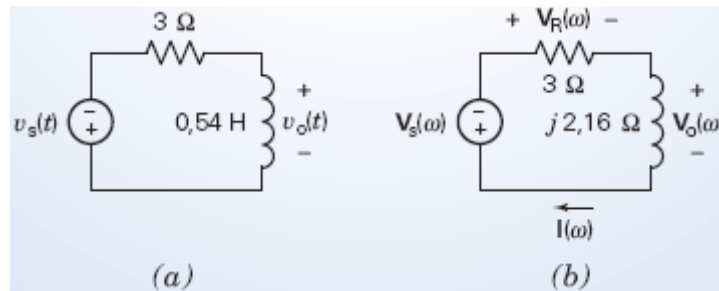



FIGURA 11.6-6 Circuito do Exemplo 11.6-3 representado (*a*) no domínio do tempo e (*b*) no domínio da frequência.

Os fasores correspondentes às senoides de entrada e saída são

$$\mathbf{V}_S(\omega) = 7{,}28 \angle 77^\circ \text{ V}$$

e

$$\mathbf{V}_o(\omega) = 4{,}254 \angle 311^\circ \text{ V}$$

A corrente $\mathbf{I}(\omega)$ da Figura 11.6-6*b* pode ser calculada a partir de $\mathbf{V}_o(\omega)$ e da impedância do indutor usando a lei de Ohm:

$$\mathbf{I}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{j2{,}16} = \frac{4{,}254 \angle 311^\circ}{2{,}16 \angle 90^\circ} = \frac{4{,}254}{2{,}16} \angle 311^\circ - 90^\circ = 1{,}969 \angle 221^\circ \text{ A}$$

Uma vez conhecido o valor de $\mathbf{I}(\omega)$, podemos calcular as grandezas pedidas no enunciado.

(a) A potência média fornecida pela fonte pode ser calculada a partir de $\mathbf{I}(\omega)$ e $\mathbf{V}_s(\omega)$. Temos:

$$\frac{|\mathbf{V}_s(\omega)|\,|\mathbf{I}(\omega)|}{2} \cos\left(\angle \mathbf{V}_s(\omega) - \angle \mathbf{I}(\omega)\right) = \frac{(7{,}28)(1{,}969)}{2} \cos(77^\circ - 221^\circ) = 7{,}167 \cos(-144^\circ) = -5{,}8 \text{ W} \quad (11.6\text{-}8)$$

Observe que $\mathbf{I}(\omega)$ e $\mathbf{V}_s(\omega)$ estão de acordo com a convenção passiva. Isso significa que a Eq. 11.6-8 representa a potência recebida pela fonte de tensão e não a potência fornecida pela fonte. A potência fornecida é o negativo da potência recebida. Assim, a potência fornecida pela fonte de tensão é

$$P_S = 5{,}8 \text{ W}$$

(b) A tensão do resistor, $\mathbf{V}_R(\omega)$, na Figura 11.6-6*b* é dada por

$$\mathbf{V}_R(\omega) = R\,\mathbf{I}(\omega) = 3(1{,}969 \angle 221^\circ) = 5{,}907 \angle 221^\circ \text{ V}$$

A potência média recebida pelo resistor pode ser calculada a partir de $\mathbf{I}(\omega)$ e $\mathbf{V}_R(\omega)$:

$$P_R = \frac{|\mathbf{V}_R(\omega)||\mathbf{I}(\omega)|}{2}\cos\left(\angle\mathbf{V}_R(\omega) - \angle\mathbf{I}(\omega)\right) = \frac{(5{,}907)(1{,}969)}{2}\cos(221^\circ - 221^\circ)$$
$$= 5{,}8\cos(0^\circ) = 5{,}8 \text{ W} \qquad (11.6\text{-}9)$$

Observe que $\mathbf{I}(\omega)$ e $\mathbf{V}_R(\omega)$ estão de acordo com a convenção passiva e, portanto, P_R é a potência recebida pelo resistor, como era de se esperar.

A potência recebida por um resistor também pode ser calculada a partir da corrente $\mathbf{I}(\omega)$ e da resistência R. A tensão e a corrente em um resistor estão relacionadas do seguinte modo:

$$\mathbf{V}_R(\omega) = R\mathbf{I}(\omega) \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{V}_R(\omega)|\angle\mathbf{V}_R(\omega) = R(|\mathbf{I}(\omega)|\angle\mathbf{I}(\omega)) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} |\mathbf{V}_R(\omega)| = R|\mathbf{I}(\omega)| \\ \angle\mathbf{V}_R(\omega) = \angle\mathbf{I}(\omega) \end{cases}$$

Substituindo essas expressões de $|V_R(\omega)|$ e $\angle V_R(\omega)$ na Eq. 11.6-9, obtemos:

$$P_R = \frac{|R\mathbf{I}(\omega)||\mathbf{I}(\omega)|}{2}\cos\left(\angle\mathbf{I}(\omega) - \angle\mathbf{I}(\omega)\right) = \frac{R|\mathbf{I}(\omega)|^2}{2}$$
$$= \frac{(3)(1{,}969)^2}{2} = 5{,}8 \text{ W}$$

(c) A potência média recebida pelo indutor pode ser calculada a partir de $\mathbf{I}(\omega)$ e $\mathbf{V}_o(\omega)$:

$$P_L = \frac{|\mathbf{V}_o(\omega)||\mathbf{I}(\omega)|}{2}\cos\left(\angle\mathbf{V}_o(\omega) - \angle\mathbf{I}(\omega)\right) = \frac{(4.254)(1{,}969)}{2}\cos(311^\circ - 221^\circ)$$
$$= 4{,}188\cos(90^\circ) = 0 \text{ W} \qquad (11.6\text{-}10)$$

Este resultado já era esperado, pois a fase da tensão em um indutor está adiantada de 90º em relação à corrente e, portanto, a potência média recebida por um indutor é sempre nula.

(d) O fator de potência da impedância da associação em série do resistor e do indutor pode ser calculado a partir de $\mathbf{I}(\omega)$ e da tensão da impedância. Essa tensão, que é igual a $\mathbf{V}_R(\omega) + \mathbf{V}_o(\omega)$, pode ser calculada aplicando a LKT ao circuito da Figura 11.6-6*b*:

$$\mathbf{V}_R(\omega) + \mathbf{V}_o(\omega) + \mathbf{V}_s(\omega) = 0$$
$$\mathbf{V}_R(\omega) + \mathbf{V}_o(\omega) = -\mathbf{V}_s(\omega) = -7{,}28\angle 77^\circ$$
$$= (1\angle 180^\circ)(7{,}28\angle 77^\circ)$$
$$= (7{,}28\angle 257^\circ)$$

O fator de potência é dado por

$$fp = \cos\left(\angle\mathbf{V}_R(\omega) + \mathbf{V}_o(\omega) - \angle\mathbf{I}(\omega)\right) = \cos(257^\circ - 221^\circ) = 0{,}809$$

O fator de potência é atrasado, já que $257^\circ - 221^\circ = 36^\circ > 0$.

A potência média é conservada. Neste exemplo, isso significa que a potência média fornecida pela fonte de tensão deve ser igual à soma das potências médias recebidas pelo resistor e pelo indutor, o que permite verificar se os cálculos estão corretos.

Se o valor de $\mathbf{V}_o(\omega)$ não fosse dado, seria preciso calcular $\mathbf{I}(\omega)$ escrevendo e resolvendo uma equação de malha. De acordo com a Figura 11.6-6*b*, a equação de malha é

$$3\,\mathbf{I}(\omega) + j2{,}16\,\mathbf{I}(\omega) + 7{,}28\angle 77^\circ = 0$$

Explicitando $\mathbf{I}(\omega)$, obtemos

$$\mathbf{I}(\omega) = \frac{-7,28\angle 77^\circ}{3 + j2,16} = \frac{(1\angle 180^\circ)(7,28\angle 77^\circ)}{3,697\angle 36^\circ}$$
$$= \frac{(1)(7,28)}{3,697}\angle 180^\circ + 77^\circ - 36^\circ = 1,969\angle 221^\circ \text{ A}$$

um valor igual ao que foi calculado anteriormente.

EXERCÍCIO 11.6-1 Um circuito é formado por um motor de grande porte ligado a uma linha de alimentação de corrente alternada ($\omega = 2\pi \times 60 = 377$ rad/s). O modelo do motor é um resistor de 100 Ω em série com um indutor de 5 H. Determine o fator de potência do motor.

Resposta: $fp = 0,053$ atrasado

EXERCÍCIO 11.6-2 A carga da Figura 11.6-5 possui uma impedância $\mathbf{Z} = 50 + j80$ Ω. Determine o fator de potência não corrigido do circuito e a impedância $\mathbf{Z}_C$ necessária para corrigir o fator de potência para 1,0.

Resposta: $fp = 0,53$ atrasado e $\mathbf{Z}_C = -j111,25$ Ω

EXERCÍCIO 11.6-3 Determine qual será o fator de potência da fábrica do Exemplo 11.6-1 se a carga do aquecedor resistivo for reduzida para 30 kW. A carga do motor e a tensão de alimentação continuam as mesmas do Exemplo 11.6-1.

Resposta: $fp = 0,915$

EXERCÍCIO 11.6-4 A carga da Figura 11.6-5 absorve uma potência de 4 kW, é alimentada com uma tensão de 110 V_{rms} e tem um fator de potência de 0,82 atrasado. Determine o valor do capacitor que deve ser ligado em paralelo com a carga para corrigir o fator de potência para 0,95 atrasado, sabendo que a frequência angular da tensão é $\omega = 377$ rad/s.

Resposta: $C = 0,324$ mF

11.7 O Princípio de Superposição de Potências

Nesta seção, vamos considerar o caso em que o circuito contém duas ou mais fontes. Considere, por exemplo, o circuito da Figura 11.7-1*a*, que possui duas fontes de tensão senoidais. De acordo com o princípio de superposição, a resposta às duas fontes agindo simultaneamente é igual à soma das respostas às duas fontes agindo sozinhas. A aplicação do princípio de superposição está ilustrada na Figura 11.7-1*b*, em que i_1 é a resposta à fonte 1 agindo sozinha e i_2 é a resposta à fonte 2 agindo sozinha. A resposta total é

$$i = i_1 + i_2 \tag{11.7-1}$$

A potência instantânea é

$$p = i^2R = R(i_1 + i_2)^2 = R(i_1^2 + i_2^2 + 2i_1i_2)$$

em que R é a resistência do circuito. Assim, a potência média é

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T}\int_0^T p\,dt = \frac{R}{T}\int_0^T (i_1^2 + i_2^2 + 2i_1 i_2)\,dt \\ &= \frac{R}{T}\int_0^T i_1^2\,dt + \frac{R}{T}\int_0^T i_2^2\,dt + \frac{2R}{T}\int_0^T i_1 i_2\,dt = P_1 + P_2 + \frac{2R}{T}\int_0^T i_1 i_2\,dt \end{aligned} \tag{11.7-2}$$

em que P_1 é a potência média associada a v_1 e P_2 é a potência média associada a v_2. Como vamos ver em seguida, se v_1 e v_2 são senoides de frequências diferentes,

$$\frac{2R}{T}\int_0^T i_1 i_2\, dt = 0 \qquad (11.7\text{-}3)$$

Nos casos em que a Eq. 11.7-3 é satisfeita, a Eq. 11.7-2 se reduz a

$$P = P_1 + P_2 \qquad (11.7\text{-}4)$$

De acordo com a Eq. 11.7-4, a potência média fornecida ao resistor pelas duas fontes agindo simultaneamente é igual à soma das potências médias fornecidas ao resistor pelas duas fontes agindo sozinhas. Este é o princípio de superposição de potências. Observe que o princípio de superposição de potências é válido apenas se a Eq. 11.7-3 for satisfeita.

Vamos agora determinar em que circunstâncias a Eq. 11.7-3 é satisfeita. Chamando de $m\omega$ a frequência angular da primeira fonte e de $n\omega$ a frequência angular da segunda fonte, as correntes podem ser representadas na forma geral

$$i_1 = I_1 \cos(m\omega t + \phi)$$

e

$$i_2 = I_2 \cos(n\omega t + \theta)$$

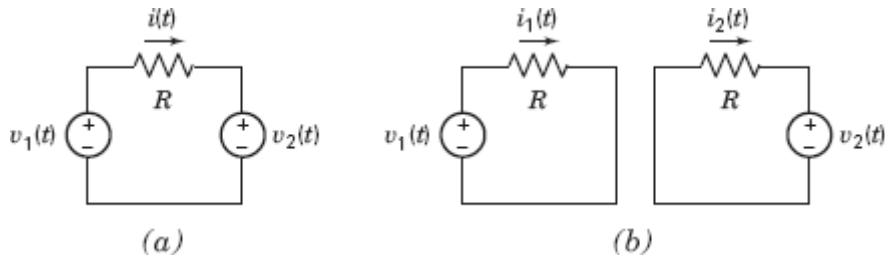



FIGURA 11.7-1 (*a*) Um circuito com duas fontes. (*b*) Uso do princípio de superposição para calcular a corrente no resistor como $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$.

É possível demonstrar que

$$\int_0^T \cos(m\omega t + \phi)\cos(n\omega t + \theta)\, dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \cos(\phi - \theta) & m = n \end{cases}$$

e, portanto,

$$\frac{2R}{T}\int_0^T i_1 i_2\, dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ RI_1 I_2 \cos(\phi - \theta) & m = n \end{cases} \qquad (11.7\text{-}5)$$

De acordo com o *princípio de superposição de potências médias*, portanto, a potência média fornecida a um circuito por várias fontes senoidais agindo simultaneamente é igual à soma das potências médias das fontes agindo sozinhas se, e apenas se, não existirem duas fontes com a mesma frequência. Usando um raciocínio semelhante, é possível mostrar que o princípio da superposição pode ser usado para calcular a potência reativa ou a potência complexa fornecida a um circuito por várias fontes senoidais, contanto que não existam duas fontes com a mesma frequência.

Se duas ou mais fontes possuem a mesma frequência, o princípio de superposição de *potências* deixa de ser válido, mas o princípio de superposição ainda se aplica às correntes fasoriais, ou seja, podemos determinar as correntes fasoriais produzidas pelas fontes agindo sozinhas e somar as correntes para obter a corrente fasorial total

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + ... + \mathbf{I}_N$$

das N fontes. Nesse caso, a potência média é dada por

$$P = \frac{I_m^2 R}{2} \quad (11.7\text{-}6)$$

em que $|\mathbf{I}| = I_m$.

EXEMPLO 11.7-1 Superposição de Potências

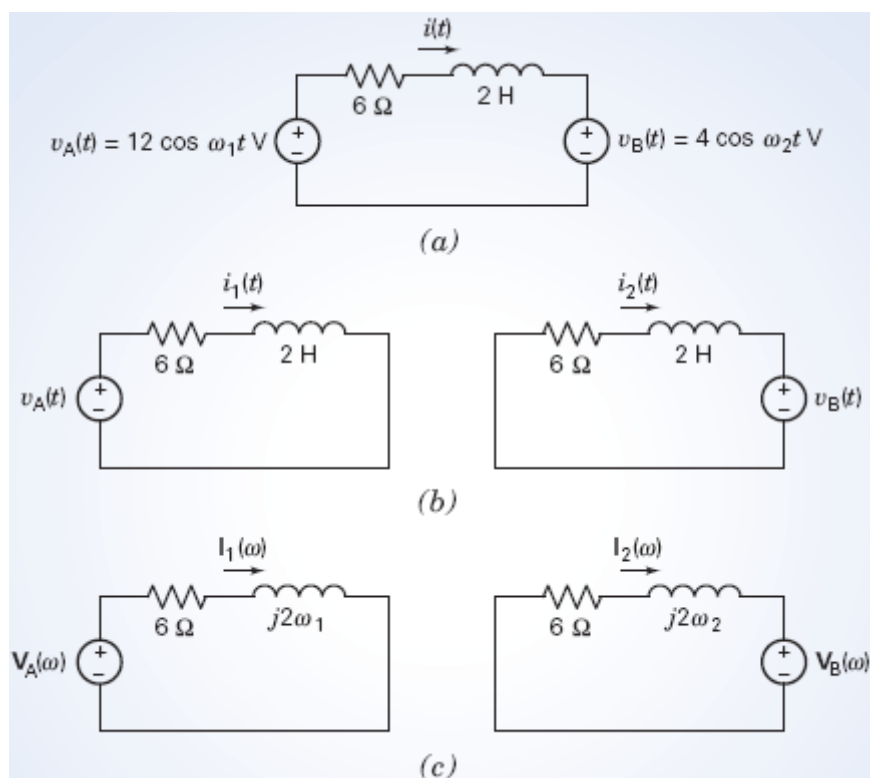



FIGURA 11.7-2 (*a*) Um circuito com duas fontes senoidais. (*b*) Uso do princípio de superposição para determinar separadamente a resposta a cada fonte. (*c*) Representação no domínio da frequência dos circuitos mostrados em (*b*).

O circuito da Figura 11.7-2 contém duas fontes senoidais. Para ilustrar a superposição de potências, considere dois casos:

(1) $v_A(t) = 12 \cos 3t$ V e $v_B(t) = 4 \cos 4t$ V

(2) $v_A(t) = 12 \cos 4t$ V e $v_B(t) = 4 \cos 4t$ V

Determine a potência média absorvida pelo resistor de 6 Ω.

Solução

A aplicação do princípio de superposição está ilustrada na Figura 11.7-2*b*, em que i_1 é a resposta à fonte de tensão A agindo sozinha e i_2 é a resposta à fonte de tensão B agindo sozinha. A resposta total é $i = i_1 + i_2$. Na Figura 11.7-2*c*, os circuitos da Figura 11.7-2*b* estão representados no domínio da frequência usando impedâncias e fasores.

Vamos considerar agora os dois casos.

1º Caso: Analisando os circuitos da Figura 11.7-2*c*, obtemos

$$\mathbf{I}_1(\omega) = 1{,}414\angle{-45^\circ} \text{ A} \quad \text{e} \quad \mathbf{I}_2(\omega) = 0{,}4\angle{127^\circ} \text{ A}$$

Como esses fasores estão associados a frequências diferentes, não podem ser somados. As mesmas correntes no domínio do tempo são

$$i_1(t) = 1{,}414 \cos(3t - 45^\circ) \text{ A} \quad \text{e} \quad i_2(t) = 0{,}4 \cos(4t - 143^\circ) \text{ A}$$

Usando o princípio de superposição, chegamos à conclusão de que a corrente total no resistor é

$$i(t) = 1{,}414 \cos(3t - 45°) + 0{,}4 \cos(4t - 127°) \text{ A}$$

A potência média é dada por

$$P = \frac{R}{T}\int_0^T i^2\, dt = \frac{R}{T}\int_0^T (1{,}414 \cos(3t - 45°) + 0{,}4 \cos(4t + 127°))^2\, dt$$

Como as duas fontes senoidais têm frequências diferentes, a potência média pode ser calculada com mais facilidade usando o princípio de superposição de potências:

$$P = P_1 + P_2 = \frac{1{,}414^2}{2}6 + \frac{0{,}4^2}{2}6 = 6{,}48 \text{ W}$$

Observe que, neste caso, foram usados tanto o princípio de superposição como o princípio de superposição de potências. Em primeiro lugar, o princípio de superposição foi usado para calcular $\mathbf{I}_1(\omega)$ e $\mathbf{I}_2(\omega)$. Em seguida, a potência P_1 foi calculada a partir de $\mathbf{I}_1(\omega)$ e a potência P_2 foi calculada a partir de $\mathbf{I}_2(\omega)$. Finalmente, o princípio de superposição de potências foi usado para calcular P a partir de P_1 e P_2.

2º Caso: A análise dos circuitos da Figura 11.7-2*c* nos dá

$$\mathbf{I}_1(\omega) = 1{,}2\angle{-53°} \text{ A} \quad \text{e} \quad \mathbf{I}_2(\omega) = 0{,}4\angle{127°} \text{ A}$$

Como os dois fasores estão associados à mesma frequência, $\omega = 4$ rad/s, podemos somá-los para obter o fasor correspondente a $i(t)$.

$$\mathbf{I}(\omega) = \mathbf{I}_1(\omega) + \mathbf{I}_2(\omega) = (1{,}2\angle{-53°}) + (0{,}4\angle{127°}) = 0{,}8\angle{-53°} \text{ A}$$

A corrente senoidal correspondente a esse fasor é

$$i(t) = 0{,}8 \cos(4t - 53°) \text{ A}$$

A potência média absorvida pelo resistor é

$$P = \frac{0{,}8^2}{2}6 = 1{,}92 \text{ W}$$

Outro método de resolver o problema é determinar as correntes no domínio do tempo que correspondem a $\mathbf{I}_1(\omega)$ e $\mathbf{I}_2(\omega)$:

$$i_1(t) = 1{,}2 \cos(4t - 53°) \text{ A} \quad \text{e} \quad i_2(t) = 0{,}4 \cos(4t - 127°) \text{ A}$$

Usando o princípio de superposição, vemos que a corrente total no resistor é

$$i(t) = 1{,}2 \cos(4t - 53°) + 0{,}4 \cos(4t + 127°) = 0{,}8 \cos(4t - 53°) \text{ A}$$

Assim, $P = 1{,}92$ W, o mesmo resultado que havíamos obtido anteriormente.

O princípio de superposição de potências não pode ser usado neste caso porque as duas fontes senoidais têm a mesma frequência.

EXERCÍCIO 11.7-1 Determine a potência média absorvida pelo resistor da Figura 11.7-2*a* nos seguintes casos:
(a) $v_A(t) = 12 \cos 3t$ V e $v_B(t) = 4 \cos 3t$ V;
(b) $v_A(t) = 12 \cos 4t$ V e $v_B(t) = 4 \cos 3t$ V.

Resposta: **(a)** 2,66 W; **(b)** 4,99 W

11.8 O Teorema da Transferência Máxima de Potência

No Capítulo 5 mostramos que, nos circuitos resistivos, a transferência de potência de uma fonte para uma carga é máxima quando a resistência da carga é igual à resistência de Thévenin do circuito equivalente de Thévenin da fonte. Vamos agora considerar um circuito representado pelo circuito equivalente de Thévenin de um circuito senoidal no regime estacionário, como o da Figura 11.8-1, supondo que a carga é uma impedância $\mathbf{Z}_L$ a ser determinada para que a potência transferida seja máxima.

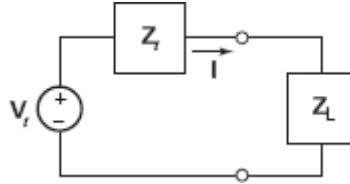



FIGURA 11.8-1 Circuito equivalente de Thévenin com uma impedância de carga.

Nesse caso, temos

$$\mathbf{Z}_t = R_t + jX_t$$

e

$$\mathbf{Z}_L = R_L + jX_L$$

A potência média fornecida à carga é

$$P = \frac{I_m^2}{2} R_L$$

A corrente fasorial **I** é dada por

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_t}{\mathbf{Z}_t + \mathbf{Z}_L} = \frac{\mathbf{V}_t}{(R_t + jX_t) + (R_L + jX_L)}$$

em que os valores de R_L e X_L podem ser escolhidos. A potência média fornecida à carga é

$$P = \frac{I_m^2 R_L}{2} = \frac{|\mathbf{V}_t|^2 R_L/2}{(R_t + R_L)^2 + (X_t + X_L)^2}$$

e estamos interessados em maximizar P. O termo $(X_t + X_L)^2$ por ser eliminado fazendo $X_L = -X_t$. Nesse caso, temos

$$P = \frac{|\mathbf{V}_t|^2 R_L}{2(R_t + R_L)^2}$$

O valor de R_L que maximiza P pode ser determinado igualando a zero a derivada dP/dR_L. Fazendo o cálculo, constatamos que $dP/dR_L = 0$ para $R_L = R_t$. Assim, temos

$$\mathbf{Z}_L = R_L - jX_L$$

Isso significa que a *transferência máxima de potência* em um circuito com um circuito equivalente de Thévenin de impedância $\mathbf{Z}_t$ acontece quando a impedância de carga $\mathbf{Z}_L$ é igual a $\mathbf{Z}^*_t$, o complexo conjugado de $\mathbf{Z}_t$.

EXEMPLO 11.8-1 Transferência Máxima de Potência

Determine a impedância de carga para a qual a transferência de potência é máxima e o valor da potência máxima para o circuito da Figura 11.8-2.

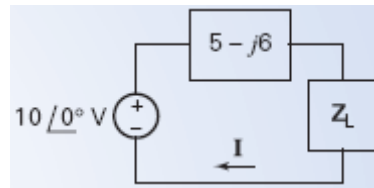



FIGURA 11.8-2 Circuito do Exemplo 11.8-1. As impedâncias estão em ohms.

Solução

Como a impedância de carga $\mathbf{Z}_L$ deve ser o complexo conjugado de $\mathbf{Z}_t$, temos

$$\mathbf{Z}_L = \mathbf{Z}_t^* = 5 + j6\,\Omega$$

A potência transferida pode ser calculada observando que

$$\mathbf{I} = \frac{10\angle 0^\circ}{5+5} = 1\angle 0^\circ \text{ A}$$

Assim, a potência média transferida para a carga é

$$P = \frac{I_m^2}{2} R_L = \frac{(1)^2}{2} 5 = 2{,}5 \text{ W}$$

EXERCÍCIO 11.8-1 Determine o valor de $\mathbf{Z}_L$ na Figura 11.8-1 para o qual a potência transferida é máxima se $\mathbf{V}_t = 100\angle 0^\circ$ V e $\mathbf{Z}_t = 10 + j14\ \Omega$. Determine também a potência máxima transferida para a carga.

Resposta: $\mathbf{Z}_L = 10 - j14\ \Omega$ e $P = 125$ W

EXERCÍCIO 11.8-2 Um aparelho de televisão recebe o sinal da antena através de um cabo, como na Figura E 11.8-2, em que $v_s = 4\cos \omega t$ mV. A frequência da estação de TV que está sendo sintonizada é 52 MHz. Determine a potência média fornecida ao aparelho (a) se a impedância de entrada do aparelho é $\mathbf{Z} = 300\ \Omega$ e há apenas um aparelho ligado à antena; (b) se dois aparelhos iguais estão ligados em paralelo e a impedância de entrada de cada receptor é $\mathbf{Z} = 300\ \Omega$; (c) se dois aparelhos iguais estão ligados em paralelo e a impedância $\mathbf{Z}$ é escolhida de tal forma que a potência transferida para cada receptor é a maior possível.

Resposta: (a) 9,6 nW; (b) 4,9 nW; (c) 5,0 nW.

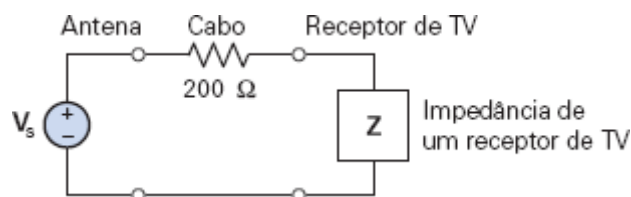



FIGURA E 11.8-2

11.9 *Indutores Acoplados*

O conceito de autoindutância foi discutido no Capítulo 7. Na prática, usamos o termo *indutância* para designar a autoindutância e já estamos familiarizados com circuitos que contêm componentes que apresentam a propriedade da autoindutância, conhecidos como indutores. Nesta seção, vamos estudar indutores acoplados, que são muito usados em circuitos de corrente alternada.

Indutores acoplados ou *enrolamentos acoplados* são dispositivos magnéticos formados por dois ou mais enrolamentos que compartilham o mesmo núcleo.

A Figura 11.9-1*a* mostra dois fios enrolados em um núcleo feito de material magnético. Em casos como esse, dizemos que os enrolamentos estão acoplados magneticamente. Uma tensão aplicada a um dos enrolamentos, como na Figura 11.9-1*a*, faz com que apareça uma tensão no outro enrolamento. A sequência de eventos responsável pelo surgimento da tensão é a seguinte: a tensão de entrada, $v_1(t)$, faz com que uma corrente $i_1(t)$ atravesse o enrolamento 1. A corrente e a tensão estão relacionadas pela equação

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} \tag{11.9-1}$$

em que L_1 é a autoindutância do enrolamento 1. A corrente $i_1(t)$ produz um fluxo magnético no núcleo, que está relacionado com a corrente pela equação

$$\phi = c_1 N_1 i_1 \tag{11.9-2}$$

em que c_1 é uma constante que depende das propriedades magnéticas e da geometria do núcleo e N_1 é o número de espiras do enrolamento 1. O número de espiras de um enrolamento é o número de vezes que o fio é enrolado no núcleo. O fluxo magnético, ϕ, está concentrado no núcleo, que possui uma seção reta A. A tensão do enrolamento 1 está relacionada ao fluxo através da equação

$$v_1 = N_1 \frac{d\phi}{dt} = N_1 \frac{d}{dt}(c_1 N_1 i_1) = c_1 N_1^2 \frac{di_1}{dt} \tag{11.9-3}$$

Combinando as Eqs. 11.9-1 e 11.9-3, obtemos

$$L_1 = c_1 N_1^2 \tag{11.9-4}$$

O fluxo ϕ passa também pelo segundo enrolamento, no qual induz uma tensão v_2. Essa tensão está relacionada ao fluxo pela equação

$$v_2 = N_2 \frac{d\phi}{dt} = c_M N_1 N_2 \frac{di_1}{dt} = M \frac{di_1}{dt} \tag{11.9-5}$$

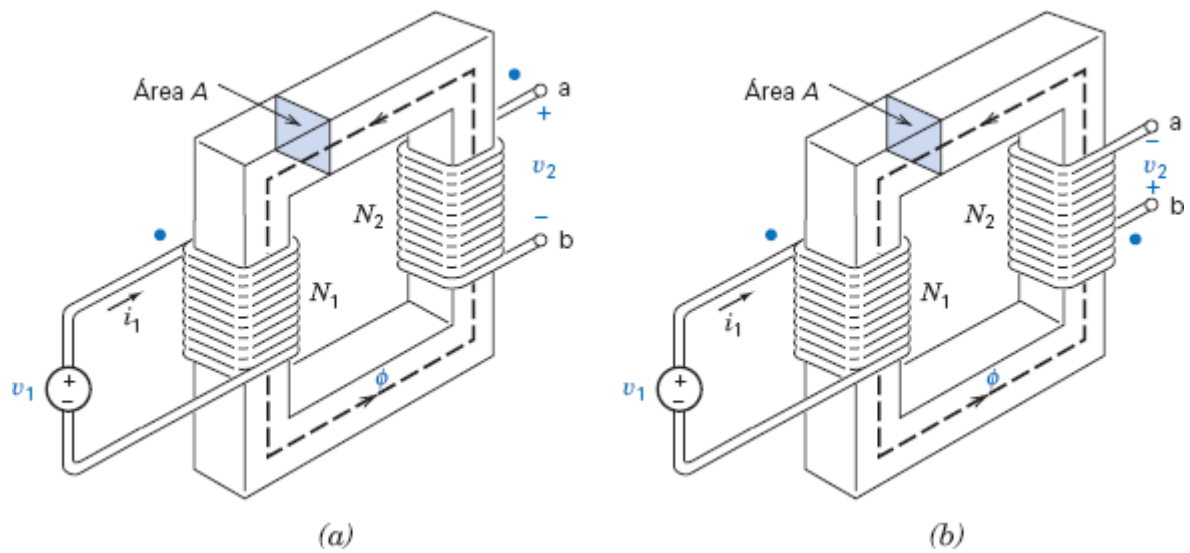



FIGURA 11.9-1 Dois fios enrolados em um mesmo núcleo feito de material magnético. O fluxo ϕ está concentrado no núcleo.

em que c_M é uma constante que depende das propriedades magnéticas do núcleo, N_2 é o número de espiras do segundo enrolamento e $M = c_M N_1 N_2$ é um número positivo chamado **indutância mútua**. A unidade de indutância mútua é o henry (H).

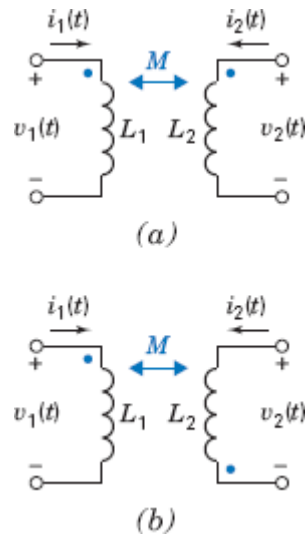



FIGURA 11.9-2 Símbolo usado para representar indutores acoplados. Em (*a*), as duas correntes entram nas extremidades assinaladas com pontos. Em (*b*), uma das correntes entra na extremidade assinalada com um ponto e a outra entra na extremidade que não está assinalada com um ponto.

A polaridade da tensão v_2 em relação à polaridade de v_1 depende da forma como os fios são enrolados no núcleo. Existem dois casos possíveis, que estão representados nas Figuras 11.9-1*a* e 11.9-1*b*. A diferença entre as duas figuras está no sentido no qual o fio 2 é enrolado no núcleo. Uma convenção conhecida como convenção do ponto é usada para indicar a forma como os fios estão enrolados no núcleo. Observe que uma extremidade de cada enrolamento é assinalada com um ponto. Quando o sentido de referência da corrente em um enrolamento é com a corrente entrando na extremidade do enrolamento assinalada com um ponto, a polaridade de referência da tensão induzida é positiva na extremidade do outro enrolamento assinalada com um ponto. Assim, por exemplo, nas Figuras 11.9-1*a* e 11.9-1*b*, o sentido de referência da corrente i_1 corresponde à corrente entrando no enrolamento da esquerda na extremidade assinalada com um ponto. Em consequência, nas Figuras 11.9-1*a* e 11.9-1*b*, o sinal + da polaridade de referência de v_2 está situado na extremidade do enrolamento da direita assinalada com um ponto.

A Figura 11.9-2 mostra o símbolo usado para representar indutores acoplados nos diagramas dos circuitos elétricos, com os pontos indicados e a indutância mútua designada pela letra *M*. Dois casos estão representados na Figura 11.9-2. Na Figura 11.9-2*a*, as correntes nos dois enrolamentos entram nas

extremidades assinaladas com pontos. Na Figura 11.9-2*b*, uma das correntes, i_1, entra na extremidade assinalada com um ponto e a outra corrente, i_2, entra na extremidade que não está assinalada com um ponto. Nos dois casos, os sentidos de referência da tensão e da corrente em cada enrolamento estão de acordo com a convenção passiva.

Suponha que as correntes nos dois enrolamentos entrem nas extremidades assinaladas com pontos, como na Figura 11.9-1*a*, ou que as duas correntes entrem nas extremidades que não estão assinaladas com pontos. Nos dois casos, a tensão no primeiro enrolamento, v_1, está relacionada às correntes nos enrolamentos através da equação

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \qquad (11.9\text{-}6)$$

Do mesmo modo, a tensão no segundo enrolamento está relacionada com as correntes nos enrolamentos através da equação

$$v_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \qquad (11.9\text{-}7)$$

Em vez disso, suponha que a corrente em um dos enrolamentos entre na extremidade assinalada com um ponto e a corrente no outro enrolamento entre na extremidade que não está assinalada com um ponto, como na Figura 11.9-2*b*. Nesse caso, a tensão no primeiro enrolamento, v_1, está relacionada às correntes nos enrolamentos através da equação

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \qquad (11.9\text{-}8)$$

Do mesmo modo, a tensão no segundo enrolamento está relacionada às correntes nos enrolamentos através da equação

$$v_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} \qquad (11.9\text{-}9)$$

Assim, podemos dizer que a indutância mútua induz uma tensão em um enrolamento devido à corrente no outro enrolamento.

Os indutores acoplados podem ser modelados usando indutores (sem acoplamento) e fontes dependentes. A Figura 11.9-3 mostra um circuito equivalente de dois indutores acoplados.

O uso de indutores acoplados em geral se limita a aplicações em que a corrente não é contínua, já que os enrolamentos se comportam como curtos-circuitos para corrente contínua.

Suponha que dois indutores acoplados façam parte de um circuito linear com uma entrada senoidal e que o circuito esteja no regime estacionário. Um circuito desse tipo pode ser analisado no domínio da frequência, usando fasores. Os indutores acoplados que aparecem na Figura 11.9-2*a* são representados pelas equações fasoriais

$$\mathbf{V}_1 = j\omega L_1 \mathbf{I}_1 + j\omega M\, \mathbf{I}_2 \qquad (11.9\text{-}10)$$

e

$$\mathbf{V}_2 = j\omega L_2 \mathbf{I}_2 + j\omega M\, \mathbf{I}_1 \qquad (11.9\text{-}11)$$

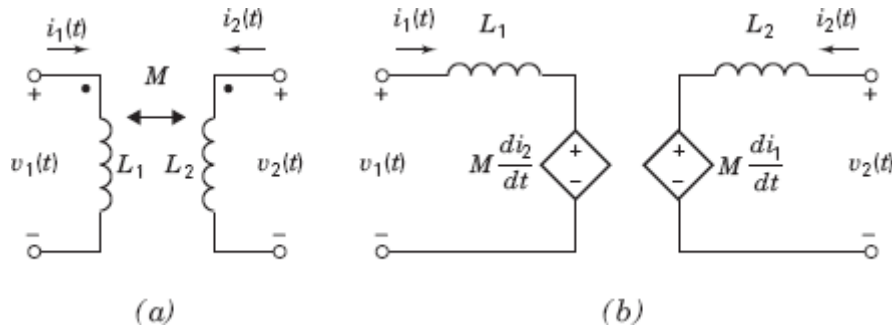



FIGURA 11.9-3 (*a*) Indutores acoplados e (*b*) um circuito equivalente.

Por outro lado, os indutores acoplados da Figura 11.9-2*b* são representados pelas equações fasoriais

$$\mathbf{V}_1 = j\omega L_1 \mathbf{I}_1 - j\omega M\, \mathbf{I}_2 \tag{11.9-12}$$

e

$$\mathbf{V}_2 = j\omega L_2 \mathbf{I}_2 - j\omega M\, \mathbf{I}_1 \tag{11.9-13}$$

As indutâncias L_1 e L_2 e a indutância mútua M dependem das propriedades magnéticas do núcleo, da geometria do núcleo e do número de espiras dos enrolamentos. De acordo com as Eqs. 11.9-4 e 11.9-5, podemos escrever

$$L_1 L_2 = (c_1 N_1^2)(c_2 N_2^2) = c_1 c_2 (N_1 N_2)^2 = \left(\frac{c_M N_1 N_2}{k}\right)^2 = \frac{M^2}{k^2} \tag{11.9-14}$$

em que a constante $k = c_M / \sqrt{c_1 c_2}$ é chamada de **coeficiente de acoplamento**. Como o coeficiente de acoplamento é função de c_1, c_2 e c_M, depende das propriedades magnéticas e da geometria do núcleo. Explicitando o coeficiente de acoplamento na Eq. 11.9-14, obtemos

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \tag{11.9-15}$$

A potência instantânea absorvida por indutores acoplados é dada por

$$\begin{aligned} p(t) &= v_1(t) i_1(t) + v_2(t) i_2(t) \\ &= \left(L_1 \frac{d}{dt} i_1(t) \pm M \frac{d}{dt} i_2(t)\right) i_1(t) + \left(L_2 \frac{d}{dt} i_2(t) \pm M \frac{d}{dt} i_1(t)\right) i_2(t) \\ &= L_1 i_1(t) \frac{d}{dt} i_1(t) \pm M \frac{d}{dt}(i_1(t) i_2(t)) + L_2 i_2(t) \frac{d}{dt} i_2(t) \end{aligned} \tag{11.9-16}$$

em que $-M$ é usado se uma corrente entra na extremidade de uma das bobinas que não está assinalada com um ponto e a outra corrente entra na extremidade da outra bobina que está assinalada com um ponto e $+M$ é usado nos outros casos. A energia armazenada em indutores acoplados é calculada integrando a potência absorvida pelos indutores. Assim, a energia armazenada em indutores acoplados é dada por

$$w(t) = \int_{-\infty}^{t} p(\tau)\, d\tau = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \pm M i_1 i_2 \tag{11.9-17}$$

em que, mais uma vez, $-M$ é usado se uma corrente entra na extremidade de uma das bobinas que não está assinalada com um ponto e a outra corrente entra na extremidade da outra bobina que está assinalada com um ponto e $+M$ é usado nos outros casos. Podemos usar a Eq. 11.9-17 para determinar qual é o maior valor possível de M em

termos de L_1 e L_2. Como indutores acoplados são um componente passivo, a energia armazenada deve ser maior ou igual a zero. O valor limite de M é atingido quando $w = 0$ na Eq. 11.9-17. Assim, temos

$$\frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 - M i_1 i_2 = 0 \qquad (11.9\text{-}18)$$

como condição limite para o caso em que uma das corrente entra na extremidade assinalada com um ponto e a outra corrente entra na extremidade que não está assinalada com um ponto. Somando e subtraindo o termo $i_1 i_2 = \sqrt{L_1 L_2}$ à equação para obter um termo que seja um quadrado perfeito, temos:

$$\left(\sqrt{\frac{L_1}{2}}i_1 - \sqrt{\frac{L_2}{2}}i_2\right)^2 + i_1 i_2\left(\sqrt{L_1 L_2} - M\right) = 0$$

O termo que é um quadrado perfeito pode ser positivo ou nulo. Assim, para que $w \geq 0$, é preciso que

$$\sqrt{L_1 L_2} \geq M \qquad (11.9\text{-}19)$$

Isso significa que o valor máximo de M é $\sqrt{L_1 L_2}$.

De acordo com a Eq. 11.9-19, o coeficiente de acoplamento de indutores acoplados não pode ser maior que 1. Além disso, o coeficiente de acoplamento não pode ser negativo, já que L_1, L_2 e M não podem ser negativos. O menor valor possível para o coeficiente de acoplamento é $k = 0$, que corresponde à situação em que não existe acoplamento. Assim, o coeficiente de acoplamento satisfaz a desigualdade

$$0 \leq k \leq 1 \qquad (11.9\text{-}20)$$

Nos transformadores dos sistemas de distribuição de energia elétrica, k é aproximadamente igual a 1; nos circuitos de rádio e televisão, k é muito menor que 1.

A Figura 11.9-4*a* mostra indutores acoplados usados como um transformador para ligar uma fonte a uma carga. O enrolamento ligado à fonte é chamado de enrolamento primário e o enrolamento ligado à carga recebe o nome de enrolamento secundário. O circuito 2 está ligado ao circuito 1 através do acoplamento magnético do transformador, mas não existe ligação elétrica entre os dois circuitos, ou seja, a corrente não pode passar do circuito 1 para o circuito 2 e vice-versa. Além disso, nenhum componente do circuito está ligado entre um nó do circuito 1 e um nó do circuito 2.

A Figura 11.9-4*b* mostra um exemplo específico da situação representada na Figura 11.9-4*a*. A fonte é uma única fonte de tensão senoidal e a carga é uma única impedância. O circuito foi representado no domínio da frequência, usando fasores e impedâncias. O circuito da Figura 11.9-4*b* pode ser analisado pelo método das correntes de malha. As duas equações de malha são

$$j\omega L_1 \mathbf{I}_1 - j\omega M \mathbf{I}_2 = \mathbf{V}_1$$
$$-j\omega L_1 \mathbf{I}_1 + (j\omega L_2 + \mathbf{Z}_2)\mathbf{I}_1 = 0$$

Escrevendo $\mathbf{I}_2$ em termos de $\mathbf{V}_1$, temos

$$\mathbf{I}_2 = \left[\frac{j\omega M}{\left((j\omega)^2(L_1 L_2 - M^2) + (j\omega L_1 \mathbf{Z}_2)\right)}\right]\mathbf{V}_1 \qquad (11.9\text{-}21)$$

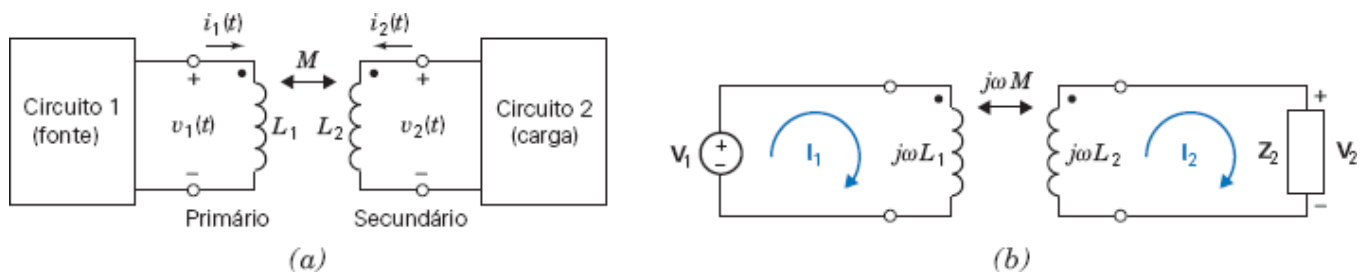



FIGURA 11.9-4 (*a*) Indutores acoplados usados como um transformador para ligar uma fonte a uma carga. (*b*) Transformador usado para acoplar magneticamente uma fonte de tensão a uma impedância.

Se o coeficiente de acoplamento dos indutores acoplados é igual a 1, $M = \sqrt{L_1 L_2}$ e a Eq. 11.9-21 se reduz a

$$\mathbf{I}_2 = \left[\frac{j\omega\, M}{j\omega\, L_1 \mathbf{Z}_2}\right]\mathbf{V}_1 = \left[\frac{j\omega\sqrt{L_1 L_2}}{j\omega\, L_1 \mathbf{Z}_2}\right]\mathbf{V}_1 = \frac{\sqrt{L_2}}{\mathbf{Z}_2\sqrt{L_1}}\mathbf{V}_1 \qquad (11.9\text{-}22)$$

A tensão da impedância é dada por

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{Z}_2 \mathbf{I}_2 = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}\mathbf{V}_1 \qquad (11.9\text{-}23)$$

A razão das indutâncias depende das propriedades magnéticas do núcleo, da geometria do núcleo e do número de espiras dos enrolamentos. De acordo com a Eq. 11.9-4, podemos escrever

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{c_2 N_2^2}{c_1 N_1^2}$$

Se os dois fios estão enrolados simetricamente no núcleo, $c_1 = c_2$. Nesse caso,

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{N_2^2}{N_1^2} = n^2 \qquad (11.9\text{-}24)$$

em que n é chamado de **relação de espiras** do transformador. Combinando as Eqs. 11.9-23 e 11.9-24, obtemos

$$\mathbf{V}_2 = n\mathbf{V}_1 \qquad (11.9\text{-}25)$$

em que $\mathbf{V}_1$ é a tensão no enrolamento primário, $\mathbf{V}_2$ é a tensão no enrolamento secundário e n é a relação de espiras.

EXEMPLO 11.9-1 Indutores Acoplados

Determine a tensão $v_2(t)$ no circuito da Figura 11.9-5*a*.

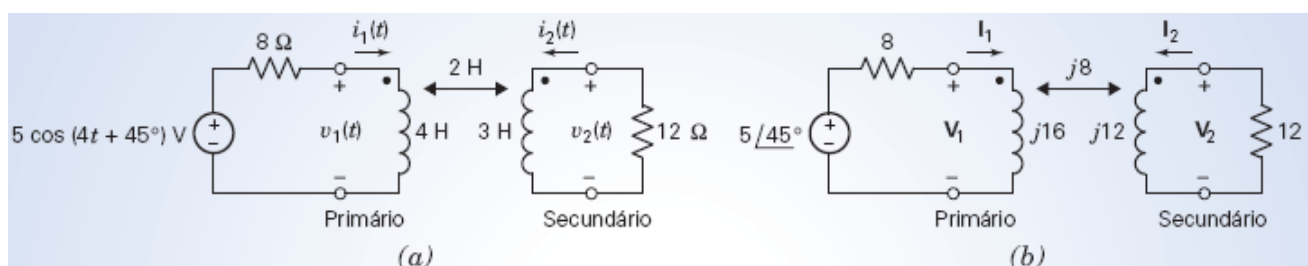



FIGURA 11.9-5 Circuito no qual indutores acoplados são usados como um transformador. O circuito está representado (*a*) no domínio do tempo e (*b*) no domínio da frequência, usando fasores e impedâncias.

Solução

Em primeiro lugar, representamos o circuito no domínio da frequência, usando fasores e impedâncias, como mostra a Figura 11.9-5*b*. Observe que as correntes $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ entram nas extremidades dos indutores assinaladas por pontos. Podemos expressar a tensão nos indutores em função da corrente nos indutores usando as equações que descrevem indutores acoplados, Eqs. 11.9-10 e 11.9-11.

$$\mathbf{V}_1 = j16\,\mathbf{I}_1 + j8\,\mathbf{I}_2$$
$$\mathbf{V}_2 = j8\,\mathbf{I}_1 + j12\,\mathbf{I}_2$$

Em seguida, escrevemos duas equações de malha,

$$5\angle 45^\circ = 8\,\mathbf{I}_1 + \mathbf{V}_1$$

e

$$\mathbf{V}_2 = -12\mathbf{I}_2$$

Substituindo as equações das tensões nos indutores nas equações de malha, temos

$$5\angle 45^\circ = 8\,\mathbf{I}_1 + (j16\,\mathbf{I}_1 + j8\,\mathbf{I}_2) = (8 + j16)\mathbf{I}_1 + j8\,\mathbf{I}_2$$

e

$$j8\,\mathbf{I}_1 + j12\,\mathbf{I}_2 = -12\,\mathbf{I}_2$$

Resolvendo esse sistema de equações, obtemos

$$\mathbf{I}_2 = 0{,}138\angle -141^\circ \text{ A}$$

e, portanto,

$$\mathbf{V}_2 = -12\,\mathbf{I}_2 = 1{,}656\angle 39^\circ \text{ V}$$

Voltando ao domínio do tempo,

$$v_2(t) = 1{,}656 \cos(4t + 39^\circ) \text{ V}$$

EXEMPLO 11.9-2 Indutores Acoplados

EXEMPLO INTERATIVO

A entrada do circuito da Figura 11.9-6*a* é a tensão da fonte de tensão,

$$v_s(t) = 5{,}94 \cos(3t + 140^\circ) \text{ V}$$

A saída é a tensão no indutor da direita, $v_o(t)$. Determine a tensão de saída, $v_o(t)$.

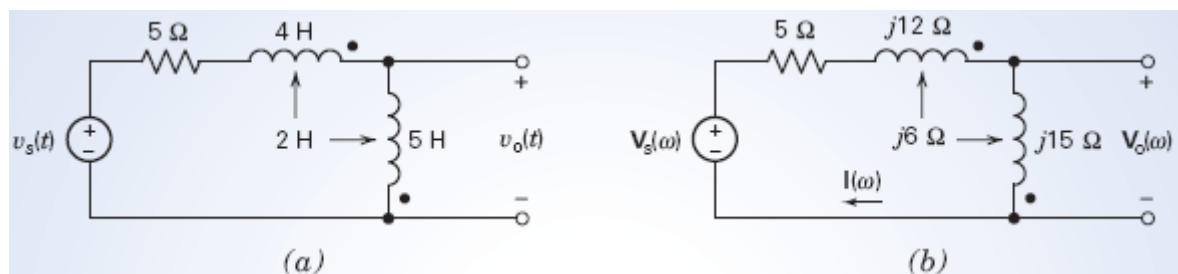



FIGURA 11.9-6 Circuito do Exemplo 11.9-2 (*a*) no domínio do tempo e (*b*) no domínio da frequência.

Solução

A tensão de entrada é uma senoide. A tensão de saída também é uma senoide, com a mesma frequência que a tensão de entrada. Vamos supor que o circuito está no regime estacionário. Nesse caso, o circuito da Figura 11.9-6*a* pode ser representado no domínio da frequência, usando fasores e impedâncias. A Figura 11.9-6*b* mostra a representação do circuito da Figura 11.9-6*a* no domínio da frequência.

O fasor correspondente à senoide de entrada é

$$\mathbf{V}_s(\omega) = 5{,}94 \angle 140^\circ \text{ V}$$

O circuito da Figura 11.9-6*b* contém uma única malha. Observe que a corrente de malha, $\mathbf{I}(\omega)$, entra nos dois indutores pelas extremidades que não estão assinaladas com um ponto. Aplicando à malha a LKT, temos

$$\begin{gathered} 5\,\mathbf{I}(\omega) + (j12\,\mathbf{I}(\omega) + j6\,\mathbf{I}(\omega)) + (j6\,\mathbf{I}(\omega) + j15\,\mathbf{I}(\omega)) - 5{,}94 \angle 140^\circ = 0 \\ 5\,\mathbf{I}(\omega) + (j12 + j6 + j6 + j15)\,\mathbf{I}(\omega) - 5{,}94 \angle 140^\circ = 0 \end{gathered}$$

Explicitando $\mathbf{I}(\omega)$, obtemos

$$\mathbf{I}(\omega) = \frac{5{,}94 \angle 140^\circ}{5 + j(12+6+6+15)} = \frac{5{,}94 \angle 140^\circ}{5 + j39} = \frac{5{,}94 \angle 140^\circ}{39{,}3 \angle 83^\circ} = 0{,}151 \angle 57^\circ \text{ A}$$

Observe que a tensão do indutor da direita, $\mathbf{V}_o(\omega)$, e a corrente de malha, $\mathbf{I}(\omega)$, estão de acordo com a convenção passiva. A tensão do indutor da direita é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_o(\omega) &= j15\,\mathbf{I}(\omega) + j6\,\mathbf{I}(\omega) = j21\,\mathbf{I}(\omega) = j21(0{,}151 \angle 57^\circ) \\ &= (21 \angle 90^\circ)(0{,}151 \angle 57^\circ) \\ &= 3{,}17 \angle 147^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

No domínio do tempo, a tensão de saída é dada por

$$v_o(t) = 3{,}17 \cos(3t + 147^\circ) \text{ V}$$

EXEMPLO 11.9-3 Indutores Acoplados

A entrada do circuito da Figura 11.9-7*a* é a tensão da fonte de tensão,

$$v_s(t) = 5{,}94 \cos(3t + 140^\circ) \text{ V}$$

A saída é a tensão no indutor da direita, $v_o(t)$. Determine a tensão de saída, $v_o(t)$.

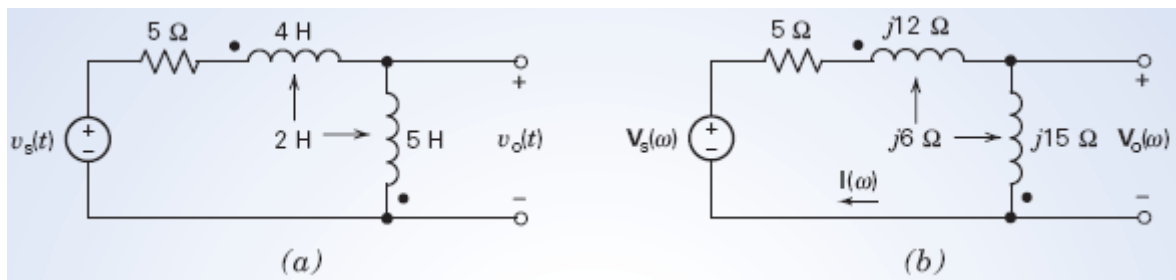



FIGURA 11.9-7 Circuito do Exemplo 11.9-3 (*a*) no domínio do tempo e (*b*) no domínio da frequência.

Solução

O circuito da Figura 11.9-7*a* é muito parecido com o da Figura 11.9-6*a*. Existe apenas uma diferença: o ponto no indutor do lado esquerdo está situado do lado direito do indutor na Figura 11.9-6*a* e do lado esquerdo do indutor na Figura 11.9-7*a*. Como no Exemplo 11.9-2, o primeiro passo consiste em representar o circuito no domínio da frequência, usando fasores e impedâncias. A Figura 11.9-7*b* mostra a representação do circuito da Figura 11.9-7*a* no domínio da frequência.

O fasor correspondente à senoide de entrada é

$$\mathbf{V}_s(\omega) = 5{,}94 \angle 140^\circ \text{ V}$$

O circuito da Figura 11.9-7*b* contém uma única malha. Observe que a corrente de malha, $\mathbf{I}(\omega)$, entra no indutor da esquerda pela extremidade assinalada por um ponto e no indutor da direita pela extremidade que não está assinalada com um ponto. Aplicando à malha a LKT, temos

$$5\,\mathbf{I}(\omega) + (j12\,\mathbf{I}(\omega) - j6\,\mathbf{I}(\omega)) + (-j6\,\mathbf{I}(\omega) + j15\,\mathbf{I}(\omega)) - 5{,}94 \angle 140^\circ = 0$$
$$5\,\mathbf{I}(\omega) + (j12 - j6 - j6 + j15)\,\mathbf{I}(\omega) - 5{,}94 \angle 140^\circ = 0$$

Explicitando $\mathbf{I}(\omega)$, obtemos

$$\mathbf{I}(\omega) = \frac{5{,}94 \angle 140^\circ}{5 + j(12 - 6 - 6 + 15)} = \frac{5{,}94 \angle 140^\circ}{5 + j15} = \frac{5{,}94 \angle 140^\circ}{15{,}8 \angle 71{,}6^\circ} = 0{,}376 \angle 68{,}4^\circ \text{ A}$$

Observe que a tensão no indutor da direita, $\mathbf{V}_o(\omega)$, e a corrente de malha, $\mathbf{I}(\omega)$, estão de acordo com a convenção passiva. A tensão no indutor da direita é dada por

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_o(\omega) &= j15\,\mathbf{I}(\omega) - j6\,\mathbf{I}(\omega) = j9\,\mathbf{I}(\omega) = j9(0{,}376 \angle 68{,}4^\circ) \\ &= (9 \angle 90^\circ)(0{,}376 \angle 68{,}4^\circ) \\ &= 3{,}38 \angle 158{,}4^\circ \text{ V}\end{aligned}$$

No domínio do tempo, a tensão de saída é dada por

$$v_o(t) = 3{,}38 \cos(3t + 158{,}4^\circ) \text{ V}$$

EXERCÍCIO 11.9-1 Determine a tensão v_o no circuito da Figura E 11.9-1.

Sugestão: Escreva uma equação para a única malha do circuito. As correntes nos dois indutores são iguais entre si e iguais à corrente de malha.

Resposta: $v_o = 14 \cos 4t$ V

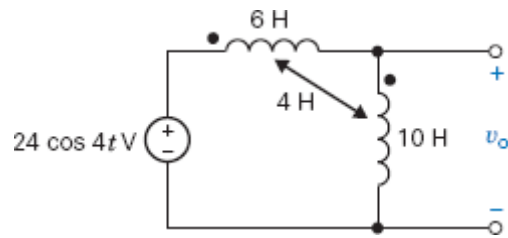



FIGURA E 11.9-1

EXERCÍCIO 11.9-2 Determine a tensão v_o no circuito da Figura E 11.9-2.

Sugestão: Este exercício é igual ao Exercício 11.9-1, exceto pela posição do ponto no indutor vertical.

Resposta: $v_o = 18 \cos 4t$ V

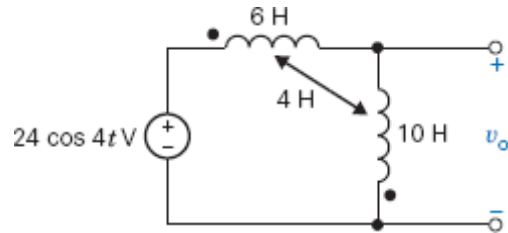



FIGURA E 11.9-2

EXERCÍCIO 11.9-3 Determine a corrente i_o no circuito da Figura E 11.9-3.

Sugestão: A tensão no indutor vertical é zero por causa do curto-circuito. A tensão no indutor horizontal induz uma corrente no indutor vertical. Em consequência, a corrente no indutor vertical não é zero.

Resposta: $i_o = 1{,}909 \cos (4t - 90°)$ A

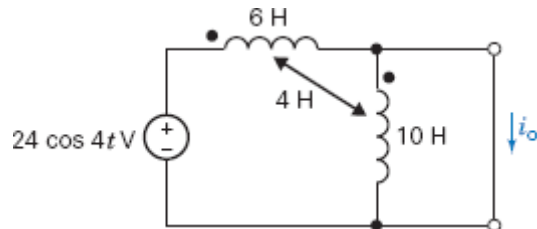



FIGURA E 11.9-3

EXERCÍCIO 11.9-4 Determine a corrente i_o no circuito da Figura E 11.9-4.

Sugestão: Este exercício é igual ao Exercício 11.9-3, exceto pela posição do ponto no indutor vertical.

Resposta: $i_o = 0{,}818 \cos (4t - 90°)$ A

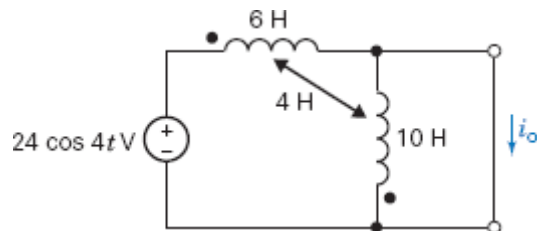



FIGURA E 11.9-4

11.10 *O Transformador Ideal*

Uma das aplicações mais importantes dos transformadores está ligada aos sistemas de distribuição de energia elétrica. As empresas de energia elétrica usam transformadores para elevar a tensão de 10 kV, na saída das usinas de geração, para 200 kV ou mais, para transmissão a grandes distâncias. No destino final, outros transformadores são usados para reduzir a tensão para o valor residencial de 220 V ou 110 V (Coltman, 1988).

Os transformadores também são empregados em circuitos eletrônicos e de comunicações, tanto para mudar os níveis das tensões e correntes como para isolar circuitos.

Um dos enrolamentos, que normalmente é desenhado do lado esquerdo do diagrama do transformador, recebe o nome de *enrolamento primário*; o outro é chamado de *enrolamento secundário*. O enrolamento primário é ligado à fonte do circuito e o enrolamento secundário é ligado à carga.

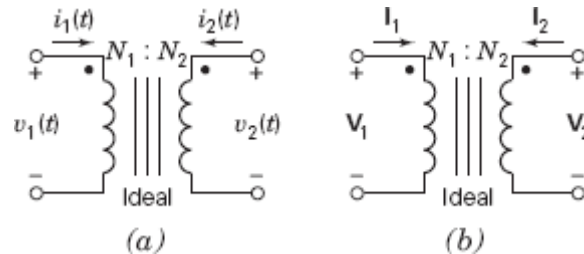



FIGURA 11.10-1 Símbolo do transformador ideal. O transformador ideal tem a mesma representação (*a*) no domínio do tempo e (*b*) no domínio da frequência.

O **transformador ideal** é um transformador com um coeficiente de acoplamento igual à unidade.

O símbolo de transformador ideal aparece na Figura 11.10-1, em que N_1 é o número de espiras do enrolamento primário e N_2 é o número de espiras do enrolamento secundário. A Figura 11.10-1*a* mostra a representação do transformador no domínio do tempo. No domínio do tempo, as equações que definem o comportamento do transformador ideal são

$$v_2(t) = \frac{N_2}{N_1} v_1(t) \quad (11.10\text{-}1)$$

e

$$i_1(t) = -\frac{N_2}{N_1} i_2(t) \quad (11.10\text{-}2)$$

em que $n = N_2/N_1$ é a *relação de espiras* do transformador. Os transformadores normalmente são usados em circuitos de corrente alternada, já que os enrolamentos primário e secundário se comportam como curtos-circuitos para corrente contínua.

A Figura 11.10-1*b* mostra a representação do transformador no domínio da frequência. No domínio da frequência, as equações que definem o comportamento do transformador ideal são

$$\mathbf{V}_2 = \frac{N_2}{N_1} \mathbf{V}_1 \quad (11.10\text{-}3)$$

e

$$\mathbf{I}_1 = -\frac{N_2}{N_1} \mathbf{I}_2 \quad (11.10\text{-}4)$$

As retas verticais da Figura 11.10-1 representam o núcleo de ferro; a palavra *ideal* é usada para indicar que se trata de um transformador ideal. Como mostra a Figura 11.10-2, um transformador ideal pode ser

modelado usando uma fonte dependente.

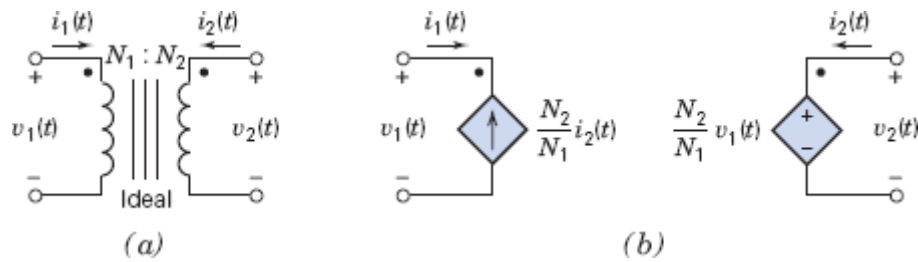



FIGURA 11.10-2 (*a*) Transformador ideal e (*b*) circuito equivalente.

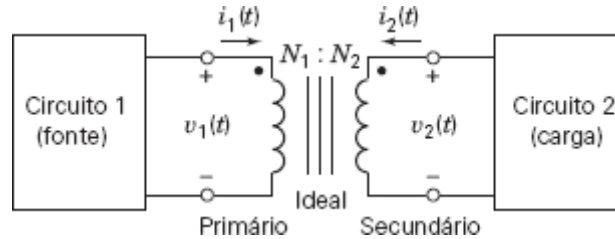



FIGURA 11.10-3 Uso de um transformador ideal para acoplar magneticamente dois circuitos.

Observe que a tensão e a corrente nos dois enrolamentos do transformador da Figura 11.10-1 estão de acordo com a convenção passiva. A potência instantânea absorvida por um transformador ideal é dada por

$$p(t) = v_1(t)i_1(t) + v_2(t)i_2(t) = v_1(t)(-ni_2(t)) + (nv_1(t))i_2(t) = 0 \qquad (11.10\text{-}5)$$

Um transformador ideal não tem perdas, já que a potência instantânea absorvida é zero. A potência complexa, a potência média e a potência relativa absorvida por um transformador ideal também são nulas.

A Figura 11.10-3 mostra um transformador ideal sendo usado para ligar uma fonte a uma carga. O enrolamento ligado à fonte é chamado de enrolamento primário e o enrolamento ligado à carga recebe o nome de enrolamento secundário. O circuito 2 está ligado ao circuito 1 através do acoplamento magnético do transformador, mas não existe uma ligação elétrica entre os dois circuitos. Como um transformador ideal não tem perdas, toda a potência fornecida ao transformador ideal pelo circuito 1 é fornecida pelo transformador ideal ao circuito 2.

Considere o circuito da Figura 11.10-4, que possui uma impedância de carga $\mathbf{Z}_2$ magneticamente acoplada a uma fonte de tensão através de um transformador ideal.

A impedância de entrada do circuito ligado à fonte de tensão é

$$\mathbf{Z}_1 = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1}$$

A impedância $\mathbf{Z}_1$ é chamada de impedância do primário do transformador ou impedância do ponto de vista da fonte de tensão.

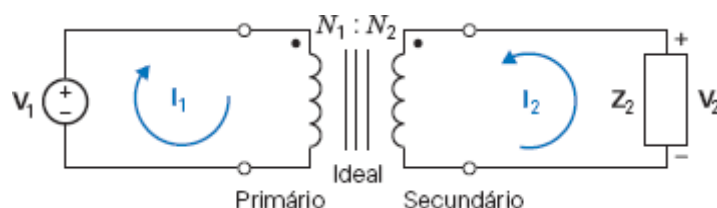



FIGURA 11.10-4 Uso de um transformador ideal para acoplar magneticamente uma impedância a uma fonte de tensão senoidal. O circuito está representado no domínio da frequência usando impedâncias e fasores.

De acordo com as Eqs. 11.10-3 e 11.10-4,

$$\mathbf{Z}_1 = \frac{\frac{N_1}{N_2}\mathbf{V}_2}{-\frac{N_2}{N_1}\mathbf{I}_2} = -\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_2}$$

Como a corrente e a tensão da impedância, $\mathbf{I}_2$ e $\mathbf{V}_2$, não estão de acordo com a convenção passiva,

$$\mathbf{V}_2 = -\mathbf{Z}_2\mathbf{I}_2$$

Assim,

$$\mathbf{Z}_1 = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \mathbf{Z}_2$$

A impedância $\mathbf{Z}_1$ é, portanto, igual à impedância da carga, $\mathbf{Z}_2$, multiplicada por $(N_1/N_2)^2$. Costuma-se dizer que $\mathbf{Z}_1$ é a impedância $\mathbf{Z}_2$ *refletida* para o primário do transformador.

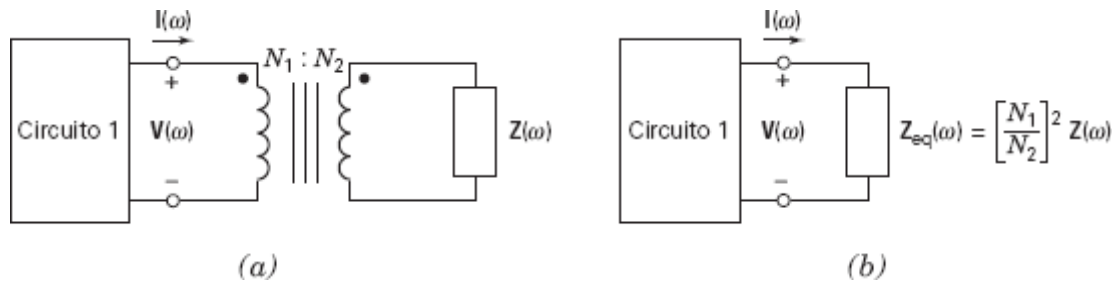



FIGURA 11.10-5 O circuito mostrado em (*b*) é equivalente ao circuito mostrado em (*a*).

Suponha que estejamos interessados em ligar uma impedância de carga a uma fonte. Se ligarmos a impedância de carga diretamente à fonte, a impedância do circuito do ponto de vista da fonte será $\mathbf{Z}_2$; se ligarmos a impedância de carga à fonte através de um transformador ideal, a impedância do circuito do ponto de vista da fonte será $\mathbf{Z}_1$. Nesse contexto, podemos dizer, portanto, que o transformador muda a impedância vista pela fonte de $\mathbf{Z}_2$ para $\mathbf{Z}_1$.

Este resultado está ilustrado na Figura 11.10-5. A Figura 11.10-5*a* mostra o circuito 1 ligado ao enrolamento da esquerda de um transformador ideal. Uma impedância $\mathbf{Z}(\omega)$ está ligada ao enrolamento da direita do mesmo transformador. Na Figura 11.10-5*b*, o transformador ideal e a impedância foram substituídos por uma única impedância equivalente, $\mathbf{Z}_{eq}(\omega)$. A impedância equivalente está relacionada à impedância original através da equação

$$\mathbf{Z}_{eq}(\omega) = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \mathbf{Z}(\omega) = \frac{1}{n^2}\mathbf{Z}(\omega)$$

Os dois circuitos da Figura 11.10-5 são equivalentes. Todas as correntes e tensões do circuito 1, incluindo $\mathbf{I}(\omega)$ e $\mathbf{V}(\omega)$, são as mesmas na Figura 11.10-5*b* e na Figura 11.10-5*a*. Podemos determinar os valores de $\mathbf{I}(\omega)$ e $\mathbf{V}(\omega)$ na Figura 11.10-5*a* calculando os valores de $\mathbf{I}(\omega)$ e $\mathbf{V}(\omega)$ na Figura 11.10-5*b*.

EXEMPLO 11.10-1 Transferência Máxima de Potência

Frequentemente, o transformador que liga a saída de um aparelho de som a um alto-falante pode ser representado por um transformador ideal, como na Figura 11.10-6. Determine o valor da relação de espiras *n* para que a maior potência possível seja transferida para a carga. Suponha que $R_L = 8\ \Omega$ e $R_s = 48\ \Omega$.

Solução

A impedância da carga refletida para o primário é

$$\mathbf{Z}_1 = \frac{R_L}{n^2} = \frac{8}{n^2}$$

Para que a transferência de potência seja máxima, é preciso que

$$\mathbf{Z}_1 = R_s$$

Como $R_s = 48\ \Omega$, devemos ter $\mathbf{Z}_1 = 48\ \Omega$ e, portanto,

$$n^2 = \frac{8}{48} = \frac{1}{6}$$

o que nos dá

$$n = \frac{1}{\sqrt{6}} \approx 0{,}4$$

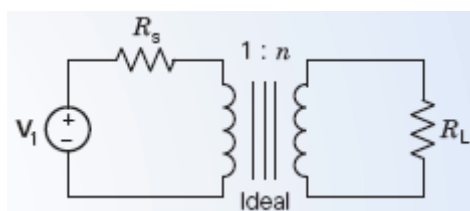



FIGURA 11.10-6 Saída de um amplificador ligada a um alto-falante de resistência R_L.

EXEMPLO 11.10-2 Circuito com um Transformador

A entrada do circuito da Figura 11.10-7 é a tensão da fonte de tensão, $v_s(t)$. A saída é a tensão do indutor de 9 H, $v_o(t)$. Determine a tensão de saída, $v_o(t)$.

Solução

A tensão de entrada é uma senoide. A tensão de saída também é uma senoide e tem a mesma frequência que a tensão de entrada. Vamos supor que o circuito esteja no regime estacionário. Nesse caso, o circuito da Figura 11.10-7 pode ser representado no domínio da frequência usando fasores e impedâncias. A Figura 11.10-8 mostra a representação do circuito da Figura 11.10-7 no domínio da frequência.

Na Figura 11.10-8, a impedância do indutor está ligada em série com a impedância do resistor de 30 Ω. Essa impedância em série está ligada em paralelo com o enrolamento secundário do transformador. Como mostra a Figura 11.10-9, o transformador e a impedância em série podem ser substituídos por uma impedância equivalente. A impedância equivalente é dada por

$$\mathbf{Z}_{eq} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 (30 + j36) = 67{,}5 + j81\ \Omega$$

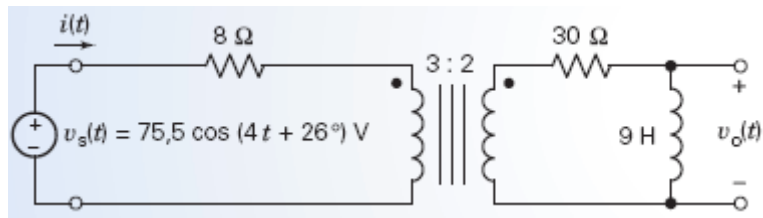



FIGURA 11.10-7 Circuito do Exemplo 11.10-2.

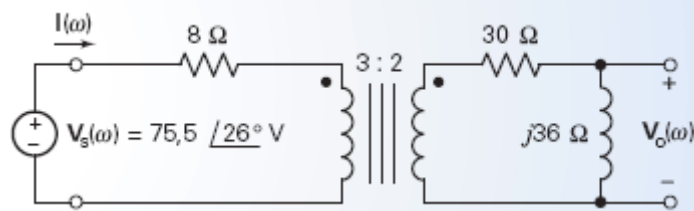



FIGURA 11.10-8 Circuito da Figura 11.10-7 representado no domínio da frequência usando impedâncias e fasores.

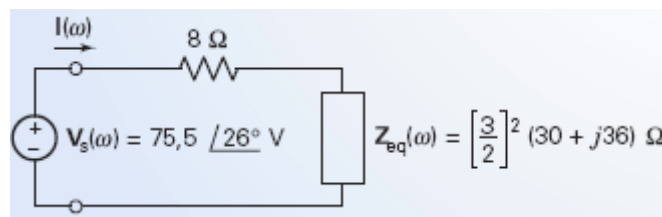



FIGURA 11.10-9 Circuito da Figura 11.10-8, depois de substituir o transformador e a impedância do resistor e indutor em série pela impedância equivalente.

Na Figura 11.10-9, a impedância do resistor de 8 Ω está ligada em série com a impedância equivalente $\mathbf{Z}_{eq}(\omega)$. A corrente $\mathbf{I}(\omega)$ é a corrente que atravessa o resistor e o enrolamento primário do transformador e $\mathbf{V}_s(\omega)$ é a tensão aplicada à combinação em série do resistor com a impedância equivalente. De acordo com a lei de Ohm, temos

$$\mathbf{I}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_s(\omega)}{8 + \mathbf{Z}_{eq}(\omega)} = \frac{75{,}5\angle 26^\circ}{8 + 67{,}5 + j81} = \frac{75{,}5\angle 26^\circ}{110{,}73\angle 47^\circ} = 0{,}682\angle -21^\circ \text{ A} \qquad (11.10\text{-}6)$$

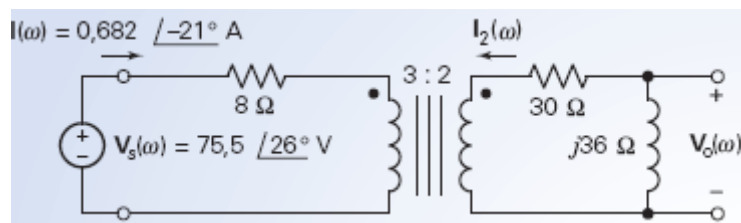



FIGURA 11.10-10 Circuito da Figura 11.10-9 depois de determinada a corrente $\mathbf{I}(\omega)$.

Como os circuitos das Figuras 11.10-8 e 11.10-9 são equivalentes, a corrente $\mathbf{I}(\omega)$ da Figura 11.10-10 também é dada pela Eq. 11.10-6. A Figura 11.10-10 mostra o circuito da Figura 11.10-8 com o valor da corrente $\mathbf{I}(\omega)$ indicado.

A corrente do enrolamento secundário do transformador foi chamada de $\mathbf{I}_2(\omega)$ na Figura 11.10-10. Como $\mathbf{I}(\omega)$ e $\mathbf{I}_2(\omega)$ são as correntes dos enrolamentos do transformador ideal, estão relacionadas pela seguinte equação:

$$\mathbf{I}_2(\omega) = -\left(\frac{3}{2}\right)\mathbf{I}(\omega) = -1{,}023\angle -21^\circ \text{ A}$$

Observe que $\mathbf{I}_2(\omega)$ e $\mathbf{V}_o(\omega)$, a corrente e a tensão na impedância de $j36$ Ω da Figura 11.10-10, não estão de acordo com a convenção passiva. Assim,

$$\mathbf{V}_o(\omega) = -j36\,\mathbf{I}_2(\omega) = (j36)(-1{,}023\angle{-21^\circ}) = (36\angle{90^\circ})(1{,}023\angle{-21^\circ}) = 36{,}82\angle{69^\circ}\ V$$

No domínio do tempo, a tensão de saída é dada por

$$v_o(t) = 36{,}82\cos(4t + 69^\circ)\ \text{V}$$

Exemplo 11.10-3 Potência Complexa em um Circuito com um Transformador

Determine o valor da potência (*a*) fornecida pela fonte de tensão, (*b*) recebida pela impedância $\mathbf{Z}_2$ e (*c*) recebida pelo transformador do circuito da Figura 11.10-11.

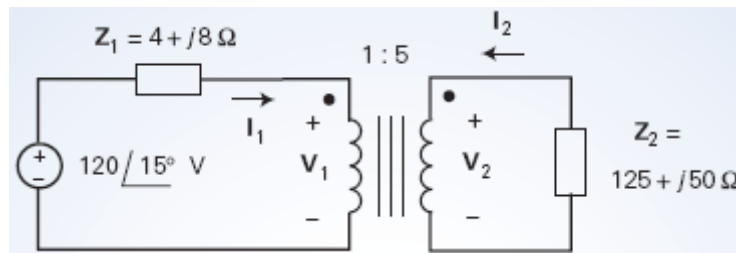



FIGURA 11.10-11 Circuito do Exemplo 11.10-3.

Solução

(a) Como na Figura 11.10-5, podemos substituir o transformador e a impedância $\mathbf{Z}_2$ por uma impedância equivalente; o circuito resultante aparece na Figura 11.10-12. A impedância equivalente da Figura 11.10-12 é dada por

$$\mathbf{Z}_{eq} = \left(\frac{1}{5}\right)^2 (125 + j50) = 5 + j2\ \Omega$$

De acordo com a LKT e a lei de Ohm,

$$\mathbf{I}_1 = \frac{120\angle{0^\circ}}{(4 + j8) + (5 + j2)} = 8{,}92\angle{-48^\circ}\ \text{A}$$

A potência complexa fornecida pela fonte de tensão é dada por

$$\frac{(120\angle{0^\circ})\,(8{,}92\angle{-48^\circ})^*}{2} = 358 + j398\ \text{VA}$$

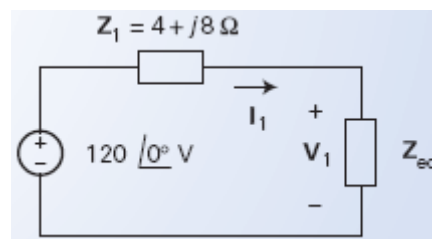



FIGURA 11.10-12 Circuito da Figura 11.10-11 com o transformador e a impedância $\mathbf{Z}_2$ substituídos por uma impedância equivalente.

(b) De acordo com a Eq. 11.10-4, a corrente da impedância $\mathbf{Z}_2$ da Figura 11.10-11 é dada por

$$\mathbf{I}_2 = \frac{1}{5}\mathbf{I}_1 = -\frac{1}{5}(8{,}92\angle{-48°}) = 1{,}784\angle{132°}\ \text{A}$$

Note que $\mathbf{I}_2$ e $\mathbf{V}_2$, a corrente e a tensão da impedância $\mathbf{Z}_2$, não estão de acordo com a convenção passiva. Assim, a potência complexa recebida pela impedância $\mathbf{Z}_2$ é dada por

$$-\frac{|\mathbf{I}_1|^2}{2}\mathbf{Z}_2 = -\frac{1{,}784^2}{2}(125 + j50) = -198{,}9 - j79{,}56\ \text{VA}$$

(c) A tensão $\mathbf{V}_2$ da Figura 11.10-11 é dada por

$$\mathbf{V}_2 = -\mathbf{Z}_2\mathbf{I}_2 = -(125 + j50)\,(1{,}784\angle{132°}) = 240{,}2\angle{-26{,}2°}\ \text{V}$$

(Mais uma vez, o sinal negativo é necessário porque $\mathbf{I}_2$ e $\mathbf{V}_2$ não estão de acordo com a convenção passiva.) De acordo com a Eq. 11-10-3,

$$\mathbf{V}_1 = \frac{1}{5}\mathbf{V}_2 = \frac{240{,}2}{5}\angle{-26{,}2°} = 48{,}0\angle{-26{,}2°}\ \text{V}$$

A potência complexa fornecida ao transformador é, portanto,

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{V}_1\,\mathbf{I}_1{}^*}{2} + \frac{\mathbf{V}_2\,\mathbf{I}_2{}^*}{2} &= \frac{(48{,}0\angle{-26{,}2°})\,(8{,}92\angle{-48°})^*}{2} + \frac{(240{,}2\angle{-26{,}2°})\,(1{,}784\angle{132°})^*}{2}\\ &= (214\angle{21{,}8°}) + (214\angle{-158{,}2°})\\ &= 0\ \text{VA}\end{aligned}$$

EXERCÍCIO 11.10-1 Determine a impedância $\mathbf{Z}_{ab}$ no circuito da Figura E 11.10-1. Todos os transformadores são ideais.

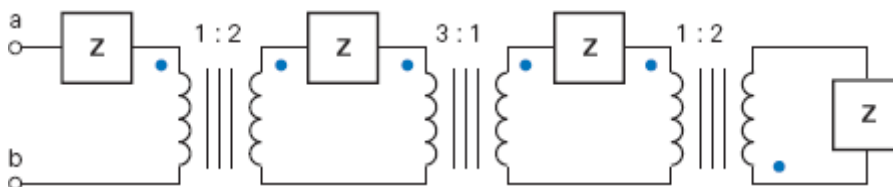



FIGURA E 11.10-1

Resposta: $\mathbf{Z}_{ab} = 4{,}063\mathbf{Z}$

11.11 *Como Podemos Testar . . .?*

Os engenheiros são frequentemente encarregados de verificar se a solução de um problema está correta. As soluções de problemas de projeto, por exemplo, devem ser verificadas para confirmar que todas as especificações estão sendo atendidas. Além disso, os resultados obtidos com o auxílio de computadores devem ser revistos para evitar possíveis erros na digitação dos dados e as afirmações dos vendedores a respeito dos seus produtos devem ser confirmadas.

Os estudantes de engenharia muitas vezes também precisam verificar se os resultados que obtiveram estão corretos. Às vezes falta muito pouco tempo para terminar um exame e é importante poder identificar rapidamente as questões que precisam ser refeitas.

O exemplo a seguir ilustra algumas técnicas que podem ser usadas para verificar se as soluções de problemas do tipo discutido neste capítulo estão corretas.

EXEMPLO 11.11-1 Como Podemos Testar a Potência em Circuitos de Corrente Alternada?

EXEMPLO 11.11-1 Como Podemos Testar a Potência em Circuitos de Corrente Alternada?

O circuito da Figura 11.11-1*a* foi analisado com o auxílio de um programa de computador e os resultados aparecem na Figura 11.11-1*b*, em que Xp e Xs indicam o enrolamento primário e o enrolamento secundário do transformador. A convenção passiva foi usada para todos os componentes, incluindo a fonte de tensão, o que significa que

$$\frac{(30)(1,76)}{2}\cos(133^\circ - 0) = -18,00$$

é a potência média *absorvida* pela fonte de tensão. A potência média *fornecida* pela fonte de tensão é +18,00 W.

Como podemos testar se os resultados fornecidos pelo computador estão corretos?

Solução

Existem várias coisas que podem ser facilmente testadas.

(1) A corrente e a tensão dos indutores devem estar defasadas de 90º para que a potência média absorvida seja zero. Tanto no caso do indutor L_1 como no caso do indutor L_2, essa condição é satisfeita.

(2) A potência média absorvida por um transformador ideal é zero. A soma da potência média absorvida pelo primário com a potência média absorvida pelo secundário é

$$\frac{(5,2)(1,76)}{2}(\cos(9^\circ - (-47^\circ))) + \frac{(7,8)(1,17)}{2}(\cos(133^\circ - 9^\circ) = 2,56 + (-2,55) \approx 0 \text{ W}$$

e, portanto, essa condição é satisfeita.

(3) Toda a potência fornecida ao primário de um transformador ideal é transferida para a carga. Neste exemplo, a carga é constituída pelo indutor L_2 e o resistor R_2. Como a potência média fornecida ao indutor é zero, toda a potência fornecida ao primário do transformador deve ser fornecida pelo secundário do transformador ao resistor R_2. A potência fornecida ao primário do transformador é

$$\frac{(5,2)(1,76)}{2}\cos(9^\circ - (-47^\circ)) = 2,56 \text{ W}$$

A potência fornecida a R_2 é

$$\frac{(7,8)(0,65)}{2}\cos(0) = 2,53 \text{ W}$$

Parece estar havendo um erro de arredondamento nas tensões e correntes fornecidas pelo computador, mas é razoável concluir que toda a potência fornecida ao primário do transformador está sendo fornecida pelo secundário ao resistor R_2.

(4) A potência média fornecida pela fonte de tensão deve ser igual à potência média absorvida pelos resistores. Já calculamos que a potência média fornecida pela fonte de tensão é 18 W. A potência média absorvida pelos resistores é

Componente				Tensão	Corrente
Vin	1	0	30 ∠ 0	30 ∠ 0°	1,76 ∠ 133°
R1	1	2	10	17,6 ∠ –47°	1,76 ∠ –47°
L1	2	3	5	17,6 ∠ 43°	1,76 ∠ –47°
Xp	3	0	2	5,2 ∠ 9°	1,76 ∠ 47°
Xs	4	5	3	7,8 ∠ 9°	1,17 ∠ 133°
R2	4	5	12	7,8 ∠ 9°	0,65 ∠ 9°
L2	4	5	4	7,8 ∠ 9°	0,98 ∠ –81°

Resposta estacionária para: ω = 2 rad/s

(*b*)

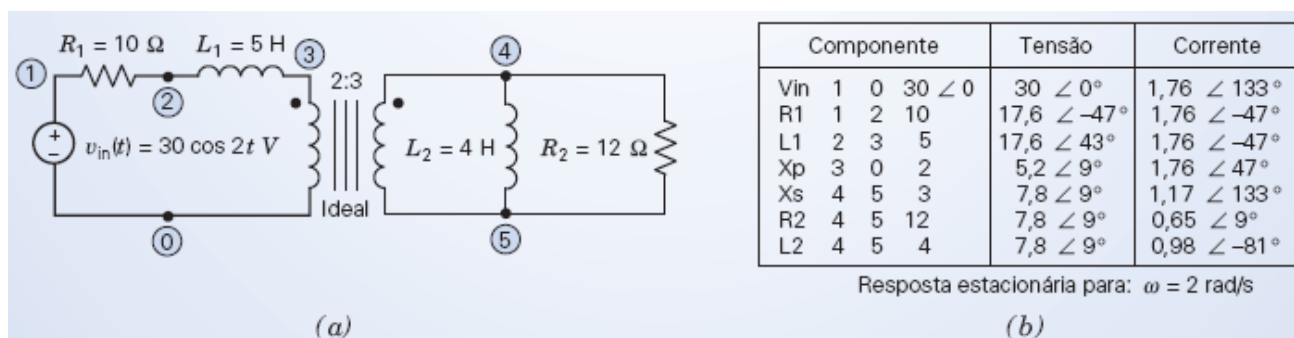



FIGURA 11.11-1 (*a*) Circuito e (*b*) resultados da análise do circuito em computador.

$$\frac{(17,6)(1,76)}{2}\cos(0)+\frac{(7,8)(0,65)}{2}\cos(0)=15,49+(2,53)=18,02\ \text{W}$$

e, portanto, essa condição é satisfeita.

Como as quatro condições são satisfeitas, podemos confiar nos resultados fornecidos pelo computador.

11.12 EXEMPLO DE PROJETO Transferência Máxima de Potência

O circuito de casamento de impedâncias da Figura 11.12-1 é usado para casar a fonte à carga, ou seja, assegurar que a maior potência possível seja transferida da fonte para a carga. Esse problema ocorre com tanta frequência que recebeu um nome: foi chamado de problema de transferência máxima de potência.

Um exemplo importante de aplicação do problema de transferência máxima de potência é a ligação de um telefone celular à antena do aparelho. A impedância de entrada de um telefone celular típico é $\mathbf{Z} = (10 + j6{,}28)\ \Omega$.

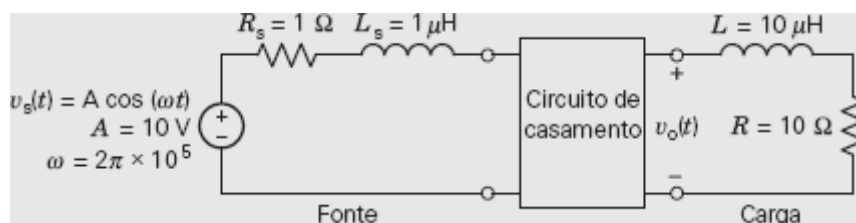



FIGURA 11.12-1 Projeto de um circuito de casamento de impedâncias para que a potência transferida para a carga seja a maior possível; a carga é o modelo da antena de um telefone celular.

Descreva a Situação e as Hipóteses

A tensão de entrada é uma função senoidal do tempo. O circuito está no regime estacionário. O circuito de casamento de impedâncias deve transferir a maior potência possível para a carga.

Estabeleça a Meta

Para permitir a maior transferência possível de potência, o circuito deve casar as impedâncias da carga e da fonte. A impedância da fonte é

$$\mathbf{Z}_s = R_s + j\omega L_s = 1 + j(2\cdot\pi\cdot 10^5)\,(10^{-6}) = 1 + j0{,}628\ \Omega$$

Para máxima transferência de potência, a impedância $\mathbf{Z}_{in}$ da Figura 11.12-2 deve ser o complexo conjugado de $\mathbf{Z}_s$:

$$\mathbf{Z}_{in} = \mathbf{Z}_s^* = 1 - j0{,}628\ \Omega$$

Formule um Plano

Vamos usar um transformador para casar as impedâncias, como na Figura 11.12-3. Nesse caso, a impedância $\mathbf{Z}_{in}$ passa a depender de n, a relação de espiras do transformador. Vamos igualar $\mathbf{Z}_{in}$ ao complexo conjugado de $\mathbf{Z}_s$ e resolver a equação resultante para determinar a relação de espiras, n.

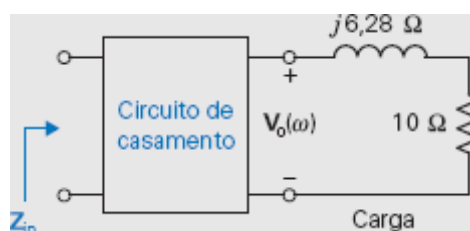



FIGURA 11.12-2 $\mathbf{Z}_{in}$ é a impedância de entrada do circuito de casamento de impedâncias.

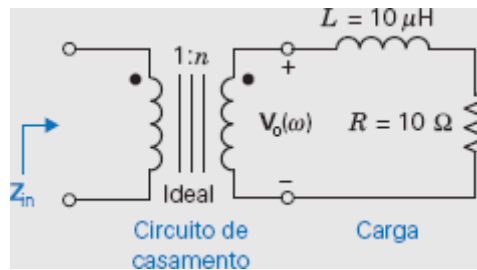



FIGURA 11.12-3 Uso de um transformador ideal para casar impedâncias.

Execute o Plano

$$\mathbf{Z}_{\text{in}} = \frac{1}{n^2}(R + j\omega L) = \frac{1}{n^2}(10 + j6,28)$$

Queremos que

$$\frac{1}{n^2}(10 + j6,28) = 1 - j0,628$$

Para isso, é preciso que

$$\frac{1}{n^2}10 = 1 \qquad (11.12\text{-}1)$$

e

$$\frac{1}{n^2}6,28 = -0,628 \qquad (11.12\text{-}2)$$

Fazendo $n = 3{,}16$ (escolhendo, por exemplo, $N_2 = 158$ e $N_1 = 50$), satisfazemos a Eq. 11-12-1, mas não a Eq. 11.12-2. Na verdade, não existe nenhum valor positivo de n que satisfaça a Eq. 11.12-2.

Precisamos modificar o circuito de casamento de impedâncias para tornar negativa a parte imaginária de $\mathbf{Z}_{\text{in}}$. Isso pode ser conseguido incluindo um capacitor no circuito, como na Figura 11.12-4. Nesse caso,

$$\mathbf{Z}_{\text{in}} = \frac{1}{n^2}\left(R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C}\right) = \frac{1}{n^2}\left(10 + j6,28 - j\frac{1}{2\pi \cdot 10^5 \cdot C}\right)$$

Queremos que

$$\frac{1}{n^2}\left(10 + j6,28 - j\frac{1}{2\pi \cdot 10^5 \cdot C}\right) = 1 - j0,628$$

Para isso, é preciso que

$$\frac{1}{n^2}10 = 1 \qquad (11.12\text{-}3)$$

e

$$\frac{1}{n^2}\left(6,28 - \frac{1}{2\pi \cdot 10^5 \cdot C}\right) = -0,628 \qquad (11.12\text{-}4)$$

Resolvendo a Eq. 11-12-3, obtemos

$$n = 3{,}16$$

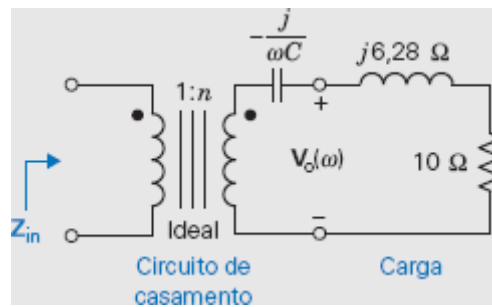



FIGURA 11.12-4 Circuito de casamento de impedâncias modificado pela inclusão de um capacitor.

Resolvendo a Eq. 11.12-4, obtemos

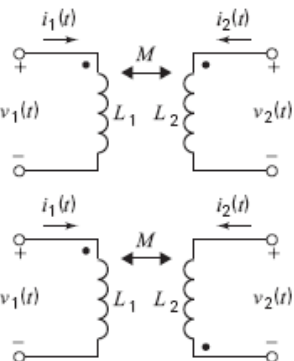
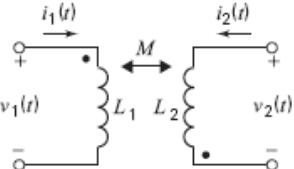
$$C = 0{,}1267\ \mu\text{F}$$

e o projeto está completo.

Verifique se a Solução Proposta Está Correta

Para $n = 3{,}16$ e $C = 0{,}1267\ \mu$F, a impedância de entrada do circuito de casamento de impedâncias é

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}_{\text{in}} &= \frac{1}{n^2}\left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)\\ &= \frac{1}{3{,}16^2}\left(10 + j(2\pi \times 10^5)(10^{-5}) + \frac{1}{j(2\pi \times 10^5)(0{,}1267 \times 10^{-6})}\right)\\ &= 1 - j0{,}629\end{aligned}$$

como desejado.

11.13 RESUMO

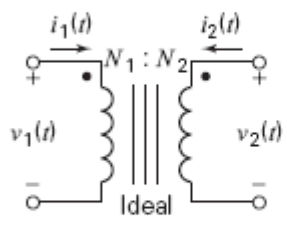
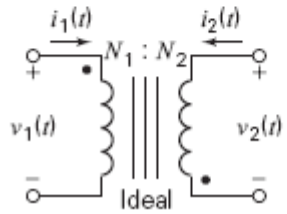
- Com a adoção da corrente alternada para o fornecimento de energia elétrica a indústrias e residências, os engenheiros tiveram necessidade de estudar as relações entre a potência e outras grandezas nos circuitos de corrente alternada.
- A potência instantânea fornecida a um componente de um circuito é o produto da tensão do componente pela corrente que o atravessa. Sejam $v(t)$ e $i(t)$ a tensão e a corrente no elemento, escolhidas de acordo com a convenção passiva. Nesse caso, $p(t) = v(t)i(t)$ é a potência instantânea fornecida ao componente. A potência instantânea é calculada no domínio do tempo.
- A potência instantânea pode ser uma função complicada de t. Quando a tensão e a corrente do elemento são funções periódicas de mesmo período T, é conveniente calcular a potência média $P = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} i(t)\, v(t)\, dt$.
- O valor eficaz de uma corrente é a corrente contínua que fornece a mesma potência média a um resistor que a corrente variável dada. O valor eficaz de uma tensão é a tensão contínua que fornece a mesma potência média a um resistor que a tensão variável dada.
- Considere um circuito linear com uma entrada senoidal que está no regime estacionário. Nesse caso, todas as tensões e correntes do circuito são senoidais e têm a mesma frequência que a entrada. Um circuito desse tipo pode ser analisado no domínio da frequência, usando fasores e impedâncias. Na verdade, podemos calcular a potência gerada ou absorvida em um circuito ou em qualquer componente de um circuito usando fasores. A Tabela 11.5-1 mostra as equações usadas para calcular a potência média, a potência complexa e a potência reativa no domínio da frequência.

- Como é importante assegurar que o valor da corrente I seja o menor possível nas linhas de transmissão, os engenheiros procuram manter o fator de potência próximo de 1. O fator de potência é igual a cos θ, onde θ é a diferença entre os ângulos de fase da tensão e da corrente no regime estacionário senoidal. Uma impedância puramente reativa é ligada em paralelo com a carga para corrigir o fator de potência.
- Finalmente, discutimos os indutores acoplados e os transformadores. Os indutores acoplados e os transformadores apresentam indutância mútua, que relaciona a tensão em um enrolamento à variação de corrente em outro enrolamento. As equações que descrevem as propriedades dos indutores acoplados e dos transformadores aparecem nas Tabelas 11.13-1 e 11.13-2.

Tabela 11.13-1 Indutores Acoplados

SÍMBOLO (INCLUINDO O SENTIDO DE REFERÊNCIA DAS TENSÕES E CORRENTES)	EQUAÇÃO NO DOMÍNIO DO TEMPO	EQUAÇÃO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA
$i_1(t)$, $i_2(t)$, M, $v_1(t)$, L_1, L_2, $v_2(t)$	$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$ $v_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$	$\mathbf{V}_1 = j\omega L_1 \mathbf{I}_1 + j\omega M \mathbf{I}_2$ $\mathbf{V}_2 = j\omega L_2 \mathbf{I}_2 + j\omega M \mathbf{I}_1$
$i_1(t)$, $i_2(t)$, M, $v_1(t)$, L_1, L_2, $v_2(t)$	$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$ $v_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}$	$\mathbf{V}_1 = j\omega L_1 \mathbf{I}_1 - j\omega M \mathbf{I}_2$ $\mathbf{V}_2 = j\omega L_2 \mathbf{I}_2 - j\omega M \mathbf{I}_1$

Tabela 11.13-2 Transformadores Ideais

SÍMBOLO (INCLUINDO O SENTIDO DE REFERÊNCIA DAS TENSÕES E CORRENTES)	EQUAÇÃO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA
$i_1(t)$, $i_2(t)$, $N_1 : N_2$, $v_1(t)$, $v_2(t)$, Ideal	$\mathbf{V}_1 = \frac{N_1}{N_2} \mathbf{V}_2$ $\mathbf{I}_1 = -\frac{N_2}{N_1} \mathbf{I}_2$
$i_1(t)$, $i_2(t)$, $N_1 : N_2$, $v_1(t)$, $v_2(t)$, Ideal	$\mathbf{V}_1 = -\frac{N_1}{N_2} \mathbf{V}_2$ $\mathbf{I}_1 = \frac{N_2}{N_1} \mathbf{I}_2$

PROBLEMAS

Seção 11.3 Potência Instantânea e Potência Média

P 11.3-1 A Figura P 11.3-1 mostra um circuito *RLC*. Determine a potência instantânea fornecida ao indutor para $i_s = 1 \cos \omega t$ A e $\omega = 6283$ rad/s.

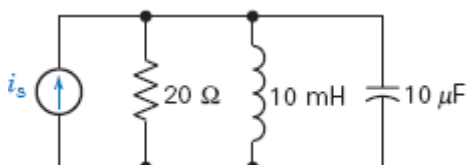



Figura P 11.3-1

P 11.3-2 Determine a potência média absorvida pelo resistor de 0,6 kΩ e a potência média fornecida pela fonte de corrente no circuito da Figura P 11.3-2.

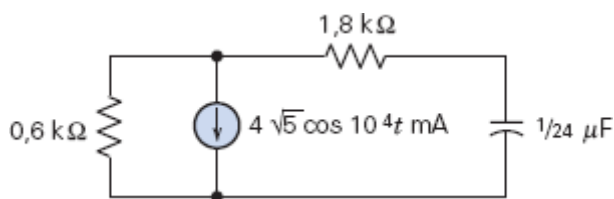



Figura P 11.3-2

P 11.3-3 Use o método da análise nodal para determinar a potência média absorvida pelo resistor de 20 Ω no circuito da Figura P 11.3-3.

Resposta: $P = 200$ W

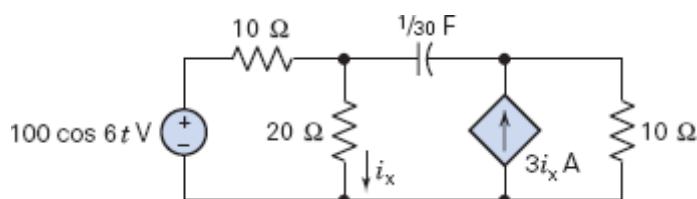



Figura P 11.3-3

P 11.3-4 As usinas nucleares se tornaram muito difíceis de operar, como ilustra a sala de controle da Usina Nuclear de Kozloduy, na Bulgária, cuja fotografia aparece na Figura P 11.3-4*a*. Um dos circuitos de controle pode ser modelado pelo circuito da Figura P 11.3-4*b*. Determine a potência média fornecida a cada elemento do circuito.

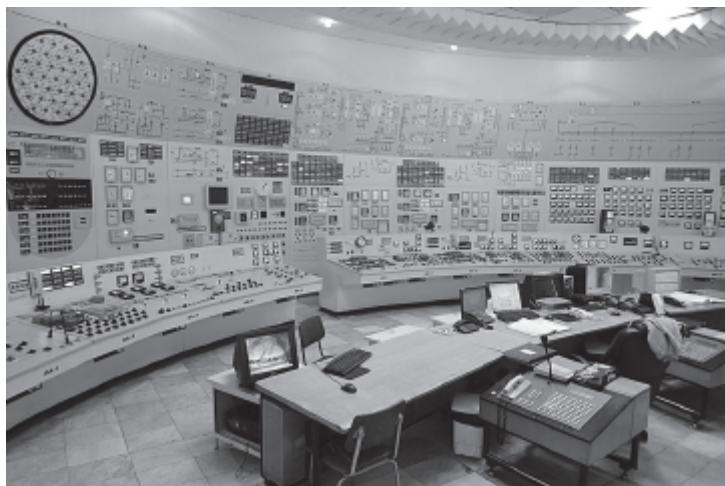
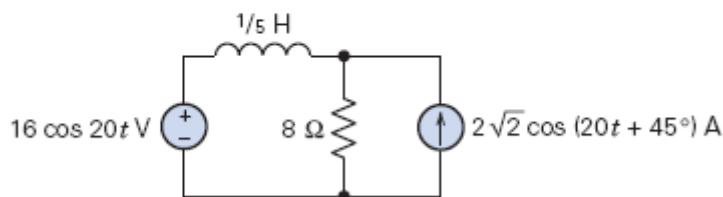
Resposta: $P_{\text{fonte de corrente}} = -12{,}8$ W; $P_{8\Omega} = 6{,}4$ W; $P_L = 0$ W; $P_{\text{fonte de tensão}} = 6{,}4$ W

(*a*)

(*b*)

Figura P 11.3-4 (a) Simulador da sala de controle da Usina Nuclear de Kozloduy. Fotografia extraída da Wikipedia. Copyright © 2009 Yovko Lambrev. Creative Commons Attribution. Alguns direitos reservados. (b) Um dos circuitos de controle do reator.

P 11.3-5 Determine a potência média fornecida a cada componente do circuito da Figura P 11.3-5.

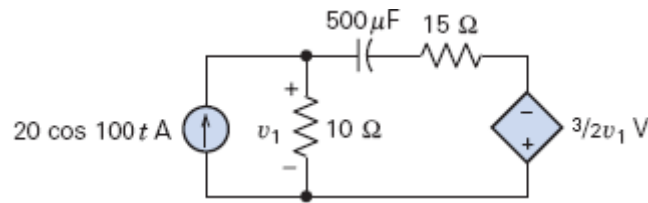



Figura P 11.3-5

P 11.3-6 Os alunos que trabalham em laboratórios encontram equipamentos elétricos de todos os tipos. Alguns desses equipamentos são alimentados com baterias ou funcionam com baixas tensões para diminuir os riscos. Outros são isolados da terra para que não haja problema se um objeto aterrado fizer contato com o circuito. Alguns equipamentos, porém, são alimentados com tensões que podem ser perigosas ou geram tensões que podem ser perigosas. As fontes de alimentação usadas normalmente nos Estados Unidos são fontes senoidais de 120 V, 60 Hz, aterradas. Como essas fontes alimentam a maior parte dos equipamentos de laboratório, é importante conhecer suas propriedades para poder usá-las de forma segura (Bernstein, 1991).

Suponha que um estudante encoste uma das mãos em um gabinete de metal que está em curto-circuito com um aparelho elétrico e encoste a outra em um cano ligado à terra, como na Figura P 11.3-6*a*.

A resistência entre as duas mãos é 200 Ω. Choques elétricos com uma energia de 30 J são perigosos para seres humanos. Considere o modelo da Figura P 11.3-6*b*, no qual o estudante está representado pela resistência *R*. Determine a energia fornecida ao estudante em 1 s.

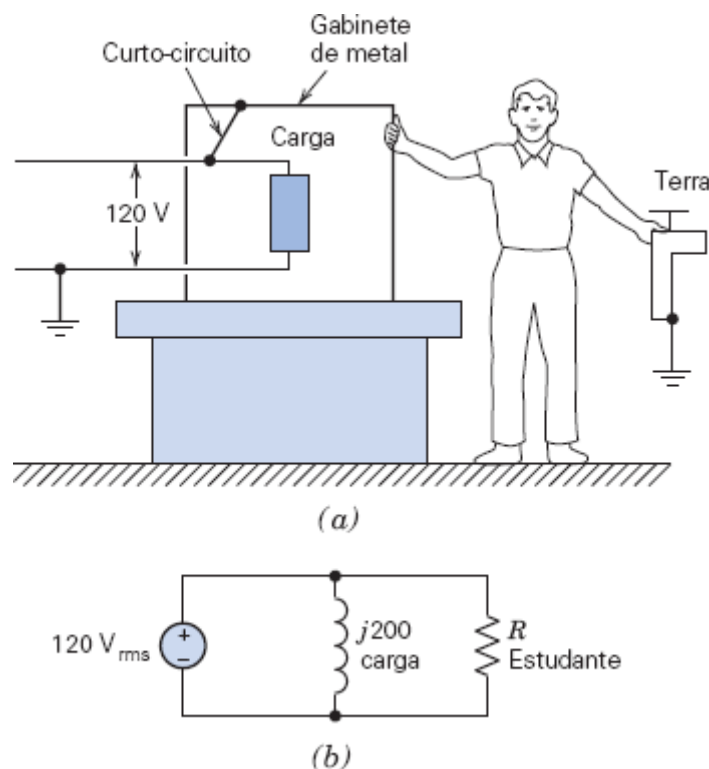



Figura P 11.3-6 (a) Estudante manipulando um aparelho elétrico em curto-circuito. (b) Modelo da situação representada em (a).

P 11.3-7 A Figura P 11.3-7 mostra um circuito *RLC* com uma fonte de tensão $v_s = 7 \cos 10t$ V.

(a) Determine a potência instantânea fornecida ao circuito pela fonte de tensão.

(b) Determine a potência instantânea fornecida pelo indutor.

Respostas:

(a) $p = 7{,}54 + 15{,}2 \cos(20t - 60{,}3°)$ W

(b) $p = 28{,}3 \cos(20t - 30{,}6°)$

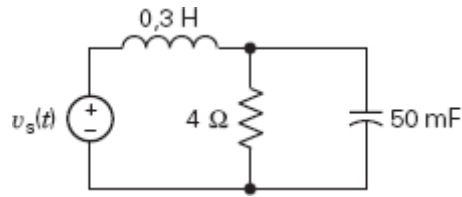



Figura P 11.3-7

P 11.3-8

(a) Determine a potência média fornecida pela fonte ao circuito da Figura P 11.3-8.

(b) Determine a potência absorvida pelo resistor R_1.

Resposta: **(a)** 30 W; **(b)** 20 W

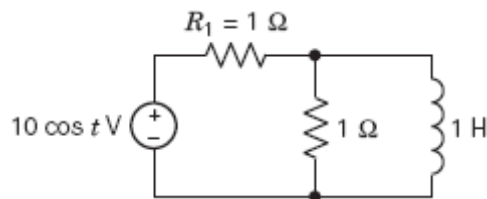



Figura P 11.3-8

Seção 11.4 **Valor Eficaz de uma Forma de Onda Periódica**

P 11.4-1 Determine o valor rms da corrente i para (a) $i = 2 - 4 \cos 2t$ A, (b) $i = 3 \text{ sen } \pi t + \sqrt{2} \cos \pi t$ A e (c) $i = 2 \cos 2t + 4\sqrt{2} \cos(2t + 45°) + 12 \text{ sen } 2t$ A.

Resposta: **(a)** $2\sqrt{3}$ A; **(b)** 2,35 A; **(c)** $5\sqrt{2}$ A

P 11.4-2 Determine o valor rms das formas de onda da Figura P 11.4-2.

Resposta: **(a)** 4,10 V; **(b)** 4,81 V; **(c)** 4,10 V

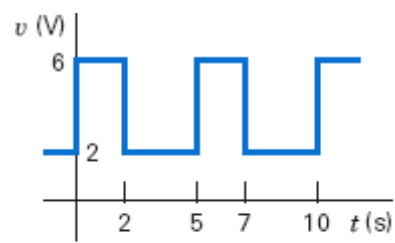
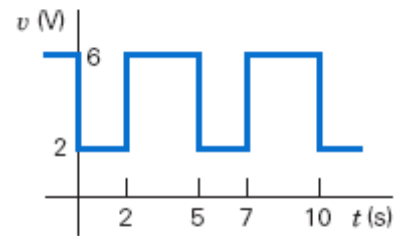
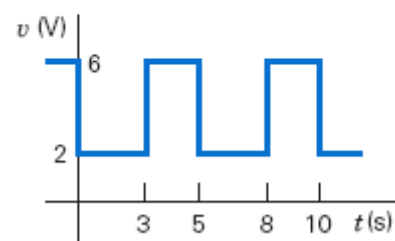



Figura P 11.4-2

P 11.4-3 Determine o valor rms das formas de onda da Figura P 11.4-3.

Resposta: **(a)** 4,16 V; **(b)** 4,16 V; **(c)** 4,16 V

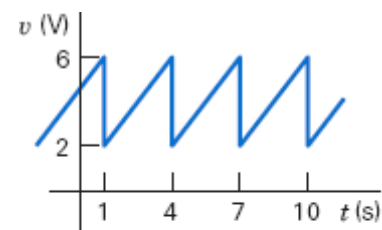
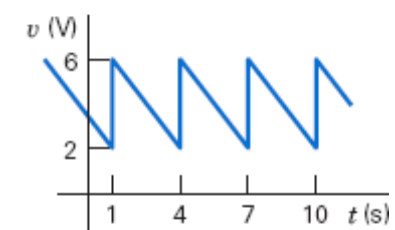
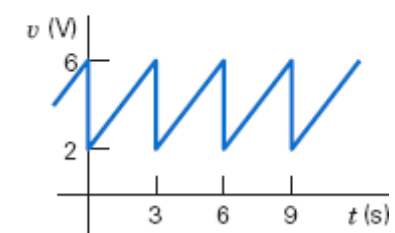



Figura P 11.4-3

P 11.4-4 Determine o valor rms das formas de onda da Figura P 11.4-4.

Resposta: **(a)** 1,225 V; **(b)** 5 mA

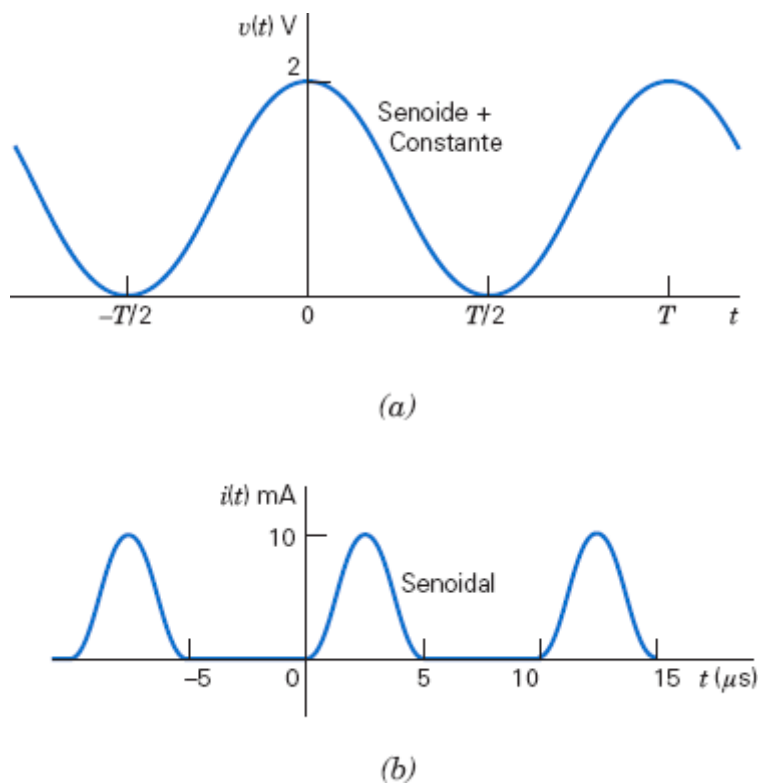



Figura P 11.4-4

P 11.4-5 Determine o valor rms da tensão $v(t)$ da Figura P 11.4-5.

Resposta: $V_{rms} = 4{,}24$ V

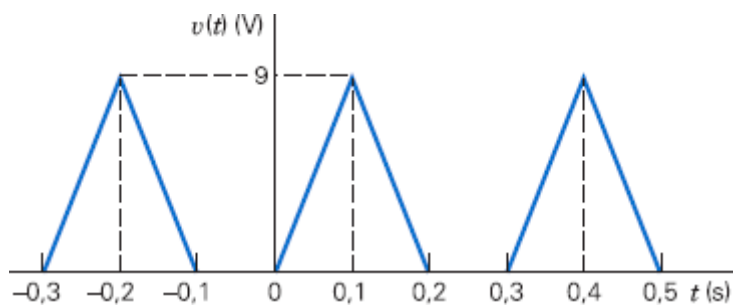



Figura P 11.4-5

P 11.4-6 Determine o valor eficaz da forma de onda de corrente da Figura P 11.4-6.

Resposta: $I_{ef} = 8{,}66$

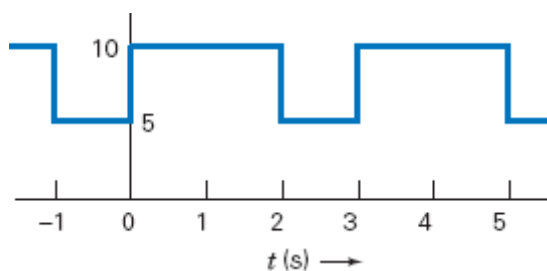



Figura P 11.4-6

P 11.4-7 Calcule o valor eficaz da tensão da resistência R do circuito da Figura P 11.4-7 para $\omega = 100$ rad/s.

Sugestão: Use o princípio de superposição.

Resposta: $V_{ef} = 4{,}82$ V

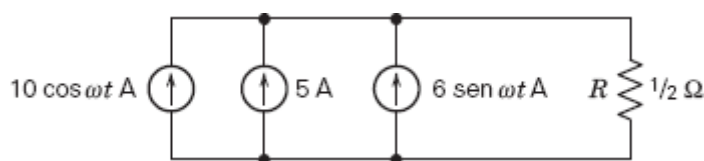



Figura P 11.4-7

Seção 11.5 **Potência Complexa**

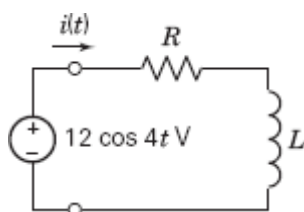
P 11.5-1 A potência complexa fornecida pela fonte de tensão da Figura P 11.5-1 é $\mathbf{S} = 3{,}6 + j7{,}2$ VA. Determine o valor da resistência R e da indutância L.

Resposta: $R = 4\ \Omega$ e $L = 2$ H

Figura P 11.5-1

P 11.5-2 A potência complexa fornecida pela fonte de tensão da Figura P 11.5-2 é $\mathbf{S} = 18 + j9$ VA. Determine o valor da resistência R e da indutância L.

Resposta: $R = 4\ \Omega$ e $L = 2$ H

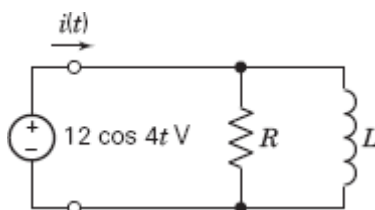



Figura P 11.5-2

P 11.5-3 Determine a potência complexa fornecida pela fonte de tensão do circuito da Figura P 11.5-3.

Resposta: $\mathbf{S} = 7{,}2 + j3{,}6$ VA.

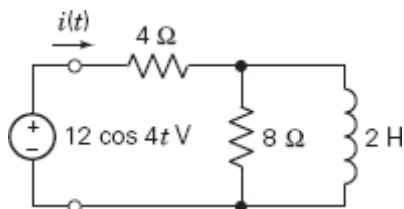



Figura P 11.5-3

P 11.5-4 Muitos engenheiros estão trabalhando no projeto de usinas fotovoltaicas para produção de energia elétrica. Um exemplo de sistema fotovoltaico experimental aparece na Figura P 11.5-4*a*. A Figura P 11.5-4*b* mostra um modelo de parte do circuito de conversão de energia. Determine a energia média, reativa e complexa fornecida pela fonte dependente.

Resposta: $P = 0$; $Q = 8/9$ VAR; $\mathbf{S} = j8/9$ VA.

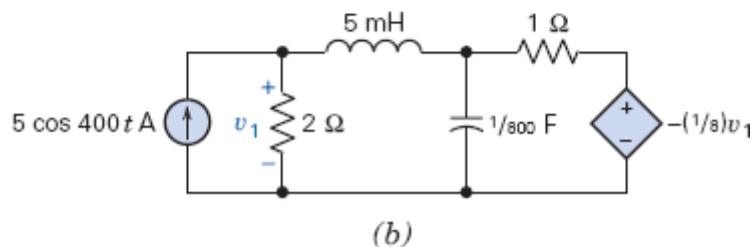



Figura P 11.5-4 (a) Uma instalação de painéis solares na zona rural da Mongólia. (b) Modelo de parte do circuito de conversão de energia.

P 11.5-5 No circuito da Figura P 11.5-5, determine **I** e a potência complexa **S** fornecida pela fonte para **V** = 50 $\angle 120^\circ$ V rms.

Resposta: **S** = 100 + j75 VA

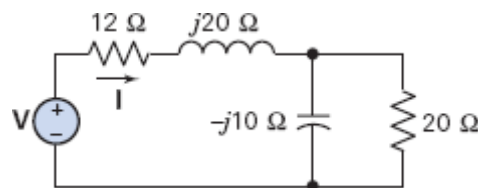



Figura P 11.5-5

P 11.5-6 No circuito da Figura P 11.5-6, determine a potência complexa absorvida pelos componentes R, L e C e mostre que é igual à potência complexa fornecida pelas fontes.

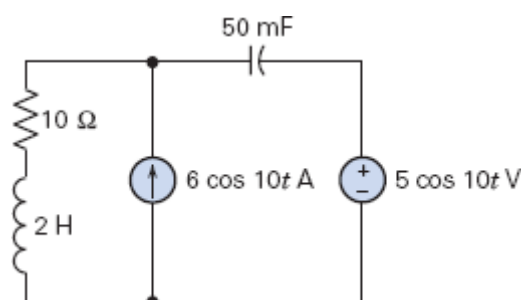



Figura P 11.5-6

P 11.5-7 No circuito da Figura P 11.5-7, a impedância **Z** é desconhecida. Entretanto, sabe-se que $v(t)$ = 100 cos (100t + 20º) V e $i(t)$ = 25 cos (100t − 10º) A. (a) Determine **Z**. (b) Determine a potência absorvida pela impedância. (c) Determine o tipo e valor do componente que deve ser ligado em paralelo com a impedância **Z** (ou seja, entre os terminais a e b) para que a tensão $v(t)$ e a corrente que entra nos componentes em paralelo estejam em fase.

Resposta: **(a)** 4 $\angle 30^\circ$ Ω; **(b)** 1082,5 W; **(c)** 1,25 mF

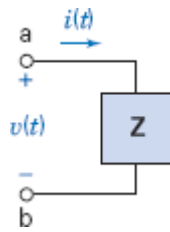



Figura P 11.5-7

P 11.5-8 Determine a potência complexa fornecida pela fonte de tensão e o fator de potência do ponto de vista da fonte de tensão do circuito da Figura P 11.5-8.

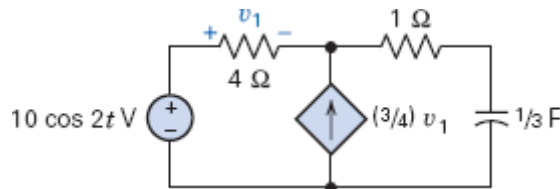



Figura P 11.5-8

P 11.5-9 O circuito da Figura P 11.5-9 é formado por uma fonte e uma carga.

(a) Suponha que R = 9 Ω e L = 5 H. Determine a potência média, a potência complexa e a potência reativa fornecida pela fonte à carga.

(b) Suponha que R = 15 Ω e L = 3 H. Determine a potência média, a potência complexa e a potência reativa fornecida pela fonte à carga.

(c) Suponha que a fonte fornece 8,47 + j14,12 VA à carga. Determine o valor da resistência R e da indutância L.

(d) Suponha que a fonte fornece 14,12 + j8,47 VA à carga. Determine o valor da resistência R e da indutância L.

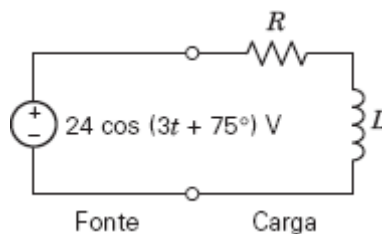



Figura P 11.5-9

P 11.5-10 O circuito da Figura P 11.5-10 é formado por uma fonte ligada a uma carga. Suponha que a amplitude da tensão da fonte seja multiplicada por dois, ou seja, que a tensão da fonte passe a ser $v_i(t)$ = 48 cos (3t + 75º) V. Determine a modificação sofrida pelas seguintes grandezas:

(a) Impedância da carga

(b) Potência complexa fornecida à carga

(c) Corrente da carga

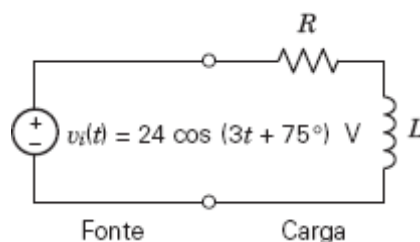



Figura P 11.5-10

P 11.5-11 O circuito da Figura P 11.5-11 é formado por uma fonte ligada a uma carga. Suponha que o ângulo de fase da tensão da fonte seja multiplicado por dois, ou seja, que a tensão da fonte passe a ser $v_i(t) = 24\cos(3t + 150°)$ V. Determine a modificação sofrida pelas seguintes grandezas:

(a) Impedância da carga

(b) Potência complexa fornecida à carga

(c) Corrente da carga

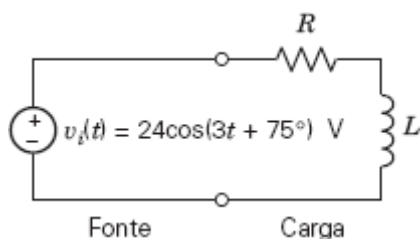



Figura P 11.5-11

P 11.5-12 O circuito da Figura P 11.5-12 é formado por uma fonte ligada a uma carga. A potência complexa fornecida à fonte pela carga é $\mathbf{S} = 6{,}61 + j1{,}98$ VA. Determine o valor de R e C.

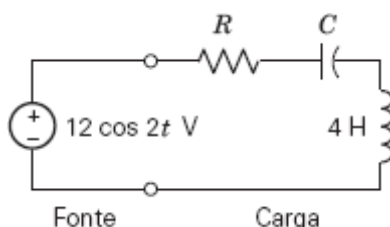



Figura P 11.5-12

P 11.5-13 Projete o circuito da Figura P 11.5-13, ou seja, especifique valores de R e L para que a potência complexa fornecida ao circuito RL seja $8 + j6$ VA.

Resposta: $R = 5{,}76\ \Omega$ e $L = 2{,}16$ H

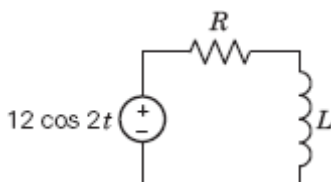



Figura P 11.5-13

P 11.5-14 A tensão da fonte do circuito da Figura P 11.5-14 é $\mathbf{V}_s = 24\,\angle 30°$ V. Em consequência,

$$\mathbf{I}_1 = 3{,}13\,\angle 25{,}4°\ \text{A};\ \mathbf{I}_2 = 1{,}99\,\angle 52{,}9°\ \text{A} \quad \text{e} \quad \mathbf{V}_4 = 8{,}88\,\angle -10{,}6°\ \text{V}$$

Determine (a) a potência média absorvida por $\mathbf{Z}_4$, (b) a potência média absorvida por $\mathbf{Z}_1$ e (c) a potência complexa fornecida pela fonte de tensão. (Todos os fasores estão indicados com o valor de pico.)

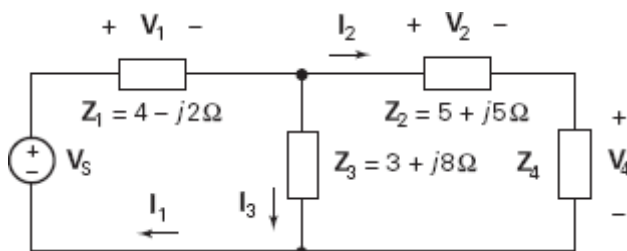



Figura P 11.5-14

Seção 11.6 **Fator de Potência**

P 11.6-1 Em uma fábrica, duas cargas estão ligadas em paralelo à rede elétrica. A energia é fornecida à fábrica com uma tensão de 4000 V rms. Uma das cargas é um forno de 30 kW e a outra um conjunto de motores que se comportam como uma carga de 150 kVA, com um fator de potência atrasado de 0,6. Determine a corrente total e o fator de potência da fábrica.

Resposta: $I = 42{,}5$ A e $fp = 1/\sqrt{2}$

P 11.6-2 Duas cargas elétricas são ligadas em paralelo a uma fonte de 400 V, 60 Hz. A primeira carga é de 12 kVA com um fator de potência de 0,7 atrasado; a segunda é de 10 kVA com um fator de potência de 0,8 atrasado. Determine a potência média, a potência aparente e o fator de potência da carga total.

Resposta: P = 16,4 kW; $|\mathbf{S}|$ = 21,9 kVA; fp = 0,75 atrasado

P 11.6-3 A fonte da Figura P 11.6-3 fornece uma potência de 50 VA com um fator de potência de 0,8 atrasado. Determine o valor da impedância **Z**.

Resposta: $\mathbf{Z} = 6{,}39\ \underline{/26{,}6^\circ}\ \Omega$

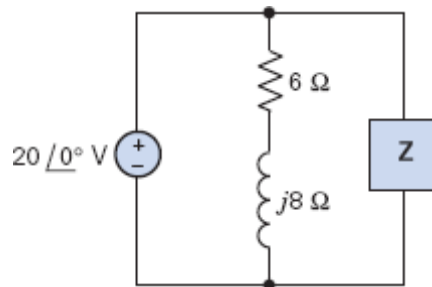



Figura P 11.6-3

P 11.6-4 As estações espaciais tripuladas utilizam fontes de alimentação de corrente alternada cujo fator de potência deve ser mantido próximo de 1. Considere o modelo de circuito de comunicações que aparece na Figura P 11.6-4. Se uma potência média de 500 W é dissipada no resistor de 20 Ω, determine (a) V_{rms}; (b) $I_{s\ rms}$; (c) o fator de potência visto pela fonte; (d) $|\mathbf{V}_s|$.

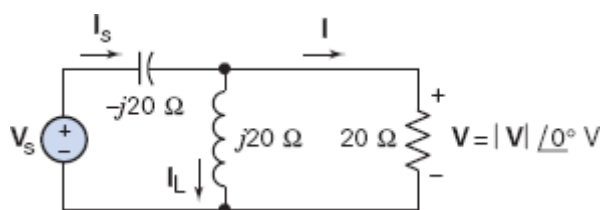



Figura P 11.6-4

P 11.6-5 Duas impedâncias são alimentadas com $\mathbf{V} = 100\ \underline{/160^\circ}\ V_{rms}$, como mostra a Figura P 11.6-5, na qual $\mathbf{I} = 2\ \underline{/190^\circ}$ A rms. A primeira carga consome P_1 = 23,2 W e Q_1 = 50 VAR. Calcule $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$, o fator de potência de cada impedância e o fator de potência total do circuito.

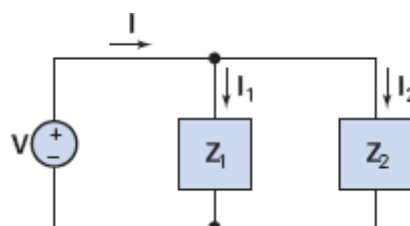



Figura P 11.6-5

P 11.6-6 A Figura P 11.6-6*a* mostra um circuito elétrico residencial de três fios. O modelo do circuito aparece na Figura P 11.6-6*b*. A corrente nominal do motor da geladeira é 8,5 A rms. É razoável supor que a impedância da geladeira seja indutiva, com uma fase de 45º. A lâmpada e o forno consomem 100 W e 12 kW, respectivamente.

(a) Calcule a corrente na linha 1, na linha 2 e no neutro.

(b) Calcule: (i) P_{gel} e Q_{gel}; (ii) P_{lamp} e Q_{lamp}; (iii) P_{total}, Q_{total}, $\mathbf{S}_{total}$ e o fator de potência total.

(c) Por causa da corrosão e de um mau contato, a ligação com o neutro adquire uma resistência de 20 Ω. (Essa resistência deve ser considerada como parte do fio neutro.) Use o método da análise de malhas para calcular a tensão da lâmpada.

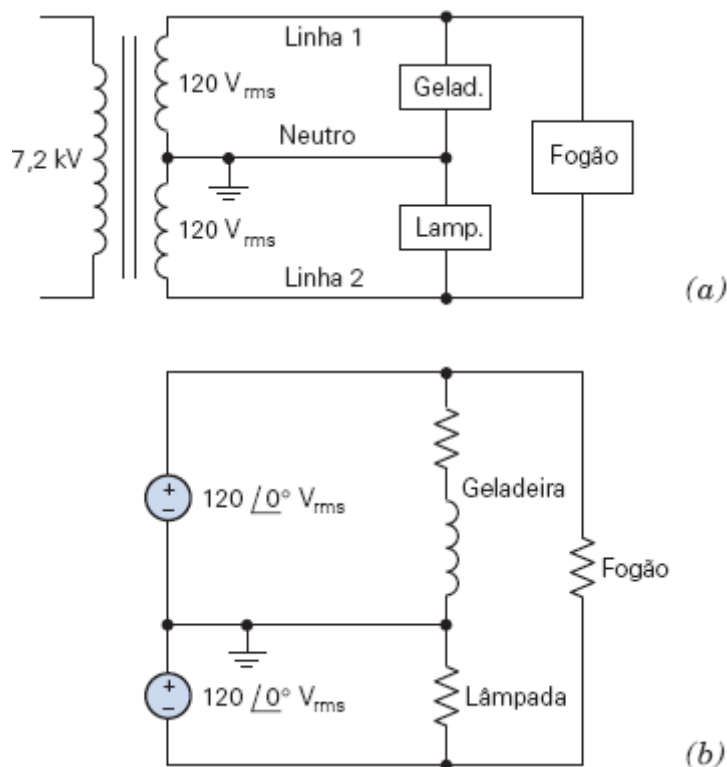



Figura P 11.6-6 Circuito elétrico residencial com três cargas.

P 11.6-7 Um motor ligado a uma linha de 220 V da companhia de energia elétrica tem uma corrente de 7,6 A. Os valores da tensão e da corrente são rms. A potência média fornecida ao motor é 1317 W.

(a) Determine a potência aparente, a potência reativa e o fator de potência para $\omega = 377$ rad/s.

(b) Determine a capacitância do capacitor que deve ser ligado ao motor para que o fator de potência do conjunto seja igual à unidade.

(c) Determine a corrente nas linhas da companhia de energia elétrica depois que o capacitor é instalado.

Resposta: **(a)** $fp = 0{,}788$; **(b)** $C = 56{,}5\ \mu F$; **(c)** $I = 6{,}0$ A rms.

P 11.6-8 Duas cargas são ligadas em paralelo com uma fonte de 1000 V rms, 60 Hz. Uma das cargas absorve 500 kW com um fator de potência de 0,6 atrasado; a outra carga absorve 400 kW e 600 kVAR. Determine o valor do capacitor que deve ser ligado em paralelo com as duas cargas para que o fator de potência do conjunto aumente para 0,9 atrasado.

Resposta: $C = 2{,}2\ \mu F$.

P 11.6-9 Uma fonte de tensão com uma impedância interna complexa é ligada a uma carga, como mostra a Figura P 11.6-9. A carga absorve uma potência média de 1 kW com uma tensão de 100 V rms e um fator de potência de 0,80 atrasado. A frequência da fonte é 200 rad/s.

(a) Determine a tensão da fonte, $\mathbf{V}_1$.

(b) Determine o tipo e valor do componente que deve ser ligado em paralelo com a carga para que a potência transferida para a carga seja a maior possível.

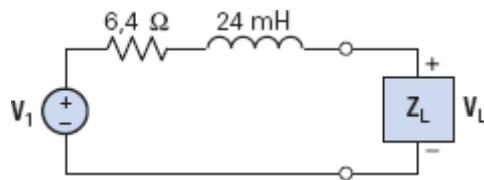



Figura P 11.6-9

P 11.6-10 O circuito da Figura P 11.6-10*a* pode ser representado no domínio da frequência da forma mostrada na Figura P 11.6-10*b*. No domínio da frequência, o valor da corrente na única malha do circuito é **I** = $1{,}076\angle{-38{,}3^\circ}$ A.

(a) Determine a potência complexa fornecida pela fonte de tensão.

(b) Dado que a potência complexa recebida por $\mathbf{Z}_1$ é $6{,}945 + j13{,}89$ VA, determine o valor de R_1 e L_1.

(c) Dado que a potência real recebida por $\mathbf{Z}_3$ é 4,63 W com um fator de potência de 0,56 atrasado, determine o valor de R_3 e L_3.

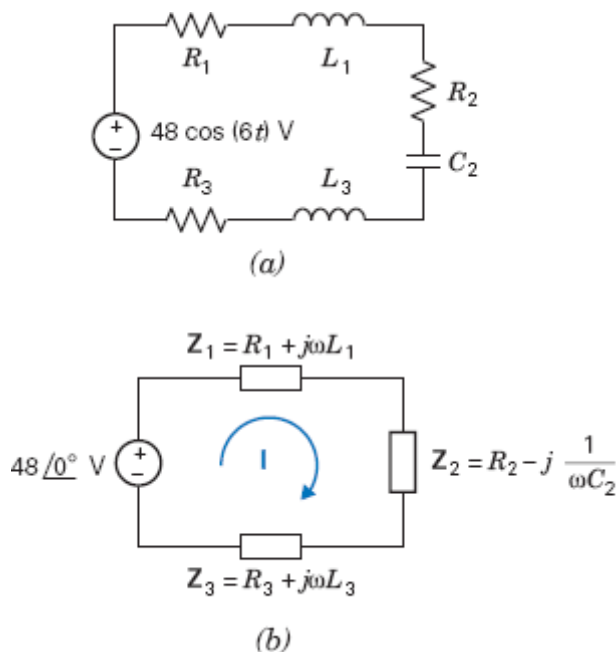



Figura P 11.6-10

P 11.6-11 O circuito da Figura P 11.6-11 é formado por uma fonte ligada a uma carga. A fonte fornece 14,12 W à carga com um fator de potência de 0,857 atrasado. Qual é o valor da resistência R e da indutância L?

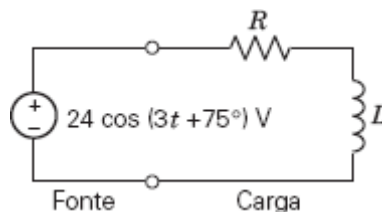



Figura P 11.6-11

P 11.6-12 O circuito da Figura P 11.6-12 é formado por uma fonte ligada a uma carga. Determine a impedância da carga e a potência complexa fornecida pela fonte à carga nas seguintes condições:

(a) A fonte fornece $14{,}12 + j8{,}47$ VA à carga A e $8{,}47 + j14{,}12$ VA à carga B.

(b) A fonte fornece $8{,}47 + j14{,}12$ VA à carga A e a impedância da carga B é $15 + j9\ \Omega$.

(c) A fonte fornece 14,12 W à carga A com um fator de potência de 0,857 atrasado e a impedância da carga B é $9 + j15\ \Omega$.

(d) A impedância da carga A é $15 + j9\ \Omega$ e a impedância da carga B é $9 + j15\ \Omega$.

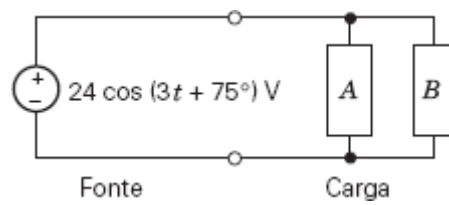



Figura P 11.6-12

P 11.6-13 A Figura P 11.6-13 mostra duas representações possíveis de uma carga elétrica. Uma das representações é usada quando o fator de potência da carga está atrasado e a outra quando o fator de potência está adiantado. Considere dois casos:

(a) Para a frequência angular $\omega = 4$ rad/s, o fator de potência da carga é $fp = 0{,}8$ atrasado.

(b) Para a frequência angular $\omega = 4$ rad/s, o fator de potência da carga é $fp = 0{,}8$ adiantado.

Em cada caso, escolha uma das duas representações da carga e determine o valor da capacitância C ou da indutância L para $R = 6\ \Omega$.

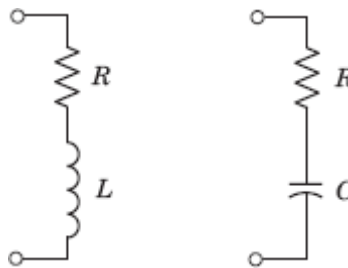



Figura P 11.6-13

P 11.6-14 A Figura P 11.6-14 mostra duas representações possíveis de uma carga elétrica. Uma das representações é usada quando o fator de potência da carga está atrasado e a outra quando o fator de potência está adiantado. Considere dois casos:

(a) Para a frequência angular $\omega = 4$ rad/s, o fator de potência da carga é $fp = 0{,}8$ atrasado.

(b) Para a frequência angular $\omega = 4$ rad/s, o fator de potência da carga é $fp = 0{,}8$ adiantado.

Em cada caso, escolha uma das duas representações da carga e determine o valor da capacitância C ou da indutância L para $R = 6\ \Omega$.

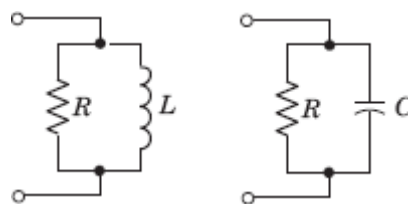



Figura P 11.6-14

P 11.6-15 A Figura P 11.6-15 mostra duas cargas elétricas. Expresse o fator de potência de cada carga em termos de ω, R e L.

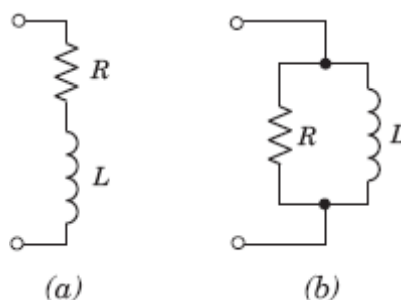



Figura P 11.6-15

P 11.6-16 A Figura P 11.6-16 mostra duas cargas elétricas. Expresse o fator de potência de cada carga em termos de ω, R e L.

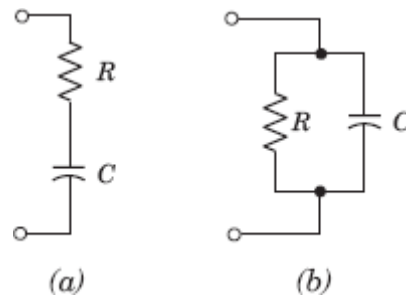



Figura P 11.6-16

P 11.6-17 A tensão da fonte de tensão do circuito da Figura P 11.6-17 é $\mathbf{V}_s = 24 \angle 30°$ V. Em consequência,

$$\mathbf{I}_1 = 3{,}13 \angle 25{,}4° \text{ A; } \mathbf{I}_2 = 1{,}99 \angle 52{,}9° \text{ A e } \mathbf{V}_4 = 8{,}88 \angle -10{,}6° \text{ V}$$

Determine (a) o fator de potência de $\mathbf{Z}_1$, (b) o fator de potência de $\mathbf{Z}_3$ e (c) o fator de potência de $\mathbf{Z}_4$. Em cada caso, indique se o fator de potência é adiantado ou atrasado.

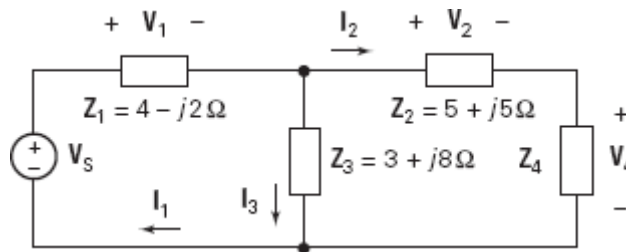



Figura P 11.6-17

P 11.6-18 A fonte de corrente do circuito da Figura P 11.6-18 fornece $131{,}16 - j36{,}048$ VA e a fonte de tensão fornece $64{,}2275 - 87{,}8481$ VA. Determine o valor das impedâncias $\mathbf{Z}_1$ e $\mathbf{Z}_2$.

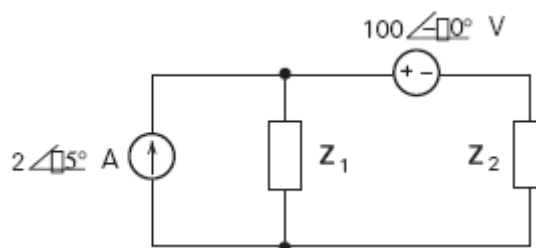



Figura P 11.6-18

Seção 11.7 O Princípio de Superposição de Potências

P 11.7-1 Determine a potência média absorvida pelo resistor de 2 Ω no circuito da Figura P 11.7-1.

Resposta: $P = 413$ W

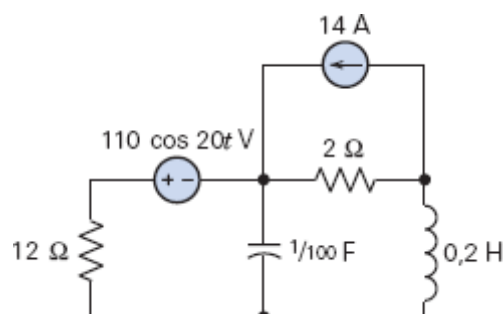



Figura P 11.7-1

P 11.7-2 Determine a potência média absorvida pelo resistor de 8 Ω no circuito da Figura P 11.7-2.

Resposta: $P = 22$ W

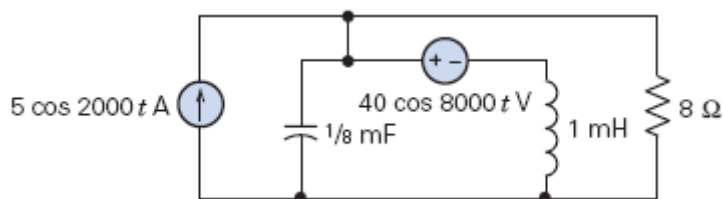



Figura P 11.7-2

P 11.7-3 No circuito da Figura P 11.7-3, determine a potência média absorvida pelo resistor R_1 e a potência média absorvida pelo resistor R_2. A tensão da fonte de tensão é $v_s = 10 + 10 \cos (5t + 40^o)$ V e a corrente da fonte de corrente é $i_s = 4 \cos (5t - 30^o)$ A.

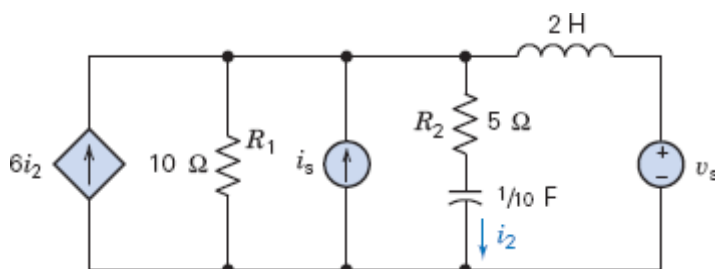



Figura P 11.7-3

P 11.7-4 No circuito da Figura P 11.7-4, determine o valor eficaz da tensão $\mathbf{v}_R$ do resistor e da tensão v_C do capacitor.

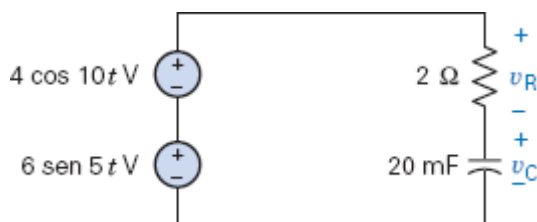



Figura P 11.7-4

Seção 11.8 O Teorema da Transferência Máxima de Potência

P 11.8-1 Determine o valor de R e L no circuito da Figura P 11.8-1 para que a maior potência possível seja transferida para carga.

Resposta: $R = 800$ Ω e $L = 1,6$ H

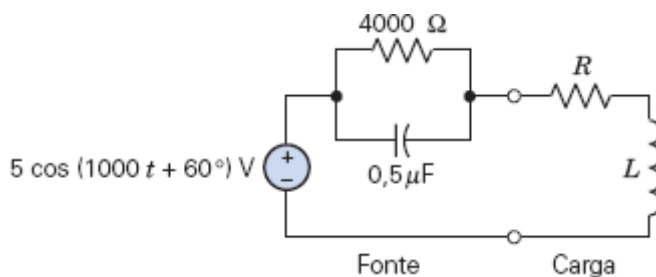



Figura P 11.8-1

P 11.8-2 É possível escolher R e L no circuito da Figura P 11.8-2 para que a potência média fornecida à carga seja 12 mW?

Resposta: Sim

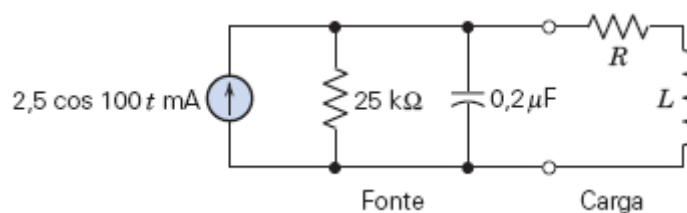



Figura P 11.8-2

P 11.8-3 O capacitor foi acrescentado à carga do circuito da Figura P 11.8-3 para maximizar a potência absorvida pelo resistor de 4000 Ω. Que valor de capacitância deve ser usado para atingir esse objetivo?

Resposta: 0,1 μF

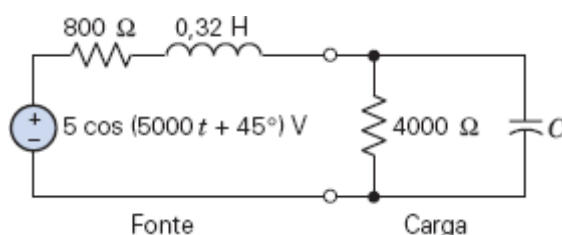



Figura P 11.8-3

P 11.8-4 Qual é o valor da potência média fornecida ao resistor de 2000 Ω no circuito da Figura P 11.8-4? A potência média fornecida ao resistor de 2000 Ω pode ser aumentada ajustando o valor da capacitância?

Resposta: 8 mW; não.

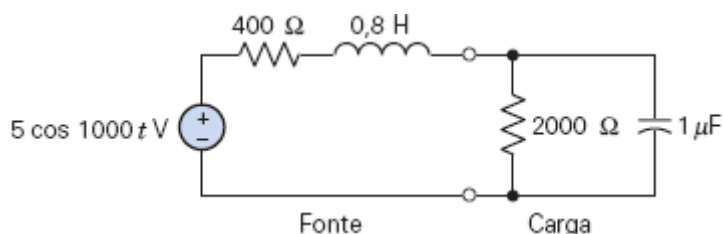



Figura P 11.8-4

P 11.8-5 Qual é o valor da resistência R na Figura P 11.8-5 que maximiza a potência média fornecida à carga?

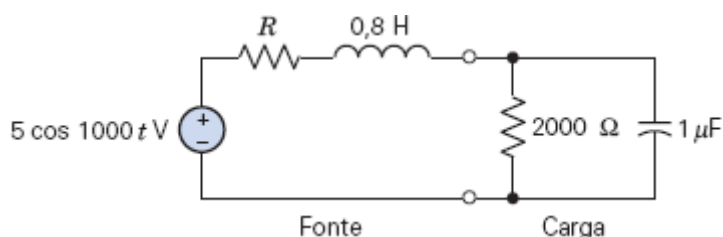



Figura P 11.8-5

Seção 11.9 Indutores Acoplados

P 11.9-1 Dois indutores magneticamente acoplados estão ligados da forma indicada na Figura P 11.9-1. Mostre que a indutância equivalente nos terminais a e b é $L_{ab} = L_1 + L_2 - 2M$.

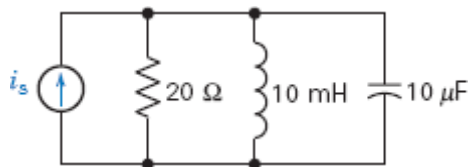



Figura P 11.9-1

P 11.9-2 Dois indutores magneticamente acoplados estão ligados da forma indicada na Figura P 11.9-2. Determine a indutância equivalente L_{ab}.

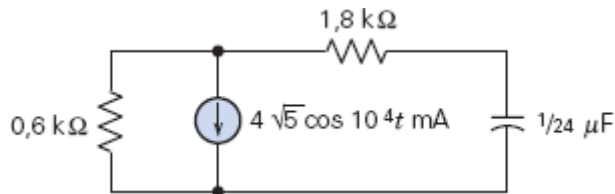



Figura P 11.9-2

P 11.9-3 A tensão da fonte do circuito da Figura P 11.9-3 é $v_s = 141{,}4 \cos 100t$ V. Determine $i_1(t)$ e $i_2(t)$.

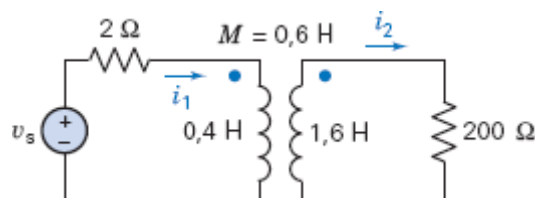



Figura P 11.9-3

P 11.9-4 A Figura P 11.9-4 mostra um circuito com indutância mútua. Determine a tensão $\mathbf{V}_2$ para $\omega = 5000$ rad/s.

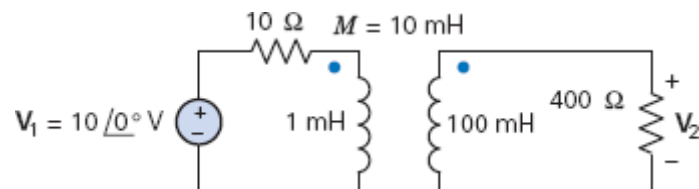



Figura P 11.9-4

P 11.9-5 Determine $v(t)$ no circuito da Figura P 11.9-5 para $v_s = 10 \cos 30t$ V.

Resposta: $v(t) = 23 \cos (30t + 9°)$ V.

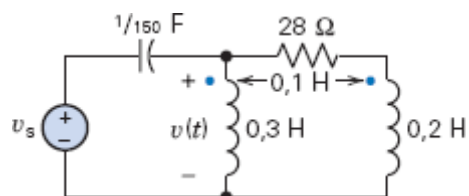



Figura P 11.9-5

P 11.9-6 Determine a energia total armazenada no circuito da Figura P 11.9-6 no instante $t = 0$ se o enrolamento secundário estiver (a) aberto; (b) em curto-circuito; (c) ligado aos terminais de uma resistência de 7 Ω.

Resposta: **(a)** 15 J; **(b)** 0 J; **(c)** 5 J

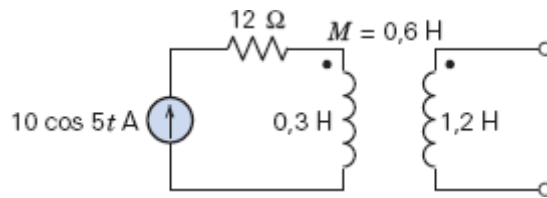



Figura P 11.9-6

P 11.9-7 Determine a impedância de entrada **Z** do circuito da Figura P 11.9-7 para ω = 1000 rad/s.

Resposta: $\mathbf{Z} = 8{,}4\ \angle 14^\circ\ \Omega$

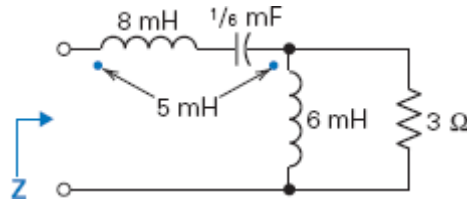



Figura P 11.9-7

P 11.9-8 A Figura P 11.9-8 mostra um circuito com três indutâncias mútuas. Determine a tensão $v(t)$ do capacitor para $v_s = 10 \cos 2t$ V, $M_1 = 2$ H e $M_2 = M_3 = 1$ H.

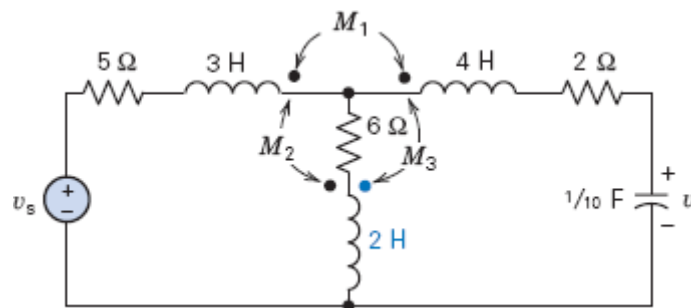



Figura P 11.9-8

P 11.9-9 As correntes $i_1(t)$ e $i_2(t)$ da Figura P 11.9-9 são correntes de malha. Represente o circuito no domínio da frequência e escreva as equações de malha.

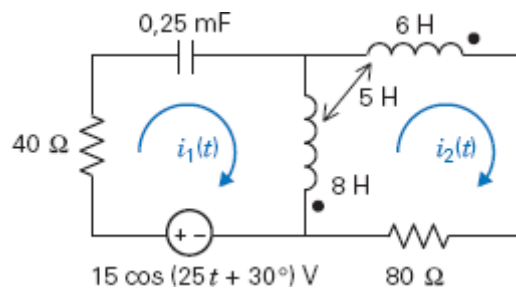



Figura P 11.9-9

P 11.9-10 Determine as correntes de malha no circuito da Figura P 11.9-10.

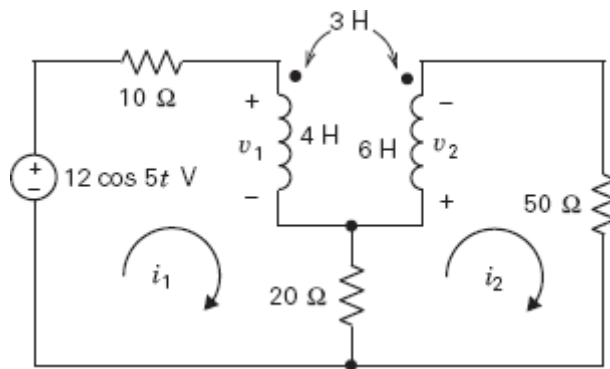



Figura P 11.9-10

P 11.9-11 Determine a tensão nos indutores, v_1, v_2, v_3 e v_4, no circuito da Figura P 11.9-11.

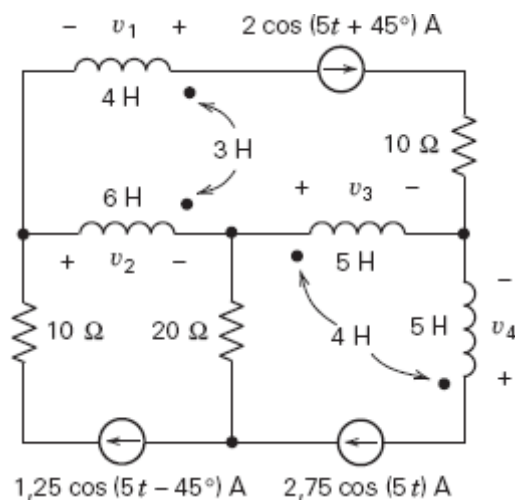



Figura P 11.9-11

P 11.9-12 A Figura P 11.9-12 mostra três circuitos semelhantes. Em cada um, a entrada é a tensão da fonte de tensão, $v_s(t)$. A saída é a tensão no indutor da direita, $v_o(t)$. Determine a tensão de saída $v_o(t)$ no regime estacionário para os três circuitos.

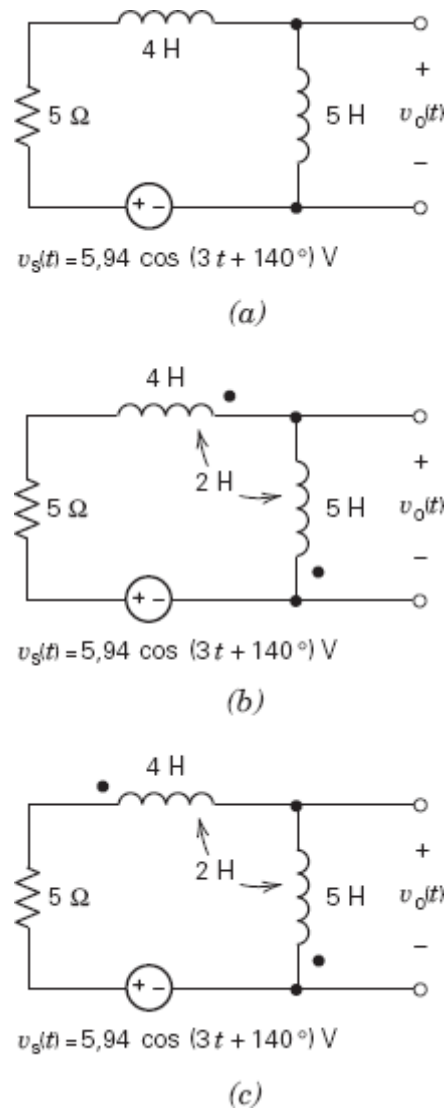



Figura P 11.9-12

P 11.9-13 A Figura P 11.9-13 mostra três circuitos semelhantes. Em cada um, a entrada é a tensão da fonte de tensão,

$$v_s(t) = 5{,}7 \cos(4t + 158^\circ) \text{ V}$$

A saída é a tensão no indutor da direita, $v_o(t)$. Determine a tensão de saída $v_o(t)$ no regime estacionário para os três circuitos.

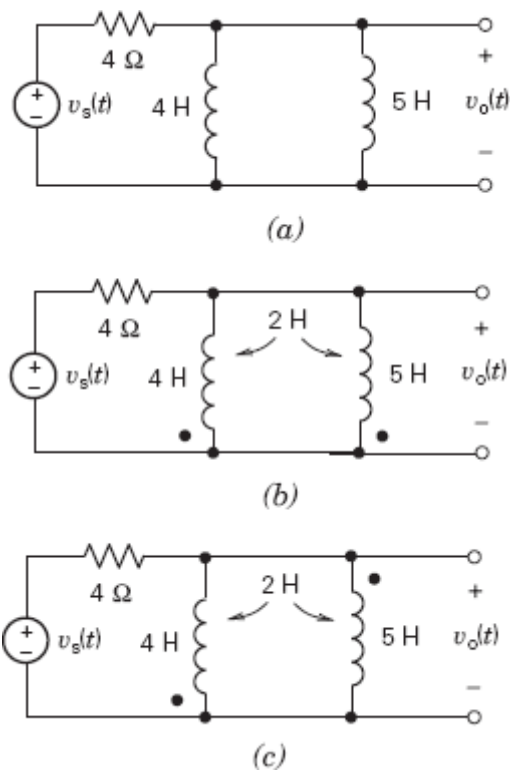



Figura P 11.9-13

P 11.9-14 O circuito da Figura P 11.9-14 está representado no domínio do tempo. Determine a tensão nos indutores, v_1 e v_2.

Resposta: $v_1 = 104{,}0 \cos(6t + 46{,}17°)$ V e $v_2 = 100{,}6 \cos(6t + 63{,}43°)$ V

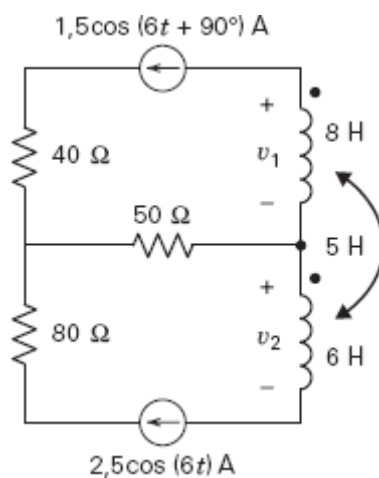



Figura P 11.9-14

P 11.9-15 O circuito da Figura P 11.9-15 está representado no domínio da frequência. (Por exemplo: $j30\ \Omega$ é a impedância associada à indutância mútua dos indutores acoplados.) Suponha que $\mathbf{V}(\omega) = 70\angle 0°$ V. Nesse caso, $\mathbf{I}_1(\omega) = B\angle\theta$ A e $\mathrm{I}_2(\omega) = 0{,}875\angle{-90°}$ A. Determine B e θ.

Resposta: $B = 1{,}75$ A e $\theta = -90°$

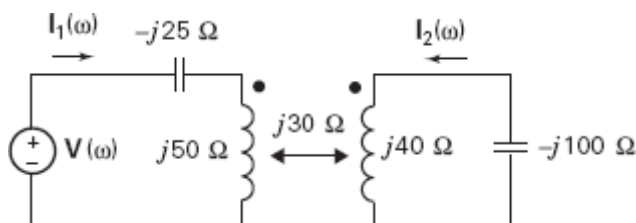



Figura P 11.9-15

P 11.9-16 Determine o valor das indutâncias L_1 e L_2 no circuito da Figura P 11.9-16, dado que

$$i(t) = 0{,}319 \cos(4t - 82{,}23°) \text{ A}$$

e

$$v(t) = 0{,}9285 \cos(4t - 62{,}20°) \text{ V.}$$

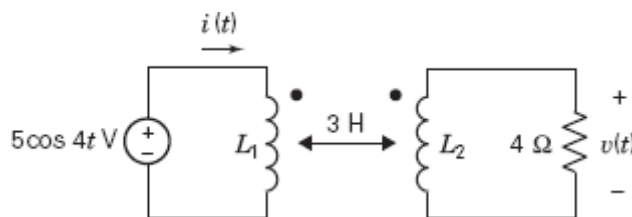



Figura P 11.9-16

P 11.9-17 Determine a potência complexa fornecida pela fonte no circuito da Figura P 11.9-17.

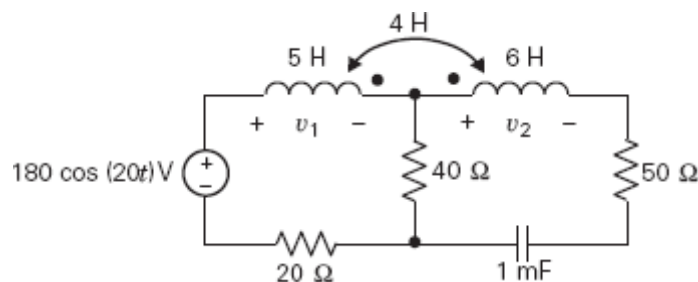



Figura P 11.9-17

P 11.9-18 A entrada do circuito da Figura P 11.9-18 é

$$v_s(t) = 12 \cos(5t) \text{ V}$$

A impedância da carga é $20 + j15\ \Omega$. Determine a potência complexa (*a*) fornecida pela fonte; (*b*) recebida pelo resistor de20 Ω; (*c*) recebida pelos indutores acoplados; (*d*) recebida pelacarga.

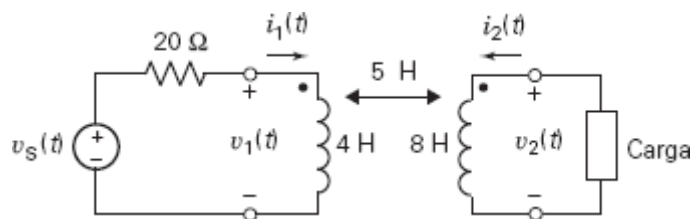



Figura P 11.9-18

P 11.9-19 A Figura P 11.9-19*a* mostra uma fonte ligada a uma carga de 160 Ω. Na Figura P 11.9-19*b*, um transformador ideal e um capacitor foram introduzidos entre a fonte e a carga.

(a) Determine a potência média fornecida à carga de 160 Ω no circuito da Figura P 11.9-19*a*.

(b) Determine n e C no circuito da Figura P 11.9-19*b* para que a potência fornecida à carga seja máxima.

(c) Determine a potência média fornecida à carga de 160 Ω no circuito da Figura P 11.9-19*b* se os valores de n e C forem os calculados no item (b).

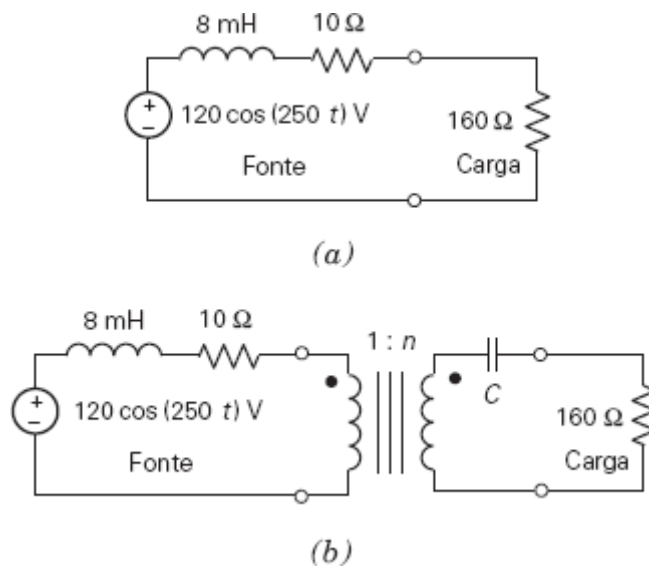



Figura P 11.9-19

Seção 11.10 O Transformador Ideal

P 11.10-1 Determine $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ no circuito da Figura P 11.10-1, para $n = 5$.

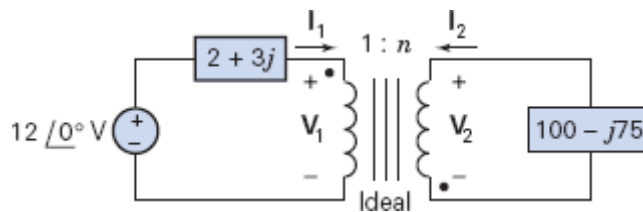



Figura P 11.10-1

P 11.10-2 A Figura P 11.10-2 mostra um circuito com um transformador.

(a) Determine a relação de espiras, n.

(b) Determine o valor de R_{ab}.

(c) Determine a corrente i fornecida pela fonte de tensão.

Resposta: **(a)** $n = 5$; **(b)** $R_{ab} = 400\ \Omega$; **(c)** $i = 25$ mA

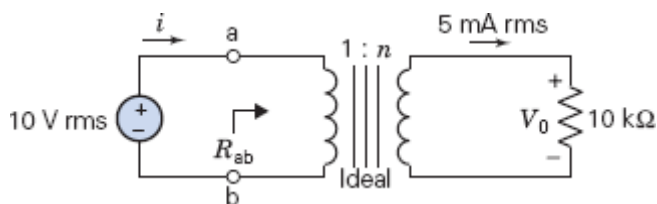



Figura P 11.10-2

P 11.10-3 Determine a tensão $\mathbf{V}_c$ no circuito da Figura P 11.10-3. Suponha que o transformador é ideal e que a relação de espiras é $n = 1/3$.

Resposta: $\mathbf{V}_c = 21{,}0\ \angle -105{,}3°$

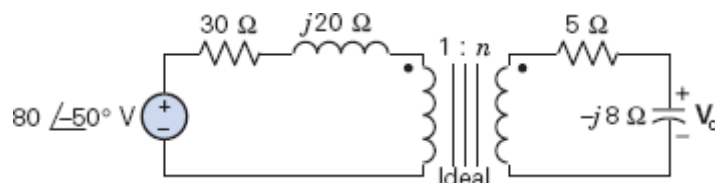



Figura P 11.10-3

P 11.10-4 No circuito da Figura P 11.10-4, que contém um transformador ideal, $v_s = 50 \cos 1000t$ V. Calcule $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$.

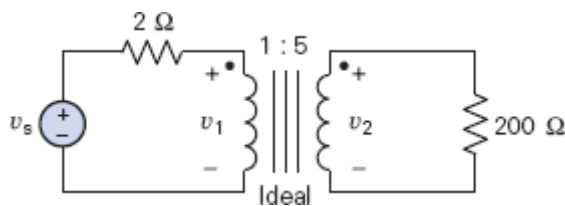



Figura P 11.10-4

P 11.10-5 A Figura P 11.10-5 mostra uma carga ligada a uma fonte por um transformador ideal. A entrada do circuito é

$$v_s(t) = 12 \cos (5t) \text{ V}$$

Determine

(a) O valor da relação de espiras e da indutância da carga L para que a potência transferida à carga seja a maior possível.

(b) A potência complexa fornecida pela fonte ao transformador nas condições do item (a).

(c) A potência complexa fornecida à carga pelo transformador nas condições do item (a).

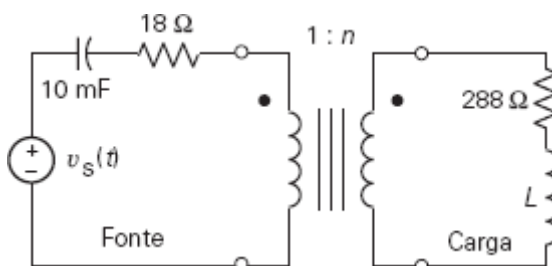



Figura P 11.10-5

P 11.10-6 Determine o circuito equivalente de Thévenin do ponto de vista dos terminais a e b do circuito da Figura P 11.10-6 para $v = 16 \cos 3t$ V.

Resposta: $V_{oc} = 12$ V e $Z_t = 3{,}75\ \Omega$.

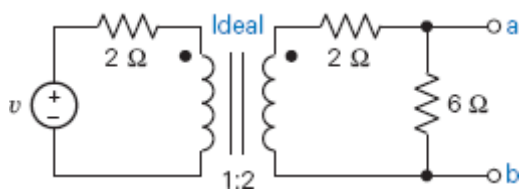



Figura P 11.10-6

P 11.10-7 Determine a impedância de entrada **Z** do circuito da Figura P 11.10-7.

Resposta: $\mathbf{Z} = 6\ \Omega$

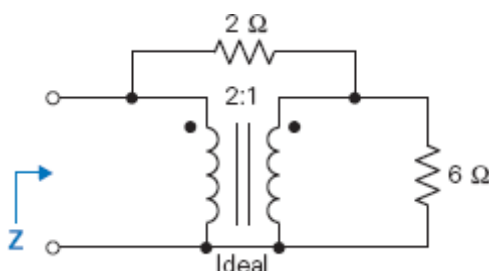



Figura P 11.10-7

P 11.10-8 Em áreas montanhosas de regiões pouco desenvolvidas, pequenos geradores hidrelétricos são usados para atender a várias residências (Mackay, 1990). Suponha que cada casa use um fogão elétrico e uma geladeira, como mostra a Figura P 11.10-8. O gerador está representado como $\mathbf{V}_s$ e trabalha na frequência de 60 Hz; $\mathbf{V}_2 = 230 \angle 0°$ V. Calcule a potência consumida por uma das residências se $n = 5$.

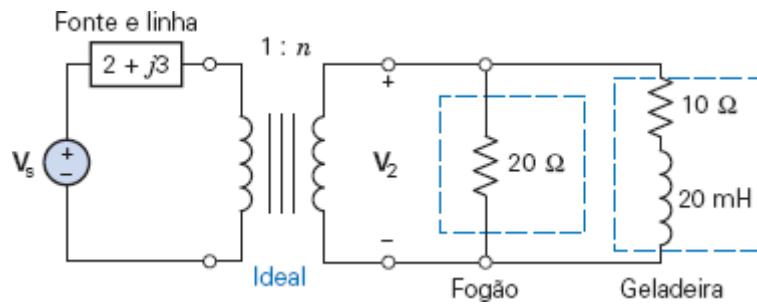



Figura P 11.10-8

P 11.10-9 A Figura P 11.10-9 mostra três circuitos semelhantes, nos quais $v_s(t) = 5 \cos(4t + 45°)$ V. Determine $v_2(t)$ para os três circuitos.

Respostas:

(a) $v_2(t) = 0$ V

(b) $v_2(t) = 1{,}656 \cos(4t + 39°)$ V

(c) $v_2(t) = 2{,}88 \cos(4t + 45°)$ V

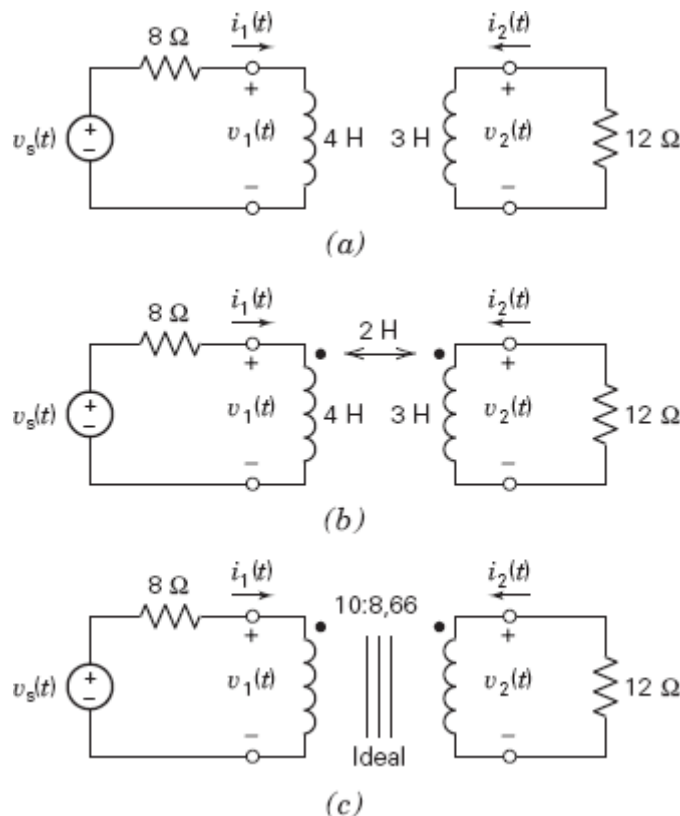



Figura P 11.10-9

P 11.10-10 Determine $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{I}_1$ no circuito da Figura P 11.10-10 para $n = 5$.

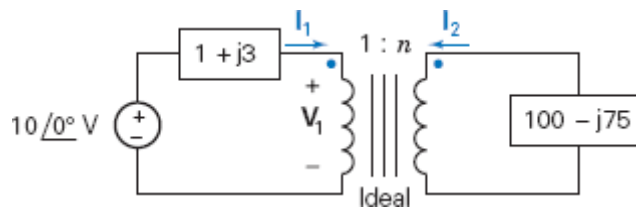



Figura P 11.10-10

P 11.10-11 Determine v_2 e i_2 no circuito da Figura P 11.10-11 para $n = 2$. Observe que i_2 não entra no terminal assinalado com um ponto.

Resposta: $v_2 = 0{,}68 \cos(10t + 47{,}7°)$ V

$i_2 = 0{,}34 \cos(10t + 42°)$ A

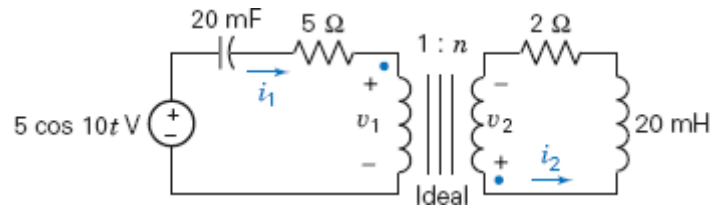



Figura P 11.10-11

P 11.10-12 O circuito da Figura P 11.10-12 está representado no domínio da frequência. Dada a corrente de linha $\mathbf{I}_{\text{Linha}} = 0{,}5761 \angle{-75{,}88°}$ A, determine P_{Fonte}, a potência média fornecida pela fonte, P_{Linha}, a potência média absorvida pela linha de transmissão e P_{Carga}, a potência média absorvida pela carga.

Sugestão: Use a conservação da potência (média) para verificar se a resposta está correta.

Resposta: $P_{\text{Fonte}} = 42{,}15$ A; $P_{\text{Linha}} = 0{,}6638$ W; $P_{\text{Carga}} = 41{,}49$ W

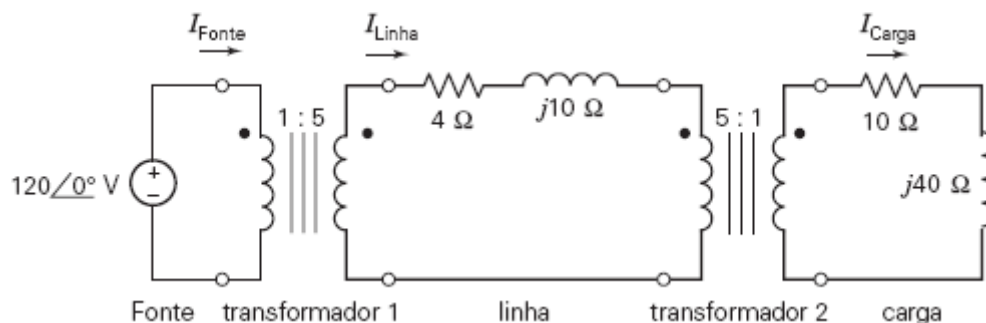



Figura P 11.10-12

P 11.10-13 O circuito da Figura P 11.10-13 está representado no domínio da frequência. Determine R e X, a parte real e a parte imaginária da impedância equivalente $\mathbf{Z}_{\text{eq}}$.

Resposta: $R = 180\ \Omega$ e $X = 110\ \Omega$

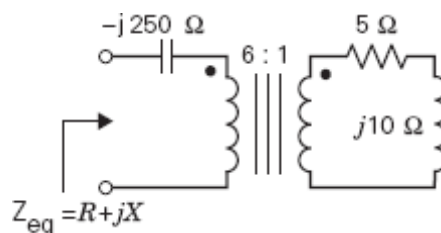



Figura P 11.10-13

P 11.10-14 A Figura P 11.10-14 mostra uma carga ligada a uma fonte por meio de um transformador ideal. Determine a potência complexa fornecida pela fonte ao transformador.

Resposta: $\mathbf{S} = 698{,}3 + j1745{,}7$ VA

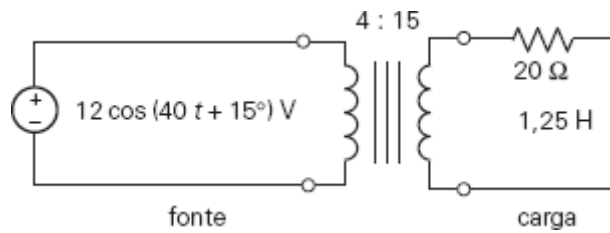



Figura P 11.10-14

Seção 11.11 **Como Podemos Testar . . . ?**

P 11.11-1 De acordo com uma análise em computador do circuito da Figura P 11.11-1, para

$$v_s(t) = 12 \cos(4t + 30^\circ) \text{ V}$$

as correntes de malha são dadas por

$$i_1(t) = 2{,}327 \cos(4t - 25{,}22^\circ) \text{ A}$$

e

$$i_2(t) = 1{,}229 \cos(4t - 11{,}19^\circ) \text{ A}$$

Verifique se os resultados da análise estão corretos comparando a potência média fornecida pela fonte de tensão com a soma das potências médias recebidas pelos outros componentes do circuito.

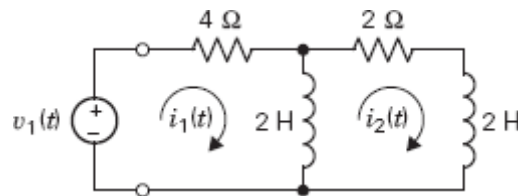



Figura P 11.11-1

P 11.11-2 De acordo com uma análise em computador do circuito da Figura P 11.11-2, para

$$v_s(t) = 12 \cos(4t + 30^\circ) \text{ V}$$

as correntes de malha são dadas por

$$i_1(t) = 1{,}647 \cos(4t - 17{,}92^\circ) \text{ A}$$

$$i_2(t) = 1{,}094 \cos(4t - 13{,}15^\circ) \text{ A}$$

Verifique se os resultados da análise estão corretos comparando a potência complexa fornecida pela fonte de tensão com a soma das potências complexas recebidas pelos outros componentes do circuito.

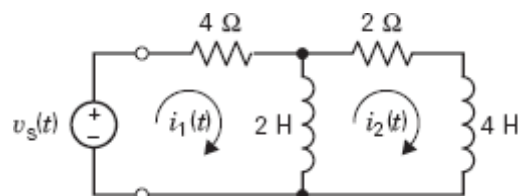



Figura P 11.11-2

P 11.11-3 De acordo com uma análise em computador do circuito da Figura P 11.11-3, para

$$v_s(t) = 12 \cos (4t + 30^\circ) \text{ V}$$

as correntes de malha são dadas por

$$i_1(t) = 1{,}001 \cos (4t - 47{,}01^\circ) \text{ A}$$

e

$$i_2(t) = 0{,}4243 \cos (4t - 15{,}00^\circ) \text{ A}$$

Teste os resultados da análise verificando se as equações que descrevem as correntes e tensões em indutores acoplados são satisfeitas.

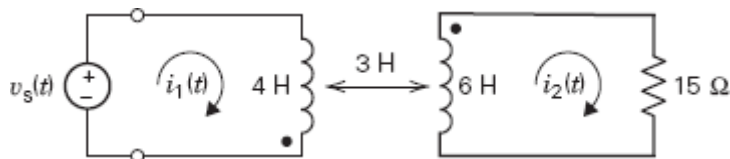



Figura P 11.11-3

P 11.11-4 De acordo com uma análise em computador do circuito da Figura P 11.11-4, para

$$v_s(t) = 12 \cos (4t + 30^\circ) \text{ V}$$

as correntes de malha são dadas por

$$i_1(t) = 25{,}6 \cos (4t + 30^\circ) \text{ A}$$

e

$$i_2(t) = 64 \cos (4t + 30^\circ) \text{ A}$$

Teste os resultados da análise verificando se as equações que descrevem as correntes e tensões em transformadores ideais são satisfeitas.

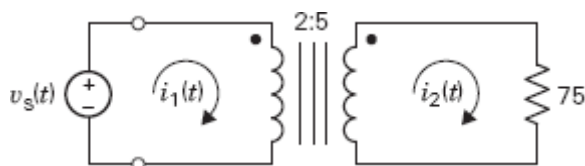



Figura P 11.11-4

Problemas com o PSpice

PS 11-1 A entrada do circuito da Figura PS 11-1 é a tensão da fonte,

$$v_s(t) = 7{,}5 \text{ sen } (5t + 15^\circ) \text{ V}$$

A saída é a tensão do resistor de 4 Ω, $v_o(t)$. Use o programa PSpice para plotar as tensões de entrada e saída.

Sugestão: Represente a fonte de tensão usando o módulo VSIN do PSpice.

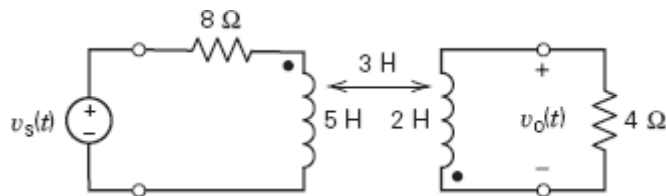



Figura PS 11-1

PS 11-2 A entrada do circuito da Figura PS 11-1 é a tensão da fonte,

$$v_s(t) = 7{,}5 \text{ sen } (5t + 15°) = 7{,}5 \cos (5t - 75°) \text{ V}$$

A saída é a tensão do resistor de 4 Ω, $v_o(t)$. Use o programa PSpice para determinar a potência média fornecida aos indutores acoplados.

Sugestão: Represente a fonte de tensão usando o módulo VAC do PSpice. Use os módulos IPRINT e VPRINT para medir a corrente e a tensão nos indutores.

PS 11-3 A entrada do circuito da Figura PS 11-3 é a tensão da fonte de tensão,

$$v_s(t) = 48 \cos (4t + 114°) \text{ V}$$

A saída é a tensão do resistor de 9 Ω, $v_o(t)$. Use o programa PSpice para determinar a potência média fornecida ao transformador.

Sugestão: Represente a fonte de tensão usando o módulo VAC do PSpice.

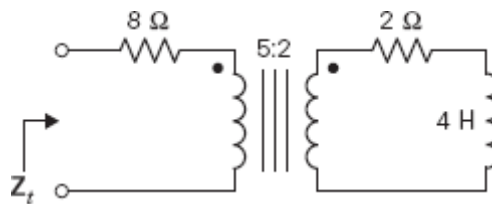



Figura PS 11-3

PS 11-4 Determine o valor da impedância de entrada, $\mathbf{Z}_t$, do circuito da Figura PS 11-4 para uma frequência $\omega = 4$ rad/s.

Sugestão: Ligue uma fonte de corrente aos terminais do circuito. Meça a tensão entre os terminais da fonte de corrente. O valor da impedância é igual à razão entre a tensão e a corrente.

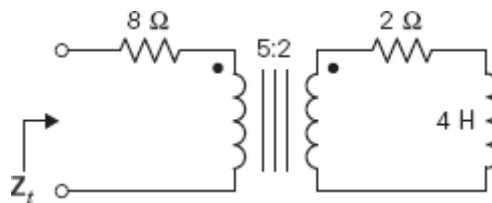



Figura PS 11-4

Problemas de Projeto

PP 11-1 Um motor de indução de 100 kW, como o que aparece na Figura PP 11-1, está recebendo 100 kW com um fator de potência de 0,8 atrasado. Determine a potência aparente adicional, em kVA, que se torna disponível quando o fator de potência é melhorado para (a) 0,95 atrasado e (b) 1,0. (c) Determine a potência reativa, em kVAR, que deve ser fornecida por um capacitor em paralelo com a alimentação do motor para que as condições dos itens (a) e (b) sejam satisfeitas. (d) Determine a razão entre a potência adicional liberada em kVA e a potência reativa do

capacitor em kVAR para os itens (a) e (b). Monte uma tabela com os resultados do problema para os dois novos valores do fator de potência.

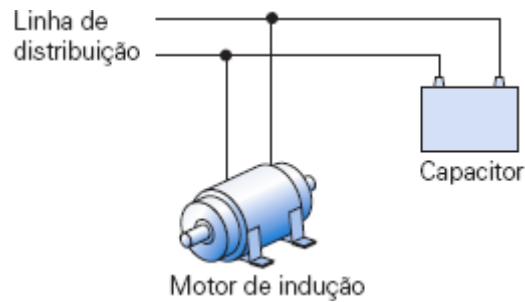



Figura PP 11-1 Motor de indução com um capacitor em paralelo.

PP 11-2 Duas cargas são ligadas em paralelo e alimentadas por uma fonte de 7,2 kV rms, 60 Hz. A primeira carga é de 50 kVA com um fator de potência atrasado de 0,9 e a segunda carga é de 45 kW com um fator de potência atrasado de 0,91. Determine a potência reativa do motor em kVAR e a capacitância necessária para corrigir o fator de potência para 0,97 atrasado.

Resposta: $C = 1{,}01\ \mu$F.

PP 11-3

(a) Determine o valor de impedância $\mathbf{Z}_{ab}$ para o qual uma carga ligada aos terminais a e b do circuito da Figura PP 11-3 absorve a maior potência possível.

(b) Determine a potência absorvida pela carga nas condições do item (a).

(c) Proponha um modelo para a carga e indique o valor dos componentes.

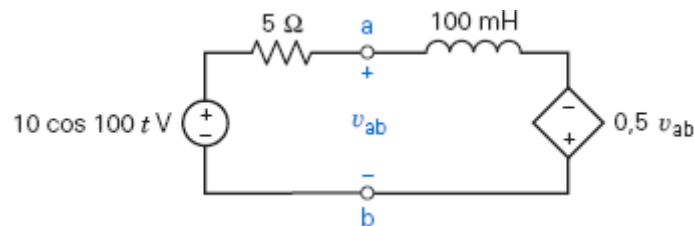



Figura PP 11-3

PP 11-4 Determine a relação de espiras n para a qual a maior potência possível é absorvida pelo resistor R no circuito da Figura PP 11-4. Determine dois valores de n, um para $R = 4\ \Omega$ e outro para $R = 8\ \Omega$.

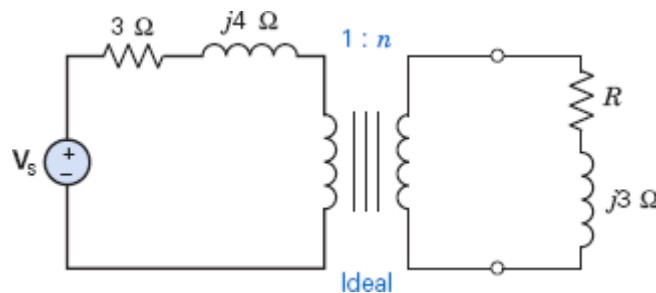



Figura PP 11-4

PP 11-5 Um dos amplificadores de um rádio de ondas curtas funciona na frequência de 100 kHz. A carga $\mathbf{Z}_2$ está ligada à fonte através de um transformador ideal, como mostra a Figura PP 11-5. A carga é uma associação em série de uma resistência de 10 Ω com uma indutância de 10 μH. A impedância interna da fonte, $\mathbf{Z}_s$, pode ser modelada por uma resistência de 1 Ω em série com uma indutância de 1 μH.

(a) Escolha um número inteiro n tal que a energia fornecida à carga seja a maior possível. Calcule $\mathbf{I}_2$ e a energia fornecida à carga.

(b) Determine o valor do capacitor C que deve ser ligado em série com $\mathbf{Z}_2$ para aumentar o máximo possível a energia fornecida à carga.

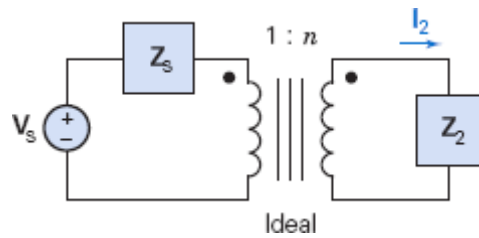



Figura PP 11-5

PP 11-6 As novas lâmpadas eletrônicas usam um oscilador senoidal de radiofrequência e uma bobina para excitar uma nuvem de vapor de mercúrio, como mostra a Figura PP 11-6*a*. O vapor de mercúrio emite radiação ultravioleta que incide em um revestimento de fósforo. O revestimento, por sua vez, emite luz visível. A Figura PP 11-6*b* mostra um modelo do circuito de uma lâmpada eletrônica. A capacitância C e a resistência R dependem da geometria da lâmpada e do tipo de fósforo. Determine R e C para que a maior potência possível seja fornecida a R, que está relacionada ao revestimento de fósforo (Adler, 1992). A frequência de operação do circuito é $\omega_0 = 10^7$ rad/s.

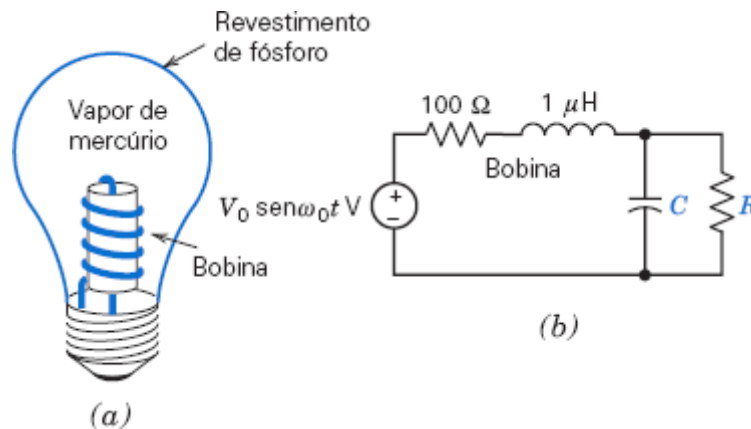



Figura PP 11-6 Lâmpada eletrônica.

CAPÍTULO 12 Circuitos Trifásicos

NESTE CAPÍTULO

12.1 *Introdução*

Neste capítulo vamos começar a estudar os *circuitos trifásicos*. Esse tipo de circuito pode ser dividido em três partes: uma fonte trifásica, uma carga trifásica e uma linha de transmissão. A fonte trifásica pode ser formada por três fontes de tensão senoidais ligadas em Y ou por três fontes de tensão senoidais ligadas em Δ. Os componentes que constituem a carga também podem ser ligados para formar um Y ou um Δ. A linha de transmissão é usada para ligar a fonte à carga e pode ter três ou quatro fios. Os circuitos trifásicos recebem nomes diferentes dependendo do modo como a fonte e a carga estão ligados. O circuito da Figura 12.3-1, por exemplo, que possui uma fonte ligada em Y e uma carga ligada em Y, é chamado de circuito Y-Y. O circuito da Figura 12.5-1, que possui uma fonte ligada em Y e uma carga ligada em Δ, é chamado de circuito Y-Δ.

Observe que o circuito Y-Y da Figura 12.3-1 foi representado no domínio da frequência, usando impedâncias e fasores. Isso é possível porque as três fontes de tensão que formam uma fonte trifásica são fontes senoidais com a *mesma frequência*. A análise de circuitos trifásicos usando fasores e impedâncias determina a *resposta estacionária* do circuito.

Antes de começar nossa análise dos circuitos trifásicos, vamos lembrar por que é vantajoso usar fasores para determinar a resposta estacionária de circuitos lineares com entradas senoidais. Os circuitos que contêm capacitores e/ou indutores são representados por *equações diferenciais* no domínio do tempo. Podemos resolver essas equações diferenciais, mas isso às vezes é muito trabalhoso. Impedâncias e fasores são usados para representar circuitos senoidais no domínio da frequência. No domínio da frequência, os circuitos lineares são representados por *equações algébricas*. Essas equações algébricas envolvem números complexos, mas são mais fáceis de resolver que equações diferenciais. A solução das equações algébricas fornece o fasor correspondente à tensão ou corrente de saída. Sabemos que a tensão ou corrente estacionária de saída é senoidal e tem a mesma frequência que a senoide de entrada. O módulo e fase do fasor correspondente à

tensão ou corrente de saída são iguais, respectivamente, à amplitude e ao ângulo de fase da senoide que constitui o sinal de saída no domínio do tempo.

Estaremos particularmente interessados na potência que uma fonte trifásica fornece a uma carga trifásica. A Tabela 12.1-1 mostra as equações usadas para calcular a potência fornecida a um componente quando a tensão e a corrente senoidal do componente estão de acordo com a convenção passiva. A Tabela 12.1-1 também mostra as equações da tensão e da corrente senoidal do componente no domínio do tempo. Na tabela, V_m e I_m são as amplitudes da tensão e da corrente senoidal, enquanto V_{rms} e I_{rms} são os valores eficazes correspondentes da tensão e da corrente. Observe que as expressões para a potência em termos de V_{rms} e I_{rms} são mais simples que as expressões correspondentes em termos de V_m e I_m, enquanto as expressões para a tensão e a corrente senoidal em termos de V_m e I_m são mais simples que as expressões correspondentes em termos de V_{rms} e I_{rms}. Por isso, quando os engenheiros estão interessados principalmente na potência, costumam usar V_{rms} e I_{rms} e quando estão interessados principalmente nas tensões e correntes senoidais, costumam usar V_m e I_m. Neste capítulo, estamos interessados principalmente na potência e, portanto, vamos usar valores eficazes.

Tabela 12.1-1 Relações de Potência no Domínio da Frequência

GRANDEZA	RELAÇÃO USANDO VALORES DE PICO	RELAÇÃO USANDO VALORES RMS	UNIDADE
Tensão do componente, $v(t)$	$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_V)$	$v(t) = V_{rms}\sqrt{2}\cos(\omega t + \theta_V)$	V
Corrente do componente, $i(t)$	$i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta_I)$	$i(t) = I_{rms}\sqrt{2}\cos(\omega t + \theta_I)$	A
Potência complexa, **S**	$\mathbf{S} = \frac{V_m I_m}{2}\cos(\theta_V - \theta_I) + j\frac{V_m I_m}{2}\operatorname{sen}(\theta_V - \theta_I)$	$\mathbf{S} = V_{rms} I_{rms}\cos(\theta_V - \theta_I) + jV_{rms} I_{rms}\operatorname{sen}(\theta_V - \theta_I)$	VA
Potência aparente, $\lvert\mathbf{S}\rvert$	$\lvert\mathbf{S}\rvert = \frac{V_m I_m}{2}$	$\lvert\mathbf{S}\rvert = V_{rms} I_{rms}$	VA
Potência média, P	$P = \frac{V_m I_m}{2}\cos(\theta_V - \theta_I)$	$P = V_{rms} I_{rms}\cos(\theta_V - \theta_I)$	W
Potência reativa, Q	$Q = \frac{V_m I_m}{2}\operatorname{sen}(\theta_V - \theta_I)$	$Q = V_{rms} I_{rms}\operatorname{sen}(\theta_V - \theta_I)$	VAR

12.2 *Tensões Trifásicas*

A geração e a transmissão de energia elétrica são mais eficientes em sistemas polifásicos que usam combinações de duas, três ou mais tensões senoidais. Os circuitos e máquinas polifásicos apresentam outras vantagens. Uma delas é que a potência transmitida nos circuitos trifásicos é constante, o que não acontece nos circuitos monofásicos. Além disso, os motores trifásicos funcionam muito melhor que os motores monofásicos, tanto na partida quanto no regime estacionário. Quase todos os sistemas polifásicos utilizam três tensões equilibradas, de mesma amplitude, defasadas de 360º/3 = 120º.

Um gerador de CA simples é constituído por um ímã rotativo e um enrolamento estacionário. As espiras do enrolamento estão distribuídas na periferia da máquina. A tensão gerada em cada espira do enrolamento está ligeiramente defasada em relação à tensão gerada no enrolamento vizinho porque é atravessada por uma densidade máxima de fluxo magnético pouco antes ou pouco depois que a espira vizinha. A tensão induzida no primeiro enrolamento é chamada de $v_{aa'}$.

Se o primeiro enrolamento continuasse ao longo de toda a máquina, as tensões geradas em pontos diametralmente opostos estariam defasadas de 180º e se cancelariam mutuamente, impedindo que o gerador produzisse energia. Por esse motivo, cada enrolamento ocupa no máximo um terço da periferia; o resto da periferia é destinado a outros dois enrolamentos, usados para gerar tensões semelhantes. Uma versão simplificada de três enrolamentos em torno da periferia de um tambor cilíndrico aparece na Figura 12.2-1*a*. As três senoides (a geometria dos enrolamentos e a forma do ímã são escolhidas para que as tensões sejam

senoidais) geradas por três enrolamentos semelhantes aparecem na Figura 12.2-1*b*. Definindo $v_{aa'}$ como o potencial do terminal a em relação ao terminal a′, podemos descrever as tensões da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
v_{aa'} &= V_m \cos \omega t \\
v_{bb'} &= V_m \cos (\omega t - 120^\circ) \\
v_{cc'} &= V_m \cos (\omega t - 240^\circ)
\end{aligned}
\tag{12.2-1}
$$

em que V_m é a amplitude da tensão.

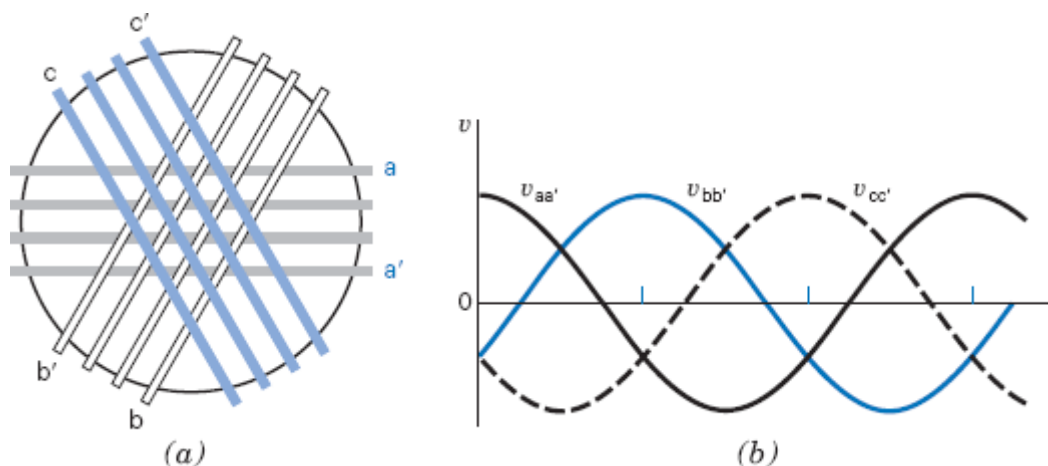



FIGURA 12.2-1 (*a*) Os três enrolamentos de um tambor cilíndrico (visto de perfil) usado para gerar uma tensão trifásica. (*b*) Tensões geradas pelos três enrolamentos.

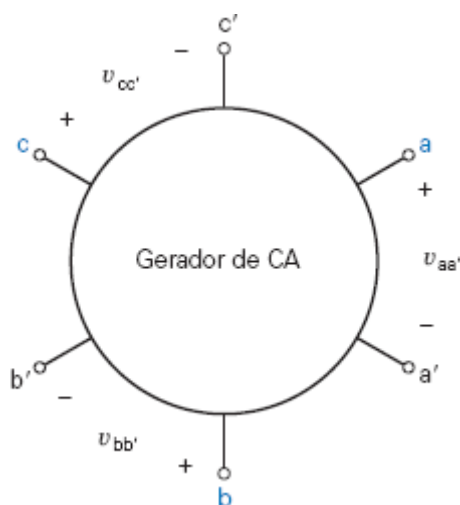



FIGURA 12.2-2 Gerador com seis terminais.

Os **circuitos trifásicos** são usados para gerar, distribuir e utilizar energia na forma de três tensões de mesma amplitude, defasadas de 120º.

As três partes de um sistema trifásico são chamadas de *fases*. Como a tensão da fase *aa′* chega primeiro ao valor máximo, seguida pela fase *bb′* e pela fase *cc′*, dizemos que a rotação de fases é *abc*. Trata-se de uma convenção arbitrária; em qualquer gerador, a rotação de fases pode ser invertida invertendo o sentido de rotação. A Figura 12.2-2 mostra um gerador trifásico de seis terminais.

Usando a notação fasorial, podemos escrever a Eq. 12.2-1 na forma

$$
\begin{aligned}
\mathbf{V}_{aa'} &= V_m \angle 0^\circ \\
\mathbf{V}_{bb'} &= V_m \angle -120^\circ \\
\mathbf{V}_{cc'} &= V_m \angle -240^\circ = V_m \angle 120^\circ
\end{aligned}
\tag{12.2-2}
$$

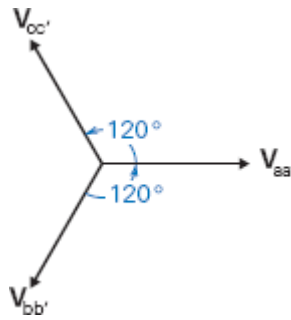



FIGURA 12.2-3 Representação fasorial da sequência de fases positiva (abc) das tensões em um sistema trifásico equilibrado.

Dizemos que as três tensões são *tensões equilibradas* porque têm a mesma amplitude, a mesma frequência e estão defasadas de exatamente 120º. A Figura 12.2-3 mostra o diagrama fasorial de tensões trifásicas equilibradas. Examinando a Figura 12.2-3, vemos que

$$\mathbf{V}_{aa'} + \mathbf{V}_{bb'} + \mathbf{V}_{cc'} = 0 \qquad (12.2\text{-}3)$$

Para simplificar a notação, daqui em diante vamos chamar as três tensões de $\mathbf{V}_a$, $\mathbf{V}_b$ e $\mathbf{V}_c$, que correspondem, respectivamente, a $\mathbf{V}_{aa'}$, $\mathbf{V}_{bb'}$ e $\mathbf{V}_{cc'}$.

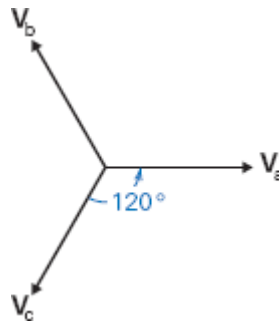



FIGURA 12.2-4 Representação fasorial da sequência de fases negativa (acb) das tensões em um sistema trifásico equilibrado.

A sequência de fases positiva é *abc*, como mostra a Figura 12.2-3. A sequência *acb*, representada na Figura 12.2-4, é chamada de sequência de fases negativa.

A tensão de fase da ligação em Y muitas vezes é escrita na forma

$$\mathbf{V}_a = V_m \angle 0°$$

em que V_m é a amplitude da tensão de fase.

Examinando o gerador da Figura 12.2-2, vemos que existem seis terminais e três tensões, v_a, v_b e v_c. Supondo que cada enrolamento equivale a uma fonte de tensão ideal, existem duas formas de ligar as três fontes, como mostra a Figura 12.2-5. O terminal comum da ligação em Y é chamado de *terminal neutro* e representado pela letra *n*. O terminal neutro pode ou não estar disponível para ligações ao circuito externo. Quando as cargas das três fases estão perfeitamente equilibradas, a corrente no fio neutro é zero; por isso, muitas vezes ele pode ser dispensado.

A ligação da Figura 12.2-5*a* é chamada de ligação em Y; a ligação da Figura 12.2-5*b* é chamada de ligação em Δ. Na ligação em Y, os terminais *a′*, *b′* e *c′* são unidos para formar o terminal neutro. Nesse caso, a tensão entre duas linhas, *a* e *b*, por exemplo, das fontes ligadas em Y é dada por

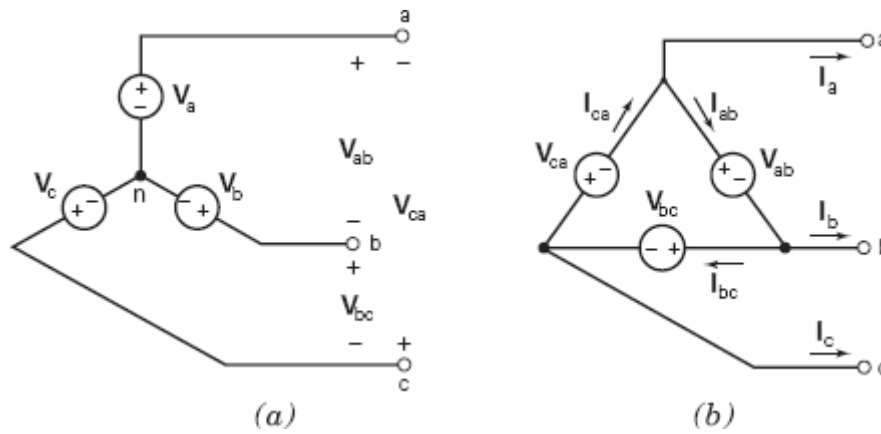



FIGURA 12.2-5 (a) Fontes ligadas em Y. As tensões $\mathbf{V}_a$, $\mathbf{V}_b$ e $\mathbf{V}_c$ são chamadas de tensões de fase e as tensões $\mathbf{V}_{ab}$, $\mathbf{V}_{bc}$ e $\mathbf{V}_{ca}$ são chamadas de tensões de linha. (b) Fontes ligadas em Δ. As correntes $\mathbf{I}_a$, $\mathbf{I}_b$ e $\mathbf{I}_c$ são chamadas de correntes de linha e as correntes $\mathbf{I}_{ab}$, $\mathbf{I}_{bc}$ e $\mathbf{I}_{ca}$ são chamadas de correntes de fase.

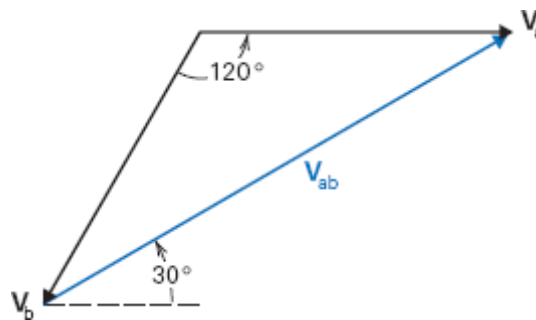



FIGURA 12.2-6 Tensão de linha $\mathbf{V}_{ab}$ em uma fonte ligada em Y.

$$\mathbf{V}_{ab} = \mathbf{V}_a - \mathbf{V}_b \tag{12.2-4}$$

como é fácil ver examinando a Figura 12.2-5*a*. Como $\mathbf{V}_a = V_m \angle 0°$ e $\mathbf{V}_b = V_m \angle -120°$, temos

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{ab} &= V_m - V_m(-0,5 - j\,0,866) \\ &= V_m(1,5 + j\,0,866) \\ &= \sqrt{3}\, V_m \angle 30°\end{aligned} \tag{12.2-5}$$

Essa relação também pode ser vista no diagrama fasorial da Figura 12.2-6. Analogamente,

$$\mathbf{V}_{bc} = \sqrt{3}\, V_m \angle -90° \tag{12.2-6}$$

e

$$\mathbf{V}_{ca} = \sqrt{3}\, V_m \angle -210° \tag{12.2-7}$$

Assim, nas ligações em Y, a tensão entre linhas (ou seja, a *tensão de linha*) é igual a $\sqrt{3}$ vezes a tensão entre linha e neutro (ou seja, a *tensão de fase*) e está defasada de 30º em relação a essa tensão. A corrente de linha é igual à corrente de fase.

EXERCÍCIO 12.2-1 A tensão de uma das fontes de tensão de um sistema trifásico com ligação em Y é 120 $\angle -240°$ V rms. Determine a tensão de linha $\mathbf{V}_{bc}$.

Resposta: 207,8 $\angle -90°$ V rms

12.3 *O Circuito Y-Y*

Considere o circuito Y-Y da Figura 12.3-1. Esse circuito trifásico tem três partes: uma fonte trifásica, uma carga trifásica e uma linha de transmissão. A fonte trifásica é formada por três fontes de tensão senoidais ligadas em Y. As impedâncias que constituem a carga também são ligadas em Y. A linha de transmissão usada para ligar a fonte à carga é formada por quatro fios, incluindo o fio que liga o neutro da fonte ao neutro da carga. A Figura 12.3-2 mostra outro circuito Y-Y. Na Figura 12.3-2, a fonte trifásica está ligada à carga por apenas três fios, já que o fio que liga os dois neutros foi omitido. Para distinguir os dois circuitos, chamamos o circuito da Figura 12.3-1 de circuito Y-Y de quatro fios e o circuito da Figura 12.3-2 de circuito Y-Y de três fios.

É relativamente fácil analisar o circuito Y-Y de quatro fios da Figura 12.3-1. Cada impedância da carga trifásica está ligada diretamente aos terminais de uma das fontes de tensão da fonte trifásica. Assim, a tensão aplicada à impedância é conhecida e as correntes de linha podem ser facilmente calculadas:

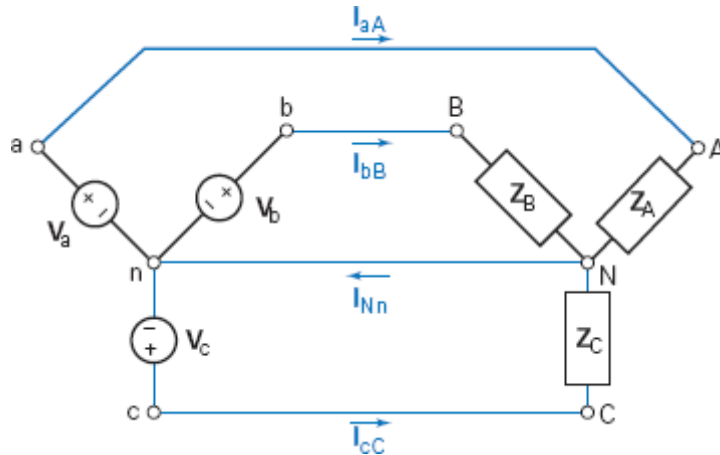



FIGURA 12.3-1 Circuito Y-Y de quatro fios.

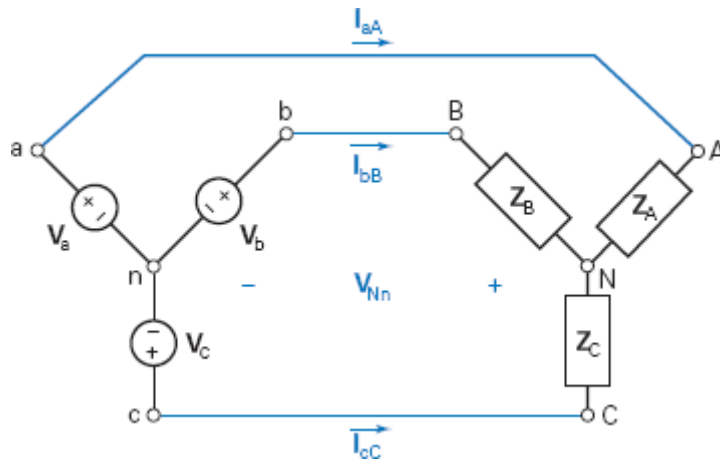



FIGURA 12.3-2 Circuito Y-Y de três fios.

$$\mathbf{I}_{aA} = \frac{\mathbf{V}_a}{\mathbf{Z}_A}, \quad \mathbf{I}_{bB} = \frac{\mathbf{V}_b}{\mathbf{Z}_B} \quad \text{e} \quad \mathbf{I}_{cC} = \frac{\mathbf{V}_c}{\mathbf{Z}_C} \qquad (12.3\text{-}1)$$

A corrente no fio que liga o nó neutro da fonte ao nó neutro da carga é

$$\mathbf{I}_{Nn} = \mathbf{I}_{aA} + \mathbf{I}_{bB} + \mathbf{I}_{cC} = \frac{\mathbf{V}_a}{\mathbf{Z}_A} + \frac{\mathbf{V}_b}{\mathbf{Z}_B} + \frac{\mathbf{V}_c}{\mathbf{Z}_C} \qquad (12.3\text{-}2)$$

A potência média fornecida pela fonte trifásica à carga trifásica pode ser obtida somando as potências médias fornecidas às três impedâncias da carga:

$$P = P_A + P_B + P_C \qquad (12.3\text{-}3)$$

em que, por exemplo, P_A é a potência média absorvida por $\mathbf{Z}_A$. Conhecendo $\mathbf{I}_{aA}$, é fácil calcular P_A.

Por conveniência, vamos supor que as tensões de fase da fonte ligada em Y são

$$\mathbf{V}_a = V_p \angle 0° \text{ V rms}; \quad \mathbf{V}_b = V_p \angle -120° \text{ V rms} \quad \text{e} \quad \mathbf{V}_c = V_p \angle 120° \text{ V rms}$$

Observe que estamos usando valores eficazes, já que a unidade de V_p é o V rms.

Se $\mathbf{Z}_A = \mathbf{Z}_B = \mathbf{Z}_C = \mathbf{Z} = Z\angle\theta$, dizemos que se trata de uma *carga equilibrada*. É mais fácil analisar os circuitos trifásicos com uma carga equilibrada que os circuitos com uma carga desequilibrada. As correntes de linha em um circuito Y-Y de quatro fios com uma carga equilibrada são

$$\mathbf{I}_{aA} = \frac{\mathbf{V}_a}{\mathbf{Z}} = \frac{V_p \angle 0°}{Z\angle\theta}, \quad \mathbf{I}_{bB} = \frac{\mathbf{V}_b}{\mathbf{Z}} = \frac{V_p \angle -120°}{Z\angle\theta} \quad \text{e} \quad \mathbf{I}_{cC} = \frac{\mathbf{V}_c}{\mathbf{Z}} = \frac{V_p \angle 120°}{Z\angle\theta}$$

Assim,

$$\mathbf{I}_{aA} = \frac{V_p}{Z} \angle -\theta, \quad \mathbf{I}_{bB} = \frac{V_p}{Z} \angle -\theta - 120° \quad \text{e} \quad \mathbf{I}_{cC} = \frac{V_p}{Z} \angle -\theta + 120° \qquad (12.3\text{-}4)$$

As correntes de linha têm amplitudes iguais e estão defasadas de 120º. $\mathbf{I}_{bB}$ e $\mathbf{I}_{cC}$ podem ser calculadas a partir de $\mathbf{I}_{aA}$ somando e subtraindo 120º ao ângulo de fase de $\mathbf{I}_{aA}$.

A corrente do fio que liga o nó neutro da fonte ao nó neutro da carga é

$$\mathbf{I}_{Nn} = \mathbf{I}_{aA} + \mathbf{I}_{bB} + \mathbf{I}_{cC} = \frac{V_p}{Z\angle\theta}\left(\angle 10° + 1\angle -120° + 1\angle 120°\right)$$

$$\mathbf{I}_{Nn} = 0 \qquad (12.3\text{-}5)$$

Isso significa que não existe corrente no fio que liga o nó neutro da fonte e o nó neutro da carga.

Como foram usados os valores eficazes das tensões e correntes senoidais em vez dos valores máximos, as expressões apropriadas para o cálculo da potência são as que aparem na coluna RELAÇÃO USANDO VALORES RMS da Tabela 12.1-1. A potência média fornecida à carga é

$$P = P_A + P_B + P_C = V_p\frac{V_p}{Z}\cos(-\theta) + V_p\frac{V_p}{Z}\cos(-\theta) + V_p\frac{V_p}{Z}\cos(-\theta)$$

$$P = 3\frac{V_p^2}{Z}\cos(\theta) \qquad (12.3\text{-}6)$$

em que, por exemplo, P_A é a potência média absorvida por $\mathbf{Z}_A$. As três impedâncias da carga trifásica, $\mathbf{Z}_A$, $\mathbf{Z}_B$ e $\mathbf{Z}_C$, absorvem potências iguais. Não é necessário calcular P_A, P_B e P_C separadamente; a potência média fornecida à carga pode ser determinada calculando P_A e multiplicando o resultado por 3.

Considere agora o circuito Y-Y de três fios da Figura 12.3-2. As tensões de fase da fonte são $\mathbf{V}_a = V_p \angle 0°$ V rms, $\mathbf{V}_b = V_p \angle -120°$ V rms e $\mathbf{V}_c = V_p \angle 120°$ V rms. O primeiro passo na análise do circuito é calcular $\mathbf{V}_{Nn}$, a tensão do nó neutro da carga trifásica em relação à tensão do nó neutro da fonte trifásica. (Esse passo não foi necessário no caso do circuito Y-Y de quatro fios porque, devido à presença do quarto fio, $\mathbf{V}_{Nn} = 0$.) É conveniente escolher o nó *n*, o nó neutro da fonte trifásica, como nó de referência. Nesse caso, $\mathbf{V}_a$, $\mathbf{V}_b$, $\mathbf{V}_c$ e $\mathbf{V}_{Nn}$ são as tensões de nó do circuito. Aplicando a LKC ao nó N, temos

$$0 = \frac{\mathbf{V}_a - \mathbf{V}_{Nn}}{\mathbf{Z}_A} + \frac{\mathbf{V}_b - \mathbf{V}_{Nn}}{\mathbf{Z}_B} + \frac{\mathbf{V}_c - \mathbf{V}_{Nn}}{\mathbf{Z}_C}$$
$$= \frac{(V_p \angle 0°) - \mathbf{V}_{Nn}}{\mathbf{Z}_A} + \frac{(V_p \angle -120°) - \mathbf{V}_{Nn}}{\mathbf{Z}_B} + \frac{(V_p \angle 120°) - \mathbf{V}_{Nn}}{\mathbf{Z}_C} \quad (12.3\text{-}7)$$

Explicitando $\mathbf{V}_{Nn}$, obtemos

$$\mathbf{V}_{Nn} = \frac{(V_p \angle -120°)\mathbf{Z}_A\mathbf{Z}_C + (V_p \angle 120°)\mathbf{Z}_A\mathbf{Z}_B + (V_p \angle 0°)\mathbf{Z}_B\mathbf{Z}_C}{\mathbf{Z}_A\mathbf{Z}_C + \mathbf{Z}_A\mathbf{Z}_B + \mathbf{Z}_B\mathbf{Z}_C} \quad (12.3\text{-}8)$$

Uma vez determinado o valor de $\mathbf{V}_{Nn}$, as correntes de linha podem ser calculadas com o auxílio das equações

$$\mathbf{I}_{aA} = \frac{\mathbf{V}_a - \mathbf{V}_{Nn}}{\mathbf{Z}_A}, \quad \mathbf{I}_{bB} = \frac{\mathbf{V}_b - \mathbf{V}_{Nn}}{\mathbf{Z}_B} \quad \text{e} \quad \mathbf{I}_{cC} = \frac{\mathbf{V}_c - \mathbf{V}_{Nn}}{\mathbf{Z}_C} \quad (12.3\text{-}9)$$

A análise do circuito Y-Y de três fios é muito mais simples quando o circuito é equilibrado, ou seja, quando $\mathbf{Z}_A = \mathbf{Z}_B = \mathbf{Z}_C = \mathbf{Z} = Z\angle\theta$. Se o circuito é equilibrado, a Eq. 12.3-8 se torna

$$\mathbf{V}_{Nn} = \frac{(V_P \angle -120°)\mathbf{ZZ} + (V_P \angle 120°)\mathbf{ZZ} + (V_P \angle 0°)\mathbf{ZZ}}{\mathbf{ZZ} + \mathbf{ZZ} + \mathbf{ZZ}}$$
$$= [(V_P \angle -120°) + (V_P \angle 120°) + (V_P \angle 0°)]/3$$
$$\mathbf{V}_{Nn} = 0 \quad (12.3\text{-}10)$$

Quando um circuito Y-Y de três fios é equilibrado, não é necessário escrever e resolver uma equação de nó para calcular $\mathbf{V}_{Nn}$, já que $\mathbf{V}_{Nn}$ é sempre zero. Lembre-se de que $\mathbf{V}_{Nn} = 0$ no circuito Y-Y de quatro fios. Isso significa que o circuito Y-Y equilibrado de três fios se comporta exatamente da mesma forma que o circuito Y-Y equilibrado de quatro fios. Em particular, as correntes de linha são dadas pela Eq. 12.3-4 e a potência média fornecida à carga é dada pela Eq. 12.3-6.

Em muitos casos, as linhas de transmissão que ligam a fonte à carga podem ser modeladas usando curtos-circuitos; foi o que fizemos nas Figuras 12.3-1 e 12.3-2. Às vezes, porém, é preciso modelá-las como impedâncias. Isso deve ser feito, por exemplo, quando estamos interessados em comparar a potência fornecida à carga com a potência absorvida por uma linha de transmissão. A Figura 12.3-3 mostra um circuito Y-Y de três fios no qual a linha de transmissão é modelada pelas impedâncias de linha $\mathbf{Z}_{aA}$, $\mathbf{Z}_{bB}$ e $\mathbf{Z}_{cC}$. A presença das impedâncias de linha não complica muito a análise do circuito, pois cada uma das impedâncias de linha está ligada em série com uma impedância de carga. Depois de substituir as impedâncias em série por impedâncias equivalentes, podemos analisar o circuito como no caso anterior. Quando o circuito não é equilibrado, uma equação de nó é escrita e resolvida para determinar $\mathbf{V}_{Nn}$. Uma vez conhecido o valor de $\mathbf{V}_{Nn}$, as correntes de linha podem ser calculadas. Tanto a potência fornecida à carga como a potência absorvida pela linha podem ser calculadas a partir das correntes de linha e das impedâncias de linha.

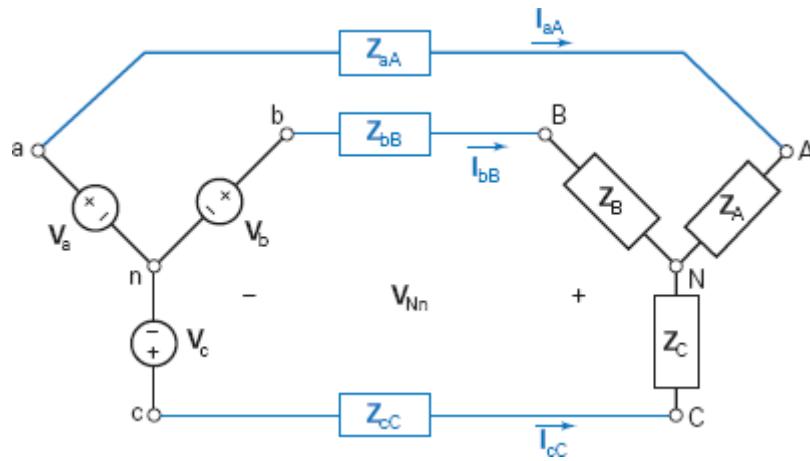



FIGURA 12.3-3 Circuito Y-Y de três fios com impedâncias de linha.

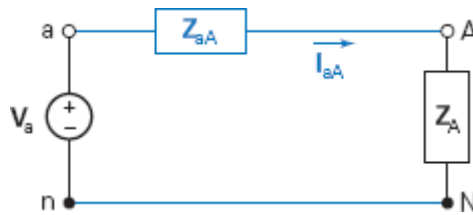



FIGURA 12.3-4 Circuito equivalente por fase do circuito Y-Y de três fios com impedâncias de linha.

A análise de circuitos Y-Y equilibrados é mais simples que a análise de circuitos Y-Y desequilibrados sob vários aspectos:

1. $\mathbf{V}_{Nn} = 0$. Não é necessário escrever e resolver uma equação de nó para determinar $\mathbf{V}_{Nn}$.
2. As correntes de linha têm amplitudes iguais e estão defasadas de 120º. $\mathbf{I}_{bB}$ e $\mathbf{I}_{cC}$ podem ser calculadas a partir de $\mathbf{I}_{aA}$ subtraindo e somando 120º ao ângulo de fase de $\mathbf{I}_{aA}$.
3. As três impedâncias da carga, $\mathbf{Z}_A$, $\mathbf{Z}_B$ e $\mathbf{Z}_C$, absorvem potências iguais. Não é necessário calcular P_A, P_B e P_C separadamente; a potência média fornecida à carga pode ser determinada calculando P_A e multiplicando o resultado por 3.

A melhor forma de analisar um circuito Y-Y equilibrado é calcular primeiro a corrente de linha $\mathbf{I}_{aA}$. O *circuito equivalente por fase* fornece as informações necessárias para calcular $\mathbf{I}_{aA}$. Esse circuito equivalente é formado pela fonte de tensão e pelas impedâncias de uma das fases do circuito trifásico. A Figura 12.3-4 mostra o circuito equivalente por fase do circuito trifásico da Figura 12.3-3. Os nós neutros, n e N, estão ligados por um curto-circuito no circuito equivalente por fase para indicar que $\mathbf{V}_{Nn} = 0$ em um circuito Y-Y equilibrado. O circuito equivalente por fase pode ser usado para analisar circuitos Y-Y de três ou quatro fios, mas só pode ser usado no caso de circuitos *equilibrados*.

A Tabela 12.3-1 mostra as principais propriedades de um circuito Y-Y equilibrado.

Tabela 12.3-1 O Circuito Y-Y Equilibrado

Tensões de fase	$\mathbf{V}_a = V_p \angle 0°$
	$\mathbf{V}_b = V_p \angle -120°$
	$\mathbf{V}_c = V_p \angle -240°$
Tensões de linha	$\mathbf{V}_{ab} = \sqrt{3}\, V_p \angle 30°$
	$\mathbf{V}_{bc} = \sqrt{3}\, V_p \angle -90°$
	$\mathbf{V}_{ca} = \sqrt{3}\, V_p \angle -210°$
	$V_L = \sqrt{3}\, V_p$
Correntes	$\mathbf{I}_L = \mathbf{I}_p$ (corrente de linha = corrente de fase)
	$\mathbf{I}_A = \dfrac{\mathbf{V}_a}{\mathbf{Z}_Y} = I_p \angle -\theta$ em que $\mathbf{Z}_p = Z \angle \theta$
	$\mathbf{I}_B = \mathbf{I}_A \angle -120°$
	$\mathbf{I}_C = \mathbf{I}_A \angle -240°$

Nota: p = fase, L = linha.

EXEMPLO 12.3-1 Circuito Y-Y Desequilibrado de Quatro Fios

Determine a potência complexa fornecida à carga trifásica de um circuito Y-Y de quatro fios como o que aparece na Figura 12.3-1. As tensões de fase da fonte em Y são $\mathbf{V}_a = 110 \angle 0°$ V rms, $\mathbf{V}_b = 110 \angle -120°$ V rms e $\mathbf{V}_c = 110 \angle 120°$ V rms. As impedâncias da carga são $\mathbf{Z}_A = 50 + j80\ \Omega$, $\mathbf{Z}_B = j50\ \Omega$ e $\mathbf{Z}_C = 100 + j25\ \Omega$.

Solução

As correntes de linha em um circuito Y-Y *desequilibrado* podem ser calculadas usando a Eq. 12.3-1. Neste exemplo,

$$\mathbf{I}_{aA} = \frac{\mathbf{V}_a}{\mathbf{Z}_A} = \frac{110 \angle 0°}{50 + j80}, \quad \mathbf{I}_{bB} = \frac{\mathbf{V}_b}{\mathbf{Z}_B} = \frac{110 \angle -120°}{j50} \quad \text{e} \quad \mathbf{I}_{cC} = \frac{\mathbf{V}_c}{\mathbf{Z}_C} = \frac{110 \angle 120°}{100 + j25}$$

o que nos dá

$$I_{aA} = 1{,}16 \angle -58° \text{ A rms}, \; I_{bB} = 2{,}2 \angle 150° \text{ A rms e } I_{cC} = 1{,}07 \angle 106°$$

A potência complexa fornecida a $\mathbf{Z}_A$ é

$$\mathbf{S}_A = \mathbf{I}_{aA}^*\, \mathbf{V}_a = (1{,}16 \angle -58°)^* (110 \angle 0°) = (1{,}16 \angle 58°)(110 \angle 0°) = 68 + j109 \text{ VA}$$

Analogamente, as potências complexas fornecidas a $\mathbf{Z}_B$ e $\mathbf{Z}_C$ são

$$\mathbf{S}_B = (2{,}2 \angle 150°)^* (110 \angle -120°) = j242 \text{ VA}$$

e

$$\mathbf{S}_C = (107 \angle 106°)^* (110 \angle 120°) = 114 + j28 \text{ VA}$$

A potência complexa total fornecida à carga trifásica é

$$\mathbf{S}_A + \mathbf{S}B + \mathbf{S}_C = 182 + j379 \text{ VA}$$

EXEMPLO 12.3-2 Circuito Y-Y Equilibrado de Quatro Fios

EXEMPLO 12.3-2 Circuito Y-Y Equilibrado de Quatro Fios

Determine a potência complexa fornecida à carga trifásica de um circuito Y-Y de quatro fios como o da Figura 12.3-1. As tensões de fase da fonte em Y são $\mathbf{V}_a = 110\angle 0°$ V rms, $\mathbf{V}_b = 110\angle 120°$ V rms e $\mathbf{V}_c = 110\angle -120°$ V rms. As impedâncias da carga são $\mathbf{Z}_A = \mathbf{Z}_B = \mathbf{Z}_C = 50 + j80\ \Omega$.

Solução

Este exemplo é semelhante ao anterior. A diferença mais importante é que, neste caso, o circuito trifásico é equilibrado. Assim, precisamos calcular apenas uma corrente de linha, $\mathbf{I}_{aA}$, e a potência complexa, $\mathbf{S}_A$, fornecida a apenas uma das impedâncias de carga, $\mathbf{Z}_A$. A potência fornecida à carga trifásica é $3\mathbf{S}_A$. Começamos por calcular $\mathbf{I}_{aA}$:

$$\mathbf{I}_{aA} = \frac{\mathbf{V}_a}{\mathbf{Z}_A} = \frac{110\angle 0°}{50 + j80} = 1{,}16\angle -58°\ \text{A rms}$$

A potência complexa fornecida a $\mathbf{Z}_A$ é

$$\mathbf{S}_A = \mathbf{I}_{aA}^*\mathbf{V}_a = (1{,}16\angle -58°)^*\ (110\angle 0°) = (1{,}16\angle 58°)(110\angle 0°) = 68 + j109\ \text{VA}$$

A potência total fornecida à carga trifásica é

$$3\mathbf{S}_A = 204 + j326\ \text{VA}$$

(As correntes $\mathbf{I}_{bB}$ e $\mathbf{I}_{cC}$ também podem ser calculadas usando a Eq. 12.3-1. É fácil mostrar que $\mathbf{I}_{bB} = 1{,}16\angle -177°$ A rms e $\mathbf{I}_{cC} = 1{,}16\angle 62°$ A rms. Observe que $\mathbf{I}_{bB}$ e $\mathbf{I}_{cC}$ podem ser calculadas a partir de $\mathbf{I}_{aA}$ subtraindo e somando 120° ao ângulo de fase de $\mathbf{I}_{aA}$. É fácil também mostrar que a potência complexa fornecida a $\mathbf{Z}_B$ e $\mathbf{Z}_C$ é igual à potência complexa fornecida a $\mathbf{Z}_A$, ou seja, que $\mathbf{S}_B = 68 + j109$ VA e $\mathbf{S}_C = 68 + j109$ VA.)

EXEMPLO 12.3-3 Circuito Y-Y Desequilibrado de Três Fios

Determine a potência complexa fornecida à carga trifásica de um circuito Y-Y de três fios como o da Figura 12.3-2. As tensões de fase da fonte em Y são $\mathbf{V}_a = 110\angle 0°$ V rms, $\mathbf{V}_b = 110\angle 120°$ V rms e $\mathbf{V}_c = 110\angle -120°$ V rms. As impedâncias da carga são $\mathbf{Z}_A = 50 + j80\ \Omega$, $\mathbf{Z}_B = j50\ \Omega$ e $\mathbf{Z}_C = 100 + j25\ \Omega$.

Solução

Este exemplo parece semelhante ao Exemplo 12.3-1, mas envolve um circuito Y-Y de três fios em vez do circuito de quatro fios do Exemplo 12.3-1. Como o circuito é desequilibrado, $\mathbf{V}_{Nn}$ não é conhecida. Começamos por escrever e resolver uma equação de nó para determinar $\mathbf{V}_{Nn}$. De acordo com a Eq. 12.3-8, a solução da equação de nó é

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{Nn} &= \frac{(110\angle -120°)(50 + j80)(100 + j25) = (110\angle 120°)(50 + j80)(j50) + (110\angle 0°)(j50)(100 + j25)}{(50 + j80)(100 + j25) + (50 + j80)(j50) + (j50)(100 + j25)} \\ &= 56\angle -151°\ \text{V rms}\end{aligned}$$

Agora que conhecemos $\mathbf{V}_{Nn}$, podemos calcular as correntes de linha:

$$\mathbf{I}_{aA} = \frac{\mathbf{V}_a - \mathbf{V}_{Nn}}{\mathbf{Z}_A} = \frac{110\angle 0° - 56\angle -151°}{50 + j80} = 1{,}71\angle -48°\ \text{A rms}$$

$$\mathbf{I}_{bB} = \frac{\mathbf{V}_b - \mathbf{V}_{Nn}}{\mathbf{Z}_B} = 2{,}45\angle 3°\ \text{A rms} \quad \text{e} \quad \mathbf{I}_{cC} = \frac{\mathbf{V}_c - \mathbf{V}_{Nn}}{\mathbf{Z}_C} = 1{,}19\angle 79°\ \text{A rms}$$

A potência complexa fornecida a $\mathbf{Z}_A$ é

$$\mathbf{S}_A = \mathbf{I}_{aA}^*\mathbf{V}_a = \mathbf{I}_{aA}^*(\mathbf{I}_{aA}\mathbf{Z}_A) = (1{,}71\angle -48°)^*\ (1{,}71\angle -48°)(50 + j80) = 146 + j234\ \text{VA}$$

Analogamente, a potência complexa fornecida a $\mathbf{Z}_B$ e $\mathbf{Z}_C$ é

$$\mathbf{S}_B = \mathbf{I}_{bB}^*(\mathbf{I}_{bB}\mathbf{Z}_B) = j94 \text{ VA} \quad \text{e} \quad \mathbf{S}_C = \mathbf{I}_{cC}^*(\mathbf{I}_{cC}\mathbf{Z}_C) = 141 + j35 \text{ VA}$$

A potência complexa total fornecida à carga trifásica é

$$\mathbf{S}_A + \mathbf{S}_B + \mathbf{S}_C = 287 + j364 \text{ VA}$$

EXEMPLO 12.3-4 Circuito Y-Y Equilibrado de Três Fios

Determine a potência complexa fornecida à carga trifásica de um circuito Y-Y de três fios como o da Figura 12.3-2. As tensões de fase da fonte em Y são $\mathbf{V}_a = 110\angle 0°$ V, $\mathbf{V}_b = 110\angle 120°$ e $\mathbf{V}_c = 110\angle -120°$ V rms. As impedâncias da carga são $\mathbf{Z}_A = \mathbf{Z}_B = \mathbf{Z}_C = 50 + j80\ \Omega$.

Solução

Este exemplo é semelhante ao Exemplo 12.3-3. A diferença mais importante é que, como o circuito trifásico é equilibrado, $\mathbf{V}_{Nn} = 0$ e não é necessário escrever uma equação de nó para determinar $\mathbf{V}_{Nn}$.

Os circuitos Y-Y equilibrados de três e quatro fios podem ser analisados da mesma forma. Precisamos calcular apenas uma corrente de linha, $\mathbf{I}_{aA}$ e, a partir dessa corrente, a potência complexa, $\mathbf{S}_A$, fornecida a apenas uma das impedâncias de carga, $\mathbf{Z}_A$. A potência fornecida à carga trifásica é $3\mathbf{S}_A$.

A corrente de linha é dada por

$$\mathbf{I}_{aA} = \frac{\mathbf{V}_a}{\mathbf{Z}_A} = \frac{110\angle 0°}{50 + j80} = 1{,}16\angle -58° \text{ A rms}$$

A potência total fornecida à carga trifásica é

$$3\mathbf{S}_A = 3\mathbf{I}_{aA}^*\mathbf{V}_a = 204 + j326 \text{ VA}$$

EXEMPLO 12.3-5 Perdas na Linha

A Figura 12.3-5*a* mostra um circuito Y-Y equilibrado de três fios. Determine a potência média fornecida pela fonte trifásica, a potência média fornecida à carga trifásica e a potência média absorvida pela linha trifásica.

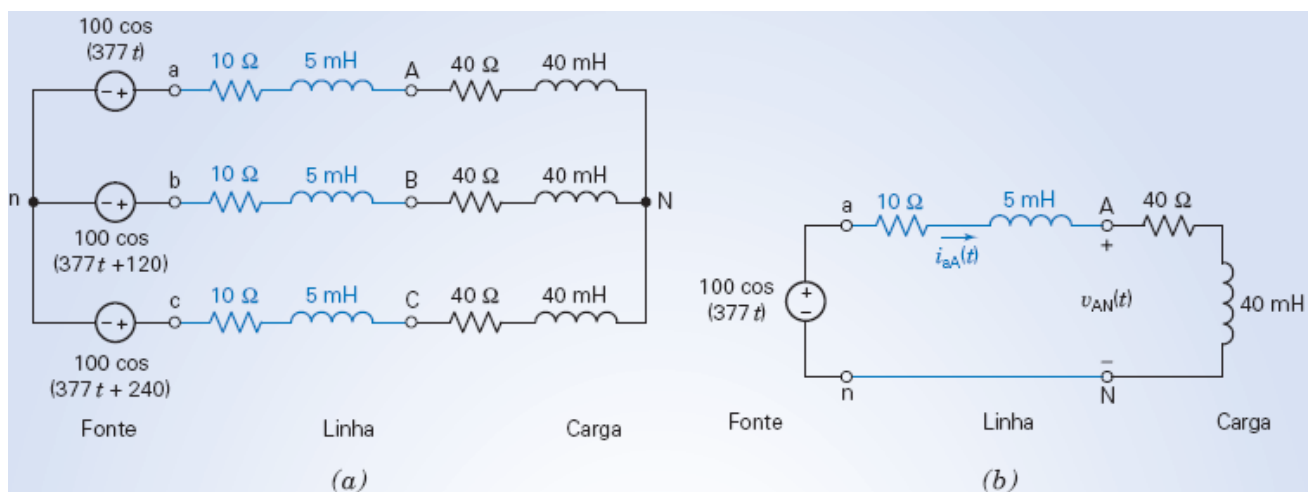



FIGURA 12.3-5 (*a*) Circuito Y-Y equilibrado. (*b*) Circuito equivalente por fase.

Solução

O circuito Y-Y de três fios da Figura 12.3-5*a* parece muito diferente do circuito Y-Y de três fios da Figura 12.3-2. Uma diferença é irrelevante. Os circuitos foram desenhados de modo diferente; na Figura 12.3-5*a*, todos os componentes estão na horizontal. Uma diferença mais importante é que o circuito da Figura 12.3-2 está representado no domínio da frequência, usando fasores e impedâncias, enquanto o circuito da Figura 12.3-5*a* está representado no domínio do tempo. Como o circuito está representado no domínio do tempo, foi usada a amplitude, e não o valor eficaz, da tensão da fonte.

Como esse circuito trifásico é equilibrado, pode ser analisado usando um circuito equivalente por fase. A Figura 12.3-5*b* mostra o circuito equivalente por fase apropriado.

A corrente de linha é dada por

$$\mathbf{I}_{aA}(\omega) = \frac{100}{50 + j(377)(0{,}045)} = 1{,}894 \angle -18{,}7^\circ \text{ A}$$

A tensão de fase da carga é

$$\mathbf{V}_{AN}(\omega) = (40 + j(377)(0{,}04))\mathbf{I}_{aA}(\omega) = 81 \angle 2^\circ \text{ V}$$

Como foram usados valores de pico para as tensões e correntes senoidais em vez de valores eficazes, as expressões para calcular as potências são as que aparecem na coluna USANDO VALORES DE PICO da Tabela 12.1-1. A potência fornecida pela fonte pode ser calculada da seguinte forma:

$$\mathbf{I}_{aA}(\omega) = 1{,}894 \angle -18{,}7^\circ \text{ A} \quad \text{e} \quad \mathbf{V}_{an}(\omega) = 100 \angle 0^\circ \text{ V}$$

o que nos dá

$$P_a = \frac{(100)(1{,}894)}{2} \cos(18{,}7^\circ) = 89{,}7 \text{ W}$$

A potência fornecida à carga pode ser calculada da seguinte forma:

$$\mathbf{I}_{aA}(\omega) = 1{,}894 \angle -18{,}7^\circ \text{ A} \quad \text{e} \quad R_A = 40\ \Omega, \quad \text{logo,} \quad P_A = \frac{1{,}894^2}{2} 40 = 71{,}7 \text{ W}$$

A potência perdida na linha é dada por

$$\mathbf{I}_{aA}(\omega) = 1{,}894 \angle -18{,}7^\circ \text{ A} \quad \text{e} \quad R_{aA} = 10\ \Omega, \quad \text{logo,} \quad P_{aA} = \frac{1{,}894^2}{2} 10 = 17{,}9 \text{ W}$$

A carga trifásica recebe $3P_A = 215{,}1$ W e uma potência $3P_{aA} = 53{,}7$ W é perdida na linha. Isso significa que 80% da potência fornecida pela fonte são fornecidos à carga e 20% são perdidos na linha. A fonte trifásica fornece uma potência total $3P_a = 269{,}1$ W.

EXEMPLO 12.3-6 Redução das Perdas na Linha

Como vimos no Exemplo 12.3-5, 80% da potência fornecida pela fonte são fornecidos à carga e 20% são perdidos na linha. As perdas na linha podem ser reduzidas diminuindo a corrente na linha. Entretanto, reduzir a corrente da carga reduziria a potência fornecida à carga. O uso de transformadores permite reduzir a corrente da linha sem reduzir a corrente da carga.

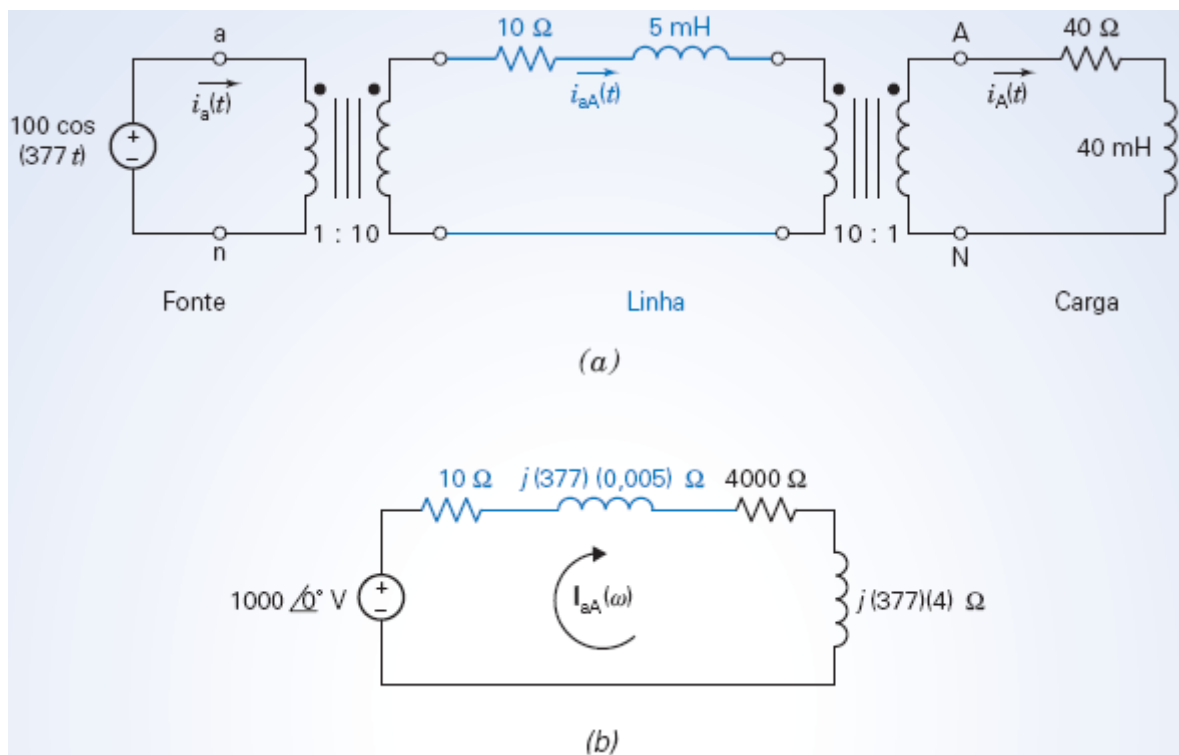



FIGURA 12.3-6 (*a*) Circuito equivalente por fase de um circuito Y-Y equilibrado com transformadores. (*b*) Circuito no domínio da frequência usado para calcular a corrente de linha.

Neste exemplo, dois transformadores trifásicos são introduzidos no circuito do Exemplo 12.3-5. Um transformador na saída da fonte aumenta a tensão e diminui a corrente; um segundo transformador, na entrada da carga, diminui a tensão e aumenta a corrente. Como as relações de espiras dos dois transformadores são mutuamente recíprocas, a tensão e corrente aplicadas à carga permanecem inalteradas. Como a corrente da linha é pequena, a potência perdida na linha é pequena. Como a tensão da linha é elevada, o isolamento tem que ser de boa qualidade e as medidas de segurança devem ser severas.

A Figura 12.3-6*a* mostra o circuito equivalente por fase do circuito Y-Y equilibrado de três fios com dois transformadores. Determine a potência média fornecida pela fonte trifásica, a potência média recebida pela carga trifásica e a potência média absorvida pela linha trifásica.

Solução

Para analisar o circuito equivalente por fase da Figura 12.3-6*a*, observe que

1. A tensão do secundário do transformador da esquerda é 10 vezes maior que a tensão do primário, ou seja, 1000 cos (377*t*).
2. A impedância ligada ao secundário do transformador da direita pode ser refletida para o primário do transformador multiplicando seu valor por 100. O resultado é um resistor de 4000 Ω em série com um indutor de 4 H.

Essas observações levam ao circuito de uma malha da Figura 12.3-6*b*. A corrente de malha desse circuito, que é a corrente de linha do circuito trifásico, é dada por

$$\mathbf{I}_{aA}(\omega) = \frac{1000}{4010 + j(377)(4{,}005)} = 0{,}2334 \angle -20{,}6^\circ \text{ A}$$

Como a corrente que penetra na extremidade assinalada com um ponto do secundário do transformador da esquerda da Figura 12.3-6*a* é $-\mathbf{I}_{aA}(\omega)$, a corrente que penetra na extremidade assinalada com um ponto no primário do transformador é

$$\mathbf{I}_a(\omega) = -10\,(-\mathbf{I}_{aA}(\omega)) = 2{,}334 \angle -20{,}6^\circ \text{ A}$$

Como a corrente que penetra na extremidade assinalada com um ponto do primário do transformador da direita é $I_{aA}(\omega)$, a corrente que penetra na extremidade assinalada com um ponto do secundário do transformador é

$$\mathbf{I}_A(\omega) = -(-10\,\mathbf{I}_{aA}(\omega)) = 2{,}334 \angle -20{,}6^\circ \text{ A}$$

A tensão de fase da carga é

$$\mathbf{V}_{AN}(\omega) = (40 + j(377)(0{,}04)\,\mathbf{I}_A(\omega) = 99{,}77\angle 0° \text{ V}$$

A potência fornecida pela fonte é dada por

$$\mathbf{I}_a(\omega) = 2{,}334\angle -20{,}6° \text{ A} \quad \text{e}$$

$$\mathbf{V}_{an}(\omega) = 100\angle 0° \text{ V}; \quad \text{logo} \qquad P_a = \frac{(100)(2{,}334)}{2}\cos(20{,}6°) = 109{,}2 \text{ W}$$

A potência recebida pela carga é dada por

$$\mathbf{I}_A(\omega) = 2{,}334\angle -20{,}6° \text{ A} \quad \text{e} \quad R_A = 40\ \Omega; \quad \text{logo} \qquad P_A = \frac{2{,}334^2}{2}40 = 108{,}95 \text{ W}$$

A potência perdida na linha é dada por

$$\mathbf{I}_{aA}(\omega) = 0{,}2334\angle -20{,}6° \text{ A} \quad \text{e} \quad R_A = 40\ \Omega; \quad \text{logo} \qquad P_A = \frac{0{,}2334^2}{2}10 = 0{,}27 \text{ W}$$

Assim, com o uso de dois transformadores, 98% da potência fornecida pela fonte são fornecidos à carga e apenas 2% são perdidos na linha.

EXERCÍCIO 12.3-1 Determine a potência complexa fornecida à carga trifásica de um circuito Y-Y de quatro fios como o da Figura 12.3-1. As tensões de fase da fonte em Y são $\mathbf{V}_a = 120\angle 0°$ V rms, $\mathbf{V}_b = 120\angle 120°$ V rms e $\mathbf{V}_c = 120\angle -120°$ V rms. As impedâncias da carga são $\mathbf{Z}_A = 80 + j50\ \Omega$, $\mathbf{Z}_B = 80 + j80\ \Omega$ e $\mathbf{Z}_C = 100 - j25\ \Omega$.

Resposta: $\mathbf{S}_A = 129 + j81$ VA, $\mathbf{S}_B = 90 + j90$ VA, $\mathbf{S}_C = 136 - j34$ VA e $\mathbf{S} = 355 + j137$ VA

EXERCÍCIO 12.3-2 Determine a potência complexa fornecida à carga trifásica de um circuito Y-Y de quatro fios como o da Figura 12.3-1. As tensões de fase da fonte em Y são $\mathbf{V}_a = 120\angle 0°$ V rms, $\mathbf{V}_b = 120\angle 120°$ V rms e $\mathbf{V}_c = 120\angle -120°$ V rms. As impedâncias da carga são $\mathbf{Z}_A = \mathbf{Z}_B = \mathbf{Z}_C = 40 + j30\ \Omega$.

Resposta: $\mathbf{S}_A = \mathbf{S}_B = \mathbf{S}_C = 230 + j173$ VA e $\mathbf{S} = 691 + j518$ VA

EXERCÍCIO 12.3-3 Determine a potência complexa fornecida à carga trifásica de um circuito Y-Y de três fios como o da Figura 12.3-2. As tensões de fase da fonte em Y são $\mathbf{V}_a = 120\angle 0°$ V rms, $\mathbf{V}_b = 120\angle 120°$ e $\mathbf{V}_c = 120\angle -120°$ V rms. As impedâncias da carga são $\mathbf{Z}_A = 80 + j50\ \Omega$, $\mathbf{Z}_B = 80 + j80\ \Omega$ e $\mathbf{Z}_C = 100 - j25\ \Omega$.

Resposta intermediária: $\mathbf{V}_{nN} = 28{,}89\angle -150{,}5$ V rms

Resposta: $\mathbf{S} = 392 + j142$ VA

EXERCÍCIO 12.3-4 Determine a potência complexa fornecida à carga trifásica de um circuito Y-Y de três fios como o da Figura 12.3-2. As tensões de fase da fonte em Y são $\mathbf{V}_a = 120\angle 0°$ V rms, $\mathbf{V}_b = 120\angle -120°$ V rms e $\mathbf{V}_c = 120\angle 120°$ V rms. As impedâncias da carga são $\mathbf{Z}_A = \mathbf{Z}_B = \mathbf{Z}_C = 40 + j30\ \Omega$.

Resposta: $\mathbf{S}_A = \mathbf{S}_B = \mathbf{S}_C = 230 + j173$ VA e $\mathbf{S} = 691 + j518$ VA

12.4 *Fontes e Cargas Ligadas em Δ*

A Figura 12.2-5*b* mostra uma fonte trifásica ligada em Δ. Geradores em Δ raramente são usados na prática porque qualquer pequeno desequilíbrio na amplitude ou na fase das tensões trifásicas faz com que a soma das três tensões não seja zero. Em consequência, uma alta corrente circula nos enrolamentos, dissipando energia e reduzindo a eficiência do gerador. Suponha, por exemplo, que as tensões produzidas pelo gerador sejam

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{ab} &= 120 \angle 0^\circ \\ \mathbf{V}_{bc} &= 120{,}1 \angle -121^\circ \\ \mathbf{V}_{ca} &= 120{,}2 \angle 121^\circ \end{aligned} \tag{12.4-1}$$

Se a resistência total ao longo da malha é 1 Ω, a corrente que circula nos enrolamentos é

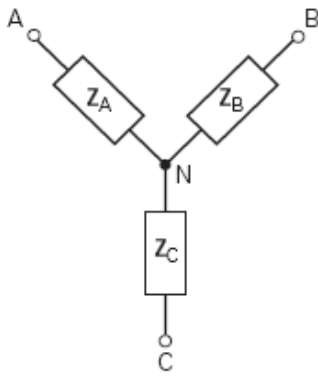
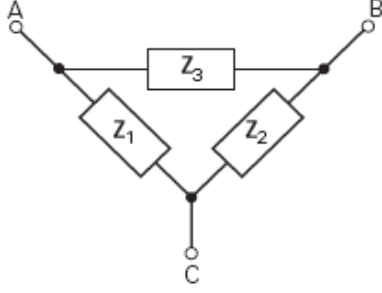
$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= (\mathbf{V}_{ab} + \mathbf{V}_{bc} + \mathbf{V}_{ca})/1 \\ &= 120 + 120{,}1(-0{,}515 - j0{,}857) + 120{,}2(-0{,}515 + j0{,}857) \\ &\cong 120 - 1{,}03(120{,}15) \\ &\cong -3{,}75 \text{ A} \end{aligned} \tag{12.4-2}$$

um valor tão alto que é inaceitável.

Por essa razão, vamos considerar apenas fontes ligadas em Y e admitir a possibilidade de que a carga esteja ligada em Y ou em Δ.

As transformações Δ-Y e Y-Δ convertem cargas ligadas em Δ em cargas equivalentes ligadas em Y e vice-versa. Essas transformações aparecem na Tabela 12.4-1. Dadas as impedâncias $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$ e $\mathbf{Z}_3$ de uma carga ligada em Δ, a Tabela 12.4-1 fornece as expressões necessárias para determinar as impedâncias $\mathbf{Z}_A$, $\mathbf{Z}_B$ e $\mathbf{Z}_C$ da carga equivalente ligada em Y. Dizemos que essas cargas trifásicas são equivalentes porque a substituição da carga ligada em Δ pela carga ligada em Y não muda as tensões e correntes da fonte trifásica e da linha trifásica.

As transformações Δ-Y e Y-Δ são muito mais simples quando as cargas são equilibradas. Suponha que uma carga ligada em Δ seja equilibrada, caso em que $\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_3 = \mathbf{Z}_\Delta$. A carga ligada em Y também será equilibrada, com $\mathbf{Z}_A = \mathbf{Z}_B = \mathbf{Z}_C = \mathbf{Z}_Y$. Nesse caso,

$$\mathbf{Z}_Y = \frac{\mathbf{Z}_\Delta}{3} \tag{12.4-3}$$

Isso significa que, no caso de uma fonte em Y e uma carga equilibrada em Δ com uma impedância por fase $\mathbf{Z}_\Delta$, podemos substituir a carga em Δ por uma carga em Y com uma impedância por fase $\mathbf{Z}_Y = \mathbf{Z}_\Delta/3$. Nesse caso, a corrente de linha é

$$\mathbf{I}_A = \frac{\mathbf{V}_a}{\mathbf{Z}_Y} = \frac{3\mathbf{V}_a}{\mathbf{Z}_\Delta} \tag{12.4-4}$$

Sendo assim, vamos discutir apenas a configuração Y-Y. Se o leitor encontrar uma configuração Y-Δ, bastará converter a carga ligada em Δ em uma carga equivalente ligada em Y antes de calcular as correntes e tensões.

Tabela 12.4-1 Transformações Y-Δ e Δ-Y

DESCRIÇÃO	CIRCUITO	EXPRESSÕES (DESEQUILIBRADA)	EXPRESSÕES (EQUILIBRADA)
Carga em Y	A, B, N, C, Z_A, Z_B, Z_C	$Z_A = \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3}$ $Z_B = \frac{Z_2 Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3}$ $Z_C = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2 + Z_3}$	Se $Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z_\Delta$ então $Z_A = Z_B = Z_C = \frac{Z_\Delta}{3}$
Carga em Δ	A, B, C, Z_1, Z_2, Z_3	$Z_1 = \frac{Z_A Z_B + Z_B Z_C + Z_A Z_C}{Z_B}$ $Z_2 = \frac{Z_A Z_B + Z_B Z_C + Z_A Z_C}{Z_A}$ $Z_3 = \frac{Z_A Z_B + Z_B Z_C + Z_A Z_C}{Z_C}$	Se $Z_A = Z_B = Z_C = Z_Y$ então $Z_1 = Z_2 = Z_3 = 3Z_Y$

Exemplo 12.4-1 Cargas Ligadas em Y e em Δ

A Figura 12.4-1*a* mostra uma carga trifásica formada por uma ligação em paralelo de uma carga ligada em Y a uma carga ligada em Δ. Converta a carga em uma carga equivalente ligada em Y.

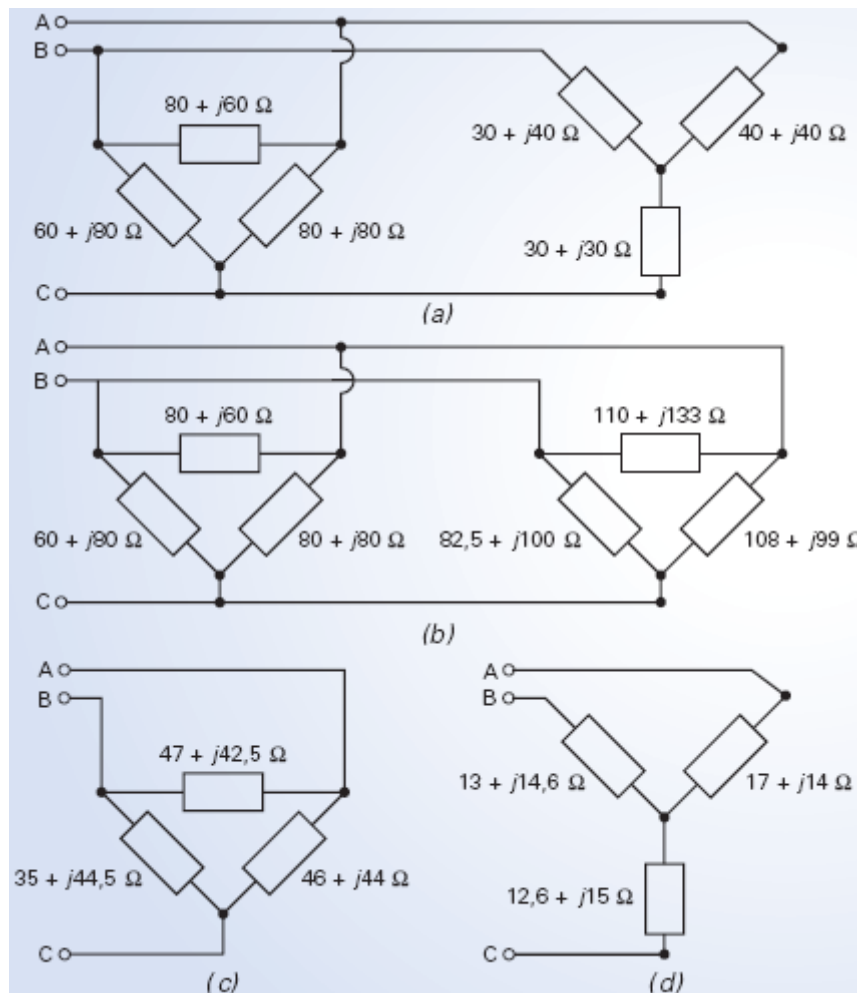



FIGURA 12.4-1 Exemplo de transformações Y-Δ. (*a*) Cargas em paralelo, uma ligada em Δ e outra ligada em Y. (*b*) A carga ligada em Y é transformada em uma carga ligada em Δ. (*c*) As cargas em paralelo ligadas em Δ são substituídas por uma carga equivalente ligada em Δ. (*d*) A carga ligada em Δ é transformada em uma carga ligada em Y.

Solução

Em primeiro lugar, convertemos a carga em Y em uma carga em Δ, como mostra a Figura 12.4-1*b*. Observe, por exemplo, que as duas cargas em Δ da Figura 12.4-1*b* têm uma impedância ligada entre os terminais A e B. Essas impedâncias estão em paralelo e podem ser substituídas por uma impedância equivalente. Isso permite substituir as cargas em Δ ligadas em paralelo por uma carga equivalente ligada em Δ, como mostra a Figura 12.4-1*c*. Finalmente, podemos converter a carga em Δ em uma carga em Y, como mostra a Figura 12.4-1*d*.

12.5 *O Circuito Y-Δ*

Considere agora o circuito Y-Δ da Figura 12.5-1. Aplicando a LKC aos nós da carga em Δ, vemos que a relação entre as correntes de linha e as correntes de fase é a seguinte:

$$\mathbf{I}_{aA} = \mathbf{I}_{AB} - \mathbf{I}_{CA}$$
$$\mathbf{I}_{bB} = \mathbf{I}_{BC} - \mathbf{I}_{AB}$$

e

$$\mathbf{I}_{cC} = \mathbf{I}_{CA} - \mathbf{I}_{B} \qquad (12.5\text{-}1)$$

O objetivo é calcular as correntes de linha e de fase da carga em função das tensões da fonte e das impedâncias da carga.

As correntes da carga em Δ podem ser calculadas a partir das tensões de linha, que estão aplicadas diretamente às impedâncias da carga. Assim, por exemplo, V_{AB} é aplicada a Z_3 e, portanto,

$$\mathbf{I}_{AB} = \frac{\mathbf{V}_{AB}}{\mathbf{Z}_3} \qquad (12.5\text{-}2)$$

Analogamente

$$\mathbf{I}_{CA} = \frac{\mathbf{V}_{CA}}{\mathbf{Z}_2} \quad \text{e} \quad \mathbf{I}_{BC} = \frac{\mathbf{V}_{BC}}{\mathbf{Z}_1} \qquad (12.5\text{-}3)$$

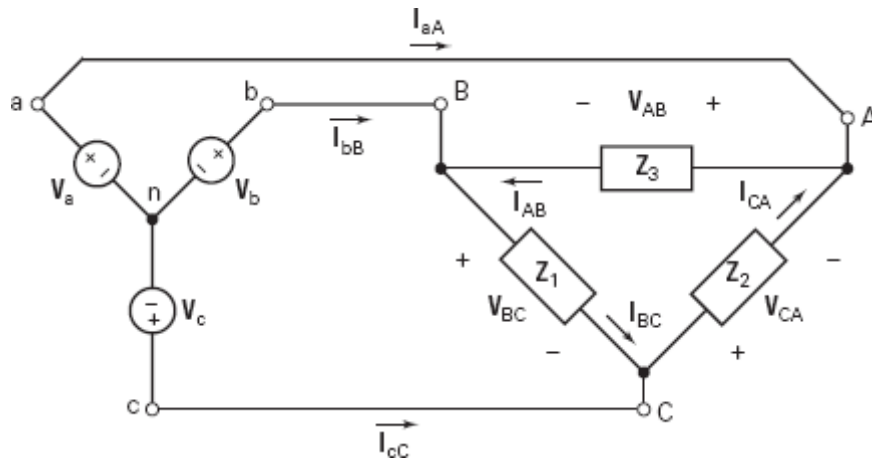



FIGURA 12.5-1 Circuito trifásico Y-Δ.

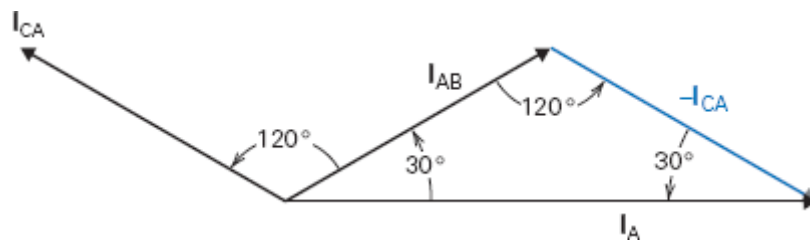



FIGURA 12.5-2 Diagrama fasorial das correntes em uma carga ligada em Δ.

Se a carga é equilibrada, as correntes de fase da carga têm a mesma amplitude e estão defasadas de 120º. Assim, por exemplo, se a sequência de fases da fonte trifásica é *abc* e $\mathbf{I}_{AB} = I\angle\phi$, temos $\mathbf{I}_{CA} = I\angle\phi + 120°$. A corrente de linha $\mathbf{I}_{aA}$ é dada por

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_{aA} &= \mathbf{I}_{AB} - \mathbf{I}_{CA} \\
&= I\cos\phi + jI\,\text{sen}\,\phi - I\cos(\phi + 120°) - jI\,\text{sen}\,(\phi + 120°) \\
&= -2I\,\text{sen}\,(\phi + 60°)\,\text{sen}\,(-60°) + j2I\cos(\phi + 60°)\,\text{sen}\,(-60°) \\
&= \sqrt{3}\,I\,[\text{sen}\,(\phi + 60°) - j\cos(\phi + 60°)] \\
&= \sqrt{3}\,I\,[\cos(\phi - 30°) - j\,\text{sen}\,(\phi - 30°)] \\
&= \sqrt{3}\,I\,\angle\phi - 30°\ \text{A}
\end{aligned} \qquad (12.5\text{-}4)$$

Assim,

$$|\mathbf{I}_{aA}| = \sqrt{3}|\mathbf{I}| \qquad (12.5\text{-}5)$$

$$I_L = \sqrt{3}I_p$$

e a amplitude da corrente de linha é $\sqrt{3}$ vezes maior que a amplitude da corrente de fase. Esse resultado também pode ser obtido a partir do diagrama fasorial da Figura 12.5-2. Em uma ligação em Δ, a corrente de linha está adiantada 30º em relação à corrente de fase e é $\sqrt{3}$ vezes maior. A tensão de linha é igual à tensão de fase.

EXEMPLO 12.5-1 Circuito Y-Δ Equilibrado

Considere o circuito trifásico da Figura 12.5-1. As tensões da fonte ligada em Y são

$$\mathbf{V}_a = \frac{220}{\sqrt{3}}\angle{-30^\circ}\ \text{V rms},\quad \mathbf{V}_b = \frac{220}{\sqrt{3}}\angle{-150^\circ}\ \text{V rms}\quad \text{e}\quad \mathbf{V}_c = \frac{220}{\sqrt{3}}\angle{90^\circ}\ \text{V rms}$$

A carga em Δ é equilibrada. A impedância de cada fase é $\mathbf{Z}_\Delta = 10\angle{-50^\circ}$ Ω. Determine as correntes de fase e de linha.

Solução

As tensões de linha podem ser calculadas a partir das tensões de fase da fonte:

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_{AB} &= \mathbf{V}_a - \mathbf{V}_b = \frac{220}{\sqrt{3}}\angle{-30^\circ} - \frac{220}{\sqrt{3}}\angle{-150^\circ} = 220\angle{0^\circ}\ \text{V rms}\\
\mathbf{V}_{BC} &= \mathbf{V}_b - \mathbf{V}_c = \frac{220}{\sqrt{3}}\angle{-150^\circ} - \frac{220}{\sqrt{3}}\angle{90^\circ} = 220\angle{-120^\circ}\ \text{V rms}\\
\mathbf{V}_{CA} &= \mathbf{V}_c - \mathbf{V}_a = \frac{220}{\sqrt{3}}\angle{90^\circ} - \frac{220}{\sqrt{3}}\angle{-30^\circ} = 220\angle{-240^\circ}\ \text{V rms}
\end{aligned}$$

As tensões de fase de uma carga ligada em Δ são iguais às tensões de linha. As correntes de fase são

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_{AB} &= \frac{\mathbf{V}_{AB}}{\mathbf{Z}} = \frac{220\angle{0^\circ}}{10\angle{-50^\circ}} = 22\angle{50^\circ}\ \text{A rms}\\
\mathbf{I}_{BC} &= \frac{\mathbf{V}_{BC}}{\mathbf{Z}} = \frac{220\angle{-120^\circ}}{10\angle{-50^\circ}} = 22\angle{-70^\circ}\ \text{A rms}\\
\mathbf{I}_{CA} &= \frac{\mathbf{V}_{CA}}{\mathbf{Z}} = \frac{220\angle{-240^\circ}}{10\angle{-50^\circ}} = 22\angle{-190^\circ}\ \text{A rms}
\end{aligned}$$

As correntes de linha são

$$\mathbf{I}_{aA} = \mathbf{I}_{AB} - \mathbf{I}_{CA} = 22\angle{50^\circ} - 22\angle{-190^\circ} = 22\sqrt{3}\angle{20^\circ}\ \text{A rms}$$

$$\mathbf{I}_{bB} = 22\sqrt{3}\angle{-100^\circ}\ \text{A rms}\quad \text{e}\quad \mathbf{I}_{cC} = 22\sqrt{3}\angle{-220^\circ}\ \text{A rms}$$

A Tabela 12.5-1 mostra as tensões e correntes em uma carga ligada em Δ.

Tabela 12.5-1 Tensões e Correntes em uma Carga em Δ

Tensões de fase	$\mathbf{V}_{AB} = V_{AB}\angle 0°$
Tensões de linha	$V_{AB} = V_L$ (tensão de linha = tensão de fase)
Correntes de fase	$\mathbf{I}_{AB} = \dfrac{\mathbf{V}_{AB}}{\mathbf{Z}_p} = \dfrac{\mathbf{V}_L}{\mathbf{Z}_\Delta} = I_p\angle -\theta$ em que $\mathbf{Z}_p = \mathbf{Z}/\theta$
	$\mathbf{I}_{BC} = \mathbf{I}_{AB}\angle -120°$
	$\mathbf{I}_{CA} = \mathbf{I}_{AB}\angle -240°$
Correntes de linha	$\mathbf{I}_A = \sqrt{3}I_p\angle -\theta - 30°$
	$\mathbf{I}_B = \sqrt{3}I_p\angle -\theta - 150°$
	$\mathbf{I}_C = \sqrt{3}I_p\angle -\theta + 90°$
	$I_L = \sqrt{3}I_p$

Nota: L = linha, p = fase.

EXERCÍCIO 12.5-1 Considere o circuito trifásico da Figura 12.51. As tensões da fonte ligada em Y são

$$\mathbf{V}_a = \frac{360}{\sqrt{3}}\angle -30° \text{ V rms}, \quad \mathbf{V}_b = \frac{360}{\sqrt{3}}\angle -150° \text{ V rms} \quad \text{e} \quad \mathbf{V}_c = \frac{360}{\sqrt{3}}\angle 90° \text{ V rms}$$

A carga ligada em Δ é equilibrada. A impedância de cada fase é $\mathbf{Z}_\Delta = 180\angle 45° \ \Omega$. Determine as correntes de fase e de linha para uma tensão de linha de 360 V rms.

Resposta Parcial: $\mathbf{I}_{AB} = 2\angle 45°$ A rms e $\mathbf{I}_{aA} = 3{,}46\angle 15°$ A rms

12.6 *Circuitos Trifásicos Equilibrados*

Temos apenas duas configurações práticas possíveis para circuitos trifásicos, a configuração Y-Y e a configuração Y-Δ, e podemos converter a segunda para a forma Y-Y. Assim, um circuito trifásico usado na prática pode sempre ser convertido para a forma Y-Y.

Os circuitos equilibrados são mais fáceis de analisar que os circuitos desequilibrados. Já vimos que os circuitos trifásicos Y-Y equilibrados podem ser analisados usando um circuito equivalente por fase.

O circuito da Figura 12.6-1*a* é um circuito Y-Δ equilibrado. A Figura 12.6-1*b* mostra o circuito Y-Y equivalente, no qual

$$\mathbf{Z}_Y = \frac{\mathbf{Z}_\Delta}{3}$$

Esse circuito Y-Y pode ser analisado usando o circuito equivalente por fase da Figura 12.6-1*c*.

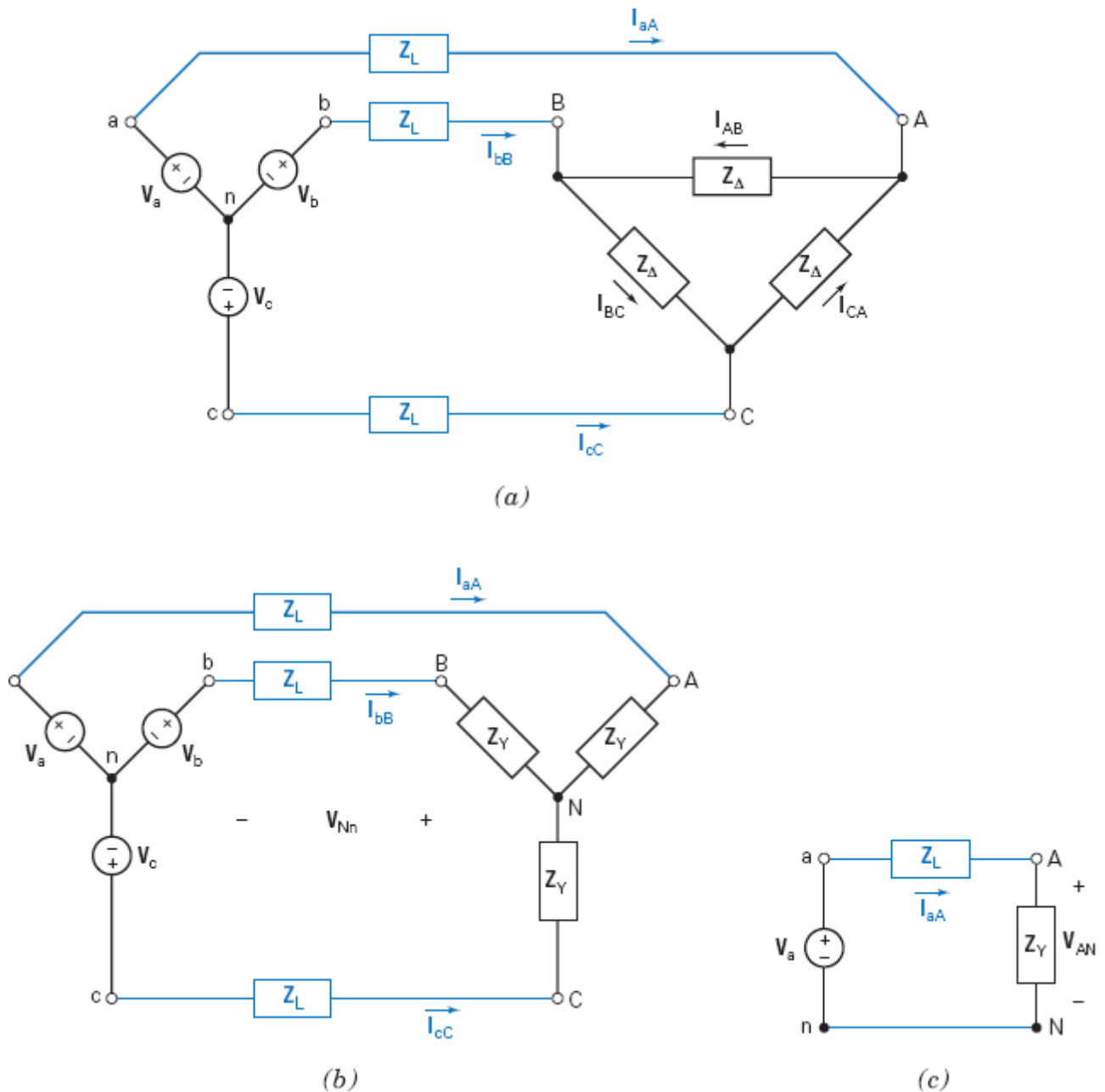



FIGURA 12.6-1 (*a*) Circuito Y-Δ; (*b*) circuito Y-Y equivalente; (*c*) circuito equivalente por fase.

EXEMPLO 12.6-1 Circuito Equivalente por Fase

A Figura 12.6-1*a* mostra um circuito trifásico Y-Δ equilibrado. As tensões de fase da fonte em Y são $V_a = 110\angle 0°$ V rms, $V_b = 110\angle -120°$ V rms e $V_c = 110\angle 120°$ V rms. As impedâncias da linha são todas iguais: $\mathbf{Z}_L = 10 + j5\ \Omega$. As impedâncias da carga em Δ são todas iguais: $\mathbf{Z}_\Delta = 75 + j225\ \Omega$. Determine as correntes de fase da carga.

Solução

Para começar, convertemos a carga em Δ em uma carga em Y usando a transformação Δ-Y da Tabela 12.4-1. As impedâncias da carga equivalente em Y são todas iguais:

$$\mathbf{Z}_Y = \frac{75 + j225}{3} = 25 + j75\ \Omega$$

O circuito equivalente por fase do circuito Y-Y aparece na Figura 12.6-1*c*. A corrente de linha é dada por

$$\mathbf{I}_{aA} = \frac{\mathbf{V}_a}{\mathbf{Z}_L + \mathbf{Z}_Y} = \frac{110 \angle 0^\circ}{(10 + j5) + (25 + j75)} = 1{,}26 \angle -66^\circ \text{ A rms} \qquad (12.6\text{-}1)$$

A corrente de linha $\mathbf{I}_{aA}$ calculada usando o circuito equivalente por fase é também a corrente de linha $\mathbf{I}_{aA}$ do circuito Y-Y e a corrente de linha $\mathbf{I}_{aA}$ do circuito Y-Δ. As outras correntes de linha do circuito Y-Y equilibrado têm a mesma amplitude, mas estão defasadas de 120º. Essas correntes de linha são

$$\mathbf{I}_{bB} = 1{,}26 \angle -186^\circ \text{ A rms} \quad \text{e} \quad \mathbf{I}_{cC} = 1{,}26 \angle 54^\circ \text{ A rms}$$

Para confirmar que o valor de $\mathbf{I}_{Bb}$ está correto, aplique a LKT à malha do circuito YY que começa no nó n, passa pelos nós b, B e N e volta ao nó n. A equação resultante é

$$\mathbf{V}_b = \mathbf{Z}_L\mathbf{I}_{bB} + \mathbf{Z}_Y\mathbf{I}_{bB} + \mathbf{V}_{Nn}$$

Como o circuito é equilibrado, $\mathbf{V}_{Nn} = 0$. Explicitando $\mathbf{I}_{bB}$, temos

$$\mathbf{I}_{bB} = \frac{\mathbf{V}_b}{\mathbf{Z}_L + \mathbf{Z}_Y} = \frac{110 \angle -120^\circ}{(10 + j5) + (25 + j75)} = 1{,}26 \angle -186^\circ \text{ A rms} \qquad (12.6\text{-}2)$$

Comparando as Eqs. 12.6-1 e 12.6-2, vemos que as correntes de linha do circuito YY equilibrado têm a mesma amplitude e estão defasadas de 120º.

As correntes de linha do circuito Y-Δ da Figura 12.6-1*a* são iguais às correntes de linha do circuito Y-Y da Figura 12.6-1*b* porque os circuitos Y-Δ e Y-Y são equivalentes.

A tensão $\mathbf{V}_{AN}$ do circuito equivalente por fase é

$$\mathbf{V}_{AN} = \mathbf{I}_{aA}\mathbf{Z}_Y = (1{,}26 \angle -66^\circ)(25 + j75) = 99{,}6 \angle 5^\circ \text{ V rms}$$

A tensão $\mathbf{V}_{AN}$ calculada usando o circuito equivalente por fase é também a tensão de fase $\mathbf{V}_{AN}$ do circuito Y-Y. As outras tensões de fase do circuito Y-Y equilibrado têm a mesma amplitude, mas estão defasadas de 120º. Essas tensões de fase são

$$\mathbf{V}_{BN} = 99{,}6 \angle -115^\circ \text{ V rms} \quad \text{e} \quad \mathbf{V}_{CN} = 99{,}6 \angle 125^\circ \text{ V rms}$$

As tensões de linha do circuito Y-Y são dadas por

$$\mathbf{V}_{AB} = \mathbf{V}_{AN} - \mathbf{V}_{BN} = 99{,}5 \angle 5^\circ - 99{,}5 \angle -115^\circ = 172 \angle 35^\circ \text{ V rms}$$
$$\mathbf{V}_{BC} = \mathbf{V}_{BN} - \mathbf{V}_{CN} = 99{,}5 \angle -115^\circ - 99{,}5 \angle 125^\circ = 172 \angle -85^\circ \text{ V rms}$$
$$\mathbf{V}_{CA} = \mathbf{V}_{CN} - \mathbf{V}_{AN} = 99{,}5 \angle 125^\circ - 99{,}5 \angle 5^\circ = 172 \angle 155^\circ \text{ V rms}$$

As tensões de fase de uma carga em Δ são iguais às tensões de linha. As correntes de fase são

$$\mathbf{I}_{AB} = \frac{\mathbf{V}_{AB}}{\mathbf{Z}_\Delta} = \frac{172 \angle 35^\circ}{75 + j225} = 0{,}727 \angle -36^\circ \text{ A rms}$$
$$\mathbf{I}_{BC} = \frac{\mathbf{V}_{BC}}{\mathbf{Z}_\Delta} = \frac{172 \angle -85^\circ}{75 + j225} = 0{,}727 \angle -156^\circ \text{ A rms}$$
$$\mathbf{I}_{CA} = \frac{\mathbf{V}_{CA}}{\mathbf{Z}_\Delta} = \frac{172 \angle 155^\circ}{75 + j225} = 0{,}727 \angle -84^\circ \text{ A rms}$$

EXERCÍCIO 12.6-1 A Figura 12.6-1*a* mostra um circuito trifásico Y-Δ equilibrado. As tensões de fase da fonte em Y são $\mathbf{V}_a = 110 \angle 0^\circ$ V rms, $\mathbf{V}_b = 110 \angle -120^\circ$ V rms e $\mathbf{V}_c = 110 \angle 120^\circ$ V rms. As impedâncias da linha são todas iguais: $\mathbf{Z}_L = 10 + j25\ \Omega$. As impedâncias da carga em Δ são todas iguais: $\mathbf{Z}_\Delta = 150 + j270\ \Omega$. Determine as correntes de fase da carga.

Resposta: $\mathbf{I}_{AB} = 0{,}49\angle{-32{,}5°}$ A rms, $\mathbf{I}_{BC} = 0{,}49\angle{-152{,}5°}$ A rms e $\mathbf{I}_{CA} = 0{,}49\angle{87{,}5°}$ A rms.

12.7 *Potência Instantânea e Potência Média para uma Carga Trifásica Equilibrada*

Uma vantagem da alimentação trifásica está no fato de que a energia é transferida para a carga sem grandes flutuações. Considere uma carga equilibrada de resistência R. A *potência instantânea* é

$$p(t) = \frac{v_{ab}^2}{R} + \frac{v_{bc}^2}{R} + \frac{v_{ca}^2}{R} \qquad (12.7\text{-}1)$$

em que $v_{ab} = V \cos \omega t$ e as outras tensões de fase têm a mesma amplitude e estão defasadas de –120º e +120º em relação a v_{ab}. Como

$$\cos^2 \alpha t = (1 + \cos 2\alpha)/2$$

temos

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{V^2}{2R}[1 + \cos 2\omega t + 1 + \cos 2(\omega t - 120°) + 1 + \cos 2(\omega t - 240°)] \\ &= \frac{3V^2}{2R} + \frac{V^2}{2R}[\cos 2\omega t + \cos(2\omega t - 240°) + \cos(2\omega t - 480°)] \end{aligned} \qquad (12.7\text{-}2)$$

O termo entre colchetes é igual a zero para qualquer valor de *t*. Assim,

$$p(t) = \frac{3V^2}{2R}$$

A *potência instantânea* fornecida a uma carga trifásica equilibrada é constante.

A potência total fornecida a uma carga trifásica equilibrada pode ser calculada usando o circuito equivalente por fase. Para determinar a potência complexa total fornecida a uma carga trifásica equilibrada, por exemplo, basta multiplicar por 3 a potência complexa fornecida à carga do circuito equivalente por fase.

Considere novamente a Figura 12.6-1. A Figura 12.6-1*a* mostra um circuito YΔ equilibrado. A Figura 12.6-1*b* mostra o circuito Y-Y equivalente, obtido usando a transformação Δ-Y da Tabela 12.4-1. A Figura 12.6-1*c* mostra o circuito equivalente por fase correspondente ao circuito Y-Y. A tensão $\mathbf{V}_{AN} = V_P \angle \theta_{AV}$ e a corrente $\mathbf{I}_{aA} = I_L \angle \theta_{AI}$ podem ser obtidas usando o circuito equivalente por fase. A tensão $\mathbf{V}_{AN}$ e a corrente $\mathbf{I}_{aA}$ são a tensão de fase e a corrente de linha da carga em Y da Figura 12.6-1*b*. A potência média total fornecida à carga em Y equilibrada é dada por

$$P_Y = 3\,P_A = 3\,V_P I_L \cos(\theta_{AV} - \theta_{AI}) = 3\,V_P I_L \cos(\theta) \qquad (12.7\text{-}3)$$

em que θ é o ângulo entre a tensão de fase e a corrente de linha, cos θ é o fator de potência e V_P e I_P são os valores eficazes da tensão de fase e da corrente de linha.

É mais fácil medir a corrente de linha e a tensão de linha de um circuito que a corrente de fase e a tensão de fase. Lembre-se de que a corrente de linha é igual à corrente de fase e a tensão de fase é $V_P = V_L/\sqrt{3}$ para uma carga em Y. Assim,

$$P = 3\frac{V_L}{\sqrt{3}} I_L \cos\theta = \sqrt{3}\,V_L I_L \cos\theta \qquad (12.7\text{-}4)$$

A potência total fornecida à carga em Δ da Figura 12.6-1*a* é

$$P = 3P_{AB} = 3V_{AB}I_{AB}\cos\theta = 3\left(\sqrt{3}V_P\right)\frac{I_L}{\sqrt{3}}\cos\theta = 3\,V_P I_L\cos\theta \qquad (12.7\text{-}5)$$

Resumindo, a potência média total fornecida à carga em Δ da Figura 12.6-1*a* é igual à potência média total fornecida à carga em Y da Figura 12.6-1*b*. Isso já era de se esperar, já que os dois circuitos são equivalentes. Note que as informações necessárias para calcular a potência fornecida a uma carga equilibrada, em Y ou em Δ, foram obtidas no circuito equivalente por fase.

EXEMPLO 12.7-1 Potência Fornecida à Carga

A Figura 12.6-1*a* mostra um circuito trifásico Y-Δ equilibrado. As tensões de fase da fonte em Y são $\mathbf{V}_a = 110\angle 0°$ V rms, $\mathbf{V}_b = 110\angle -120°$ V rms e $\mathbf{V}_c = 110\angle 120°$ V rms. As impedâncias da linha são todas iguais: $\mathbf{Z}_L = 10 + j5\ \Omega$. As impedâncias da carga em Δ também são todas iguais: $\mathbf{Z}_\Delta = 75 + j225\ \Omega$. Determine a potência média fornecida à carga.

Solução

O circuito foi analisado no Exemplo 12.6-1. A análise mostrou que

$$\mathbf{I}_{aA} = 1{,}26\angle -66°\ \text{A rms}$$

e

$$\mathbf{V}_{AN} = 99{,}6\angle 5°\ \text{V rms}$$

A potência média total fornecida à carga é dada pela Eq. 12.7-3:

$$P = 3(99{,}6)(1{,}26)\cos(5° - (-66°)) = 122{,}6\ \text{W}$$

EXEMPLO 12.7-2 Carga Trifásica

Uma carga trifásica equilibrada recebe 15 kW com um fator de potência de 0,8 atrasado e a tensão de linha é 480 V rms. Represente a carga como uma carga em Y.

Solução

Vamos representar a carga como três impedâncias ligadas em Y. Cada impedância recebe um terço da potência total fornecida à carga. A potência complexa recebida por uma das impedâncias é dada por

$$\mathbf{S} = P + j\frac{P}{pf}\,\text{sen}\left(\cos^{-1}(pf)\right) = 5 + j\frac{5}{0{,}8}\,\text{sen}\left(\cos^{-1}(0{,}8)\right) = 5 + j3{,}75\ \text{kVA}$$

A tensão de uma das impedâncias é a tensão de fase

$$\mathbf{V}_P = \frac{|\mathbf{V}_L|}{\sqrt{3}}\angle\phi = \frac{480}{\sqrt{3}}\angle\phi = 277\angle\phi\ \text{V rms}$$

O ângulo φ da tensão de fase não foi especificado. As tensões das três impedâncias têm o mesmo módulo e ângulos diferentes. A corrente em uma das impedâncias é dada por

$$\mathbf{I} = \left(\frac{\mathbf{S}}{\mathbf{V}_P}\right)^* = \left(\frac{6250\,\underline{/36{,}9^\circ}}{277\,\underline{/\phi}}\right)^* = 22{,}56\,\underline{/(\phi - 36{,}9^\circ)}\text{ A rms}$$

Finalmente, a impedância de cada uma das cargas ligadas em Y é

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}_P}{\mathbf{I}} = \frac{277\,\underline{/\phi}}{22{,}56\,\underline{/(\phi - 36{,}9^\circ)}} = 12{,}28\,\underline{/36{,}9^\circ} = 9{,}82 + j7{,}37\ \Omega$$

EXEMPLO 12.7-3 Circuito Trifásico

Um circuito trifásico equilibrado é formado por uma fonte em Y ligada a uma carga equilibrada. O valor de cada uma das impedâncias de linha é $\mathbf{Z}_L = 2 + j0{,}5\ \Omega$. A carga recebe 15 kW com um fator de potência de 0,8 atrasado e a tensão de linha é 480 V rms. Determine a tensão da fonte e a potência complexa fornecida pela fonte.

Solução

Como a carga é a mesma do Exemplo 12.7-2, podemos analisar este circuito trifásico usando o circuito equivalente por fase da Figura 12.6-1*c* com $\mathbf{Z}_L = 2 + j0{,}5\ \Omega$ e $\mathbf{Z}_Y = 9{,}82 + j7{,}37\ \Omega$. Como no Exemplo 12.7-2, a corrente de linha depende da potência recebida pela carga e da tensão de linha e é dada por

$$\mathbf{I}_{aA} = 22{,}56\,\underline{/(\phi - 36{,}9^\circ)}\text{ A rms}$$

em que o ângulo φ não foi especificado. De acordo com a LKT, uma das tensões de fase é

$$\mathbf{V}_a = (\mathbf{Z}_L + \mathbf{Z}_Y)\mathbf{I}_{aA} = (2 + j0{,}5 + 9{,}82 + j7{,}37)22{,}56\,\underline{/(\phi - 36{,}9^\circ)} = 320{,}6\,\underline{/(\phi - 3{,}3^\circ)}\text{ V rms}$$

e, portanto, as outras duas tensões de fase são

$$\mathbf{V}_b = 320{,}6\underline{/(\phi - 123{,}3^\circ)}\text{ V rms e }\mathbf{V}_c = 320{,}6\underline{/\phi + 116{,}7^\circ)}\text{ V rms}$$

A potência complexa fornecida pela fonte é

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_{\text{fonte}} = 3\mathbf{V}_a\mathbf{I}_{aA}^* = 3(320{,}6\,\underline{/(\phi - 3{,}3)})(22{,}56\,\underline{/(\phi - 36{,}9^\circ)})^* &= 21{,}7\,\underline{/33{,}6^\circ} \\ &= 18{,}1 + j12{,}0\text{ kVa}\end{aligned}$$

Vale a pena chamar a atenção para o fato de que a potência fornecida pela fonte não depende do ângulo φ. Sendo assim, é conveniente fazer $\varphi = 3{,}3^\circ$, caso em que os ângulos das tensões de fase passam a ser 0°, –120° e 120°.

EXERCÍCIO 12.7-1 A Figura 12.6-1*a* mostra um circuito trifásico Y-Δ equilibrado. As tensões de fase da fonte em Y são $\mathbf{V}_a = 110\underline{/0^\circ}$ V rms, $\mathbf{V}_b = 110\underline{/-120^\circ}$ V rms e $\mathbf{V}_c = 110\underline{/120^\circ}$ V rms. As impedâncias da linha são todas iguais: $\mathbf{Z}_L = 10 + j25\ \Omega$. As impedâncias da carga em Δ também são todas iguais: $\mathbf{Z}_\Delta = 150 + j270\ \Omega$. Determine a potência média fornecida à carga.

Resposta Intermediária: $\mathbf{I}_{aA} = 0{,}848\underline{/-62{,}5^\circ}$ A rms e $\mathbf{V}_{AN} = 87{,}3\underline{/-1{,}5^\circ}$ V rms

Resposta: $P = 107{,}9$ W

12.8 *Medida de Potência Usando o Método dos Dois Wattímetros*

Em muitos casos (os motores trifásicos são um bom exemplo), não é possível medir diretamente a corrente de fase ou a tensão de fase de uma carga trifásica. Normalmente, a potência total é medida ligando um wattímetro a cada fase e somando os resultados (ou, no caso de uma carga equilibrada, ligando um wattímetro a uma das fases e multiplicando o resultado por 3). Quando as fases não estão acessíveis, devemos determinar a potência a partir das correntes de linha e das tensões de linha. Um wattímetro fornece uma leitura de $VI \cos \theta$, em que V e I são os valores eficazes da tensão e da corrente nas bobinas de tensão e de corrente do aparelho, respectivamente, e θ é o ângulo de fase entre a tensão e a corrente. Como será demonstrado a seguir, dois wattímetros são suficientes para medir a potência fornecida à carga trifásica a partir da medida de tensões e correntes de linha, como na Figura 12.8-1. Vamos usar *bc* para designar a bobina de corrente e *bt* para designar a bobina de tensão.

O wattímetro 1 mede o valor de

$$P_1 = V_{AB} I_A \cos \theta_1 \qquad (12.8\text{-}1)$$

e o wattímetro 2 mede o valor de

$$P_2 = V_{CB} I_C \cos \theta_2 \qquad (12.8\text{-}2)$$

Para uma sequência de fases *abc* e uma carga equilibrada,

$$\theta = \theta + 30°$$

e

$$\theta_2 = \theta - 30° \qquad (12.8\text{-}3)$$

em que θ é o ângulo entre a corrente de fase e a tensão de fase para a fase *a* da fonte trifásica.

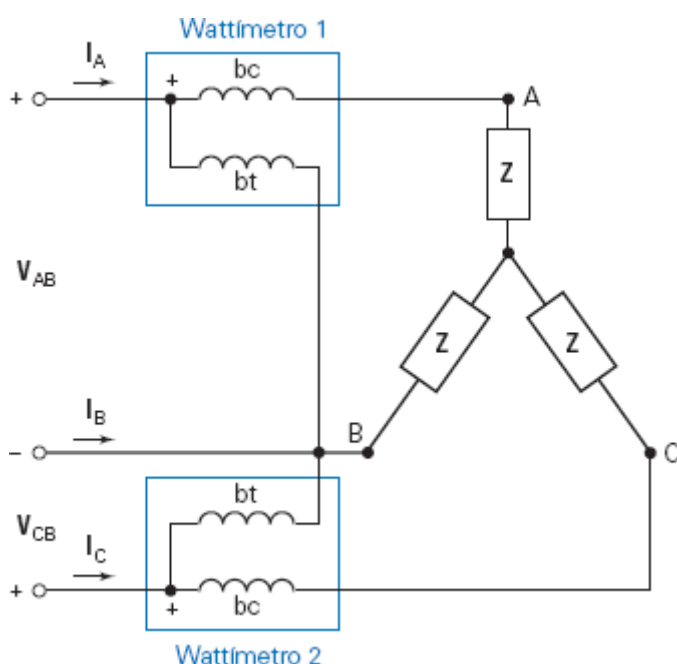



FIGURA 12.8-1 Ligação de dois wattímetros a uma carga trifásica em Y.

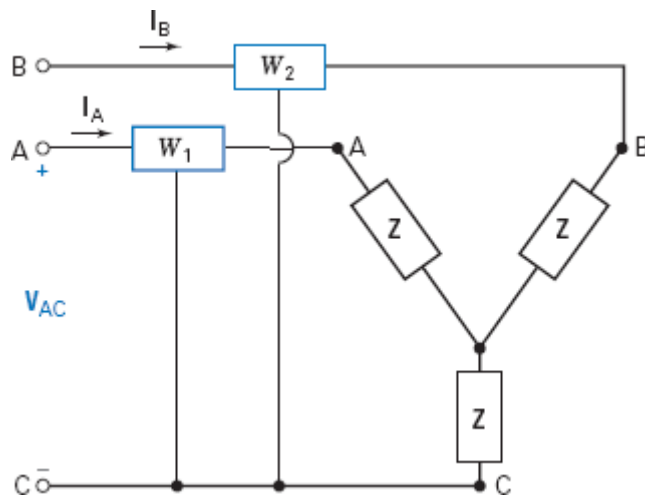



FIGURA 12.8-2 A ligação de dois wattímetros do Exemplo 12.8-1.

Assim,

$$\begin{aligned} P &= P_1 + P_2 = V_L I_L \cos(\theta + 30°) + V_L I_L \cos(\theta - 30°) \\ &= V_L I_L [\cos\theta \cos 30° - \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen} 30° + \cos\theta \cos 30° + \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen} 30°] \\ &= 2\, V_L I_L \cos\theta \cos 30° = \sqrt{3}\, V_L I_L \cos\theta \end{aligned} \tag{12.8-4}$$

que é a potência média total do circuito trifásico. A Eq. 12.8-4 foi demonstrada para um circuito equilibrado, mas o resultado é válido para qualquer circuito trifásico de três fios, mesmo que seja desequilibrado ou que a tensão não seja senoidal.

O ângulo do fator de potência, θ, de um circuito trifásico equilibrado pode ser determinado a partir da leitura dos dois wattímetros da Figura 12.8-2.

Somando e subtraindo as Eqs. 12.8-1 e 12.8-2 e levando em conta a Eq. 12.8-3, obtemos

$$\begin{aligned} P_1 + P_2 &= V_L I_L [\cos(\theta + 30°) + \cos(\theta - 30°)] \\ &= V_L I_L \; 2\cos\theta \cos 30° \end{aligned} \tag{12.8-5}$$

e, analogamente

$$P_1 - P_2 = V_L I_L (-2 \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen} 30°) \tag{12.8-6}$$

Dividindo a Eq. 12.8-5 pela Eq. 12.8-6, obtemos

$$\frac{P_1 + P_2}{P_1 - P_2} = \frac{2\cos\theta \cos 30°}{-2 \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen} 30°} = \frac{-\sqrt{3}}{\tan\theta}$$

e, portanto

$$\tan\theta = \sqrt{3}\frac{P_2 - P_1}{P_2 + P_1} \tag{12.8-7}$$

em que θ é o ângulo do fator de potência.

EXEMPLO 12.8-1 Método dos Dois Wattímetros

O método dos dois wattímetros é usado, como mostra a Figura 12.8-2, para medir a potência total fornecida a uma carga Y com $Z = 10\angle 45°\ \Omega$; a tensão de linha da fonte é 220 V rms. Determine a leitura de cada wattímetro e a potência total.

Solução

A tensão de fase da fase A é

$$\mathbf{V}_A = \frac{220}{\sqrt{3}} \angle -30^\circ \text{ V rms}$$

e, portanto, a corrente de linha da fase A é

$$\mathbf{I}_A = \frac{\mathbf{V}_A}{\mathbf{Z}} = \frac{220 \angle -30^\circ}{10\sqrt{3} \angle 45^\circ} = 12{,}7 \angle -75^\circ \text{ A rms}$$

Isso significa que a corrente de linha da fase B é

$$\mathbf{I}_B = 12{,}7 \angle -195^\circ \text{ A rms}$$

As tensões de linha são $\mathbf{V}_{AB} = 220 \angle 0^\circ$ V rms, $\mathbf{V}_{CA} = 220 \angle +120^\circ$ V rms e $\mathbf{V}_{BC} = 220 \angle -120^\circ$ V rms. A leitura do primeiro wattímetro é

$$P_1 = I_A V_{AC} \cos\theta_1 = 12{,}7(220)\cos 15^\circ = 2698 \text{ W}$$

Como $\mathbf{V}_{CA} = 220 \angle +120^\circ$, $\mathbf{V}_{AC} = 220 \angle -60^\circ$. Assim, o ângulo θ_1 entre $\mathbf{V}_{AC}$ e $\mathbf{I}_A$ é 15°. A leitura do segundo wattímetro é

$$P_2 = I_B V_{BC} \cos\theta_2 = 12{,}7(220)\cos 75^\circ = 723 \text{ W}$$

em que θ_2 é o ângulo entre $\mathbf{I}_B$ e $\mathbf{V}_{BC}$. A potência total é

$$P = P_1 + P_2 = 3421 \text{ W}$$

Observe que todos os cálculos foram executados desprezando a potência dissipada pelos wattímetros.

EXEMPLO 12.8-2 Método dos Dois Wattímetros

As leituras dos dois wattímetros da Figura 12.8-2 são $P_1 = 60$ kW e $P_2 = 180$ W, respectivamente. Determine o fator de potência do circuito.

Solução

De acordo com a Eq. 12.8-7, temos

$$\tan\theta = \sqrt{3}\frac{P_2 - P_1}{P_2 + P_1} = \sqrt{3}\frac{120}{240} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866$$

Assim, temos $\theta = 40{,}9^\circ$ e o fator de potência é

$$fp = \cos\theta = 0{,}756$$

O fato de que o ângulo θ é positivo mostra que o fator de potência é atrasado. Quando θ é negativo, o fator de potência é adiantado.

EXERCÍCIO 12.8-1 A corrente de linha de uma carga trifásica equilibrada é 24 A rms, a tensão de linha é 450 V rms e o fator de potência é 0,47 atrasado. Se dois wattímetros são ligados da forma mostrada na Figura 12.8-2, determine a leitura de cada medidor e a potência total fornecida à carga.

Resposta: $P_1 = -371$ W, $P_2 = 9162$ W e $P_3 = 8791$ W

EXERCÍCIO 12.8-2 Dois wattímetros são ligados como na Figura 12.8-2 e as leituras são P_1 = 60 kW e P_2 = 40 kW. Determine (a) a potência total; (b) o fator de potência.

***Respostas:* (a)** 100 kW; **(b)** 0,945 adiantado

12.9 *Como Podemos Testar . . .?*

Os engenheiros são frequentemente encarregados de verificar se a solução de um problema está correta. As soluções de problemas de projeto, por exemplo, devem ser verificadas para confirmar que todas as especificações estão sendo atendidas. Além disso, os resultados obtidos com o auxílio de computadores devem ser revistos para evitar possíveis erros na digitação dos dados e as afirmações dos vendedores a respeito dos seus produtos devem ser confirmadas.

Os estudantes de engenharia muitas vezes também precisam verificar se os resultados que obtiveram estão corretos. Às vezes falta muito pouco tempo para terminar um exame e é importante poder identificar rapidamente as questões que precisam ser refeitas.

Os exemplos a seguir ilustram algumas técnicas que podem ser usadas para verificar se as soluções de problemas do tipo discutido neste capítulo estão corretas.

EXEMPLO 12.9-1 Como Podemos Verificar se a Análise de um Circuito Trifásico Está Correta?

A Figura 12.9-1*a* mostra um circuito trifásico equilibrado. Um programa de computador analisou o circuito e forneceu as tensões e correntes dos componentes que aparecem na Figura 12.9-1*b*. **Como podemos verificar** se os resultados estão corretos?

Componente	Tensão	Corrente
V1 1 0 10 $\angle 0$	10 $\angle 0$	0,67 $\angle 127$
V2 2 0 10 $\angle 120$	10 $\angle 120$	0,67 $\angle 113$
V3 3 0 10 $\angle -120$	10 $\angle -120$	0,67 $\angle 7$
R1 1 4 9	6 $\angle -53$	0,67 $\angle -53$
R2 2 5 9	6 $\angle 67$	0,67 $\angle 67$
R3 3 6 9	6 $\angle -173$	0,67 $\angle -173$
L1 4 7 4	8 $\angle 37$	0,67 $\angle -53$
L2 5 7 4	8 $\angle 157$	0,67 $\angle 67$
L3 6 7 4	8 $\angle 83$	0,67 $\angle -173$

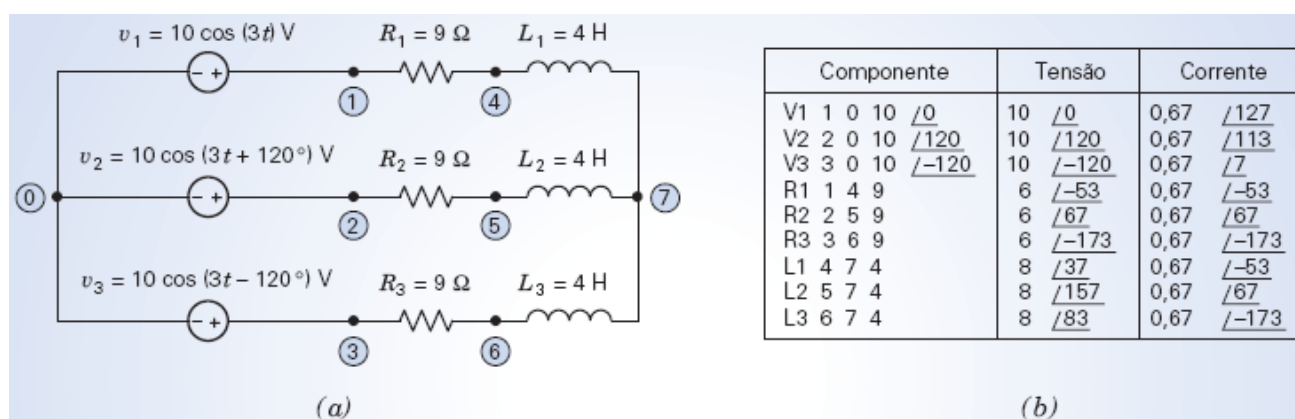



FIGURA 12.9-1 (*a*) Circuito trifásico. (*b*) Resultados de uma análise em computador.

Solução

Como o circuito é equilibrado, pode ser analisado usando um circuito equivalente por fase. O circuito equivalente por fase apropriado para este exemplo é o que aparece na Figura 12.9-2. O circuito pode ser analisando escrevendo uma equação de malha:

$$10 = (9 + j12)\mathbf{I}_L(\omega)$$

ou

$$\mathbf{I}_L(\omega) = 0{,}67e^{-j53^\circ}\text{ A}$$

em que $\mathbf{I}_L(\omega)$ é o fasor correspondente à corrente do indutor. A tensão do indutor é dada por

$$\mathbf{V}_L(\omega) = j12\,\mathbf{I}_L(\omega) = 8e^{j37^\circ}\text{ V}$$

A tensão do resistor é dada por

$$\mathbf{V}_R(\omega) = 9\,\mathbf{I}_L(\omega) = 6e^{-j53^\circ}\ \text{V}$$

Esses valores são os mesmos que foram fornecidos pelo computador para a tensão e a corrente em L_1 e para a tensão em R_1. Assim, concluímos que os resultados fornecidos pelo computador estão corretos.

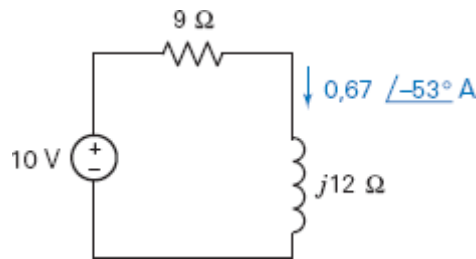



FIGURA 12.9-2 Circuito equivalente por fase.

EXEMPLO 12.9-2 Como Podemos Testar Circuitos Trifásicos Desequilibrados?

Uma análise em computador do circuito da Figura 12.9-3 mostra que $\mathbf{V}_{Nn}(\omega) = 12{,}67\angle 174{,}6^\circ$ V. Como nesta análise em computador não foram usados valores rms, 12,67 é a amplitude da tensão senoidal $v_{Nn}(t)$ e não o valor eficaz. Verifique se a tensão $\mathbf{V}_{Nn}(\omega)$ está correta.

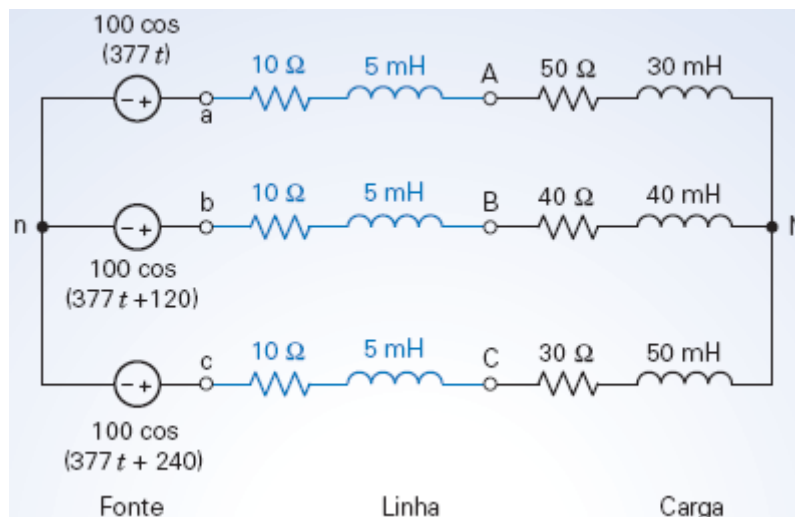



FIGURA 12.9-3 Circuito trifásico.

Solução

Este resultado pode ser verificado escrevendo e resolvendo uma equação de nó para calcular $\mathbf{V}_{Nn}(\omega)$, mas é mais fácil verificar se a LKC é satisfeita no nó N.

Em primeiro lugar, calculamos as três correntes de linha:

$$\mathbf{I}_A(\omega) = \frac{100 - \mathbf{V}_{Nn}(\omega)}{60 + j(377)(0{,}035)} = 1{,}833\angle -13^\circ\ \text{A}$$

$$\mathbf{I}_B(\omega) = \frac{100\angle 120^\circ - \mathbf{V}_{Nn}(\omega)}{50 + j(377)(0{,}045)} = 1{,}766\angle 94{,}9^\circ\ \text{A}$$

$$\mathbf{I}_C(\omega) = \frac{100\angle -120^\circ - \mathbf{V}_{Nn}(\omega)}{40 + j(377)(0{,}055)} = 2{,}118\angle -140{,}5^\circ\ \text{A}$$

Em seguida, aplicamos a LKC ao nó N para obter

$$1{,}833\ \angle{-13^\circ} + 1{,}766\ \angle{95{,}9^\circ} + 2{,}118\ \angle{-140{,}5^\circ} = 0\text{A}$$

Como a LKC é satisfeita no nó N, a tensão de nó fornecida pelo programa de computador está correta.

Podemos também verificar se a potência média é conservada. Lembre-se de que neste exemplo estão sendo usados valores de pico e não valores eficazes. Em primeiro lugar, determinamos a potência fornecida pela fonte:

$$\mathbf{I}_A(\omega) = 1{,}833\ \angle{-13^\circ}\ \text{A e}\ \mathbf{V}_{an}(\omega) = 100\ \angle{0^\circ}\ \text{V};\ \text{logo}\ P_a = \frac{(100)(1{,}833)}{2}\cos(0^\circ - (-13^\circ)) = 89{,}3\ \text{W}$$

$$\mathbf{I}_B(\omega) = 1{,}766\ \angle{94{,}9^\circ}\ \text{A e}\ \mathbf{V}_{bn}(\omega) = 100\ \angle{120^\circ}\ \text{V};\ \text{logo}\ P_b = \frac{(100)(1{,}766)}{2}\cos(120^\circ - (94{,}9^\circ)) = 80\ \text{W}$$

$$\mathbf{I}_C(\omega) = 2{,}118\ \angle{-140{,}5^\circ}\ \text{A e}\ \mathbf{V}_{cn}(\omega) = 100\ \angle{240^\circ}\ \text{V};\ \text{logo}\ P_c = \frac{(100)(2{,}118)}{2}\cos(0^\circ + 140{,}5^\circ) = 99{,}2\ \text{W}$$

A potência fornecida pela fonte é 89,3 + 80 + 99,2 = 268,5 W.

Em seguida, determinamos a potência fornecida à carga:

$$\mathbf{I}_A(\omega) = 1{,}833\ \angle{-13^\circ}\ \text{A}\quad \text{e}\quad R_A = 50\ \Omega;\ \text{logo}\ P_A = \frac{1{,}833^2}{2}50 = 84{,}0\ \text{W}$$

$$\mathbf{I}_B(\omega) = 1{,}766\ \angle{94{,}9^\circ}\ \text{A}\quad \text{e}\quad R_B = 40\ \Omega;\ \text{logo}\ P_B = \frac{1{,}766^2}{2}40 = 62{,}4\ \text{W}$$

$$\mathbf{I}_C(\omega) = 2{,}118\ \angle{-140{,}5^\circ}\ \text{A}\quad \text{e}\quad R_C = 30\ \Omega;\ \text{logo}\ P_C = \frac{2{,}118^2}{2}30 = 67{,}3\ \text{W}$$

A potência fornecida à carga é 84 + 62,4 + 67,3 = 213,7 W.

As potências perdidas nas três linhas são

$$\mathbf{I}_A(\omega) = 1{,}833\ \angle{-13^\circ}\ \text{A}\quad \text{e}\quad R_{aA} = 10\ \Omega;\ \text{logo}\ P_{aA} = \frac{1{,}833^2}{2}10 = 16{,}8\ \text{W}$$

$$\mathbf{I}_B(\omega) = 1{,}766\ \angle{94{,}9^\circ}\ \text{A}\quad \text{e}\quad R_{bB} = 10\ \Omega;\ \text{logo}\ P_{bB} = \frac{1{,}766^2}{2}10 = 15{,}6\ \text{W}$$

$$\mathbf{I}_C(\omega) = 2{,}118\ \angle{-140{,}5^\circ}\ \text{A}\quad \text{e}\quad R_{cC} = 10\ \Omega;\ \text{logo}\ P_{cC} = \frac{2{,}118^2}{2}10 = 22{,}4\ \text{W}$$

A potência total perdida é, portanto, 16,8 + 15,6 + 22,4 = 54,8 W.

A potência fornecida pela fonte é igual à soma da potência perdida na linha com a potência fornecida à carga. Assim, concluímos que a tensão de nó fornecida pelo computador está correta.

12.10 Exemplo de Projeto Correção do Fator de Potência

A Figura 12.10-1 mostra um circuito trifásico. Os capacitores foram incluídos para melhorar o fator de potência da carga. Precisamos determinar o valor da capacitância *C* para que o fator de potência seja 0,9 atrasado.

Descreva a Situação e as Hipóteses

1. O circuito é excitado por fontes senoidais, todas com a mesma frequência, 60 Hz ou 377 rad/s. O circuito é linear e está no regime estacionário. Fasores podem ser usados para analisar este tipo de circuito.
2. O circuito é um circuito trifásico equilibrado. Um circuito equivalente por fase pode ser usado para analisar esse tipo de circuito.
3. A carga pode ser dividida em duas partes. A parte constituída por resistores e indutores está ligada em Y. A parte constituída por capacitores está ligada em Δ. Uma transformação Δ-Y pode ser usada para simplificar a carga.

O circuito equivalente por fase aparece na Figura 12.10-2.

Estabeleça a Meta

Determinar o valor de *C* necessário para corrigir o fator de potência para 0,9 atrasado.

Formule um Plano

A correção do fator de potência foi discutida no Capítulo 11. De acordo com a Eq. 11.6-5, a reatância X_1 necessária para corrigir o fator de potência de uma carga é dada por

$$X_1 = \frac{R^2 + X^2}{R \tan\left(\cos^{-1} fpc\right) - X}$$

em que *R* e *X* são as partes real e imaginária da impedância da carga antes da correção do fator de potência e *fpc* é o fator de potência corrigido. Depois que essa equação é usada para calcular X_1, a capacitância *C* pode ser calculada a partir de X_1. Observe que X_1 é a reatância dos capacitores ligados em Y, enquanto, de acordo com a Figura 12.10-2, os capacitores usados para melhorar o fator de potência da carga estão ligados em Δ. Por isso, vamos ter ainda que calcular o valor equivalente dos capacitores ligados em Δ.

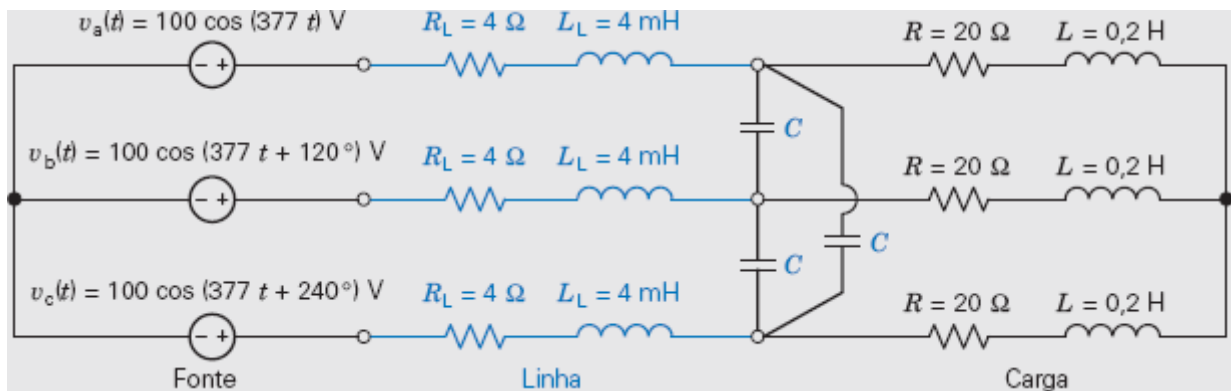



FIGURA 12.10-1 Circuito trifásico equilibrado.

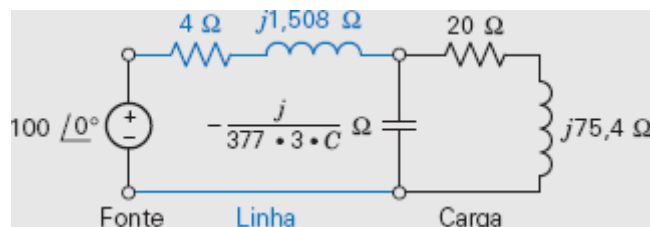



FIGURA 12.10-2 Circuito equivalente por fase.

Execute o Plano

Observe que $\mathbf{Z} = R + jX = 20 + j75{,}4\ \Omega$. Assim, a reatância X_1 necessária para corrigir o fator de potência é

$$X_1 = \frac{20^2 + 75{,}4^2}{20 \tan\left(\cos^{-1} 0{,}9\right) - 75{,}4} = -92{,}6$$

Como, de acordo com a Tabela 12.4-1, a relação entre uma impedância ligada em Y e uma impedância equivalente ligada em Δ é $\mathbf{Z}_Y = \mathbf{Z}_\Delta/3$, a capacitância do capacitor equivalente ligado em Δ é $3C$.

Finalmente, como $X_1 = 1/3C\omega$, temos

$$C = \frac{1}{\omega \cdot 3 \cdot X_1} = -\frac{1}{377 \cdot 3(-92{,}6)} = 9{,}548\ \mu\text{F}$$

Verifique se a Solução Proposta Está Correta

Para $C = 9{,}548\ \mu$F, a impedância de uma fase da carga equivalente ligada em Y é

$$\mathbf{Z}_Y = \frac{\dfrac{1}{j377 \times 3 \times C}(20 + j75{,}4)}{\dfrac{1}{j377 \times 3 \times C} + (20 + j75{,}4)} = 246{,}45 + j119{,}4$$

O valor do fator de potência é

$$fp = \cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{119{,}4}{246{,}45}\right)\right) = 0{,}90$$

e, portanto, a especificação foi satisfeita.

12.11 RESUMO

- A geração e transmissão de energia elétrica são mais eficientes em sistemas trifásicos, que utilizam três tensões de mesma amplitude e frequência, defasadas de 120º.
- Uma fonte trifásica é formada por três fontes de tensão senoidais ligadas em Y ou por três fontes de tensão senoidais ligadas em Δ. Analogamente, a carga de um circuito trifásico é formada por impedâncias ligadas em Y ou em Δ. A linha de transmissão usada para ligar a fonte à carga pode ter três ou quatro fios.
- Os circuitos trifásicos podem ser analisados, usando fasores e impedâncias, para determinar a resposta *estacionária* do circuito. Estamos particularmente interessados na potência que uma fonte trifásica fornece a uma carga trifásica. A Tabela 12.1-1 mostra as expressões usadas para calcular a potência fornecida a um componente quando a tensão e a corrente do componente estão de acordo com a convenção passiva.
- A corrente no fio neutro de uma ligação Y-Y equilibrada é zero; por essa razão, o fio que liga o neutro da fonte ao neutro da carga pode ser omitido. A análise do circuito Y-Y se baseia no cálculo das correntes de linha. Quando o circuito não é equilibrado, a primeiro passo na análise do circuito é calcular V_{Nn}, a tensão do nó neutro da carga em relação à tensão do nó neutro da fonte. Quando o circuito é equilibrado, esse passo não é necessário, já que $V_{Nn} = 0$. Uma vez conhecido o valor de V_{Nn}, as correntes de linha podem ser calculadas. A corrente de linha em uma ligação Y-Y equilibrada é $\mathbf{V}_a/\mathbf{Z}$ para a fase *a*; as outras correntes estão defasadas de –120º e 120º em relação a $\mathbf{I}_A$.
- Uma carga em Δ pode ser substituída por uma carga em Y equivalente usando uma transformação Δ-Y. Em seguida, o circuito pode ser analisado como se fosse um circuito Y-Y.
- A corrente de linha em uma carga em Δ equilibrada é igual a $\sqrt{3}$ vezes a corrente de fase e está defasada de –30º em relação à corrente de fase. A tensão de linha de uma carga em Δ é igual à tensão de fase.
- A potência fornecida a uma carga em Y equilibrada é $P_Y = \sqrt{3}\, V_{AB} I_A \cos\theta$, em que V_{AB} é a tensão de linha, I_A é a corrente de linha e θ é o ângulo entre a tensão de fase e a corrente de fase ($\mathbf{Z}_Y = Z\angle\theta$).
- O método dos dois wattímetros para medir a potência trifásica foi apresentado. Também discutimos a utilidade do método dos dois wattímetros para determinar o ângulo do fator de potência de um sistema trifásico.

PROBLEMAS

Seção 12.2 Tensões Trifásicas

P 12.2-1 Uma das tensões de fase de uma carga equilibrada trifásica em Y é dada por

$$\mathbf{V}_c = 277\angle 45^\circ \text{ V rms}$$

A sequência de fases é *abc*. Determine as tensões de linha $\mathbf{V}_{AB}$, $\mathbf{V}_{BC}$ e $\mathbf{V}_{CA}$. Desenhe um diagrama fasorial que mostre as tensões de fase e de linha.

P 12.2-2 Uma das tensões de linha de um sistema trifásico equilibrado é

$$\mathbf{V}_{BA} = 12.470\angle{-35°} \text{ V rms}$$

e a carga está ligada em Y. Determine as tensões de fase se a sequência de fases é *abc*.

P 12.2-3 Uma das tensões de linha de um sistema trifásico equilibrado é

$$\mathbf{V}_{ab} = 1500\angle{30°} \text{ V rms}$$

e a carga está ligada em Y. Determine a tensão de fase $\mathbf{V}_a$.

Seção 12.3 O Circuito Y-Y

P 12.3-1 Considere um circuito Y-Y de três fios. As tensões da fonte em Y são $\mathbf{V}_a = (208/\sqrt{3})\angle{0°}$ V rms, $\mathbf{V}_b = (208/\sqrt{3})\angle{-120°}$ V rms e $\mathbf{V}_c = (208/)\angle{120°}$ V rms. A carga ligada em Y é equilibrada. A impedância de cada fase é $\mathbf{Z} = 12\angle{30}$ Ω.

(a) Determine as tensões de fase.

(b) Determine as correntes de linha e as correntes de fase.

(c) Mostre as correntes de linha e as correntes de fase em um diagrama fasorial.

(d) Determine a potência dissipada na carga.

P 12.3-2 Uma fonte trifásica equilibrada ligada em Y alimenta um grande edifício de escritórios através de uma linha de transmissão de quatro fios. O circuito opera a 60 Hz. As tensões de fase da fonte são $\mathbf{V}_a = 120\angle{0°}$ V rms, $\mathbf{V}_b = 120\angle{-120°}$ V rms e $\mathbf{V}_c = 120\angle{120°}$ V rms. Todos os fios de transmissão, incluindo o fio neutro, têm uma resistência de 2 Ω; a carga equilibrada ligada em Y tem uma resistência de 10 Ω em série com uma indutância de 100 mH. Determine a tensão de linha e a corrente de fase na carga.

P 12.3-3 A Figura P 12.3-3 mostra uma fonte e uma carga ligadas em Y. (a) Determine o valor rms da corrente $i_a(t)$. (b) Determine a potência média fornecida à carga.

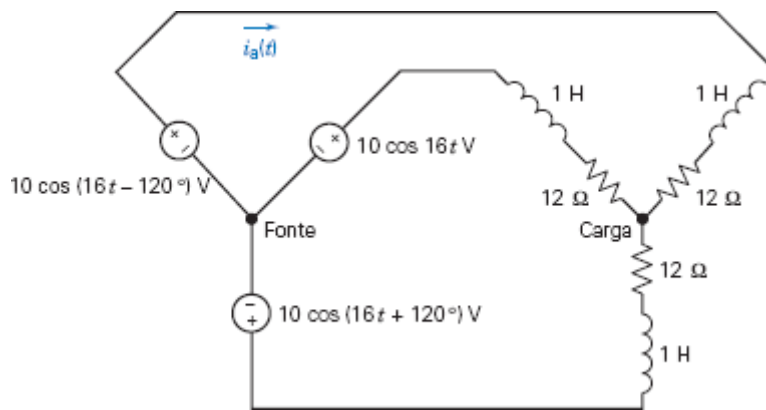



Figura P 12.3-3

P 12.3-4 A Figura P 12.3-4 mostra um circuito Y-Y desequilibrado. Determine a potência média fornecida à carga.

Sugestão: $\mathbf{V}_{Nn}(\omega) = 27{,}4\angle{-63{,}6}$ V

Resposta: 436,4 W

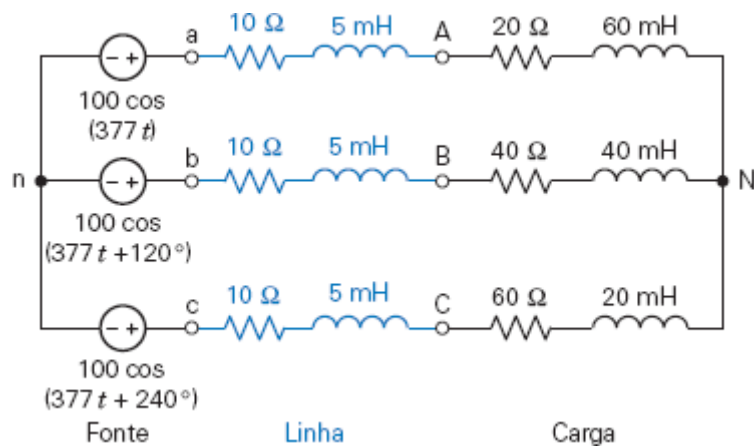



Figura P 12.3-4

P 12.3-5 A Figura P 12.3-5 mostra um circuito Y-Y equilibrado. Determine a potência média fornecida à carga.

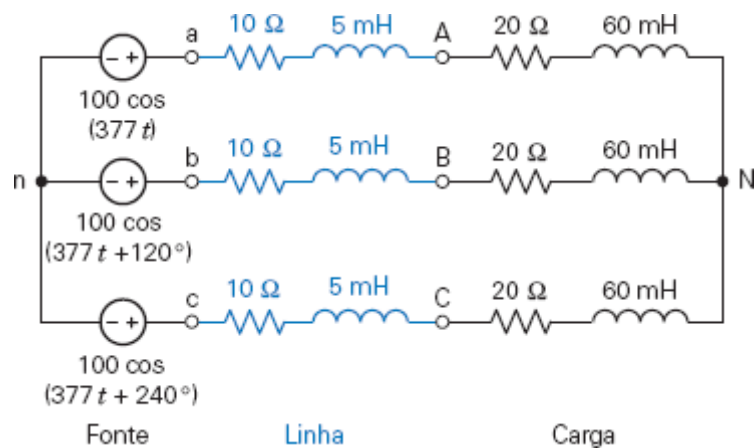



Figura P 12.3-5

P 12.3-6 A Figura P 12.3-6 mostra um circuito Y-Y desequilibrado. Determine a potência média fornecida à carga.

Sugestão: $\mathbf{V}_{Nn}(\omega) = 1{,}755 \angle{-29{,}5}$ V

Resposta: 436,4 W.

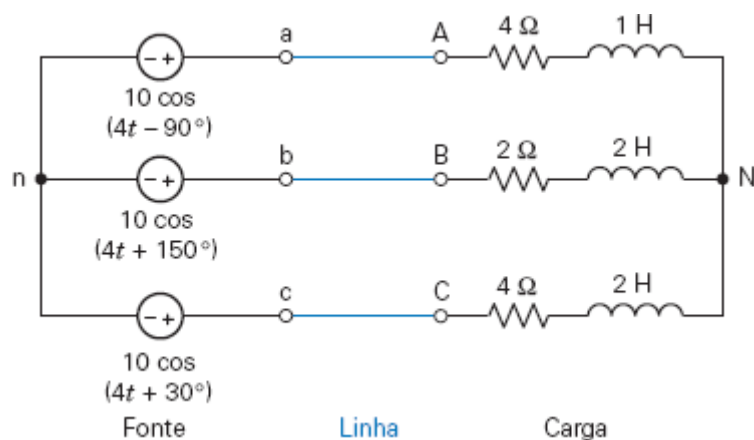



Figura P 12.3-6

P 12.3-7 A Figura P 12.3-7 mostra um circuito Y-Y equilibrado. Determine a potência média fornecida à carga.

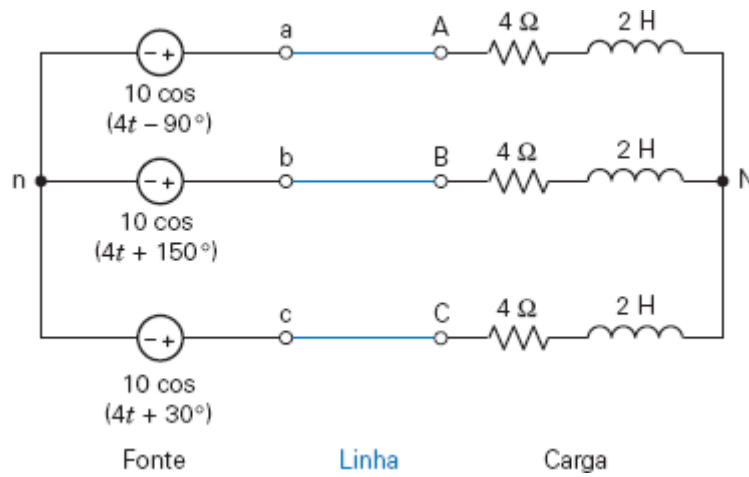



Figura P 12.3-7

Seção 12.4 Fontes e Cargas Ligadas em Δ

P 12.4-1 Uma das correntes de linha em uma carga equilibrada ligada em Δ é dada por

$$\mathbf{I}_B = 50 - 40^\circ \text{ V rms}$$

Determine as correntes de fase $\mathbf{I}_{BC}$, $\mathbf{I}_{AB}$ e $\mathbf{I}_{CA}$. Desenhe um diagrama fasorial que mostre as correntes de linha e de fase. A sequência de fases da fonte é *abc*.

P 12.4-2 Um circuito trifásico alimenta duas cargas em Δ ligadas em paralelo, uma com resistores de 5 Ω e outra com resistores de 20 Ω. Determine a amplitude da corrente de linha total se a tensão de linha é 480 V rms.

Seção 12.5 O Circuito Y-Δ

P 12.5-1 Considere um circuito Y-Δ. As tensões da fonte em Y são $\mathbf{V}_a = (208/\sqrt{3})\angle{-30^\circ}$ V rms, $\mathbf{V}_b = (208/\sqrt{3})\angle{-150^\circ}$ V rms e $\mathbf{V}_c = (208/\sqrt{3})\angle{90^\circ}$ V rms. A carga em Δ é equilibrada. A impedância de cada fase é $\mathbf{Z}$ = 12y Ω. Determine as correntes de linha e calcule a potência dissipada na carga.

Resposta: P = 9360 W

P 12.5-2 Uma carga equilibrada em Δ é ligada por três fios, cada um com uma resistência de 4 Ω, a uma fonte em Y com $\mathbf{V}_a = (480/\sqrt{3})\angle{-30^\circ}$ V rms, $\mathbf{V}_b = (480/\sqrt{3})\angle{-150^\circ}$ V rms e $\mathbf{V}_c = (480/\sqrt{3})\angle{90^\circ}$ V rms. Determine a corrente de linha $\mathbf{I}_A$ para $\mathbf{Z}_\Delta = 39\angle{-40^\circ}$ Ω.

Resposta: $\mathbf{I}_A = 17\angle{0{,}9^\circ}$ A

P 12.5-3 No circuito equilibrado da Figura P 12.5-3, $\mathbf{V}_{ab} = 380\angle{30^\circ}$ V rms. Determine as correntes de fase na carga para $\mathbf{Z} = 3 + j4$ Ω. Desenhe um diagrama fasorial.

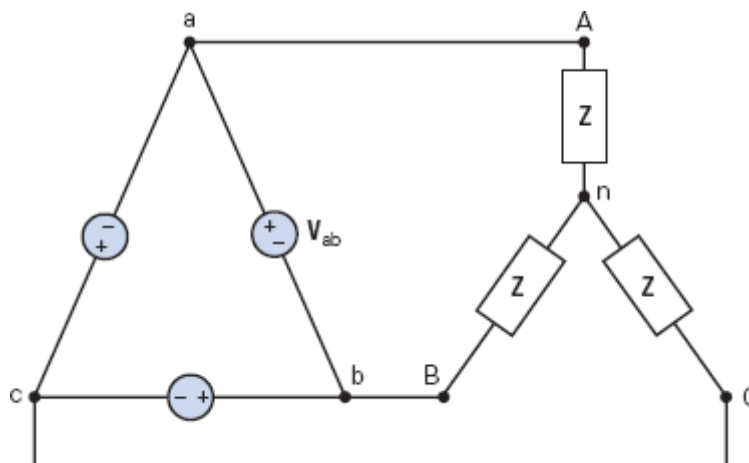



Figura P 12.5-3 Circuito Δ-Y.

P 12.5-4 No circuito equilibrado da Figura P 12.5-3, $\mathbf{V}_{ab} = 380\angle 0°$ V rms. Determine as correntes de linha e de fase na carga para $\mathbf{Z} = 9 + j12\ \Omega$.

Seção 12.6 Circuitos Trifásicos Equilibrados

P 12.6-1 O Eurotúnel sob o canal da Mancha é alimentado por linhas de 25 kV provenientes da Inglaterra e da França. Em caso de emergência, o túnel pode ser alimentado apenas através de uma das extremidades, mas passa a funcionar com capacidade reduzida.

As linhas de alimentação são do tipo catenária (fio suspenso), como nas ferrovias inglesas e francesas. A diferença está no fato de que, no caso do Eurotúnel, a potência é extremamente elevada e a linha pode ser alimentada através das duas extremidades. Para cada metade do túnel, a potência consumida é 180 MVA (Barnes e Wong, 1991).

Suponha que a tensão de linha da fonte em Y seja 25 kW rms e que o sistema trifásico esteja ligado diretamente ao motor de uma locomotiva elétrica. O motor é uma carga ligada em Y com $\mathbf{Z} = 150\angle 25°\ \Omega$. Determine as correntes de linha e a potência fornecida ao motor da locomotiva.

P 12.6-2 Uma fonte trifásica com uma tensão de linha de 45 kV rms é ligada a duas cargas equilibradas. A carga ligada em Y tem três impedâncias $\mathbf{Z} = 10 + j20\ \Omega$ e a carga ligada em Δ tem três impedâncias de 50 Ω. As linhas de transmissão têm uma impedância de 2 Ω. Determine a potência fornecida às cargas e a potência perdida nos fios. Que porcentagem da potência é perdida nos fios?

P 12.6-3 Um sistema trifásico equilibrado é formado por uma fonte em Y com $v_a = 5\cos(2t + 30°)$ ligada a uma carga em Y. Cada fase da carga é constituída por um resistor de 4 Ω em série com um indutor de 4 H. As linhas de transmissão têm uma resistência de 2 Ω. Determine a potência média total fornecida à carga.

Seção 12.7 Potência Instantânea e Potência Média para uma Carga Trifásica Equilibrada

P 12.7-1 Determine a potência absorvida por uma carga trifásica equilibrada ligada em Y para

$$\mathbf{V}_{CB} = 208\angle 15°\ \text{V rms} \quad \text{e} \quad \mathbf{I}_B = 3\angle 110°\ \text{A rms}$$

A sequência de fases da fonte é *abc*.

Resposta: $P = 620$ W

P 12.7-2 Um motor trifásico fornece uma potência de 20 hp quando é alimentado com uma tensão de linha de 480 V rms. O motor funciona com uma eficiência de 85% e um fator de potência de 0,8 atrasado. Determine a amplitude e a fase da corrente de linha da fase A.

Sugestão: 1 hp = 745,7 W

P 12.7-3 Uma carga equilibrada trifásica é alimentada por uma fonte em Y com uma tensão de linha de 220 V rms. A carga absorve uma potência de 1500 W com um fator de potência de 0,8 atrasado. Determine a impedância por fase (a) se a carga estiver ligada em Δ; (b) se a carga estiver ligada em Y.

P 12.7-4 Uma fonte trifásica equilibrada em Y de 600 V está ligada a duas cargas equilibradas em Δ. A impedância das cargas é $40\angle 30°\ \Omega$ e $50\angle -60°\ \Omega$. Determine a corrente de linha e a potência média total.

P 12.7-5 Uma fonte trifásica ligada em Y alimenta simultaneamente duas cargas trifásicas equilibradas. A primeira carga está ligada em Δ e consome uma potência total de 39 kVA com um fator de potência de 0,7 atrasado. A segunda carga está ligada em Y e consome 15 kW com um fator de potência de 0,21 adiantado. A linha de transmissão tem uma impedância de $0{,}038 + j0{,}072\ \Omega$ por fase. Determine a amplitude da tensão de linha da fonte para que as cargas sejam alimentadas com uma tensão de linha de 208 V rms.

P 12.7-6 Um edifício recebe eletricidade de uma empresa de energia elétrica através de uma linha trifásica de 4,16 kV rms. O edifício utiliza três cargas equilibradas ligadas às três linhas:

(a) Uma carga em Δ de 500 kVA com um *fp* de 0,85 atrasado

(b) Uma carga em Y de 75 kVA com um *fp* de 0,0 adiantado

(c) Uma carga em Y, cada fase com um resistor de 150 Ω em paralelo com uma reatância indutiva de 225 Ω.

A linha de transmissão que alimenta o edifício tem oito quilômetros de comprimento e uma impedância por fase de 1,06 + j0,49 Ω por quilômetro. Qual deve ser a tensão gerada pela companhia de energia elétrica para que a tensão que alimenta os circuitos do edifício seja realmente 4,16 kV rms?

Sugestão: A tensão de linha de uma carga equivalente ligada em Y deve ser 4,16 kV.

P 12.7-7 O diagrama da Figura P 12.7-7 mostra duas cargas trifásicas que fazem parte das instalações de um fábrica. As cargas estão ligadas em paralelo e são alimentadas com 4,16 kV rms. A carga 1 é de 1,5 MVA, *fp* de 0,75 atrasado e ligação em Δ. A carga 2 é de 2 MW, *fp* de 0,8 atrasado e ligação em Y. A linha de transmissão entre o transformador da subestação e a fábrica tem uma impedância de 0,4 + j0,8 Ω por fase. Determine o seguinte:

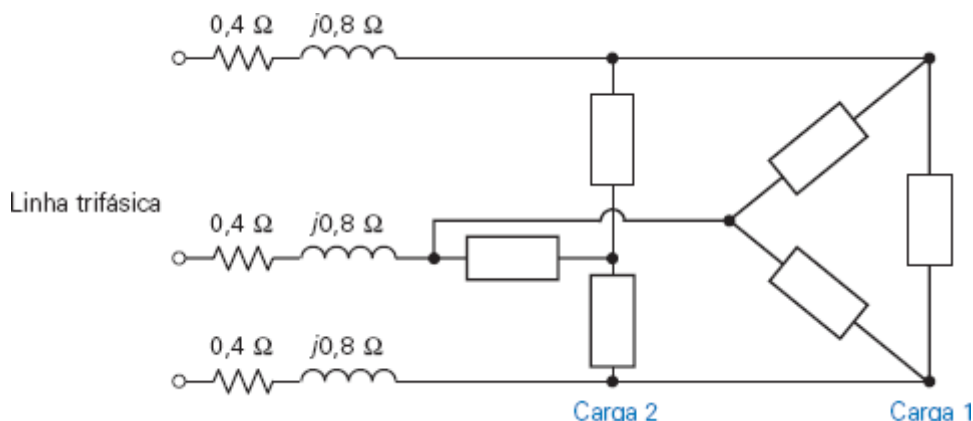



Figura P 12.7-7 Circuito trifásico com uma carga em Δ e uma carga em Y.

(a) A amplitude da tensão de linha na saída da subestação.

(b) A potência real consumida.

(c) A porcentagem da potência real que é consumida pelas cargas.

P 12.7-8 A carga trifásica equilibrada de um grande edifício comercial consome 480 kW com um fator de potência de 0,8 atrasado. A carga é fornecida através de uma linha de transmissão com uma impedância de 5 + j25 mΩ por fase. Cada fase da carga tem uma tensão de linha de 600 V rms. Determine a corrente de linha e a tensão de linha da fonte. Determine também o fator de potência da fonte. Use como referência a tensão entre a linha e o neutro, com uma fase de 0º.

Seção 12.8 Medida de Potência Usando o Método dos Dois Wattímetros

P 12.8-1 O método dos dois wattímetros é usado para determinar a potência consumida por um motor trifásico de 440 V que se comporta como uma carga equilibrada ligada em Y. O motor fornece uma potência de 20 hp com uma eficiência de 74,6%. A corrente de linha é 52,5 A rms. Os wattímetros são ligados às linhas A e C. Determine a leitura de cada wattímetro. O motor tem um fator de potência atrasado.

Sugestão: 1 hp = 745,7 W

P 12.8-2 Um sistema trifásico tem uma tensão de linha de 4000 V e uma carga em *Δ* equilibrada $\mathbf{Z}$ = 40 + j30 Ω. A sequência de fases é *abc*. Use dois wattímetros ligados às linhas *A* e *C*, com a linha *B* como linha comum para a medida de tensão. Determine a potência total medida pelos wattímetros.

Resposta: P = 768 kW

P 12.8-3 Um sistema trifásico com uma sequência *abc* e uma tensão de linha de 200 V rms alimenta uma carga equilibrada em Y com $\mathbf{Z} = 70{,}7\angle 45^\circ$ Ω. (a) Determine as correntes de linha. (b) Determine a potência total usando dois wattímetros ligados às linhas *B* e *C*.

Resposta: **(a)** $\mathbf{I}_A = 1{,}633\angle{-45^\circ}$ A rms, $\mathbf{I}_B = 1{,}633\angle{-165^\circ}$ A rms, $\mathbf{I}_C = 1{,}633\angle 75^\circ$ A rms; **(b)** P = 400 W

P 12.8-4 Um sistema trifásico com uma tensão de linha de 208 V rms e sequência de fases *abc* é ligado a uma carga equilibrada ligada em Y com uma impedância $10\angle{-30^\circ}$ Ω e uma carga equilibrada ligada em Δ com uma impedância $15\angle 30^\circ$ Ω. Determine as correntes de linha e a potência total usando dois wattímetros.

P 12.8-5 Em um sistema trifásico de 120 V rms com a sequência de fases *abc*, um wattímetro ligado à linha *A* mede 920 W e um wattímetro ligado à linha *C* mede 460 W. Determine a impedância da carga equilibrada ligada em Δ.

Resposta: $\mathbf{Z}_\Delta = 27{,}1\angle{-30^\circ}\ \Omega$.

P 12.8-6 Determine a leitura de cada wattímetro e a potência total se o método dos dois amperímetros for usado para medir a potência do circuito do Problema P 12.5-1 com $\mathbf{Z} = 0{,}868 + j4{,}924\ \Omega$ e as bobinas de corrente nas linhas A-a e C-c.

Seção 12.9 Como Podemos Testar . . . ?

P 12.9-1 Uma fonte em Y está ligada a uma carga em Y (Figura 12.3-1) com $Z = 10 + j4\ \Omega$. A tensão de linha é $V_L = 416$ V rms. Um estudante afirma, em seu relatório, que a corrente de linha é $I_A = 38{,}63$ A rms e que a potência fornecida à carga é16,1 kW. Verifique se esses resultados estão corretos.

P 12.9-2 Uma carga em Δ com $\mathbf{Z} = 40 + j30\ \Omega$ está ligada a uma fonte trifásica com $V_L = 240$ V rms (Figura 12.3-2). De acordo com um programa de computador, a corrente em uma fase é $4{,}8\angle{-36{,}9^\circ}$ A. Verifique se esse resultado está correto.

Problemas com o PSpice

PS 12-1 Use o programa PSpice para determinar a potência fornecida à carga no circuito da Figura PS 12-1.

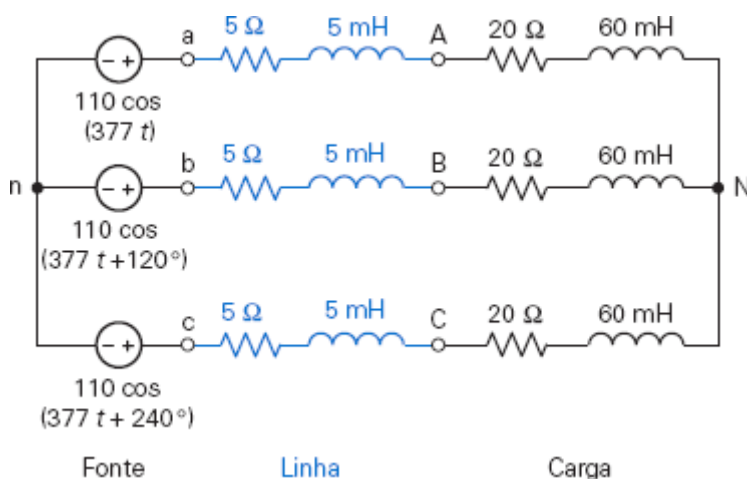



Figura PS 12.-1

PS 12-2 Use o programa PSpice para determinar a potência fornecida à carga no circuito da Figura PS 12-2.

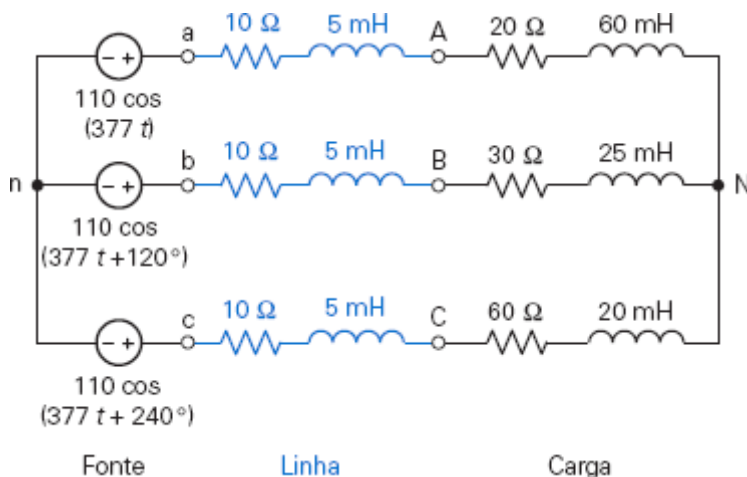



Figura PS 12.-2

Problemas de Projeto

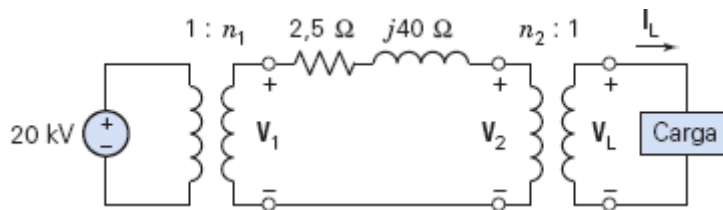
PP 12-1 Uma fonte trifásica equilibrada em Y tem uma tensão de linha de 208 V rms. A potência total fornecida à carga equilibrada em Δ é 1200 W, com um fator de potência de 0,94 atrasado. Determine a impedância da carga e calcule a corrente de linha resultante. A sequência de fases da fonte é *abc*.

PP 12-2 Um circuito trifásico de 240 V alimenta uma carga equilibrada em Y cuja impedância é Z. Dois wattímetros são ligados ao circuito, com as bobinas de corrente nas linhas *A* e *C*. A leitura do wattímetro da linha *A* é 1440 W e a do wattímetro da linha *C* é zero. Determine o valor da impedância.

PP 12-3 Um motor trifásico fornece uma potência de 100 hp operando com 80% de eficiência e um fator de potência de 0,75 atrasado. Projete um conjunto de três capacitores ligados em Δ de modo a melhorar o fator de potência para 0,90 atrasado. O motor é alimentado com 480 V rms.

PP 12-4 Um sistema trifásico é equilibrado e, portanto, pode ser analisado com o auxílio de um circuito por fase como o da Figura PP 12-4. Escolha a relação de espiras do transformador elevador de tensão e do transformador abaixador de tensão para que o sistema opere com uma eficiência maior que 99%. A tensão da carga deve ser 4 kV rms e a impedância da carga é 4/3 Ω.

Figura PP 12-4

CAPÍTULO 13 Resposta de Frequência

NESTE CAPÍTULO

13.1 *Introdução*

Considere o experimento da Figura 13.1-1. Um gerador de funções produz o sinal de entrada, ou a excitação, de um circuito linear e um osciloscópio mostra o sinal de saída, ou resposta, do circuito. O circuito linear é formado por resistores, capacitores, indutores e, talvez, fontes dependentes e/ou amplificadores operacionais. O gerador de funções é capaz de produzir vários tipos de sinais de entrada.

Suponha que seja usado um sinal senoidal. O gerador de funções permite ajustar a amplitude, o ângulo de fase e a frequência da senoide. Em primeiro lugar, observamos que, quaisquer que sejam os valores escolhidos para os parâmetros, a resposta (estacionária) do circuito é uma senoide com a mesma frequência que o sinal de entrada; a amplitude e o ângulo de fase podem ser diferentes, mas a frequência é sempre igual à frequência da entrada.

Depois de fazer mais algumas experiências, concluímos que, para uma frequência fixa, as seguintes afirmações são verdadeiras:

- A razão entre a amplitude do sinal da saída e a amplitude do sinal de entrada não varia com o tempo.
- A diferença entre o ângulo de fase do sinal de saída e o ângulo de fase do sinal de entrada (que é chamada de deslocamento de fase) não varia com o tempo.

A situação não é tão simples quando a frequência do sinal de entrada é variável. Nesse caso, o ganho e o deslocamento de fase do sinal de saída variam de modo mais ou menos complicado com a frequência do sinal de entrada.

Neste capítulo, vamos apresentar ferramentas analíticas que permitem analisar essa variação.

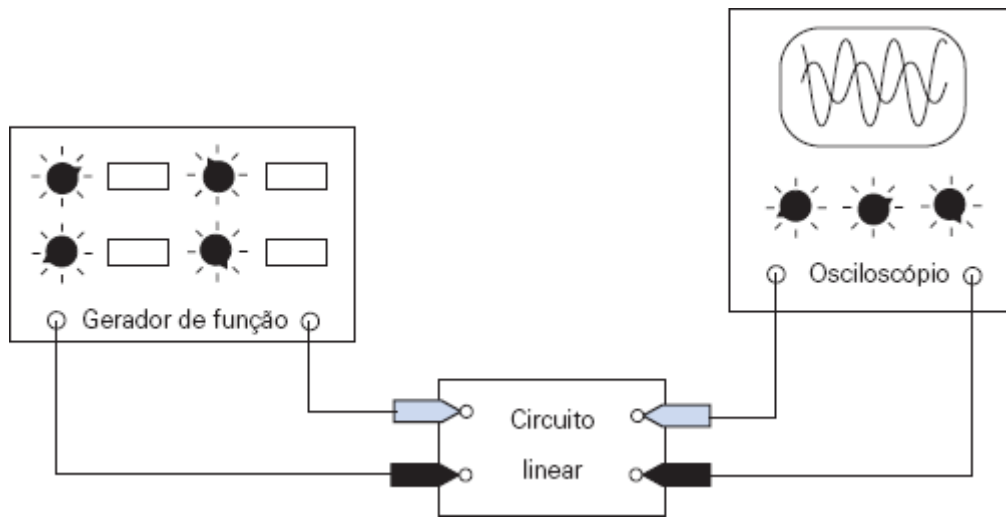



FIGURA 13.1-1 Excitação e resposta de um circuito linear.

13.2 Ganho, Deslocamento de Fase e Função de Transferência

Ganho, deslocamento de fase e função de transferência são propriedades dos circuitos lineares usadas para descrever o efeito do circuito sobre uma tensão ou corrente de entrada senoidal. Como a impedância dos capacitores e indutores do circuito varia com a frequência, é natural esperar que essas três propriedades sejam funções da frequência. Como vamos ver, é exatamente isso que acontece.

Começamos por considerar o circuito da Figura 13.2-1. A entrada do circuito é a tensão da fonte de tensão e o sinal de saída ou resposta é a tensão do resistor de 10 kΩ. Quando a entrada é uma tensão senoidal, a resposta estacionária também é senoidal e tem a mesma frequência que a entrada.

Suponha que as tensões $v_{in}(t)$ e $v_{out}(t)$ sejam medidas com um osciloscópio. A Figura 13.2-2 mostra as formas de onda que aparecem na tela do osciloscópio. Observe que as escalas estão indicadas, mas não os eixos. Costuma-se tomar o ângulo do sinal de entrada como sendo 0º, ou seja,

$$v_{in}(t) = A \cos \omega t$$

Nesse caso,

$$v_{out}(t) = B \cos (\omega t + \theta)$$

O **ganho** de um circuito é um parâmetro que expressa a relação entre a intensidade do sinal de saída e a intensidade do sinal de entrada. No caso de sinais senoidais em circuitos lineares, o ganho é a razão entre a amplitude da senoide da saída e a amplitude da senoide da entrada.

Assim,

$$\text{ganho} = \frac{B}{A}$$

O **deslocamento de fase** de um circuito é um parâmetro que descreve a relação entre o ângulo de fase do sinal de saída e o ângulo de fase do sinal de entrada. No caso de sinais senoidais em circuitos lineares, o deslocamento de fase é a diferença entre o ângulo de fase da senoide de saída e o ângulo de fase da senoide de entrada.

Assim,

$$\text{deslocamento de fase} = \theta - 0^\circ = \theta$$

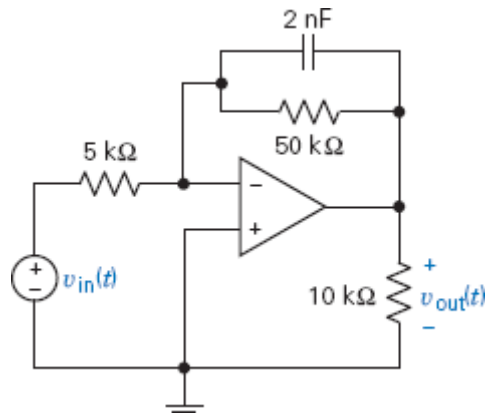



FIGURA 13.2-1 Circuito com um amplificador operacional.

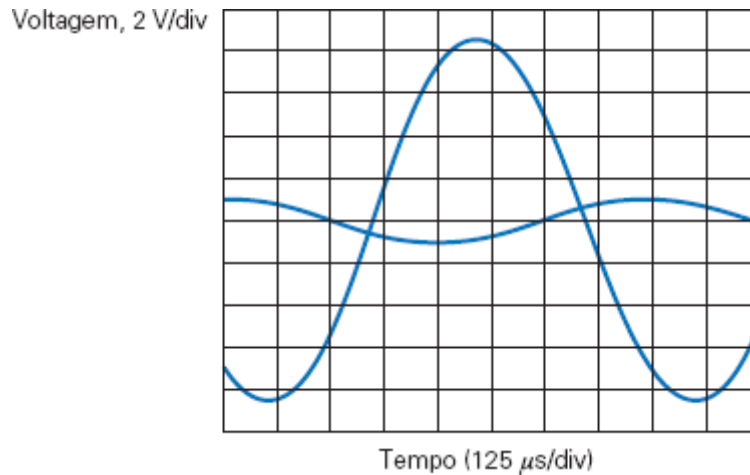



FIGURA 13.2-2 Senoides de entrada e de saída do circuito da Figura 13.2-1.

Para ser mais específicos, precisamos de representações analíticas das senoides da Figura 13.2-2. A tensão de entrada é a menor das duas senoides e pode ser representada pela função

$$v_{in}(t) = 1 \cos 6283t \text{ V}$$

A resposta estacionária é a maior das duas senoides e pode ser representada pela função

$$v_{out}(t) = 8{,}47 \cos (6283t + 148°) \text{ V}$$

O ganho do circuito na frequência ω = 6283 rad/s é

$$\text{ganho} = \frac{\text{amplitude da saída}}{\text{amplitude da entrada}} = \frac{8{,}47}{1} = 8{,}47$$

O ganho é uma grandeza adimensional, já que as duas amplitudes são medidas em volts. Como, nesse exemplo, a senoide de saída é maior que a senoide de entrada, o ganho é maior que 1. Quando isso acontece, dizemos que o circuito *amplifica* a entrada. Nos casos em que a senoide de saída é menor que a senoide de entrada, o ganho é menor que 1. Quando isso acontece, dizemos que o circuito *atenua* a entrada.

O *deslocamento de fase* do circuito na frequência ω = 6283 rad/s é

$$\text{deslocamento de fase} = \text{ângulo de fase da saída} - \text{ângulo de fase da entrada} = 148° - 0° = 148°$$

O deslocamento de fase determina de quanto tempo a saída está avançada ou atrasada em relação à entrada. Observe que

$$B \cos (\omega t + \theta) = B \cos \left(\omega \left(t + \frac{\theta}{\omega}\right)\right) = B \cos (\omega(t + t_0))$$

em que θ é o ângulo de fase em radianos e $t_0 = \theta/\omega$. Os picos positivos de B cos($\omega t + \theta$) acontecem para

$$\omega t + \theta = n(2\pi)$$

e, explicitando t, obtemos

$$t = \frac{n(2\pi)}{\omega} - t_0 = nT - t_0$$

em que n é um número inteiro e T é o período da senoide.

Os picos positivos de A cos ωt acontecem para $t = 2\pi n/\omega$ e os picos positivos de B cos($\omega t + \theta$) acontecem para $t = 2\pi n/\omega - t_0$. Isso significa que um deslocamento de fase de θ rad desloca a senoide de saída de $t_0 = \theta/\omega$ segundos. Para uma frequência de 6283 rad/s, um deslocamento de fase de 148º (2,58 rad) provoca um deslocamento no tempo igual a

$$t_0 = \frac{\theta}{\omega} = \frac{2{,}58 \text{ rad}}{6283 \text{ rad/s}} = 410 \ \mu\text{s}$$

Na Figura 13.2-2, os picos positivos da senoide de entrada acontecem em 0 ms, 1 ms, 2 ms, 3 ms,. . . Os picos positivos da senoide de saída acontecem em 0,59 ms, 1,59 ms, 2,59 ms, 3,59 ms, . . . Os picos da senoide de saída acontecem 410 μs antes do pico seguinte da senoide de entrada. Assim, podemos dizer que a saída está *adiantada* de 410 μs em relação à entrada.

Observe que

$$v_{out}(t) = 8{,}47 \cos(6283t + 148º) = 8{,}47 \cos(6283t - 212º)$$

já que um deslocamento de fase de 360º não muda a senoide. Um deslocamento de fase de –212º (–3,70 rad) provoca um deslocamento no tempo de

$$t_0 = \frac{-3{,}70 \text{ rad}}{6283 \text{ rad/s}} = -590 \ \mu\text{s}$$

Nesse caso, os picos da senoide de saída acontecem 590 μs *depois* de cada pico da senoide de entrada. Isso significa que também podemos dizer que a saída está *atrasada* de 590 μs em relação à entrada.

Um deslocamento de fase que faz a saída acontecer antes da entrada é chamado de **avanço de fase.** Um deslocamento de fase que faz a saída acontecer depois da entrada é chamado de **retardo de fase**.

Na frequência ω = 6283 rad/s, o circuito que estamos discutindo amplifica o sinal por um fator de8,47 e avança o sinal de 410 μs ou, o que significa a mesma coisa, retarda o sinal de 590 μs. O sinal de saída do circuito da Figura 13.2-1 tem um avanço de fase de 148º ou, o que significa a mesma coisa, um retardo de fase de 212º.

Vamos agora considerar o mesmo circuito para outra frequência da entrada. Se a entrada é

$$v_{in}(t) = 1 \cos 3141{,}6t \text{ V}$$

a resposta estacionária do circuito regime estacionário é

$$v_{out}(t) = 9{,}54 \cos(3141{,}6t + 163°) \text{ V}$$

O ganho e deslocamento de fase do circuito na frequência ω = 3141,6 rad/s
são

$$\text{ganho} = \frac{\text{amplitude da saída}}{\text{amplitude da entrada}} = \frac{9{,}54}{1} = 9{,}54$$

e

deslocamento de fase = ângulo de fase da saída − ângulo de fase da entrada
= 163º − 0º = 163º

Tabela 13.2-1 Resposta de Frequência de um Circuito

f(Hz)	*ω*(rad/s)	GANHO	DESLOCAMENTODE FASE
100	628,3	9,98	176º
500	3141,6	9,54	163º
1000	6283	8,47	148º
5000	31.416	3,03	108º
10.000	62.830	1,57	99º

Quando a frequência da entrada mudou, o ganho e o deslocamento de fase do circuito também mudaram, o que sugere que o ganho e o deslocamento de fase do circuito dependem da frequência da entrada. A Tabela 13.2-1 mostra os valores do ganho e deslocamento de fase para vários valores da frequência de entrada. Como era de se esperar, o ganho e o deslocamento de fase são diferentes para cada frequência. A função que descreve o comportamento do circuito quando a frequência da entrada varia é chamada de **função de transferência.** A função de transferência de um circuito é definida apenas no domínio da frequência; é a razão entre o fasor correspondente à senoide da resposta e o fasor correspondente à senoide da excitação.* Seja $\mathbf{X}(\omega)$ o fasor correspondente à excitação do circuito e $\mathbf{Y}(\omega)$ o fasor correspondente à resposta estacionária. Nesse caso,

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{Y}(\omega)}{\mathbf{X}(\omega)} \qquad (13.2\text{-}1)$$

é a função de transferência. Observe que $\mathbf{X}(\omega)$ e $\mathbf{Y}(\omega)$ podem ser tensões ou correntes. O ganho e o deslocamento de fase podem ser expressos em termos da função de transferência. O ganho é dado por

$$\text{ganho} = |\mathbf{H}(\omega)| = \frac{|\mathbf{Y}(\omega)|}{|\mathbf{X}(\omega)|} \qquad (13.2\text{-}2)$$

e o deslocamento de fase é dado por

$$\text{deslocamento de fase} = \angle \mathbf{H}(\omega) = \angle \mathbf{Y}(\omega) - \angle \mathbf{X}(\omega) \qquad (13.2\text{-}3)$$

Considere o problema de determinar a função de transferência de um circuito. Para resolver o problema, fazemos duas coisas. Em primeiro lugar, representamos o circuito no domínio da frequência usando impedâncias e fasores. (Também representamos o circuito no domínio da frequência quando queríamos determinar a resposta estacionária a uma entrada senoidal, mas, naquele caso, a frequência era fixa e igual à frequência da entrada, como, por exemplo, 4 rad/s. Quando determinamos a função de transferência, a frequência é representada por uma variável, *ω*.) Em segundo lugar, analisamos o circuito para determinar a razão entre o fasor correspondente à saída do circuito e o fasor correspondente à entrada. Essa análise pode envolver equações de malha, equações de nó, impedâncias equivalentes e divisões de tensão e de corrente, mas é sempre realizada no domínio da frequência.

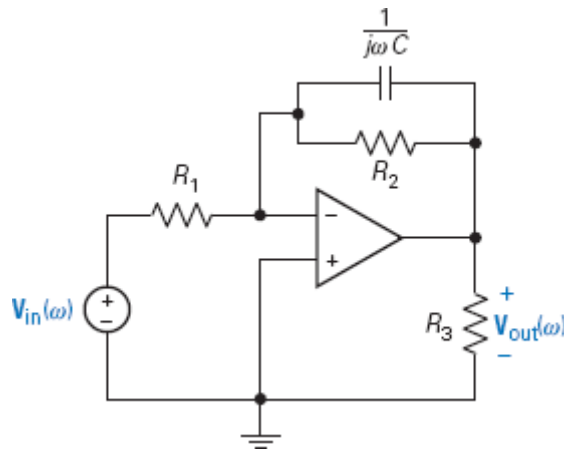



FIGURA 13.2-3 Representação do circuito da Figura 13.2-1 no domínio da frequência.

Vamos determinar a função de transferência do circuito da Figura 13.2-1. O primeiro passo é representar o circuito no domínio da frequência usando impedâncias e fasores. A Figura 13.2-3 mostra o circuito no domínio da frequência correspondente ao circuito da Figura 13.2-1. Neste exemplo, o fasor correspondente à entrada é $V_{in}(\omega)$ e o fasor correspondente à saída é $V_{out}(\omega)$. Estamos interessados em determinar a função de transferência $H(\omega) = V_{out}/V_{in}$. Escrevemos a equação de nó correspondente à entrada não inversora do amplificador operacional, supondo que se trata de um amplificador operacional ideal. O resultado é o seguinte:

$$\frac{\mathbf{V}_{in}(\omega)}{R_1} + \frac{\mathbf{V}_{out}(\omega)}{R_2} + j\omega C\mathbf{V}_{out}(\omega) = 0$$

Assim,

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_{out}(\omega)}{\mathbf{V}_{in}(\omega)} = \frac{-R_2}{R_1 + j\omega CR_1R_2}$$

e o ganho do circuito é

$$\text{ganho} = |\mathbf{H}(\omega)| = \mathrm{H} = \frac{R_2/R_1}{\sqrt{1+\omega^2C^2R_2^2}}$$

O deslocamento de fase do circuito é

$$\text{deslocamento de fase} = \angle\mathbf{H}(\omega) = 180^\circ - \tan^{-1}(\omega CR_2)$$

Para $R_1 = 5$ kΩ, $R_2 = 50$ kΩ e $C = 2$ nF,

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{-10}{1 + (j\omega/10.000)}$$

$$\text{ganho} = |\mathbf{H}(\omega)| = \frac{10}{\sqrt{1+(\omega^2/10^8)}}$$

$$\text{deslocamento de fase} = \angle\mathbf{H}(\omega) = 180^\circ - \tan^{-1}(\omega/10.000)$$

Observe que a frequência da entrada foi representada por uma variável, ω, e não por um valor numérico. Em consequência, a função de transferência, o ganho e o deslocamento de fase descrevem a forma

como a resposta do circuito depende da frequência de entrada. Já consideramos o caso em que ω = 6283 rad/s. Substituindo essa frequência nas equações do ganho e do deslocamento de fase, temos

$$\text{ganho} = \frac{10}{\sqrt{1+\dfrac{6283^2}{10^8}}} = 8{,}47$$

e

$$\text{deslocamento de fase} = 180^\circ - \tan^{-1}(6283/10.000) = 148^\circ$$

Esses são os resultados que foram obtidos observando a tela do osciloscópio da Figura 13.2-2. Do mesmo modo, cada linha da Tabela 13.2-1 pode ser obtida substituindo a frequência apropriada nas equações do ganho e do deslocamento de fase.

As equações que representam o ganho e o deslocamento de fase em função da frequência são chamadas de resposta de frequência do circuito. As mesmas informações podem ser apresentadas na forma de gráficos ou tabelas em vez de equações. Esses gráficos e tabelas também são chamados de resposta de frequência do circuito.

Para verificar se a função de transferência realmente descreve o comportamento do circuito, suponha que

$$v_{in}(t) = 0{,}4\cos(5000t + 45^\circ)\text{ V}$$

A frequência da senoide de entrada é ω = 5000 rad/s. Substituindo essa frequência na função de transferência, obtemos

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{-10}{1+(j5000/10.000)} = 8{,}94\,\underline{/153^\circ}$$

e, portanto,

$$\mathbf{V}_{out}(\omega) = \mathbf{H}(\omega)\mathbf{V}_{in}(\omega) = (8{,}94\,\underline{/153^\circ})(0{,}4\,\underline{/45^\circ}) = 3{,}58\,\underline{/198^\circ}$$

No domínio do tempo, a resposta estacionária é

$$v_{out}(t) = 3{,}58\cos(5000t + 198^\circ)\text{ V}$$

Observe que a função de transferência do circuito continha informações suficientes para que calculássemos a resposta estacionária à senoide de entrada. Isso mostra que a função de transferência realmente descreve o comportamento do circuito.

EXEMPLO 13.2-1 Função de Transferência de um Circuito

 EXEMPLO INTERATIVO

Considere o circuito da Figura 13.2-4*a*. A entrada do circuito é a tensão da fonte de tensão, $v_i(t)$. A saída é a tensão, $v_o(t)$, entre os terminais da associação em série do capacitor com o resistor de 16 kΩ. A função de transferência que representa o circuito é da forma

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_i(\omega)} = \frac{1 + j\dfrac{\omega}{z}}{1 + j\dfrac{\omega}{p}} \qquad (13.2\text{-}4)$$

Uma função de transferência como a da Eq. 13.2-4 depende de dois parâmetros, z e p. O parâmetro z é chamado de zero do circuito e o parâmetro p é chamado de polo do circuito. Determine os valores de z e p para o circuito da Figura 13.2-4*a*.

Solução

Vamos analisar o circuito para determinar a função de transferência e colocá-la na forma da Figura 13.2-4. Uma função de transferência é a razão entre o fasor da saída e o fasor da entrada. Como os fasores existem apenas no domínio da frequência, o primeiro passo é representar o circuito no domínio da frequência. A Figura 13.2-4*b* mostra a representação do circuito da Figura 13.2-4*a* no domínio da frequência.

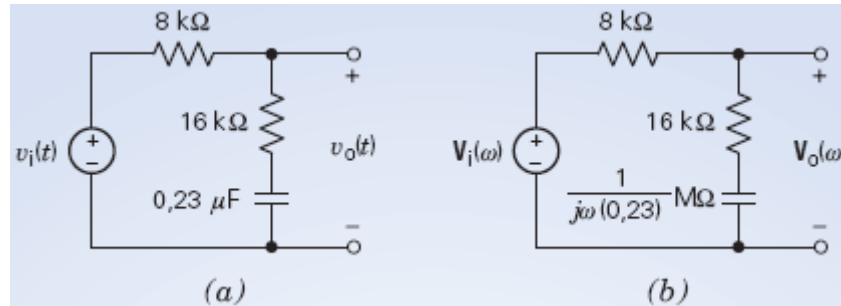



FIGURA 13.2-4 Representação do circuito do Exemplo 13.2-1 (*a*) no domínio do tempo e (*b*) no domínio da frequência.

As impedâncias do capacitor e do resistor de 16 kΩ estão ligadas em série na Figura 13.2-4*b*. A impedância equivalente é

$$\mathbf{Z}_e(\omega) = 16.000 + \frac{10^6}{j(0,23)\omega}$$

A impedância equivalente está ligada em série com o resistor de 8 kΩ. $\mathbf{V}_i(\omega)$ é a tensão entre os terminais das impedâncias em série e $\mathbf{V}_o(\omega)$ é a tensão entre os terminais da impedância equivalente, $\mathbf{Z}_e(\omega)$. Aplicando o método da divisão de tensão, obtemos

$$\mathbf{V}_o(\omega) = \frac{16.000 + \dfrac{10^6}{j(0,23)\omega}}{8000 + 16.000 + \dfrac{10^6}{j(0,23)\omega}}\mathbf{V}_i(\omega) = \frac{10^6 + j(0,23)\omega(16.000)}{10^6 + j(0,23)\omega(24.000)}\mathbf{V}_i(\omega)$$

$$= \frac{\dfrac{10^6 + j(3680)\omega}{10^6}}{\dfrac{10^6 + j(5520)\omega}{10^6}}\mathbf{V}_i(\omega) = \frac{1 + j(0,00368)\omega}{1 + j(0,00552)\omega}\mathbf{V}_i(\omega)$$

Dividindo ambos os membros da equação por $\mathbf{V}_i(\omega)$, obtemos a função de transferência do circuito:

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_i(\omega)} = \frac{1 + j(0,00368)\omega}{1 + j(0,00552)\omega} \qquad (13.2\text{-}5)$$

Igualando as funções de transferência dadas pelas Eqs. 13.2-4 e 13.2-5, temos

$$\frac{1 + j(0,00368)\omega}{1 + j(0,00552)\omega} = \frac{1 + j\dfrac{\omega}{z}}{1 + j\dfrac{\omega}{p}}$$

Comparando os dois membros da equação, obtemos

$$z = \frac{1}{0,00368} = 271,74 \text{ rad/s} \quad \text{e} \quad p = \frac{1}{0,00552} = 181,16 \text{ rad/s}$$

EXEMPLO 13.2-2 Função de Transferência de um Circuito

EXEMPLO 13.2-2 Função de Transferência de um Circuito

Considere o circuito da Figura 13.2-5*a*. A entrada do circuito é a tensão da fonte de tensão, $v_i(t)$. A saída é a tensão $v_o(t)$ entre os terminais da associação em série do indutor e do resistor de 2 Ω. A função de transferência é

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_i(\omega)} = 0{,}2\frac{1 + j\dfrac{\omega}{5}}{1 + j\dfrac{\omega}{25}} \tag{13.2-6}$$

Determine o valor da indutância *L*.

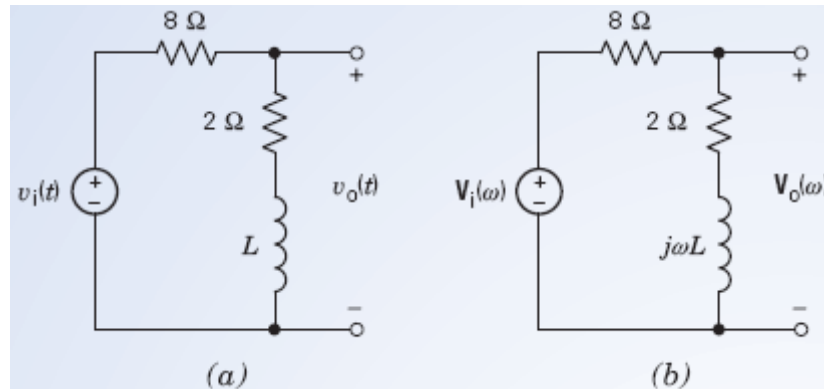



FIGURA 13.2-5 Representação do circuito do Exemplo 13.2-2 (*a*) no domínio do tempo e (*b*) no domínio da frequência.

Solução

O circuito foi representado duas vezes, por um diagrama e por uma função de transferência. A indutância desconhecida, *L*, aparece no diagrama do circuito, mas não aparece na função de transferência. Podemos analisar o circuito para determinar a função de transferência. Nessa segunda função de transferência, a indutância desconhecida aparece explicitamente. Vamos determinar o valor da indutância igualando as duas funções de transferência.

A função de transferência de um circuito é a razão entre o fasor da saída e o fasor da entrada. Como os fasores existem apenas no domínio da frequência, o primeiro passo é representar o circuito no domínio da frequência. A Figura 13.2-5*b* mostra a representação do circuito da Figura 13.2-5*a* no domínio da frequência.

As impedâncias do indutor e do resistor de 2 Ω estão ligadas em série na Figura 13.2-5*b*. A impedância equivalente é

$$\mathbf{Z}_e(\omega) = 2 + j\omega L$$

A impedância equivalente está ligada em série com o resistor de 8 Ω. $\mathbf{V}_i(\omega)$ é a tensão entre os terminais das impedâncias em série e $\mathbf{V}_o(\omega)$ é a tensão entre os terminais da impedância equivalente, $\mathbf{Z}_e(\omega)$. Aplicando o método da divisão de tensão, obtemos

$$\mathbf{V}_o(\omega) = \frac{2 + j\omega L}{8 + 2 + j\omega L}\mathbf{V}_i(\omega) = \frac{2 + j\omega L}{10 + j\omega L}\mathbf{V}_i(\omega)$$

Dividindo ambos os membros da equação por $\mathbf{V}_i(\omega)$, obtemos a função de transferência do circuito:

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_i(\omega)} = \frac{2 + j\omega L}{10 + j\omega L}$$

Vamos agora colocar a função de transferência na forma da Eq. 13.2-6. Colocando 2 em evidência no numerador e 10 em evidência no denominador, obtemos

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{2\left(1 + j\omega\frac{L}{2}\right)}{10\left(1 + j\omega\frac{L}{10}\right)} = 0{,}2\frac{1 + j\omega\frac{L}{2}}{1 + j\omega\frac{L}{10}} \qquad (13.2\text{-}7)$$

Igualando as funções de transferência dadas pelas Eqs. 13.2-6 e 13.2-7, temos:

$$0{,}2\frac{1 + j\omega\frac{L}{2}}{1 + j\omega\frac{L}{10}} = 0{,}2\frac{1 + j\frac{\omega}{5}}{1 + j\frac{\omega}{25}}$$

e, portanto,

$$\frac{L}{2} = \frac{1}{5} \quad \text{e} \quad \frac{L}{10} = \frac{1}{25}$$

Os valores de L obtidos a partir dessas duas equações devem ser iguais, e realmente são. (Se não fossem, seria preciso rever os cálculos.) Resolvendo uma das duas equações, obtemos $L = 0{,}4$ H.

EXEMPLO 13.2-3 Função de Transferênciade um Circuito

EXEMPLO INTERATIVO

Considere o circuito da Figura 13.2-6. A entrada do circuito é a tensão da fonte de tensão, $v_i(t)$. A saída é a tensão entre os terminais do capacitor, $v_o(t)$. A função de transferência do circuito é

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_i(\omega)} = \frac{3}{\left(1 + j\frac{\omega}{2}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{5}\right)} \qquad (13.2\text{-}8)$$

Determine o valor da indutância L e do ganho A da fonte de tensão controlada por tensão (FTCT).

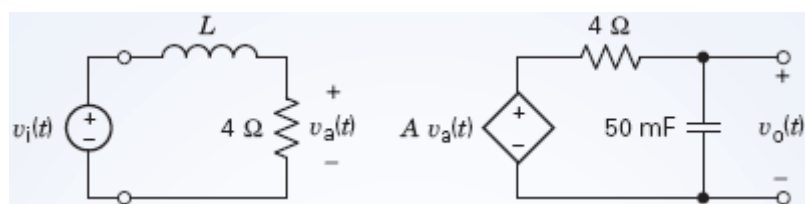



FIGURA 13.2-6 Circuito do Exemplo 13.2-3.

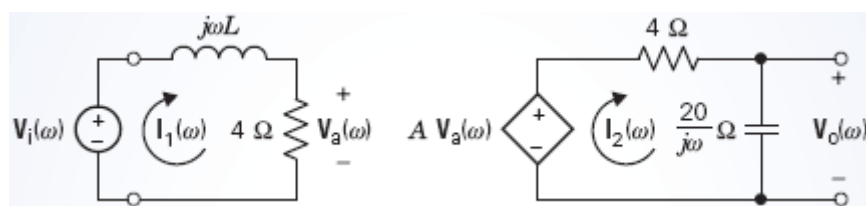



FIGURA 13.2-7 Representação do circuito da Figura 13.2-6 no domínio da frequência.

Solução

O circuito foi representado duas vezes, por um diagrama e por uma função de transferência. Os parâmetros desconhecidos, L e A, aparecem no diagrama do circuito, mas não aparecem na função de transferência. Podemos analisar o circuito para determinar a função de transferência. Nessa segunda função de

transferência, os parâmetros desconhecidos aparecem explicitamente. Vamos determinar o valor da indutância igualando as duas funções do circuito.

A função de transferência é a razão entre o fasor da saída e o fasor da entrada. Como os fasores existem apenas no domínio da frequência, o primeiro passo é representar o circuito no domínio da frequência. A Figura 13.2-7 mostra a representação do circuito da Figura 13.2-6 no domínio da frequência.

O circuito da Figura 13.2-7 contém duas malhas. A corrente de malha na malha da esquerda é chamada de $\mathbf{I}_1(\omega)$ e a corrente na malha da direita é chamada de $\mathbf{I}_2(\omega)$. Aplicando a lei de Kirchhoff para tensões (LKT) à malha da esquerda, obtemos

$$j\omega L\mathbf{I}_1(\omega) + 4\mathbf{I}_1(\omega) - \mathbf{V}_i(\omega) = 0$$

Explicitando $\mathbf{I}_1(\omega)$, temos

$$\mathbf{I}_1(\omega) = \frac{\mathbf{V}_i(\omega)}{j\omega L + 4} = \frac{0{,}25}{1 + j\omega\dfrac{L}{4}}\mathbf{V}_i(\omega)$$

De acordo com a lei de Ohm,

$$\mathbf{V}_a(\omega) = 4\mathbf{I}_1(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\dfrac{L}{4}}\mathbf{V}_i(\omega) \qquad (13.2\text{-}9)$$

Aplicando a LKT à malha da direita, obtemos

$$4\mathbf{I}_2(\omega) + \frac{20}{j\omega}\mathbf{I}_2(\omega) - A\mathbf{V}_a(\omega) = 0$$

Explicitando $\mathbf{I}_2(\omega)$, temos

$$\mathbf{I}_2(\omega) = \frac{A}{4 + \dfrac{20}{j\omega}}\mathbf{V}_a(\omega) = \frac{j\omega A}{j\omega 4 + 20}\mathbf{V}_a(\omega) = \frac{\dfrac{j\omega}{20}A}{1 + j\dfrac{\omega}{5}}\mathbf{V}_a(\omega)$$

A tensão de saída é obtida multiplicando a corrente de malha $\mathbf{I}_2(\omega)$ pela impedância do capacitor:

$$\mathbf{V}_o(\omega) = \frac{20}{j\omega}\mathbf{I}_2(\omega) = \frac{20}{j\omega} \times \frac{\dfrac{j\omega}{20}A}{1 + j\dfrac{\omega}{5}}\mathbf{V}_a(\omega) = \frac{A}{1 + j\dfrac{\omega}{5}}\mathbf{V}_a(\omega) \qquad (13.2\text{-}10)$$

Substituindo a expressão de $\mathbf{V}_a(\omega)$ dada pela Eq. 13.2-9 na Eq. 13.2-10, obtemos

$$\mathbf{V}_o(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\dfrac{L}{4}} \times \frac{A}{1 + j\dfrac{\omega}{5}}\mathbf{V}_i(\omega) = \frac{A}{\left(1 + j\omega\dfrac{L}{4}\right)\left(1 + j\dfrac{\omega}{5}\right)}\mathbf{V}_i(\omega)$$

Dividindo ambos os membros da equação por $\mathbf{V}_i(\omega)$, obtemos a função de transferência

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_i(\omega)} = \frac{A}{\left(1 + j\omega\dfrac{L}{4}\right)\left(1 + j\dfrac{\omega}{5}\right)} \qquad (13.2\text{-}11)$$

Comparando as funções de transferência dadas pelas Eqs. 13.2-8 e 13.2-11, obtemos $A = 3$ V/V e $L = 2$ H.

O circuito da Figura 13.2-1 é um exemplo de um tipo de circuito conhecido como filtro passa-baixa de primeira ordem. As funções dos filtros passa-baixa de primeira ordem são da forma

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{H_0}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}} \qquad (13.2\text{-}12)$$

O ganho e deslocamento de fase do filtro passa-baixa de primeira ordem são

$$\text{ganho} = \frac{|H_0|}{\sqrt{1 + \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}} \qquad (13.2\text{-}13)$$

e

$$\text{deslocamento de fase} = \angle H_0 - \tan^{-1}(\omega/\omega_0) \qquad (13.2\text{-}14)$$

A função de transferência do filtro passa-baixa de primeira ordem tem dois parâmetros, H_0 e ω_0. Em baixas frequências, ou seja, para $\omega \ll \omega_0$, o ganho é $|H_0|$; por essa razão, $|H_0|$ é chamado de ganho de CC. (Para $\omega = 0$, $A \cos \omega t = A$, uma tensão constante.)

O outro parâmetro da função de transferência, ω_0, é chamado de frequência de meia potência. Para explicar essa terminologia, suponha que a entrada do filtro de primeira ordem da Figura 13.2-1 é

$$v_{in}(t) = A \cos(\omega t)$$

Suponha, por conveniência, que $H_0 = 1$. Nesse caso, a saída do filtro de primeira ordem da Figura 13.2-1 é

$$v_o(t) = \frac{A}{\sqrt{1 + \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}} \cos\left(\omega_0 t - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right)$$

Na Figura 13.2-1, a tensão de saída é a tensão no resistor de 10 kΩ. A potência média fornecida ao resistor é

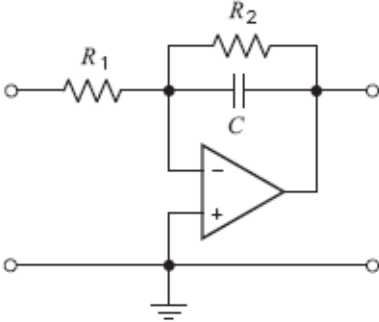
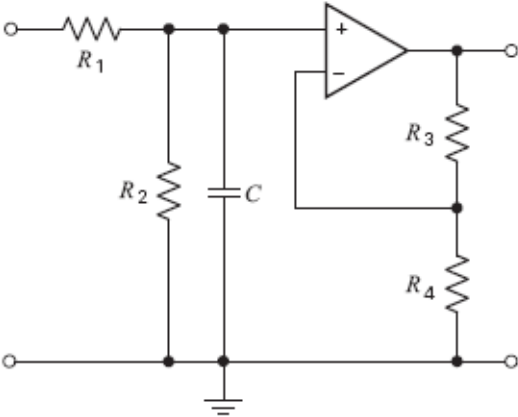
$$P_{med} = \frac{A^2}{2(10 \times 10^3)\left(1 + \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}$$

Em baixas frequências, ou seja, em frequências tais que $\omega \ll \omega_0$, a potência média é aproximadamente

$$P_1 = \frac{A^2}{2(10 \times 10^3)(1 + 0)} = \frac{A^2}{2(10 \times 10^3)}$$

Para $\omega = \omega_0$, a potência média é

$$P_2 = \frac{A^2}{2(10 \times 10^3)(1 + 1)} = \frac{P_1}{2}$$

Por essa razão, ω_0 recebe o nome de frequência de meia potência.

Em outras palavras, se a amplitude da entrada é mantida constante enquanto fazemos variar ω, a frequência da entrada, o valor da potência de saída para $\omega = \omega_0$ é metade do valor da potência de saída para $\omega \ll \omega_0$.

Vamos agora considerar o projeto de um filtro passa-baixa de primeira ordem. Suponha que o filtro deva atender às seguintes especificações:

ganho de CC = 2
deslocamento de fase = 120º para ω = 1000 rad/s

Antes de projetar um circuito com essas especificações, precisamos prestar mais atenção ao deslocamento de fase. Considere a Eq. 13.2-14. Como ω e ω_0 são grandezas positivas, $\tan^{-1}(\omega/\omega_0)$ está entre 0º e 90º. Além disso, $\angle H_0$ é 0º quando H_0 é positivo e 180º quando H_0 é negativo. Em consequência, apenas deslocamentos de fase entre –90º e 0º e entre 90º e 180º são possíveis no caso de um filtro passa-baixa de primeira ordem. (Deslocamentos de fase que não são possíveis para um filtro passa-baixa de primeira ordem podem ser obtidos usando outros tipos de circuitos, mas isso é outra história.) A Tabela 13.2-2 mostra dois filtros passa-baixa de primeira ordem, um para deslocamentos de fase entre 90º e 180º e o outro para deslocamentos de fase entre –90º e 0º. Com base no deslocamento de fase, escolhemos o circuito de cima da Tabela 13.2-2. A especificação do ganho nos dá

$$2 = |H_0| = \frac{R_2}{R_1}$$

Tabela 13.2-2 Filtros Passa-Baixa de Primeira Ordem

FASE	CIRCUITO	EQUAÇÃO
$90° \leq \text{fase} \leq 180°$		$H_0 = -\frac{R_2}{R_1}$ $\omega_0 = \frac{1}{R_2 C}$
$-90° \leq \text{fase} \leq 0°$		$H_0 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\left(1 + \frac{R_3}{R_4}\right)$ $\omega_0 = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}$

A especificação do deslocamento de fase nos dá

$$120° = 180° - \tan^{-1}(1000 R_2 C)$$

As especificações levam, portanto, a um sistema de duas equações com três incógnitas, R_1, R_2 e C, o que significa que não existe uma solução única; podemos escolher o valor de uma das incógnitas e calcular o valor das outras duas. Vamos escolher um valor conveniente para o capacitor, C = 0,1 μF, e calcular o valor das resistências.

$$R_2 = \frac{\tan(60°)}{1000 \times 0{,}1 \times 10^{-6}} = 17{,}32\ \text{k}\Omega$$

$$R_1 = \frac{R_2}{2} = 8{,}66\ \text{k}\Omega$$

Concluímos que o circuito de cima da Tabela 13.2-2 terá um ganho CC de 2 e um deslocamento de fase de 120º para ω = 1000 rad/s se R_1 = 8,66 kΩ, R_2 = 17,32 kΩ e C = 0,1 μF.

EXERCÍCIO 13.2-1 A entrada do circuito da Figura E 13.2-1 é a tensão da fonte, v_s, e a resposta é a tensão do capacitor, v_o. Suponha que R = 10 kΩ e C = 1 μF. Qual é o valor do ganho e do deslocamento de fase se a frequência de entrada é ω = 100 rad/s?

Resposta: 0,707 e –45º

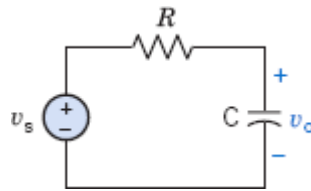



FIGURA E 13.2-1 Circuito *RC*.

EXERCÍCIO 13.2-2 A entrada do circuito da Figura E 13.2-2 é a tensão da fonte, v_s, e a resposta é a tensão do resistor, v_o. R = 30 Ω e L = 2 H. Suponha que a frequência de entrada é ajustada até que o ganho seja igual a 0,6. Qual é o valor da frequência?

Resposta: 20 rad/s.

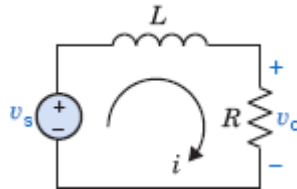



FIGURA E 13.2-2 Circuito *RL*.

EXERCÍCIO 13.2-3 A entrada do circuito da Figura E 13.2-2 é a tensão da fonte, v_s, e a resposta é a corrente da malha, i. R = 30 Ω e L = 2 H. Qual é o valor do ganho e do deslocamento de fase se a frequência de entrada é ω = 20 rad/s?

Resposta: 0,02 A/V e –53,1º.

EXERCÍCIO 13.2-4 A entrada do circuito da Figura E 13.2-1 é a tensão da fonte, v_s, e a resposta é a tensão do capacitor, v_o. Suponha que C = 1 μF. Qual deve ser o valor de R para que o deslocamento de fase seja –45º quando a frequência de entrada é ω = 20 rad/s?

Resposta: R = 50 kΩ.

EXERCÍCIO 13.2-5 A entrada do circuito da Figura E 13.2-1 é a tensão da fonte, v_s, e a resposta é a tensão do capacitor, v_o. Suponha que C = 1 μF. Qual deve ser o valor de R para que o ganho seja 1,5 para uma frequência de entrada ω = 20 rad/s?

Resposta: O problema é impossível, já que o ganho do circuito é menor que 1 para qualquer valor de R.

13.3 *Gráficos de Bode*

Em vez de gráficos lineares, os engenheiros eletricistas costumam usar gráficos logarítmicos para representar graficamente a resposta de frequência dos circuitos. Esses gráficos são chamados de *gráficos de Bode* em homenagem a H.W. Bode, que os usou sistematicamente em seus trabalhos com amplificadores no Bell Telephone Laboratories, nas décadas de 1930 e 1940. O gráfico de Bode é um gráfico do logaritmo do ganho e do ângulo de fase em função da frequência, usando uma escala logarítmica para a frequência. O uso de logaritmos aumenta consideravelmente a faixa de frequências que podem ser representadas no eixo horizontal.

Tabela 13.3-1 Tabela de Conversão para Decibéis

MÓDULO, *H*	20 log *H* (dB)
0,1	−20,00
0,2	−13,98
0,4	−7,96
0,6	−4,44
1,0	0,0
1,2	1,58
1,4	2,92
1,6	4,08
2,0	6,02
3,0	9,54
4,0	12,04
5,0	13,98
6,0	15,56
7,0	16,90
10,0	20,00
100,0	40,00

A função de transferência H pode ser escrita na forma

$$\mathbf{H} = H\underline{/\phi} = He^{j\phi} \qquad (13.3\text{-}1)$$

O ganho logarítmico é definido através da relação

$$\text{ganho logarítmico} = 20 \log_{10} H \qquad (13.3\text{-}2)$$

e é medido em decibéis (dB). O ganho logarítmico também é chamado de "ganho em dB". A Tabela 13.3-1 mostra uma tabela de conversão para decibéis.

O decibel é um submúltiplo do bel. Suponha que P_1 e P_2 sejam dois valores de potência. Tanto P_1/P_2 como $\log(P_1/P_2)$ são medidas dos valores relativos de P_1 e P_2. A razão P_1/P_2 é adimensional, enquanto a unidade de $\log(P_1/P_2)$ é o bel. O nome *bel* foi escolhido em homenagem a Alexander Graham Bell, o inventor do telefone.

O **gráfico de Bode** é um gráfico do ganho em decibéis e da fase em graus em função do logaritmo da frequência.

Vamos obter o gráfico de Bode da função de transferência

$$\mathbf{H} = \frac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_0)}} \angle \tan^{-1}(\omega/\omega_0) = H \angle \phi \qquad (13.3\text{-}3)$$

O ganho logarítmico é

$$\begin{aligned} 20 \log_{10} H &= 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^2}} \\ &= 20 \log_{10} 1 - 20 \log_{10} \sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^2} = -20 \log_{10} \sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^2} \end{aligned}$$

Em baixas frequências, ou seja, para $\omega \ll \omega_0$,

$$1 + (\omega/\omega_0)^2 \cong 1$$

e, portanto, o ganho logarítmico é aproximadamente

$$20 \log_{10} H = -20 \log_{10} \sqrt{1} = 0 \text{ dB}$$

que é a equação de uma reta horizontal. Como o ganho logarítmico se aproxima dessa reta horizontal em baixas frequências, ela é chamada de assíntota de baixa frequência do gráfico de Bode.

Em altas frequências, ou seja, para $\omega \gg \omega_0$,

$$1 + (\omega/\omega_0)^2 \cong (\omega/\omega_0)^2$$

e, portanto, o ganho logarítmico é aproximadamente

$$\begin{aligned} 20 \log_{10} H &= -20 \log_{10} \sqrt{(\omega/\omega_0)^2} \\ &= -20 \log_{10} \omega/\omega_0 = 20 \log_{10} \omega_0 - 20 \log_{10} \omega \end{aligned}$$

Essa equação mostra uma das vantagens de usar logaritmos. O gráfico de $20 \log_{10} H$ em função de $\log_{10} \omega$ é uma linha reta, que recebe o nome de assíntota de alta frequência do gráfico de Bode. Nas Figuras 13.3-1*b* e 13.3-1*a*, respectivamente, a equação da assíntota de alta frequência é comparada com a forma padrão da equação de uma linha reta, $y = mx + b$. A inclinação da assíntota de alta frequência pode ser calculada a partir de dois pontos da linha reta e é expressa em dB/década. Na Figura 13.3-1*b*, o ganho em dB foi plotado em função de $\log \omega$, enquanto na Figura 13.3-1*c* o ganho em dB foi plotado em função de ω usando uma escala logarítmica. É mais conveniente usar uma escala logarítmica para ω. A equação usada para calcular a inclinação a partir de dois pontos da reta é a mesma nas Figuras 13.3-1*b* e 13.3-1*c*.

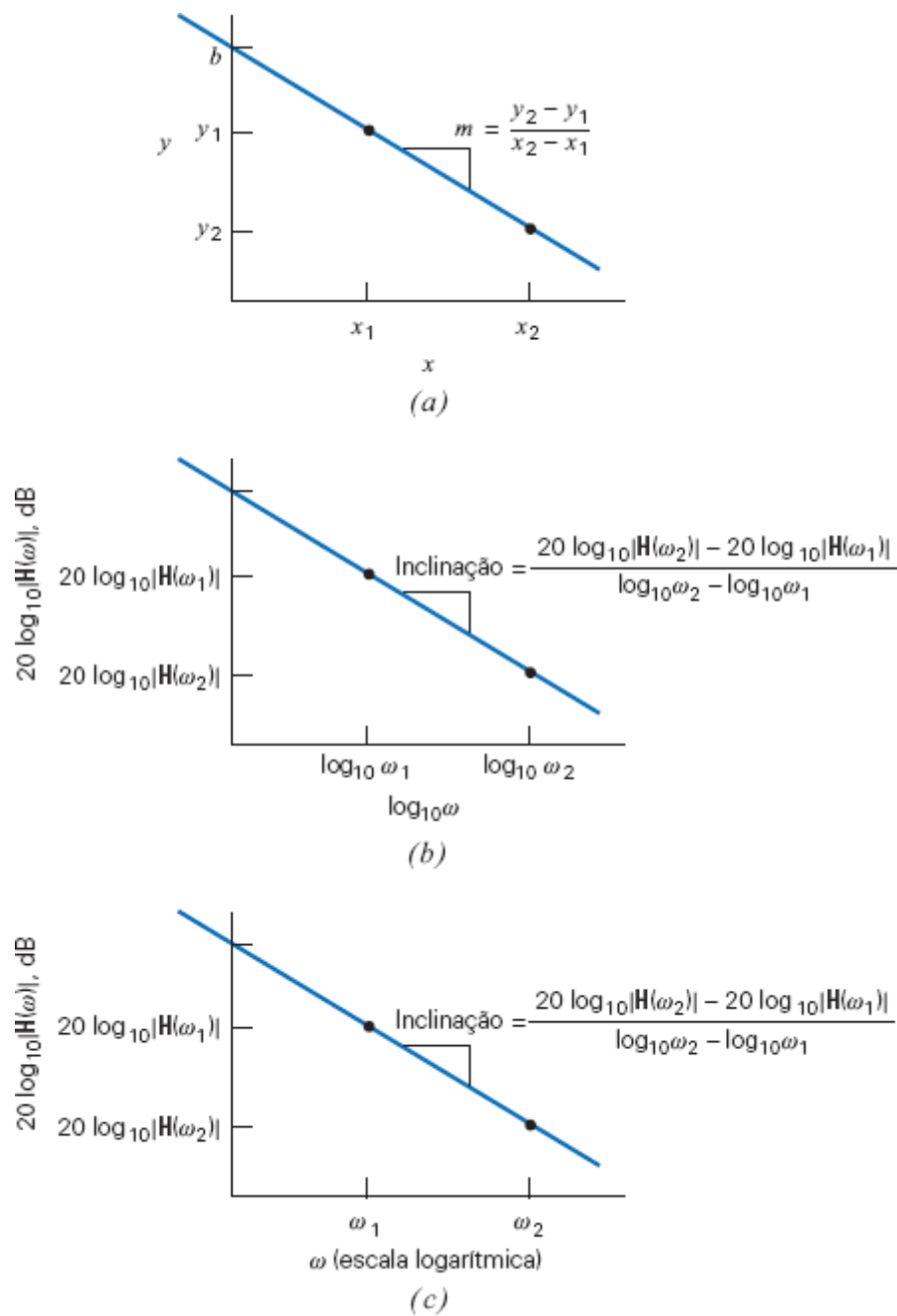



FIGURA 13.3-1 (*a*) Gráfico de y em função de x para a reta $y = mx + b$. (*b*) Gráfico de 20 log $|\mathbf{H}(\omega)|$ em função de log ω para a reta 20 log $|\mathbf{H}(\omega)|$ = 20 log ω_0 – 20 log ω. (*c*) Gráfico de 20 log $|\mathbf{H}(\omega)|$ em função de ω para a reta 20 log $|\mathbf{H}(\omega)|$ =20 log ω_0 – 20 log ω.

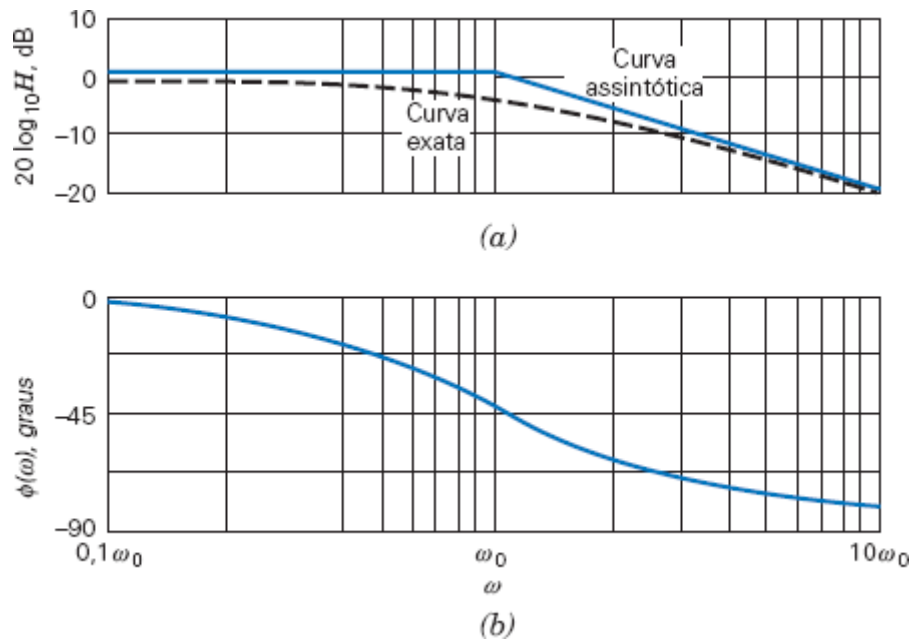



FIGURA 13.3-2 Gráfico de Bode da função **H** = $(1 + j\omega/\omega_0)^{-1}$. (*a*) Gráfico de amplitude. (*b*) Gráfico de fase. Em (*a*), a linha tracejada é a curva exata e a linha cheia é a aproximação assintótica.

Considere duas frequências ω_1 e ω_2, com $\omega_2 = 10^x\omega_1$. Dizemos que ω_2 está x décadas acima de ω_1, em que $x = \log_{10}(\omega_2/\omega_1)$. Assim, por exemplo, 1000 rad/s está 2 décadas acima de 10 rad/s e 316 rad/s está 1,5 década acima de 10 rad/s.

A inclinação da assíntota de alta frequência é dada por

$$\frac{20\log_{10}|\mathbf{H}(\omega_2)| - 20\log_{10}|\mathbf{H}(\omega_1)|}{\log_{10}\omega_2 - \log_{10}\omega_1} = \frac{20\log_{10}|\mathbf{H}(\omega_2)| - 20\log_{10}|\mathbf{H}(\omega_1)|}{\log_{10}(\omega_2/\omega_1)}$$

Essa inclinação está expressa em dB/década. A assíntota de alta frequência é caracterizada pelo fato de que

$$|\mathbf{H}(\omega)| \cong \frac{1}{\dfrac{\omega}{\omega_0}} = \frac{\omega_0}{\omega} \quad \text{para} \quad \omega \gg \omega_0$$

O valor da inclinação da assíntota de alta frequência é

$$\begin{aligned}\frac{20\log_{10}|\mathbf{H}(\omega_2)| - 20\log_{10}|\mathbf{H}(\omega_1)|}{\log_{10}(\omega_2/\omega_1)} &= \frac{20\log_{10}(\omega_0/\omega_2) - 20\log_{10}(\omega_0/\omega_1)}{\log_{10}(\omega_2/\omega_1)} \\ &= \frac{-20\log_{10}(\omega_2/\omega_1)}{\log_{10}(\omega_2/\omega_1)} = -20\ \text{dB/década}\end{aligned}$$

A interseção da assíntota de baixa frequência com a assíntota de alta frequência acontece para

$$0 = 20\log_{10}\omega - 20\log_{10}\omega_0$$

ou seja, para

$$\omega = \omega_0$$

Por causa do ângulo formado entre as duas assíntotas no ponto $\omega = \omega_0$, a frequência ω_0 é chamada de frequência de canto ou frequência de quebra.

A Figura 13.3-2 mostra os gráficos de Bode de amplitude e fase dessa função de transferência. O gráfico de Bode assintótico, rotulado como "Curva assintótica", é formado pela assíntota de baixa frequência para $\omega < \omega_0$ e pela assíntota de alta frequência para $\omega > \omega_0$ e constitui uma aproximação da curva exata,

representada por uma linha tracejada. As aproximações usadas para obter o gráfico de Bode assintótico podem ser descritas pelas seguintes equações:

$$|\mathbf{H}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega/\omega_0)^2}} \cong \begin{cases} 1 & \omega < \omega_0 \\ \omega_0/\omega & \omega > \omega_0 \end{cases}$$

ou

$$20\log_{10}|\mathbf{H}(\omega)| = 20\log_{10}\frac{1}{\sqrt{1+(\omega/\omega_0)^2}} \cong \begin{cases} 0 & \omega < \omega_0 \\ 20\log_{10}\omega_0 - 20\log_{10}\omega & \omega > \omega_0 \end{cases}$$

O gráfico de Bode assintótico é uma boa aproximação do gráfico de Bode para $\omega \ll \omega_0$ e para $\omega \gg \omega_0$. Nas proximidades de $\omega = \omega_0$, a diferença entre o gráfico de Bode assintótico e o gráfico de Bode exato é significativa. Em $\omega = \omega_0$, o valor do gráfico de Bode assintótico é 0 dB, enquanto o valor do gráfico de Bode exato é

$$20\log_{10}|\mathbf{H}(\omega_0)| = 20\log_{10}\frac{1}{\sqrt{1+(\omega_0/\omega_0)^2}} = 20\log_{10}\frac{1}{\sqrt{2}} = -3{,}01\text{ dB}$$

Embora a curva exata não apresente uma mudança brusca de inclinação em $\omega = \omega_0$, a frequência para a qual a amplitude é $1/\sqrt{2}$ vezes a amplitude para $\omega = 0$ é considerada uma frequência especial. No diagrama de Bode, uma queda de amplitude de $1/\sqrt{2}$ se traduz em uma queda logarítmica de aproximadamente 3 dB em $\omega = \omega_0$, ou seja, na frequência de canto.

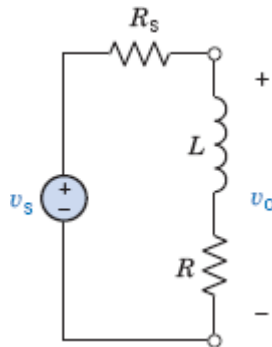



FIGURA 13.3-3 Circuito formado por uma fonte de tensão e uma carga constituída por um indutor e um resistor.

Naturalmente, H não precisa ter a forma da Eq. 13.3-3. Considere, por exemplo, o circuito da Figura 13.3-3. A função de transferência do circuito é

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_s} = \frac{R + j\omega L}{R_s + R + j\omega L}$$

que pode escrita na forma

$$\mathbf{H} = k\frac{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_1}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_2}} = H\,\underline{/\phi}$$

Essa função de transferência tem três parâmetros: k, ω_1 e ω_2. Os três parâmetros recebem nomes especiais. As frequências ω_1 e ω_2 são frequências de canto. As frequências de canto que aparecem no numerador da função de transferência são chamadas de zeros; assim, ω_1 é um zero da função de transferência. As frequências de canto que aparecem no denominador da função de transferência são chamadas de polos; assim, ω_2 é um polo da função de transferência. Como

$$k = \lim_{\omega \to 0} H$$

o parâmetro k é chamado de ganho da baixa frequência ou ganho de CC. A função de transferência do circuito pode ser expressa na forma

$$\mathbf{H} = \left(\frac{R}{R + R_s}\right) \frac{1 + j\dfrac{\omega L}{R}}{1 + j\dfrac{\omega L}{R + R_s}}$$

e, portanto, o ganho de CC é

$$k = \frac{R}{R + R_s}$$

e as frequências do zero e do polo satisfazem a desigualdade

$$\omega_1 = \frac{R}{L} < \frac{R + R_s}{L} = \omega_2$$

O ganho correspondente a uma função de transferência com essa forma é

$$H = k\frac{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\omega}{\omega_1}\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\omega}{\omega_2}\right)^2}}$$

Para obter o gráfico de Bode assintótico, supomos que $\sqrt{1 + (\omega / \omega_1)^2} \approx 1$ para $\omega < \omega_1$, $\sqrt{1 + (\omega / \omega_1)^2} \approx \omega / \omega_1$ para $\omega > \omega_1$, $\sqrt{1 + (\omega / \omega_2)^2} \approx 1$ para $\omega < \omega_2$ e $\sqrt{1 + (\omega / \omega_2)^2} \approx \omega / \omega_2$ para $\omega > \omega_2$. Nesse caso,

$$H \cong \begin{cases} k & \omega < \omega_1 \\ \dfrac{k\omega}{\omega_1} & \omega_1 < \omega < \omega_2 \\ \dfrac{k\omega_2}{\omega_1} & \omega_2 < \omega \end{cases}$$

Em seguida, o ganho logarítmico é aproximado por

$$20\log_{10} H \cong \begin{cases} 20\log_{10} k & \omega < \omega_1 \\ (20\log_{10} k - 20\log_{10}\omega_1) + 20\log_{10}\omega & \omega_1 < \omega < \omega_2 \\ (20\log_{10} k - 20\log_{10}\omega_1) + 20\log_{10}\omega_2 & \omega_2 < \omega \end{cases}$$

Essas são as equações das assíntotas do gráfico de Bode. Para $\omega < \omega_1$ e $\omega > \omega_2$, as assíntotas são retas horizontais. As equações dessas assíntotas não possuem nenhum termo que dependa de ω e, portanto, a inclinação tem que ser zero. Para $\omega_1 < \omega < \omega_2$, a equação da assíntota possui um termo proporcional a $\log_{10}\omega$. Como o coeficiente de $\log_{10}\omega$ é 20, a inclinação é de 20 dB/década.

O efeito do ganho de CC, k, é limitado ao termo 20 $\log_{10}k$, que aparece nas equações das três assíntotas. Qualquer mudança no valor de k desloca o gráfico de Bode para cima (se k aumentar) ou para baixo (se k diminuir) sem mudar a forma do gráfico. Por essa razão, costuma-se normalizar a função de transferência dividindo-a pelo ganho de CC. As assíntotas do gráfico de Bode da função de transferência normalizada são dadas por

$$20\log_{10}\left(\frac{H}{k}\right) \cong \begin{cases} 0 & \omega < \omega_1 \\ 20\log_{10}\omega - 20\log_{10}\omega_1 & \omega_1 < \omega < \omega_2 \\ 20\log_{10}\omega_2 - 20\log_{10}\omega_1 & \omega_2 < \omega \end{cases}$$

O ângulo de fase de **H** é dado por

$$\phi = \angle k + \angle\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right) - \angle\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_2}\right) = 0 + \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)$$

Os gráficos de Bode da amplitude normalizada e da fase aparecem da Figura 13.3-4. Observe que a inclinação do gráfico de amplitude assintótico muda quando a frequência passa por ω_1 e muda novamente quando a frequência passa por ω_2. Zeros, como ω_1, fazem com que a frequência aumente de 20 dB/década. Polos, como ω_2, fazem com que a frequência diminua de 20 dB/década. A inclinação de uma assíntota é sempre um múltiplo inteiro de 20 dB/década.

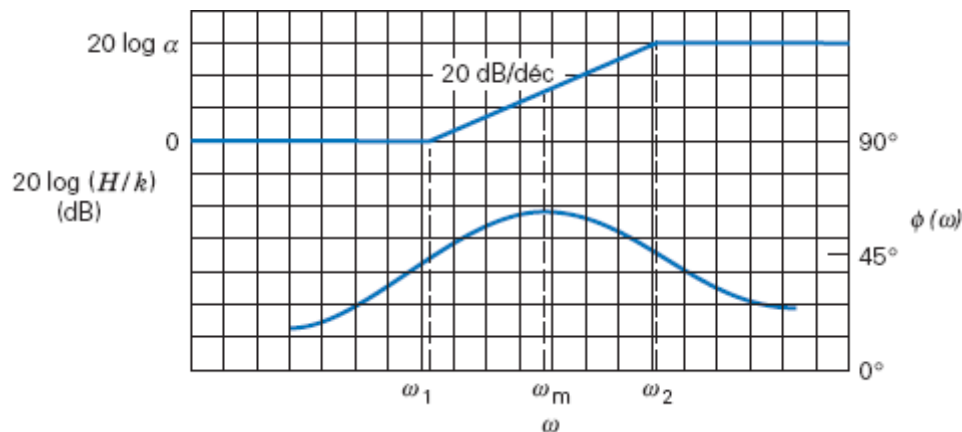



FIGURA 13.3-4 Gráfico de Bode do circuito da Figura 13.3-3.

EXEMPLO 13.3-1 Gráfico de Bode

Determine do gráfico de Bode assintótico da função de transferência

$$\mathbf{H}(\omega) = K\frac{j\omega}{1 + j\dfrac{\omega}{p}}$$

Solução

Supondo que $(1 + j\omega/p) \approx 1$ para $\omega < p$ e $(1 + j\omega/p) \approx j\omega/p$ para $\omega > p$, obtemos

$$\mathbf{H}(\omega) \cong \begin{cases} K(j\omega) & \omega < p \\ Kp & \omega > p \end{cases}$$

O ganho logarítmico é

$$20\log_{10}|\mathbf{H}(\omega)| \cong \begin{cases} 20\log_{10}K + 20\log_{10}\omega & \omega < p \\ 20\log_{10}(Kp) & \omega > p \end{cases}$$

O gráfico de Bode correspondente aparece na Figura 13.3-5. O fator $j\omega$ no numerador de $\mathbf{H}(\omega)$ faz com que a assíntota de baixa frequência tenha uma inclinação de 20 dB/década. A inclinação do gráfico de Bode de amplitude assintótico diminui de 20 dB/década (de 20 dB/década para zero) quando a frequência ultrapassa o valor $\omega = p$.

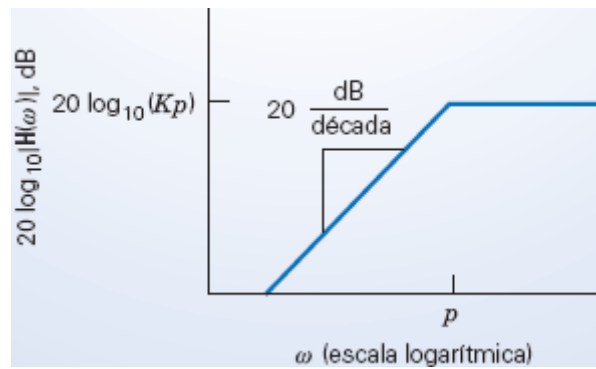



FIGURA 13.3-5 Gráfico de Bode assintótico do Exemplo 13.3-1.

EXEMPLO 13.3-2 Gráfico de Bode de um Circuito

EXEMPLO INTERATIVO

Considere o circuito da Figura 13.3-6*a*. A entrada do circuito é a tensão da fonte de tensão, $v_i(t)$. A saída é a tensão no terminal de saída do amplificador operacional, $v_o(t)$. A função de transferência é

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_i(\omega)} \tag{13.3-4}$$

O gráfico de Bode de amplitude correspondente aparece na Figura 13.3-6*b*. Determine o valor das capacitâncias C_1 e C_2.

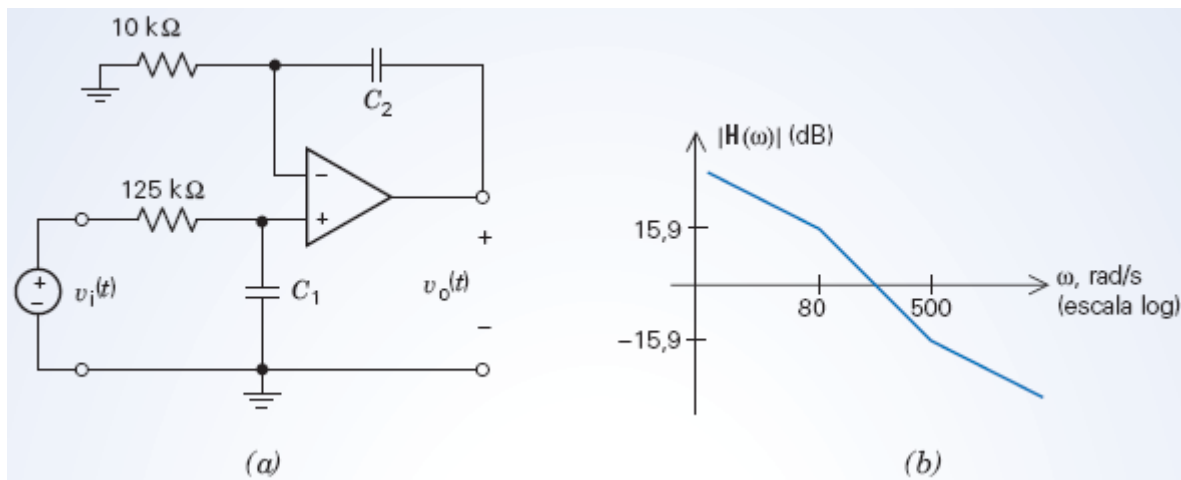



FIGURA 13.3-6 Circuito e gráfico de Bode do Exemplo 13.3-2.

Solução

A função de transferência estabelece uma ligação entre o circuito e o gráfico de Bode. Podemos determinar a função de transferência de duas formas: a partir de uma análise do circuito e a partir do gráfico de Bode. O valor das capacitâncias pode ser calculado igualando os parâmetros das funções obtidas pelos dois métodos.

1º passo: Vamos fazer algumas observações em relação ao gráfico de Bode da Figura 13.3-6*b*:

1. Existem duas frequências de canto, 80 e 500 rad/s. A frequência de canto em 80 rad/s é um polo, já que a inclinação do gráfico de Bode é menor (mais negativa) a partir de 80 rad/s. A frequência de canto em 500 rad/s é um zero, já que a inclinação é maior (menos negativa) a partir de 500 rad/s.
2. As frequências de canto estão separadas por $\log_{10}(500/80) = 0{,}796$ década. A inclinação do gráfico de Bode é $(-15{,}9-15{,}9)/0{,}796 = -40$ dB por década entre as duas frequências de canto.

3. Em baixas frequências, ou seja, em frequências menores que a menor frequência de canto, a inclinação é -1×20 dB/década, o que significa que a função de transferência tem um fator da forma $1/j\omega$.

Assim, a função de transferência correspondente ao gráfico de Bode é da forma

$$\mathbf{H}(\omega) = k(j\omega)^{-1}\left(\frac{1+j\dfrac{\omega}{500}}{1+j\dfrac{\omega}{80}}\right) = k\frac{1+j\dfrac{\omega}{500}}{j\omega\left(1+j\dfrac{\omega}{80}\right)} \qquad (13.3\text{-}5)$$

em que k é uma constante a ser determinada.

2º passo: Vamos agora analisar o circuito da Figura 13.3-6*a* para determinar a função de transferência. A função de transferência é a razão entre o fasor da saída e o fasor da entrada. Como os fasores existem apenas no domínio da frequência, o primeiro passo é representar o circuito no domínio da frequência. A Figura 13.3-7 mostra a representação do circuito da Figura 13.3-6*a* no domínio da frequência.

Para analisar o circuito da Figura 13.3-7, aplicamos a LKC ao nó que chamamos de a. (Como a corrente na entrada não inversora de um amplificador operacional ideal é zero, apenas duas correntes entram no nó, a corrente do resistor de 125 kΩ e a corrente do capacitor C_1.)

$$\frac{\mathbf{V}_i(\omega) - \mathbf{V}_a(\omega)}{125 \times 10^3} = \frac{\mathbf{V}_a(\omega)}{\dfrac{1}{j\omega C_1}}$$

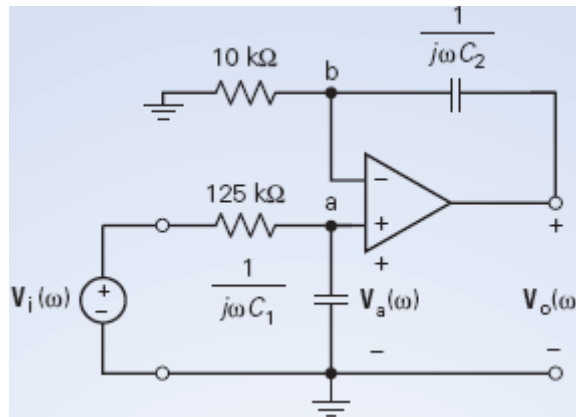



FIGURA 13.3-7 Representação do circuito da Figura 13.3-6*a* no domínio da frequência.

em que $\mathbf{V}_a(\omega)$ é a tensão de nó do nó a. Uma pequena manipulação algébrica nos dá

$$\frac{\mathbf{V}_i(\omega)}{125 \times 10^3} = \left(\frac{1}{125 \times 10^3} + j\omega C_1\right)\mathbf{V}_a(\omega)$$

e, portanto,

$$\mathbf{V}_i(\omega) = \left(1 + j\omega C_1\left(125 \times 10^3\right)\right)\mathbf{V}_a(\omega) \Rightarrow \mathbf{V}_a(\omega) = \frac{\mathbf{V}_i(\omega)}{1 + j\omega C_1\left(125 \times 10^3\right)}$$

Vamos agora aplicar a LKC ao nó que chamamos de b. (Como a corrente na entrada inversora de um amplificador operacional ideal é zero, apenas duas correntes entram no nó, a corrente do resistor de 10 kΩ e a corrente do capacitor C_2.)

$$\frac{\mathbf{V}_a(\omega)}{10 \times 10^3} + \frac{\mathbf{V}_a(\omega) - \mathbf{V}_o(\omega)}{\dfrac{1}{j\omega C_2}} = 0$$

Uma pequena manipulação algébrica nos dá

$$\mathbf{V}_a(\omega) + j\omega C_2\left(10 \times 10^3\right)(\mathbf{V}_a(\omega) - \mathbf{V}_o(\omega)) = 0$$
$$\left(1 + j\omega C_2\left(10 \times 10^3\right)\right)\mathbf{V}_a(\omega) = j\omega C_2\left(10 \times 10^3\right)\mathbf{V}_o(\omega)$$
$$\left(1 + j\omega C_2\left(10 \times 10^3\right)\right)\frac{\mathbf{V}_i(\omega)}{1 + j\omega C_1\left(125 \times 10^3\right)} = j\omega C_2\left(10 \times 10^3\right)\mathbf{V}_o(\omega)$$

e, portanto,

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_i(\omega)} = \left(\frac{1}{C_2\left(10 \times 10^3\right)}\right)\frac{1 + j\omega C_2\left(10 \times 10^3\right)}{(j\omega)\left(1 + j\omega C_1\left(125 \times 10^3\right)\right)} \tag{13.3-6}$$

3º passo: Como as funções de transferência das Eqs. 13.3-5 e 13.3-6 devem ser iguais, temos

$$k\frac{1 + j\dfrac{\omega}{500}}{j\omega\left(1 + j\dfrac{\omega}{80}\right)} = \mathbf{H}(\omega) = \left(\frac{1}{C_2\left(10 \times 10^3\right)}\right)\frac{1 + j\omega C_2\left(10 \times 10^3\right)}{(j\omega)\left(1 + j\omega C_1\left(125 \times 10^3\right)\right)}$$

Igualando os coeficientes, obtemos

$$\frac{1}{80} = C_1\left(125 \times 10^3\right);\ \frac{1}{500} = C_2\left(10 \times 10^3\right);\ \text{e}\ k = \frac{1}{C_2\left(10 \times 10^3\right)} = 500$$

o que nos dá

$$C_1 = \frac{1}{80\left(125 \times 10^3\right)} = 0{,}1\ \mu\text{F} \quad \text{e} \quad C_2 = \frac{1}{500\left(10 \times 10^3\right)} = 0{,}2\ \mu\text{F}$$

EXEMPLO 13.3-3 Gráfico de Bode de um Circuito

EXEMPLO INTERATIVO

Considere o circuito da Figura 13.3-8*a*. A entrada do circuito é a tensão da fonte de tensão, $v_i(t)$. A saída é a tensão no terminal de saída do amplificador operacional, $v_o(t)$. A função que representa o circuito é

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_i(\omega)} \tag{13.3-7}$$

O gráfico de Bode de amplitude correspondente aparece na Figura 13.3-8*b*. Determine o valor das capacitâncias C_1 e C_2 e do ganho k da função de transferência.

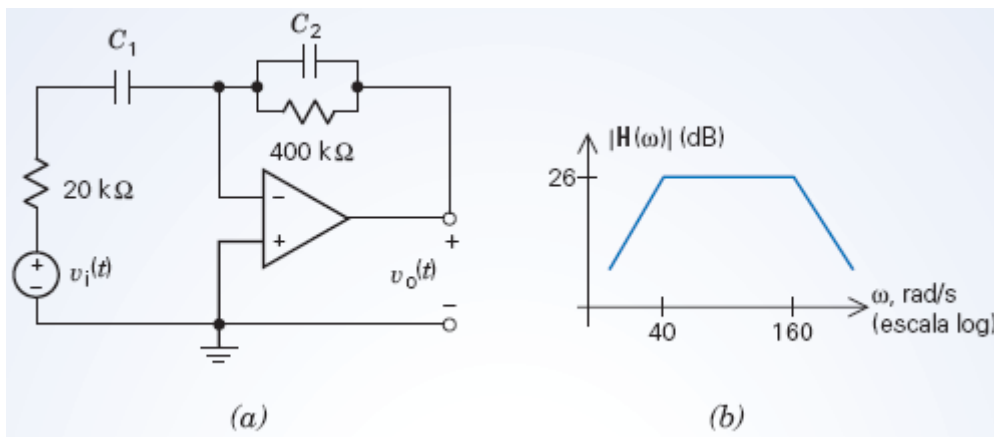



FIGURA 13.3-8 Circuito e gráfico de Bode do Exemplo 13.3-3.

Solução

A função de transferência estabelece uma ligação entre o circuito e o gráfico de Bode. Podemos determinar a função de transferência de duas formas: a partir de uma análise do circuito e a partir do gráfico de Bode. O valor das capacitâncias pode ser calculado igualando os parâmetros das funções obtidas pelos dois métodos.

1º passo: Vamos fazer algumas observações em relação ao gráfico de Bode da Figura 13.3-8*b*.

1. Existem duas frequências de canto, 40 e 160 rad/s. As duas frequências de canto são polos, já que a inclinação do gráfico de Bode é menor (mais negativa) a partir das duas frequências de canto.
2. Entre as frequências de canto, o ganho é $|\mathbf{H}(\omega)| = 26 \text{ dB} = 10^{26/20} \cong 20$ V/V.
3. Em baixas frequências, ou seja, em frequências menores que a menor frequência de canto, a inclinação é 1×20 dB/década, o que significa que a função de transferência tem um fator da forma $j\omega$.

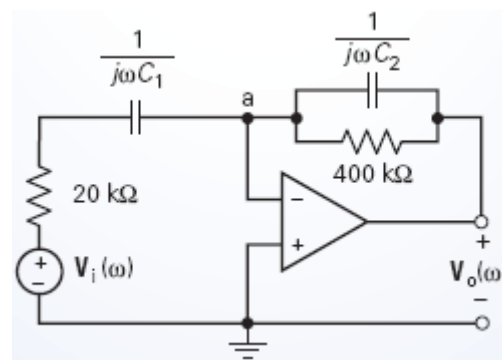



FIGURA 13.3-9 Representação do circuito da Figura 13.3-8*a* no domínio da frequência.

Assim, a função de transferência correspondente ao gráfico de Bode é da forma

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{k(j\omega)}{\left(1 + j\dfrac{\omega}{40}\right)\left(1 + j\dfrac{\omega}{160}\right)} \tag{13.3-8}$$

em que k é uma constante a ser determinada.

2º passo: Vamos agora analisar o circuito da Figura 13.3-8*a* para determinar a função de transferência. A função de transferência é a razão entre o fasor da saída e o fasor da entrada. Como os fasores existem apenas no domínio da frequência, o primeiro passo é representar o circuito no domínio da frequência. A Figura 13.3-9 mostra a representação do circuito da Figura 13.3-8*a* no domínio da frequência.

Para analisar o circuito da Figura 13.3-9, aplicamos a LKC ao nó que chamamos de a. As impedâncias em série, 20 kΩ e $1/j\omega C_1$, são tratadas como uma única impedância equivalente igual a $20 \times 10^3 + 1/j\omega C_1$ (A tensão de nó do nó a é zero volt porque as tensões nos terminais de entrada de um amplificador operacional ideal são iguais. Como a corrente na entrada inversora de um amplificador é zero, apenas três correntes entram no nó.)

$$\frac{\mathbf{V}_i(\omega)}{20 \times 10^3 + \dfrac{1}{j\omega C_1}} + \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{400 \times 10^3} + \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\dfrac{1}{j\omega C_2}} = 0$$

Uma pequena manipulação algébrica nos dá

$$\frac{(j\omega C_1)\mathbf{V}_i(\omega)}{1 + j\omega C_1(20 \times 10^3)} + \left(\frac{1}{400 \times 10^3} + j\omega C_2\right)\mathbf{V}_o(\omega) = 0$$

$$\frac{(j\omega C_1)(400 \times 10^3)\mathbf{V}_i(\omega)}{1 + j\omega C_1(20 \times 10^3)} = -(1 + j\omega C_2(400 \times 10^3))\mathbf{V}_o(\omega)$$

Finalmente,

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_i(\omega)} = \frac{-j\omega C_1(400 \times 10^3)}{(1 + j\omega C_1(20 \times 10^3))(1 + j\omega C_2(400 \times 10^3))} \qquad (13.3\text{-}9)$$

3º passo: Como as funções de transferência das Eqs. 13.3-8 e 13.3-9 devem ser iguais, temos

$$\frac{k(j\omega)}{\left(1 + j\dfrac{\omega}{40}\right)\left(1 + j\dfrac{\omega}{160}\right)} = \mathbf{H}(\omega) = \frac{-j\omega C_1(400 \times 10^3)}{(1 + j\omega C_1(20 \times 10^3))(1 + j\omega C_2(400 \times 10^3))}$$

Igualando os coeficientes, obtemos

$$\frac{1}{40} = C_1(20 \times 10^3); \quad \frac{1}{160} = C_2(400 \times 10^3); \quad \text{e} \quad k = -C_1(400 \times 10^3)$$

e, portanto,

$$C_1 = \frac{1}{40(20 \times 10^3)} = 1{,}25\ \mu\text{F} \quad \text{e} \quad C_2 = \frac{1}{160(400 \times 10^3)} = 15{,}625\ \text{nF}$$

e

$$k = -C_1\,(400 \times 10^3) = -(1{,}25 \times 10^{-6})\,(400 \times 10^3) = -0{,}5$$

EXEMPLO 13.3-4 Função de Transferência com Polos Complexos

A função de transferência de um filtro passa-baixa de segunda ordem é da forma

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{k\,\omega_0^2}{(j\omega)^2 + j2\zeta\,\omega_0\omega + \omega_0^2}$$

Essa função de transferência depende de três parâmetros: o ganho de CC, k; a frequência de canto, ω_0; a constante de amortecimento, ζ. Por conveniência, vamos supor que $k = 1$. Nesse caso, como $j^2 = -1$, podemos escrever a função de transferência na forma

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j2\zeta\,\omega_0\omega}$$

Determine o gráfico de Bode de amplitude assintótico do filtro passa-baixa de segunda ordem com ganho de CC unitário.

Solução

O denominador de $\mathbf{H}(\omega)$ contém um novo fator, o que envolve ω^2. O gráfico de Bode assintótico se baseia na aproximação

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) + j2\zeta\,\omega_0\omega \cong \begin{cases} \omega_0^2 & \omega < \omega_0 \\ -\omega^2 & \omega > \omega_0 \end{cases}$$

Usando essa aproximação, podemos expressar $\mathbf{H}(\omega)$ na forma

$$\mathbf{H}(\omega) \cong \begin{cases} 1 & \omega < \omega_0 \\ -\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2} & \omega > \omega_0 \end{cases}$$

O ganho logarítmico é

$$20\log_{10}|\mathbf{H}(\omega)| \cong \begin{cases} 0 & \omega < \omega_0 \\ 40\log_{10}\omega_0 - 40\log_{10}\omega & \omega > \omega_0 \end{cases}$$

O gráfico de Bode de amplitude assintótico aparece na Figura 13.3-10. O gráfico de Bode de amplitude exato e o gráfico de Bode de fase são mostrados na Figura 13.3-11. O gráfico de Bode assintótico é uma boa aproximação do gráfico de Bode real para $\omega \ll \omega_0$ e para $\omega \gg \omega_0$. Nas proximidades de $\omega = \omega_0$, a diferença entre o gráfico de Bode assintótico e o gráfico de Bode exato é significativa. Em $\omega = \omega_0$, o valor do gráfico de Bode assintótico é 0 dB, enquanto o valor do gráfico de Bode exato é

$$\mathbf{H}(\omega_0) = \frac{1}{2\zeta}$$

Como mostram essa equação e a Figura 13.3-11, a diferença entre o gráfico de Bode real e o gráfico de Bode assintótico nas vizinhanças de $\omega = \omega_0$ depende de ζ. A frequência ω_0 é chamada de *frequência de canto*. A inclinação do gráfico de Bode assintótico diminui de 40 dB/década quando a frequência ultrapassa o valor $\omega = \omega_0$. Em termos do gráfico de Bode assintótico, o denominador da função de transferência se comporta como dois polos em $p = \omega_0$. Se esse fator aparecesse no numerador da função de transferência, o comportamento seria o de dois zeros em $z = \omega_0$. Nesse caso, a inclinação do gráfico de Bode assintótico aumentaria de 40 dB/década quando a frequência ultrapassasse o valor $\omega = \omega_0$.

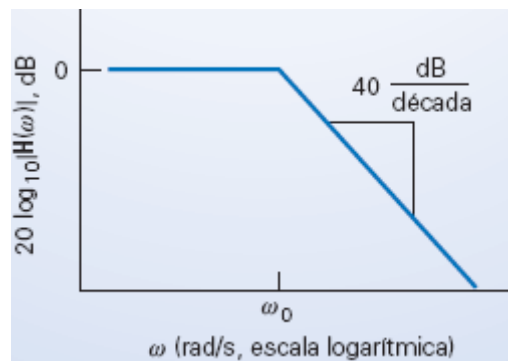



FIGURA 13.3-10 Gráfico de Bode de amplitude assintótico de um filtro passa-baixa de segunda ordem com ganho de CC unitário.

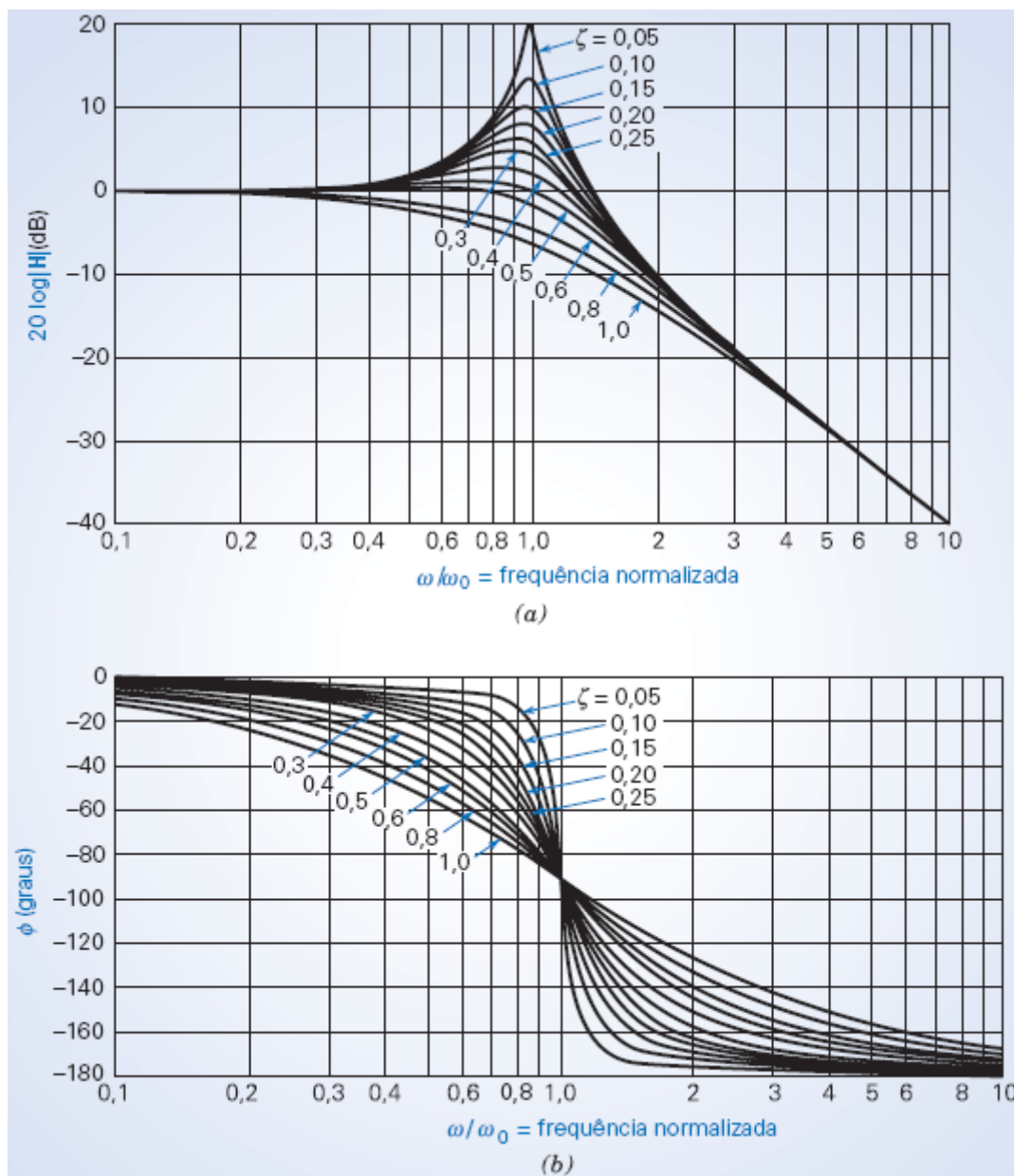



FIGURA 13.3-11 Gráfico de Bode da função $\mathbf{H}(j\omega) = [1 + (2\zeta/\omega_0)j\omega + (j\omega/\omega_0)^2]^{-1}$ para duas décadas de frequência.

EXEMPLO 13.3-5 Gráfico de Bode de Amplitude de uma Função de Transferência Complicada

Determine o gráfico de Bode de amplitude assintótico da função

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{5(1 + 0{,}1j\omega)}{j\omega(1 + 0{,}5j\omega)\left[1 + 0{,}6\left(\frac{j\omega}{50}\right) - \left(\frac{\omega}{50}\right)^2\right]}$$

Solução

As frequências de canto de $\mathbf{H}(\omega)$ são $z = 10$ rad/s, $p = 2$ rad/s e $\omega_0 = 50$ rad/s. A menor frequência de canto é $p = 2$ rad/s. Para $\omega < 2$, $\mathbf{H}(\omega)$ é, dada, aproximadamente, por

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{5}{j\omega}$$

e, portanto, a equação da assíntota de baixa frequência é

$$20 \log_{10} |\mathbf{H}| = 20 \log_{10} 5 - 20 \log_{10} \omega$$

A inclinação da assíntota de baixa frequência é –20 dB/década. Vamos determinar um ponto da assíntota de baixa frequência. Para $\omega = 1$,

$$20 \log_{10} |\mathbf{H}| = 20 \log_{10} 5 - 20 \log_{10} 1 = 14 \text{ dB}$$

Assim, a assíntota de baixa frequência é uma linha reta com uma inclinação de –20 dB/década que passa pelo ponto $\omega = 1$ rad/s, $|\mathbf{H}| = 14$ dB.

A inclinação do gráfico de Bode assintótico muda toda vez que ω passa por uma frequência de canto. A inclinação diminui de 20 dB/década em $\omega = p = 2$ rad/s, aumenta de 20 dB/década em $\omega = 10$ rad/s e, finalmente, diminui de 40 dB/década em $\omega = 50$ rad/s. O gráfico de Bode de amplitude assintótico aparece na Figura 13.3-12.

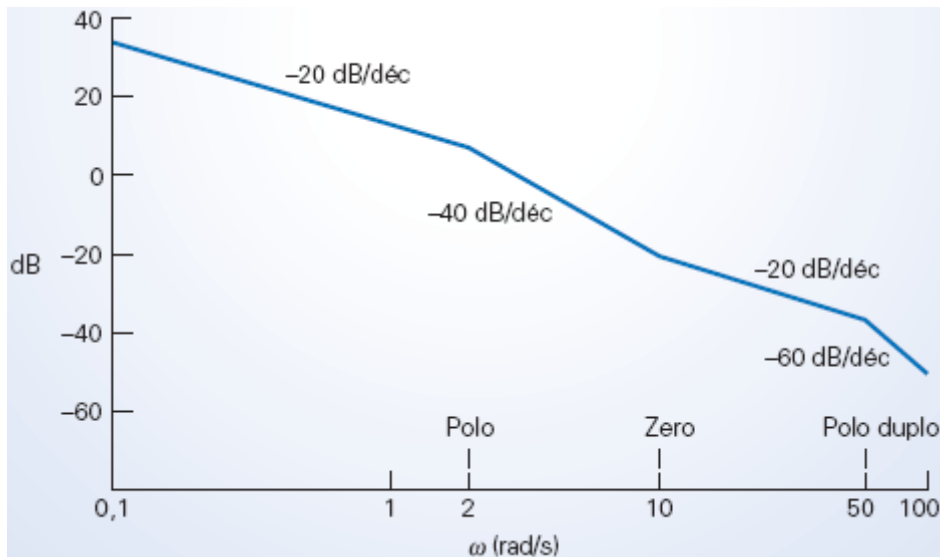



FIGURA 13.3-12 Gráfico assintótico do Exemplo 13.3-5.

EXEMPLO 13.3-6 Projeto de um Circuito a Partir do Gráfico de Bode

Projete um circuito como o da Figura 13.3-3 para que apresente as seguintes características:

1. Ganho de baixa frequência: 0,1.
2. Ganho de alta frequência: 1.
3. Frequências de canto entre 100 Hz e 2000 Hz.

Solução

O primeiro passo consiste em verificar se é possível atender às especificações usando o circuito da Figura 13.3-3. Nossa análise anterior mostrou que o ganho de baixa frequência desse tipo de circuito é sempre menor que 1 e que o ganho de alta frequência é igual a 1. Felizmente, as especificações são compatíveis com essas características do circuito. De acordo com a primeira especificação, devemos ter

$$0{,}1 = \text{ganho de baixa frequência} = k = \frac{R}{R + R_s}$$

Como o circuito possui um ganho de alta frequência igual a 1, a segunda especificação está automaticamente satisfeita.

Vamos voltar nossa atenção para as especificações das frequências de canto. A faixa de frequências especificada é dada em hertz, enquanto as frequências de canto são normalmente expressas em radianos por segundo. Supondo que $\omega_1 > \omega_2$, a terceira especificação exige que

$$(2\pi)\,100 < \frac{R}{L} = \omega_1$$

e

$$(2\pi)2000 > \frac{R + R_s}{L} = \omega_2$$

Devemos encontrar valores de R, R_s e L que satisfaçam essas desigualdades. Não há garantia de que existam valores apropriados. Se existir um conjunto de valores apropriado, pode não ser o único. Vamos tentar

$$R = 100\ \Omega$$

De acordo com a especificação para o ganho de baixa frequência, devemos ter

$$R_s = 9R = 900\ \Omega$$

A especificação do zero será satisfeita se

$$L = \frac{R}{(2\pi)100} = 0{,}159\ \text{H}$$

Resta verificar se esses valores de R, R_s e L satisfazem a especificação da frequência do polo. Como

$$\frac{R + R_s}{L} = 6289 < 12.566 = (2\pi)2000$$

a especificação é satisfeita.

Resumindo, para

$$R = 100\ \Omega,\ R_s = 900\ \Omega \text{ e } L = 0{,}159\ \text{H}$$

o circuito da Figura 13.3-3 satisfaz as especificações do enunciado.

Esta solução não é a única possível. Na verdade, para $R = 100$ e $R_s = 900$, qualquer indutância no intervalo $0{,}0796 < L < 0{,}159$ pode ser usada para satisfazer as especificações.

Exemplo 13.3-7 Projeto de um Circuito a Partir do Gráfico de Bode

Projete um circuito cujo gráfico de Bode assintótico seja o da Figura 13.3-13*a*.

Solução

Como a inclinação do gráfico de Bode é 20 dB/década para baixas frequências, ou seja, para $\omega < 500$ rad/s, $\mathbf{H}(\omega)$ deve ter um fator $j\omega$ no numerador. Como a inclinação diminui de 20 dB/década (de 20 dB/década para zero) quando ω ultrapassa 500 rad/s, $\mathbf{H}(\omega)$ deve ter um polo em $\omega = 500$ rad/s. Com base nessas observações, podemos escrever

$$\mathbf{H}(\omega) = \pm k \frac{j\omega}{1 + j\dfrac{\omega}{500}}$$

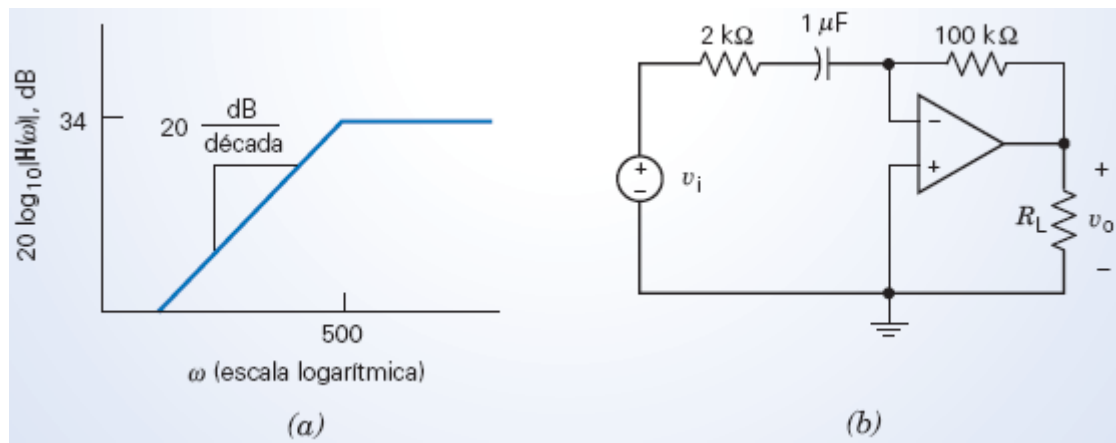



FIGURA 13.3-13 (*a*) Gráfico de Bode de amplitude assintótico e (*b*) circuito correspondente.

Como o ganho do gráfico de Bode assintótico é 34 dB = 50 para $\omega > 500$ rad/s, devemos ter

$$50 = \pm k \frac{j\omega}{j\dfrac{\omega}{500}} = \pm k \cdot 500$$

Assim, $k = \pm 0{,}1$ e

$$\mathbf{H}(\omega) = \pm 0{,}1 \cdot \frac{j\omega}{1 + j\dfrac{\omega}{500}}$$

Precisamos de um circuito cuja função tenha essa forma. A Tabela 13.3-2 mostra alguns circuitos e as funções de transferência correspondentes. A função de transferência do quarto circuito da tabela é da forma desejada. De acordo com as informações da coluna direita da tabela,

$$0{,}1 = R_2 C$$
$$500 = \frac{1}{CR_1}$$

Como o número de incógnitas é maior que o número de equações, existe um número infinito de soluções. Escolhendo um valor razoável para a capacitância, $C = 1\ \mu$F, temos

$$R_2 = \frac{0{,}1}{10^{-6}} = 100\ \text{k}\Omega$$
$$R_1 = \frac{1}{500 \cdot 10^{-6}} = 2\ \text{k}\Omega$$

O circuito completo aparece na Figura 13.3-13*b*.

EXERCÍCIO 13.3-1 (a) Converta o ganho $|\mathbf{V}_o/\mathbf{V}_s| = 2$ para decibéis. (b) Suponha que $|\mathbf{V}_o/\mathbf{V}_s| = -6{,}02$ dB. Qual é o valor do ganho "absoluto"?

***Respostas:* (a)** 6,02 dB; **(b)** 0,5.

EXERCÍCIO 13.3-2 Em uma certa faixa de frequências, a amplitude da função de um circuito é dada, aproximadamente, por $H = 1/\omega^2$. Qual é a inclinação do gráfico de Bode nessa faixa de frequências, em decibéis por década?

Resposta: – 40 dB/década.

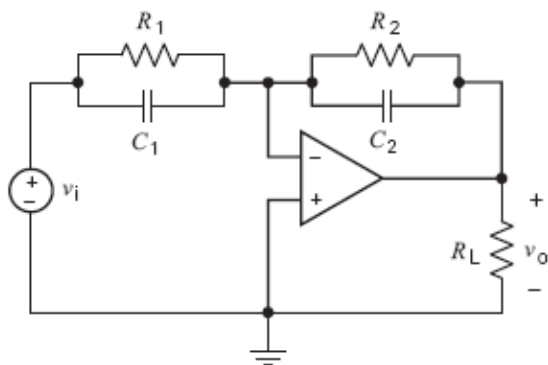
EXERCÍCIO 13.3-3 Considere a função de transferência

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{j\omega A}{B + j\omega C}$$

Determine (a) a frequência de canto; (b) a inclinação do gráfico de Bode de amplitude assintótico para ω maior que a frequência de canto, em decibéis por década; (c) a inclinação do gráfico de Bode de amplitude assintótico para ω menor que a frequência de canto, em decibéis por década; (d) o ganho para ω maior que a frequência de canto, em decibéis.

Respostas: **(a)** $\omega_0 = B/C$; **(b)** zero; **(c)** 20 dB/década; **(d)** $20 \log_{10}(A/C)$

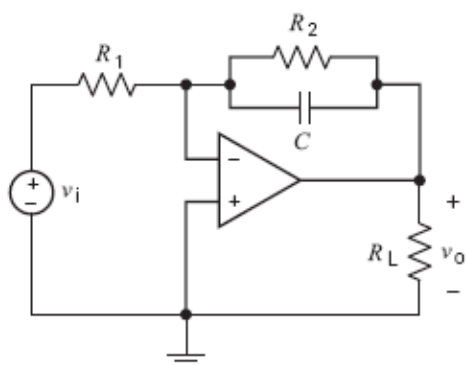
Tabela 13.3-2 Alguns Circuitos e Funções de Transferência Correspondentes

CIRCUITO	FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

$$\mathbf{H}(\omega) = -k\,\frac{1 + j\dfrac{\omega}{z}}{1 + j\dfrac{\omega}{p}}$$

em que

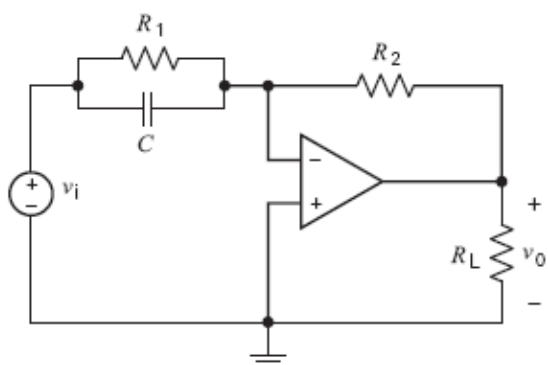
$$k = \frac{R_2}{R_1}$$

$$z = \frac{1}{C_1 R_1}$$

$$p = \frac{1}{C_2 R_2}$$

$$\mathbf{H}(\omega) = -\frac{k}{1 + j\dfrac{\omega}{p}}$$

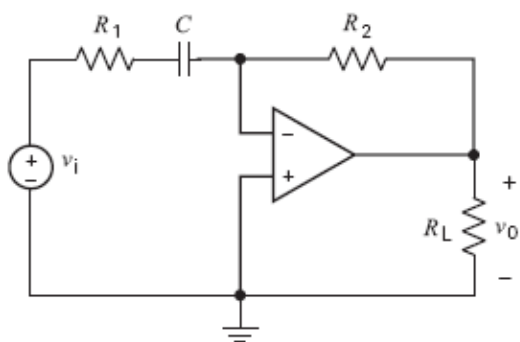
em que

$$k = \frac{R_2}{R_1}$$

$$p = \frac{1}{CR_2}$$

$$\mathbf{H}(\omega) = -k\left(1 + j\frac{\omega}{z}\right)$$

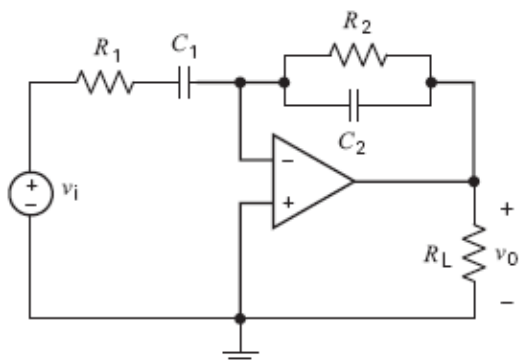
em que

$$k = \frac{R_2}{R_1}$$

$$z = \frac{1}{CR_1}$$

$$\mathbf{H}(\omega) = -k\,\frac{j\omega}{1 + j\dfrac{\omega}{p}}$$

em que

$$k = R_2 C$$

$$p = \frac{1}{CR_1}$$

$$\mathbf{H}(\omega) = -\frac{k(j\omega)}{\left(1 + j\dfrac{\omega}{p_1}\right)\left(1 + j\dfrac{\omega}{p_2}\right)}$$

em que

$$k = C_1 R_2$$

$$p_1 = \frac{1}{C_1 R_1}$$

$$p_2 = \frac{1}{C_2 R_2}$$

13.4 *Circuitos Ressonantes*

Nesta seção vamos estudar o comportamento dos chamados *circuitos ressonantes*. Começamos com um exemplo.

Considere a situação da Figura 13.4-1*a*. A entrada do circuito é a corrente da fonte de corrente e a saída é a tensão entre os terminais da fonte de corrente. Como a entrada é senoidal, podemos usar fasores para analisar o circuito. Sabemos que a função de transferência é a razão entre o fasor da saída e o fasor da entrada. Nesse caso, a função de transferência é uma impedância

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{A\,\underline{/\theta}}{B\,\underline{/0^\circ}}$$

A Figura 13.4-1*b* mostra alguns dados que foram obtidos aplicando uma entrada com uma amplitude de 2 mA e vários valores de frequência. A primeira linha da tabela mostra o resultado das medidas para $\omega = 200$ rad/s. Para essa frequência, a impedância do circuito é

$$\mathbf{Z} = \frac{6{,}6\,\underline{/48^\circ}}{0{,}002} = 3300\,\underline{/48^\circ}\ \Omega$$

Vamos converter a impedância da forma polar para a forma retangular:

$$\mathbf{Z} = 2208 + j2452\ \Omega$$

Essa impedância tem a mesma forma que a impedância equivalente de uma associação em série de um resistor e um indutor. O valor da resistência é 2208 Ω. Como a frequência é $\omega = 200$ rad/s, o valor da indutância é 12,26 H. Lembre-se de que, na forma retangular, as impedâncias são representadas como

$$\mathbf{Z} = R + jX$$

em que R é a resistência e X é a reatância. Para $\omega = 200$ rad/s, dizemos que a reatância do circuito é indutiva porque a reatância é positiva e, portanto, pode ser produzida por um indutor.

A, A	ω, rad/s	B, V	θ
0,002	200	6,6	48°
0,002	220	8,4	33°
0,002	250	10,0	0°
0,002	270	9,3	−21°
0,002	300	7,4	−43°

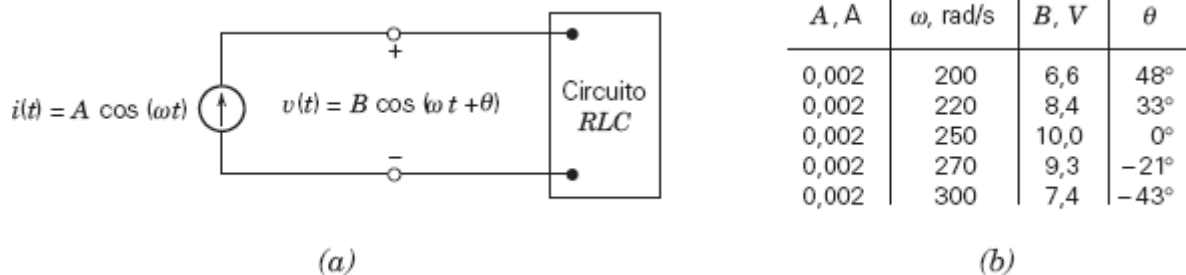



FIGURA 13.4-1 (*a*) Circuito *RLC* com entrada senoidal e (*b*) resultados experimentais para algumas frequências.

A última linha da tabela mostra os resultados para $\omega = 300$ rad/s. Nesse caso,

$$\mathbf{Z} = \frac{7{,}4\,\underline{/-43^\circ}}{0{,}002} = 3700\,\underline{/-43^\circ} = 2706 - j\,2523\ \Omega$$

Como a reatância é negativa, não pode ser causada por um indutor. Essa impedância tem a mesma forma que a impedância equivalente de uma associação em série de um resistor e um capacitor:

$$R - j\frac{1}{\omega C} = 2706 - j\,2523\ \Omega$$

Igualando as partes reais, vemos que a resistência é 2706 Ω. Igualando as partes imaginárias, vemos que a capacitância é 1,32 μF.

A reatância do circuito é, portanto, indutiva para algumas frequências e capacitiva para outras. Podemos saber para que frequências a reatância é indutiva e para que frequências é capacitiva consultando a última coluna da tabela. Se θ é positivo, a reatância é indutiva; se θ é negativo, a reatância é capacitiva. A frequência ω = 250 rad/s é especial. Se a frequência de entrada é menor que 250 rad/s, a reatância é indutiva; se a frequência de entrada é maior que 250 rad/s, a reatância é capacitiva. Essa frequência especial é chamada de frequência de ressonância e representada pelo símbolo ω_0. Consultando a terceira linha da tabela, vemos que para $\omega = \omega_0$ = 250 rad/s,

$$\mathbf{Z} = \frac{10 \angle 0^\circ}{0{,}002} = 5000 \angle 0^\circ = 5000 - j\,0\,\Omega$$

Como a reatância é zero, na frequência de ressonância a impedância é puramente resistiva. Na verdade, este fato pode ser usado para identificar a frequência de ressonância.

Outra observação pode ser feita na Figura 13.4-1: o módulo da impedância é máximo para $\omega = \omega_0$ = 250 rad/s.

Considere agora o circuito da Figura 13.4-2. Esse circuito é chamado de circuito ressonante paralelo. A impedância equivalente do resistor, indutor e capacitor é

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}} \angle -\tan^{-1} R\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \tag{13.4-1}$$

O circuito exibe um comportamento familiar. A reatância se anula para

$$\omega C - \frac{1}{\omega L} = 0$$

A frequência que satisfaz essa equação é a frequência de ressonância ω_0. Resolvendo a equação, obtemos

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

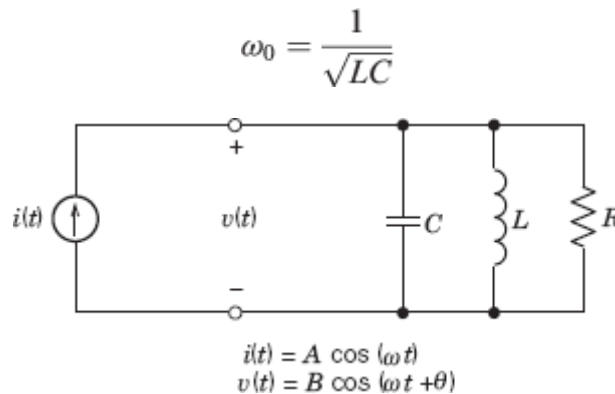



FIGURA 13.4-2 Circuito ressonante paralelo.

Para $\omega = \omega_0$, $\mathbf{Z} = R$. O módulo de **Z** é máximo para esse valor da frequência. O ângulo de **Z** é positivo para $\omega < \omega_0$ e negativo para $\omega > \omega_0$, o que significa que a reatância é indutiva para $\omega < \omega_0$ e capacitiva para $\omega > \omega_0$.

A impedância pode ser escrita na forma

$$\mathbf{Z} = \frac{k}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \tag{13.4-2}$$

em que

$$k = R, \quad Q = R\sqrt{\frac{C}{L}} \quad \text{e} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad (13.4\text{-}3)$$

Os parâmetros k, Q e ω_0 são suficientes para descrever o circuito ressonante paralelo. A frequência de ressonância ω_0 é a frequência para a qual a reatância é zero e o módulo da impedância tem o valor máximo, que é igual a k. O parâmetro Q é chamado de **fator de qualidade** do circuito ressonante e expressa a rapidez com a qual $|\mathbf{Z}|$ diminui para valores da frequência maiores ou menores que a frequência de ressonância. A Figura 13.4-3 ilustra o efeito de Q. Tanto k como ω_0 foram feitos iguais a 1 na Figura 13.4-3 para ressaltar a relação entre Q e $|\mathbf{Z}|$.

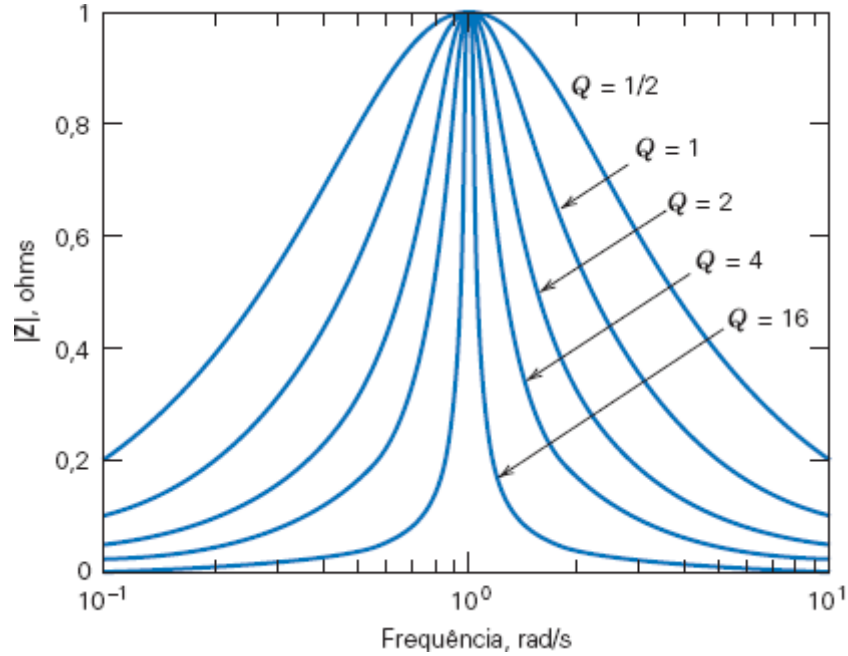



FIGURA 13.4-3 Efeito do Q sobre a resposta de frequência de um circuito ressonante.

A Figura 13.4-3 mostra que quanto maior o valor de Q, mais estreito é o pico da resposta de frequência. Podemos quantificar essa observação introduzindo o conceito de banda passante de um circuito ressonante. Para isso, vamos chamar de ω_1 e ω_2 as frequências tais que

$$|\mathbf{Z}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}|\mathbf{Z}(\omega_0)| = \frac{k}{\sqrt{2}}$$

Existem duas dessas frequências, uma menor que ω_0 e outra maior que ω_0. Suponha que $\omega_1 < \omega_0$ e $\omega_2 > \omega_0$. A banda passante BP do circuito ressonante é definida através da equação

$$BP = \omega_2 - \omega_1$$

As frequências ω_1 e ω_2 são soluções da equação

$$\frac{k}{\sqrt{2}} = \frac{k}{\sqrt{1 + Q^2(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)^2}}$$

ou

$$\sqrt{2} = \sqrt{1 + Q^2(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)^2}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos

$$1 = Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2$$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os membros, temos:

$$\pm 1 = Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)$$

(É necessário usar o sinal ± porque a igualdade $a^2 = b^2$ é satisfeita tanto para $a = b$ como para $a = -b$.) Reagrupando os termos, obtemos a seguinte equação do segundo grau:

$$\omega^2 \mp \frac{\omega_0 \omega}{Q} - \omega_0^2 = 0$$

A equação tem quatro raízes, mas apenas duas são positivas. As raízes positivas são

$$\omega_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{2Q}\right)^2 + \omega_0^2} \quad \text{e} \quad \omega_2 = \frac{\omega_0}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{2Q}\right)^2 + \omega_0^2}$$

Finalmente, podemos calcular a banda passante.

$$BP = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q} \qquad (13.4\text{-}4)$$

De acordo com a Eq. 13.4-4, quanto maior o valor de Q, menor é a banda passante, ou seja, mais estreito é o pico da resposta de frequência.

EXEMPLO 13.4-1 Circuito Ressonante Série

A Figura 13.4-4 mostra um circuito ressonante série. Determine a relação entre os parâmetros k, Q e ω_0 e o valor dos componentes R, L e C do circuito ressonante série.

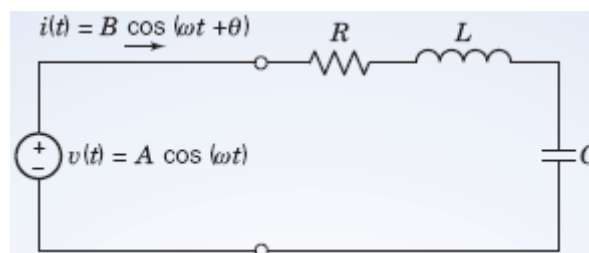



FIGURA 13.4-4 Circuito ressonante série.

Solução

A entrada do circuito é a tensão da fonte de tensão e a saída é a corrente da malha. A função de transferência é a razão entre o fasor da saída e o fasor da entrada. Nesse caso, a função de transferência é a admitância equivalente da associação em série do resistor, capacitor e indutor:

$$\mathbf{Y} = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{V}} = \frac{1}{R + j\omega L + \dfrac{1}{j\omega C}} \qquad (13.4\text{-}5)$$

Para que seja mais fácil identificar k, Q e ω_0, a função deve estar na forma

$$\mathbf{Y} = \frac{k}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \tag{13.4-6}$$

Reagrupando os termos da Eq. 13.4-5, obtemos

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{1}{R + j\sqrt{\frac{L}{C}}\left(\frac{\omega}{\frac{1}{\sqrt{LC}}} - \frac{\frac{1}{\sqrt{LC}}}{\omega}\right)} = \frac{\frac{1}{R}}{1 + j\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\left(\frac{\omega}{\frac{1}{\sqrt{LC}}} - \frac{\frac{1}{\sqrt{LC}}}{\omega}\right)}$$

Comparando esta equação com a Eq. 13.4-6, temos

$$k = \frac{1}{R}, \quad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{e} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

EXEMPLO 13.4-2 Resposta de Frequência de um Circuito Ressonante

A Figura 13.4-5 mostra o gráfico de amplitude da resposta de frequência de um circuito ressonante. Qual é o valor dos parâmetros k, Q e ω_0?

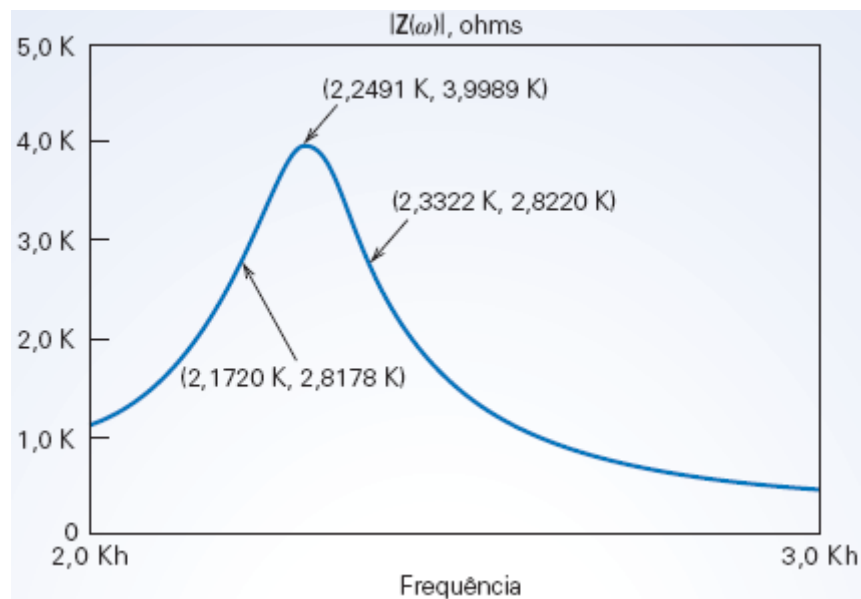



FIGURA 13.4-5 Gráfico de amplitude da resposta de frequência de um circuito ressonante.

Solução

O primeiro passo consiste em determinar o valor da frequência e da impedância no ponto do gráfico em que a amplitude é máxima; nesse ponto, que está assinalado na Figura 13.4-5, a frequência é a frequência de ressonância ω_0 e a impedância é o ganho k. A frequência é

$$\omega_0 = (2\pi)2249 = 14.130 \text{ rad/s}$$

e a impedância é

$$k = 4000\ \Omega$$

Em seguida, as frequências ω_1 e ω_2 podem ser obtidas determinando os pontos da resposta de frequência nos quais o valor da impedância é $k/\sqrt{2} = 2828$ Ω. Esses pontos também estão assinalados na Figura 13.4-5. (O gráfico da Figura 13.4-5 foi gerado pelo programa PSpice. A função cursor da ferramenta Probe foi usada para assinalar os pontos de interesse da resposta de frequência. O primeiro valor é o valor da frequência e o segundo é o valor da impedância. Como não foi possível colocar o cursor exatamente sobre os pontos em que a impedância era 2828 Ω, pontos com uma impedância próxima de 2828 Ω foram escolhidos.) Temos:

$$\omega_1 = (2\pi)2172 = 13.647 \text{ rad/s} \quad \text{e} \quad \omega_2 = (2\pi)2332 = 14.653 \text{ rad/s}$$

O fator de qualidade Q é dado por

$$Q = \frac{\omega_0}{BP} = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{14.130}{14.653 - 13.647} = 14$$

Agora que os valores dos parâmetros k, Q e ω_0 são conhecidos, podemos escrever a função de transferência na forma

$$\mathbf{Z}(\omega) = \frac{4000}{1 + j14\left(\frac{\omega}{14.130} - \frac{14.130}{\omega}\right)}$$

EXEMPLO 13.4-3 Circuito Ressonante Paralelo

Projete um circuito ressonante paralelo para o qual $k = 4000$ Ω, $Q = 14$ e $\omega_0 = 14.130$ rad/s.

Solução

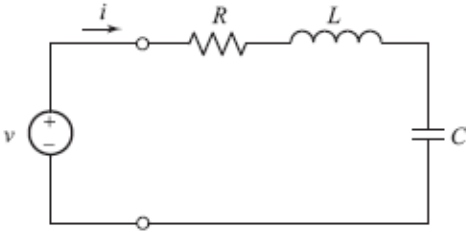
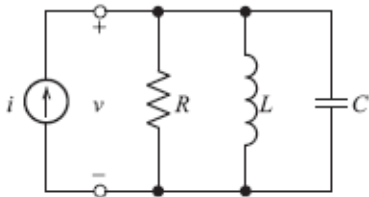
A Tabela 13.4-1 mostra a relação entre os parâmetros k, Q e ω_0 e o valor dos componentes R, L e C de um circuito ressonante paralelo. Essas relações podem ser usadas para calcular R, L e C a partir de k, Q e ω_0. Temos

$$R = k = 4000\ \Omega$$

$$\frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0 = 14.130$$

e

$$R\sqrt{\frac{C}{L}} = Q = 14$$

Combinando as duas últimas equações, obtemos

$$\frac{14\sqrt{L}}{4000} = \sqrt{C} = \frac{1}{14.130\sqrt{L}}$$

e, portanto,

$$L = \frac{4000}{14.130(14)} = 20 \text{ mH} \quad \text{e} \quad C = \frac{1}{14.130^2(0{,}020)} = 0{,}25\ \mu\text{F}$$

Tabela 13.4-1 Circuitos Ressonantes Série e Paralelo

	CIRCUITO RESSONANTE SÉRIE	CIRCUITO RESSONANTE PARALELO
Circuito		
Função de transferência	$\mathbf{Y} = \dfrac{k}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$	$\mathbf{Z} = \dfrac{k}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$
Frequência de ressonância	$\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$	$\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$
Amplitude máxima	$k = \dfrac{1}{R}$	$k = R$
Fator de qualidade	$Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$	$Q = R\sqrt{\dfrac{C}{L}}$
Banda passante	$BP = \dfrac{R}{L}$	$BP = \dfrac{1}{RC}$

Exemplo 13.4-4 Projeto de Circuitos Ressonantes

A Figura 13.4-5 mostra o gráfico de amplitude da resposta de frequência de um circuito ressonante. Projete um circuito com essa resposta de frequência.

Solução

Já resolvemos esse problema. Três coisas devem ser feitas para projetar o circuito de acordo com as especificações. Em primeiro lugar, os parâmetros k, Q e ω_0 devem ser determinados a partir da resposta de frequência. Foi o que fizemos no Exemplo 13.4-2. Em segundo lugar, notamos que a resposta de frequência dada é uma impedância, e não uma admitância, e escolhemos o circuito ressonante paralelo na Tabela 13.4-1. Em terceiro lugar, os valores dos componentes R, L e C podem ser calculados a partir dos valores de k, Q e ω_0, como fizemos no Exemplo 13.4-3.

EXERCÍCIO 13.4-1 Determine (a) o valor de Q e (b) o valor da banda passante de um circuito ressonante *RLC* paralelo com $R = 8$ kΩ, $L = 40$ mH e $C = 0{,}25$ μF.

Respostas: **(a)** $Q = 20$; **(b)** $BP = 500$ rad/s

EXERCÍCIO 13.4-2 Um circuito ressonante *RLC* paralelo de alta frequência deve operar em uma frequência $\omega_0 =$ 10 Mrad/s com uma banda passante de 200 krad/s. Determine o valor de Q e L, sabendo que $C = 10$ pF.

Resposta: $Q = 50$ e $L = 1$ mH

EXERCÍCIO 13.4-3 Em um circuito ressonante *RLC* série, $L = 1$ mH e $C = 10$ μF. Determine o valor de Q e R para que a banda passante seja 15,9 Hz.

Resposta: $Q = 100$ e $R = 0{,}1$ Ω

EXERCÍCIO 13.4-4 Em um circuito ressonante *RLC* série, $L = 10$ mH. (a) Escolha o valor de C e R para que $\omega_0 = 10^6$ rad/s e a banda passante seja $BP = 10^3$ rad/s. (b) Determine a admitância Y do circuito para um sinal com $\omega = 1{,}05 \times 10^6$ rad/s.

Respostas: **(a)** $C = 100$ pF, $R = 10\ \Omega$; **(b)** $\dfrac{10}{1 + j97,6}$

13.5 Resposta de Frequência de Circuitos com Amplificadores Operacionais

O ganho de um amplificador operacional não ideal, além de ser finito, diminui à medida que a frequência aumenta. O ganho $\mathbf{A}(\omega)$ do amplificador operacional é uma função de ω dada por

$$\mathbf{A}(\omega) = \frac{A_o}{1 + j\omega/\omega_1}$$

em que A_o é o ganho de CC e ω_1 é a frequência de canto. O ganho de CC é normalmente maior que 10^4 e ω_1 é menor que 100 rad/s. A Figura 13.5-1 mostra um modelo do amplificador operacional não ideal. O modelo é mais preciso, mas também mais complicado, que o do amplificador operacional ideal.

No exemplo a seguir, é analisada a resposta de frequência de um circuito com um amplificador operacional não ideal.

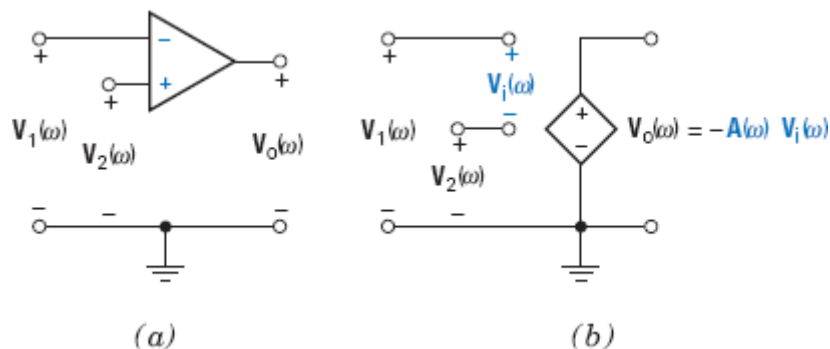



FIGURA 13.5-1 (*a*) Amplificador operacional; (*b*) modelo de um amplificador operacional cujo ganho varia com a frequência.

EXEMPLO 13.5-1 Resposta de Frequência de um Amplificador Não Inversor

Considere o amplificador não inversor da Figura 13.5-2*a*. Substituindo o amplificador operacional ideal por um amplificador operacional não ideal, obtemos o circuito da Figura 13.5-2*b*. Suponha que $R_1 = 10$ kΩ e $R_2 = 90$ kΩ e que os parâmetros do amplificador operacional são $A_o = 10^5$ e $\omega_1 = 10$ rad/s. Determine o gráfico de Bode de amplitude do ganho do amplificador operacional, $\mathbf{A}(\omega)$, e a função de transferência do amplificador não inversor, $\mathbf{V}_o/\mathbf{V}_s$.

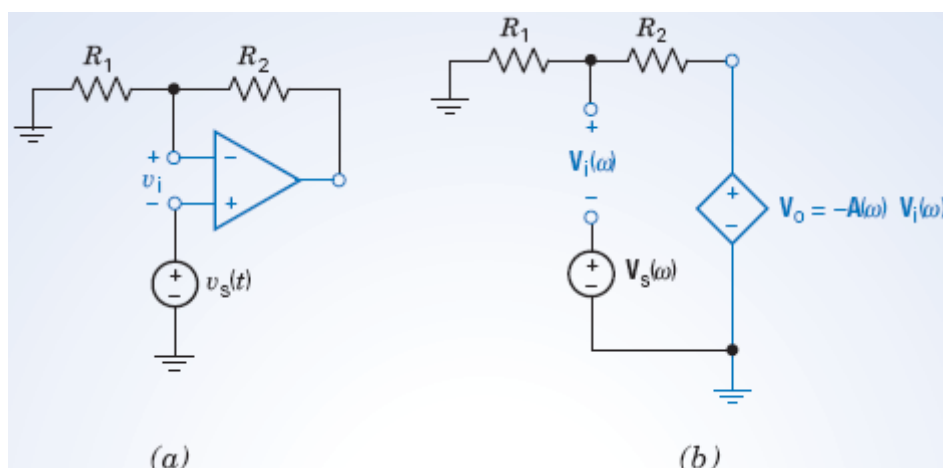



FIGURA 13.5-2 (*a*) Amplificador não inversor; (*b*) circuito equivalente usando o modelo do amplificador operacional não ideal.

Solução

O gráfico de Bode de 20 log|**A**(ω)| aparece na Figura 13.5-3. Observe que a amplitude é igual a 1 (0 dB) para $\omega = 10^6$ rad/s.

Aplicando a LKC ao circuito da Figura 13.5-2*b*, obtemos

$$\frac{\mathbf{V}_i + \mathbf{V}_s}{R_1} + \frac{\mathbf{V}_i + \mathbf{V}_s + \mathbf{A}(\omega)\mathbf{V}_i}{R_2} = 0$$

De acordo com o modelo do amplificador operacional não ideal,

$$\mathbf{V}_o = -\mathbf{A}(\omega)\mathbf{V}_i$$

Combinando as duas equações, obtemos

$$\frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_s} = \frac{\mathbf{A}(\omega)}{1 + \frac{\mathbf{A}(\omega)}{k}}$$

em que $k = (R_1+R_2)/R_1$ é o ganho do amplificador não inversor quando o amplificador operacional é considerado ideal. Substituindo **A**(ω) pelo seu valor, obtemos

$$\frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_s} = \frac{A_o/(1 + j\omega/\omega_1)}{1 + (A_o/k)/(1 + j\omega/\omega_1)} = \frac{A_o}{1 + j\omega/\omega_1 + A_o/k} = \frac{A_c}{1 + j\omega/(A_2\omega_1)}$$

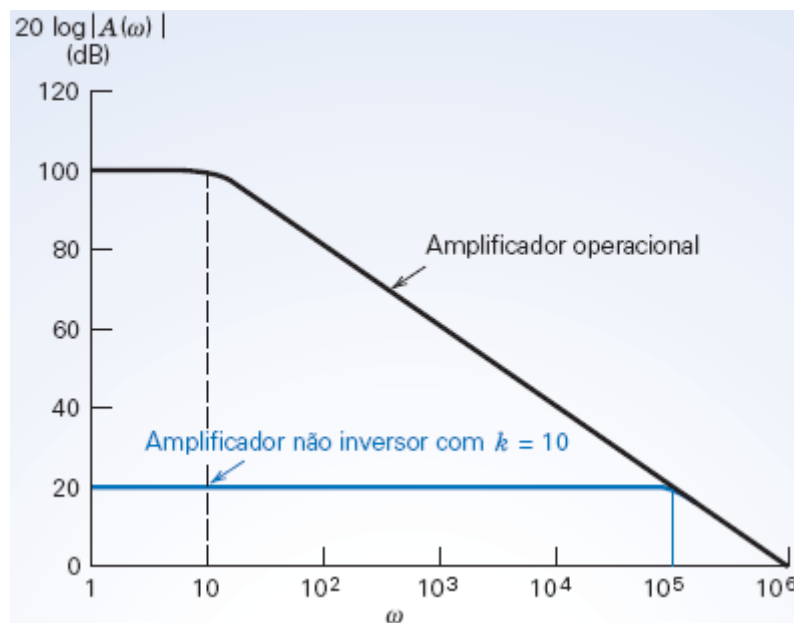



FIGURA 13.5-3 Gráfico de Bode de amplitude do amplificador operacional não ideal e do amplificador não inversor (em azul).

em que A_c é o ganho do amplificador não inversor, definido como $A_c = \dfrac{A_o}{1 + \dfrac{A_o}{k}}$, e $A_2 = 1 + \dfrac{A_o}{k}$. Em geral, $A_o/k \gg 1$ e, portanto, $A_c \cong k$ e $A_2 \cong A_o/k$. Nesse caso,

$$\frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_s} \cong \frac{k}{(1 + j\omega/\omega_0)}$$

em que $\omega_o = A_o\omega_1/k$ é a frequência de canto do amplificador não inversor. Observe que o produto do ganho de CC pela frequência de canto é

$$\omega_0 k = \frac{A_o\omega_1}{k}k = A_o\omega_1$$

Esse produto é chamado de produto ganho-banda passante. Note que o produto não depende de R_1 e R_2, mas apenas dos parâmetros do amplificador operacional.

Neste exemplo, $k = 10$ e $A_o = 100$ dB $= 10^5$; assim, $A_c = 10$, $A_2 = 10^4$, $\omega_1 A_2 = 10^5$ e, portanto,

$$\frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_s} = \frac{10}{1 + j10^{-5}\omega}$$

O gráfico de Bode de amplitude do circuito é mostrado em azul na Figura 13.5-3. Observe que o amplificador não inversor tem um ganho de baixa frequência de 20 dB e uma frequência de quebra de 10^5 rad/s. O produto ganho-banda passante é o mesmo do amplificador operacional, 10^6 rad/s.

13.6 Plotagem de Gráficos de Bode Usando o Programa MATLAB

O programa MATLAB pode ser usado para plotar os gráficos de Bode de amplitude e de fase a partir da função de transferência de um circuito. Considere, por exemplo, um circuito cuja função de transferência é

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{K\left(1 + j\dfrac{\omega}{z}\right)}{\left(1 + j\dfrac{\omega}{p_1}\right)\left(1 + j\dfrac{\omega}{p_2}\right)}$$

A Figura 13.6-1 mostra um arquivo de entrada do MATLAB que pode ser usado para plotar o gráfico de Bode correspondente a essa função de transferência. O arquivo do MATLAB tem quatro partes.

```
% nf.m - plotar o gráfico de Bode da função de transferênca de um circuito

%-----------------------------------------------------------------------------
%     Criar uma lista de frequências logaritmicamente espaçadas.
%-----------------------------------------------------------------------------
wmin=10;                     % frequência inicial, rad/s
wmax=100000;                 % frequência final, rad/s
w = logspace(log10(wmin),log10(wmax));

%-----------------------------------------------------------------------------
%              Entrar com os valores dos parâmetros que descrevem a
%                             função de transferência.
%-----------------------------------------------------------------------------
K= 10;               % constante
z= 1000;             % zero
p1=100;   p2=10000;   % polos

%-----------------------------------------------------------------------------
% Calcular o valor da função de transferência para cada frequência.
%    Calcular a amplitude e o ângulo da função.
%-----------------------------------------------------------------------------
for k=1:length(w)
    H(k) = K*(1+j*w(k)/z) / ( (1+j*w(k)/p1) * (1+j*w(k)/p2) );
    mod(k) = abs(H(k));
    fase(k) = angle(H(k));
end

%-----------------------------------------------------------------------------
%                             Plotar o gráfico de Bode.
%-----------------------------------------------------------------------------
subplot(2,1,1), semilogx(w/(2*pi), 20*log10(mod))
xlabel('Frequência, Hz'), ylabel('Ganho, dB')
title('Gráfico de Bode')
subplot(2,1,2), semilogx(w/(2*pi), fase)
xlabel('Frequência, Hz'), ylabel('Fase, graus')
```

FIGURA 13.6-1 Arquivo de entrada do MATLAB usado para plotar os gráficos de Bode de amplitude e fase a partir de uma função de transferência.

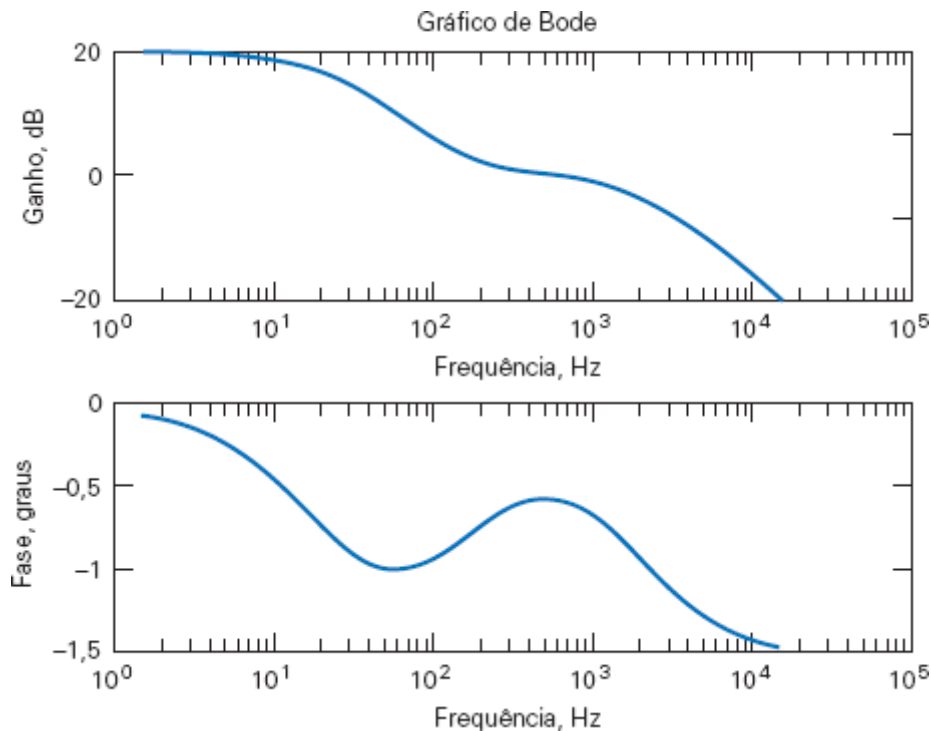



FIGURA 13.6-2 Gráficos de Bode gerados usando o arquivo de entrada do MATLAB da Figura 13.6-1.

Na primeira parte, o comando logspace do MATLAB é usado para especificar o intervalo de frequências do gráfico de Bode. O comando logspace também produz uma lista de frequências igualmente espaçadas (em escala logarítmica) ao longo do intervalo escolhido.

O circuito dado possui quatro parâmetros: o ganho, K; o zero, z; e dois polos, p_1 e p_2. A segunda parte do arquivo de entrada do MATLAB especifica o valor dos quatro parâmetros.

A terceira parte do arquivo de entrada do MATLAB é um "laço for" que calcula os valores de H(ω), |H(ω)| e $\angle \mathbf{H}(\omega)$ para cada frequência da lista de frequências gerada pelo comando logspace.

A quarta parte do arquivo de entrada do MATLAB executa a plotagem. O comando

```
semilogx (w/(2*pi), 20*log10(mag))
```

faz várias coisas. A instrução **semilogx** indica que a plotagem deve ser feita usando uma escala logarítmica para a primeira variável e uma escala linear para a segunda variável. A primeira variável, a frequência, é dividida por 2π para converter a frequência de radianos por segundo para hertz. A segunda variável, $|\mathbf{H}(\omega)|$, é convertida para dB.

Os gráficos de Bode de amplitude e fase gerados pelo programa MATLAB aparecem na Figura 13.6-2.

A segunda e terceira partes do arquivo de entrada do MATLAB podem ser modificadas para plotar os gráficos de Bode de outras funções.

13.7 *Uso do PSpice para Plotar uma Resposta de Frequência*

Para plotar a resposta de frequência de um circuito usando o programa PSpice, é preciso fazer o seguinte:

1. Desenhar o circuito no espaço de trabalho OrCAD Capture.
2. Especificar uma simulação do tipo AC Sweep\Noise.
3. Executar a simulação.
4. Plotar o resultado da simulação.

Nos gráficos de resposta de frequência, o eixo da frequência pode ser linear ou logarítmico. Se o eixo é logarítmico, os gráficos são chamados de gráficos de Bode. Na descrição de escalas logarítmicas, é comum o uso

dos termos *oitava* e *década*. A frequência é multiplicada por dois em um intervalo de uma oitava e multiplicada por dez em um intervalo de uma década. (O logaritmo decimal da frequência aumenta de 0,3 em um intervalo de uma oitava e de 1 em um intervalo de uma década.)

Seja $A\underline{/\theta}$ o fasor da tensão de nó no nó 2 de um circuito. O PSpice usa a seguinte notação:

$$\mathrm{V}(2)\,\underline{/\mathrm{Vp}(2)} = A\underline{/\theta}$$

em que V(2) é o módulo do fasor e Vp(2) é o ângulo do fasor em graus. Analogamente, V(R2) representa o módulo da tensão do resistor R2 e Vp(R2) o ângulo da tensão em graus. O PSpice indica que os valores numéricos estão expressos em decibéis acrescentando “dB” ao nome da variável. Assim, por exemplo, VdB(2) representa o módulo do fasor da tensão do nó 2 em dB.

EXEMPLO 13.7-1 Uso do PSpice para Plotar uma Resposta de Frequência

A entrada do circuito da Figura 13.7-1 é a tensão da fonte de tensão, $v_s(t)$. A saída é a tensão do resistor de 20 kΩ, $v_o(t)$. Use o programa PSpice para plotar a resposta de frequência do circuito.

Solução

O primeiro passo é desenhar o circuito no espaço de trabalho OrCAD, como mostra a Figura 13.7-2 (veja o Apêndice A). Dois nós do circuito foram rotulados usando um conector do PSpice chamado Off-Page Connector. O conector mostrado na Figura 13.7-2 é chamado de OFFPAGELEFT-R e pode ser encontrado na biblioteca CAPSYM. Para rotular um nó, escolha Place/Off-Page Connector no menu OrCAD Capture para abrir a janela de diálogo Place Off-Page Connector. Selecione a biblioteca CAPSYM na lista de bibliotecas e escolha OFFPAGELEFT-R. Use o editor de propriedades para escolher o nome e a orientação do Off-Page Connector. Na Figura 13.7-2, foram usados um conector voltado para a esquerda, rotulado como Vs, e um conector voltado para a direita, rotulado como Vo. Ligue os conectores aos nós apropriados do circuito.

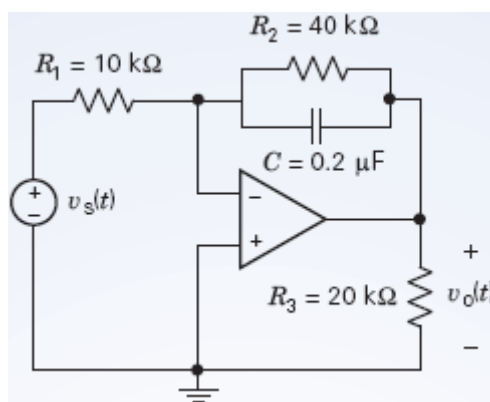



FIGURA 13.7-1 Circuito do Exemplo 13.7-1.

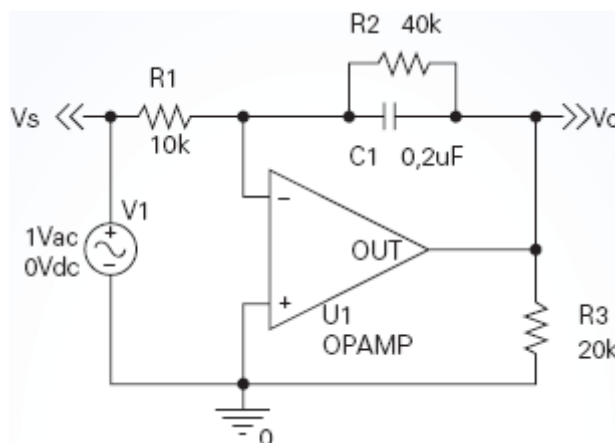



FIGURA 13.7-2 O circuito da Figura 13.7-1, na forma como é desenhado no espaço de trabalho OrCAD.

Para executar uma simulação do tipo AC Sweep\Noise, selecione PSpice\New Simulation Profile no menu principal do programa OrCAD Capture; escolha um nome para a simulação e, em seguida, selecione AC Sweep\Noise na lista Analysis Type da aba Analysis da caixa de diálogo Simulation Settings. Na subcaixa de diálogo Ac Sweep Type, especifique o tipo de varredura como logarítmico clicando na opção Logarithmic, a tensão inicial entrando com 1 na janela de digitação Start Frequency, a tensão final entrando com 1000 na janela de digitação End Frequency e o número de pontos por década entrando com 100 na janela de digitação Points/Decade. Selecione PSpice\Run no menu principal do OrCad Capture para executar a simulação.

Depois de executar a simulação, o programa abre automaticamente uma janela Schematics. Selecione Plot/Add Plot no menu Schematics para acrescentar um segundo gráfico. Dois gráficos vazios vão aparecer, um acima do outro.

Selecione o gráfico superior clicando nesse gráfico. Selecione Trace/Add Trace no menu Schematics para abrir a caixa de diálogo Add Traces. Selecione V(Vo) e V(Vs), nessa ordem, na lista Simulation Output Variables. Na janela de digitação Trace Expression, na parte inferior da caixa de diálogo, vai aparecer a expressão V(Vo)V(Vs). Mude a expressão para Vdb(Vo) – Vdb(Vs), que é a expressão para o ganho em decibéis. Clique em OK para fechar a caixa de diálogo Add Traces.

Selecione o gráfico inferior clicando nesse gráfico. Selecione Trace/Add Trace no menu Schematics para abrir a caixa de diálogo Add Traces. Selecione V(Vo) e V(Vs), nessa ordem, na lista Simulation Output Variables. Na janela de digitação Trace Expression, na parte inferior da caixa de diálogo, vai aparecer a expressão V(Vo)V(Vs). Mude a expressão para Vp(Vo) – Vp(Vs), que é a expressão para o deslocamento de fase em graus. Clique em OK para fechar a caixa de diálogo Add Traces.

A Figura 13.7-3 mostra os gráficos resultantes, com alguns pontos assinalados.

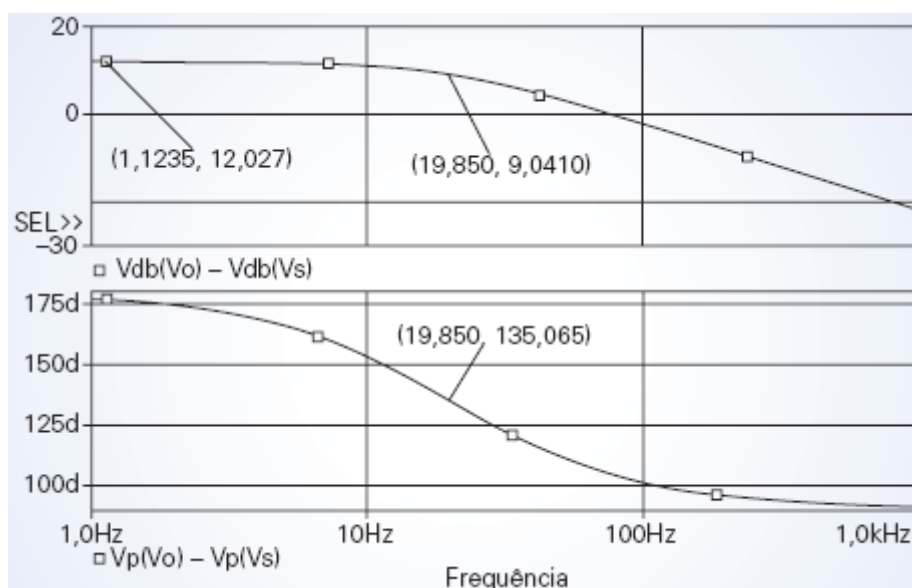



FIGURA 13.7-3 Gráficos de Bode de ganho e de fase.

13.8 *Como Podemos Testar . . . ?*

Os engenheiros são frequentemente encarregados de verificar se a solução de um problema está correta. As soluções de problemas de projeto, por exemplo, devem ser verificadas para confirmar que todas as especificações estão sendo atendidas. Além disso, os resultados obtidos com o auxílio de computadores devem ser revistos para evitar possíveis erros na digitação dos dados e as afirmações dos vendedores a respeito dos seus produtos devem ser confirmadas.

Os estudantes de engenharia muitas vezes também precisam verificar se os resultados que obtiveram estão corretos. Às vezes falta muito pouco tempo para terminar um exame e é importante poder identificar rapidamente as questões que precisam ser refeitas.

Os exemplos a seguir ilustram algumas técnicas que podem ser usadas para verificar se as soluções de problemas do tipo discutido neste capítulo estão corretas.

EXEMPLO 13.8-1 Como Podemos Testar Gráficos de Bode?

A Figura 13.8-1*a* mostra um circuito montado em laboratório para medir a resposta de frequência de um circuito. Uma entrada senoidal é aplicada a um circuito cuja função de transferência é **H**(ω). Um osciloscópio é usado para medir as senoides de entrada e de saída. A tensão de entrada é usada para sincronizar o osciloscópio, fazendo com que o ângulo de fase da entrada seja zero. Os dados da resposta de frequência são obtidos fazendo variar a frequência de entrada e medindo a amplitude da tensão de entrada e a amplitude e a fase da tensão de saída.

Neste exemplo, a resposta de frequência desejada é dada pelo gráfico de Bode da Figura 13.8-1*b*. A Figura 13.8-1*c* mostra os resultados das medidas para várias frequências. Apenas a amplitude dos sinais foi medida. **Como podemos verificar** se a resposta de frequência do circuito está de acordo com o gráfico de Bode?

Solução

O gráfico de Bode apresenta três aspectos que podem ser observados diretamente nos dados experimentais.

1. O ganho de CC é 14 dB.
2. A inclinação do gráfico de Bode é –20 dB/década para $\omega \gg 200$ rad/s.
3. A frequência de canto é 200 rad/s.

ω	A	B
20	1	5
50	1	4,9
100	1	4,5
200	1	3,5
500	1	1,8
1.000	1	0,5
2.000	1	0,2
10.000	1	0,05

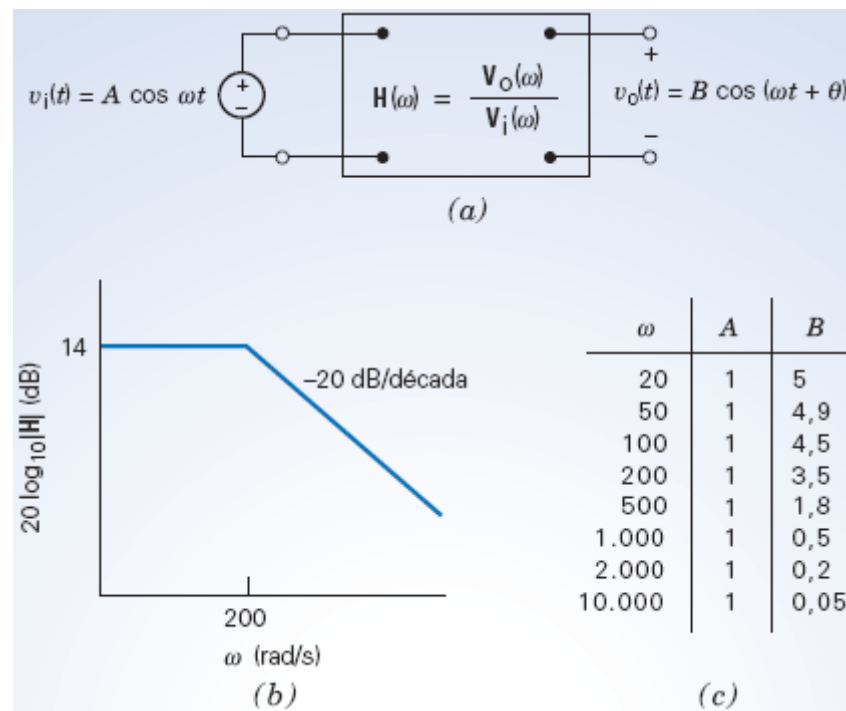



FIGURA 13.8-1 (*a*) Circuito; (*b*) gráfico de Bode; (*c*) resultados experimentais.

A menor frequência para a qual foram feitas medidas é 20 rad/s. Nessa frequência, o ganho medido foi

$$|\mathbf{H}(20)| = \frac{B}{A} = \frac{5}{1} = 14 \text{ dB}$$

que é igual ao ganho de CC especificado no gráfico de Bode.

Para determinar a frequência de canto a partir dos resultados experimentais, procuramos a frequência para a qual o ganho é

$$\frac{\text{ganho de CC}}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = 3{,}536$$

Os resultados experimentais mostram que o ganho é 3,5 para uma frequência de 200 rad/s, o que está de acordo com a frequência de canto de 200 rad/s especificada no gráfico de Bode.

A inclinação da resposta de frequência em altas frequências é dada por

$$\frac{20\log_{10}(0{,}05) - 20\log_{10}(0{,}5)}{\log_{10}(10.000) - \log_{10}(1000)} = -20 \text{ dB/década}$$

que é exatamente a inclinação do gráfico de Bode.

Assim, os resultados experimentais confirmam que o circuito se comporta de acordo com o gráfico de Bode.

EXEMPLO 13.8-2 Como Podemos Testar o Ganho e o Deslocamento de Fase?

As anotações do seu colega de laboratório informam que o circuito da Figura 13.8-2 foi montado usando os seguintes valores para os componentes: $R_1 = 10$ kΩ, $R_2 = 50$ kΩ e $C = 10$ nF. O ganho e o deslocamento de fase do circuito foram medidos a 500 Hz e os resultados foram 2,7 e 125°. **Como podemos verificar** se os resultados são coerentes?

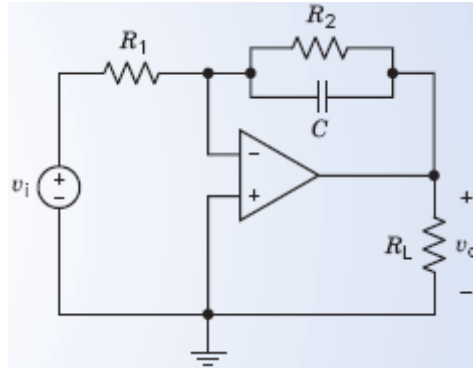



FIGURA 13.8-2 Circuito com um amplificador operacional.

Solução

A função de transferência do circuito é

$$\mathbf{H}(\omega) = -\frac{\frac{1}{j\omega C} \| R_2}{R_1} = \frac{-\frac{R_2}{R_1}}{1 + j\omega R_2 C}$$

$$= \frac{-\frac{50 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^3}}{1 + j(2\pi \cdot 500)(50 \cdot 10^3)(10 \cdot 10^{-9})} = 2{,}685 \ \underline{/122{,}5^\circ}$$

O ganho calculado e o deslocamento de fase calculado estão de acordo com os valores medidos. As anotações estão corretas.

EXEMPLO 13.8-3 Como Podemos Testar a Resposta de Frequência?

Um velho caderno de laboratório contém os seguintes dados a respeito de um circuito:

1. A resposta de frequência de amplitude e de fase foi a que aparece na Figura 13.8-3.
2. Quando a excitação do circuito foi

$$v_{in} = 4 \cos(2\pi 1200t) \text{ V}$$

a resposta estacionária foi

$$v_{out} = 6{,}25 \cos(2\pi 1200t + 110^\circ) \text{ V}$$

Como podemos verificar se esses dados estão corretos?

Solução

Três parâmetros precisam ser verificados: a frequência, a amplitude e o ângulo de fase. As senoides da entrada e da saída têm a mesma frequência, o que é bom sinal, já que um circuito deve ser linear para poder ser representado por uma resposta de frequência e a resposta estacionária de um circuito linear é uma senoide com a mesma frequência que a excitação. A frequência das senoides de entrada e de saída é

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot 1200 \text{ rad/s}$$
$$f = 1200 \text{ Hz}$$

Felizmente, o ganho e o deslocamento de fase para 1200 Hz foram assinalados nos gráficos de resposta de frequência da Figura 13.8-3. O ganho em 1200 Hz é 3,9 dB, o que significa que

$$\frac{|\mathbf{V}_{\text{out}}|}{|\mathbf{V}_{\text{in}}|} = 3{,}9 \text{ dB} = 1{,}57$$

em que $\mathbf{V}_{\text{in}}$ e $\mathbf{V}_{\text{out}}$ são os fasores correspondentes a $v_{\text{in}}(t)$ e $v_{\text{out}}(t)$. Vamos verificar se esse resultado é compatível com a informação a respeito das senoides de entrada e saída. Como o módulo de um fasor é igual à amplitude da senoide correspondente,

$$\frac{|\mathbf{V}_{\text{out}}|}{|\mathbf{V}_{\text{in}}|} = \frac{6{,}25}{4} = 1{,}56$$

A concordância pode ser considerada excelente, em se tratando de um resultado experimental.

Vamos agora examinar o deslocamento de fase. De acordo com a curva de resposta de frequência, o deslocamento de fase em 1200 Hz é –110º, o que significa que

$$\angle \mathbf{V}_{\text{out}} - \angle \mathbf{V}_{\text{in}} = -110°$$

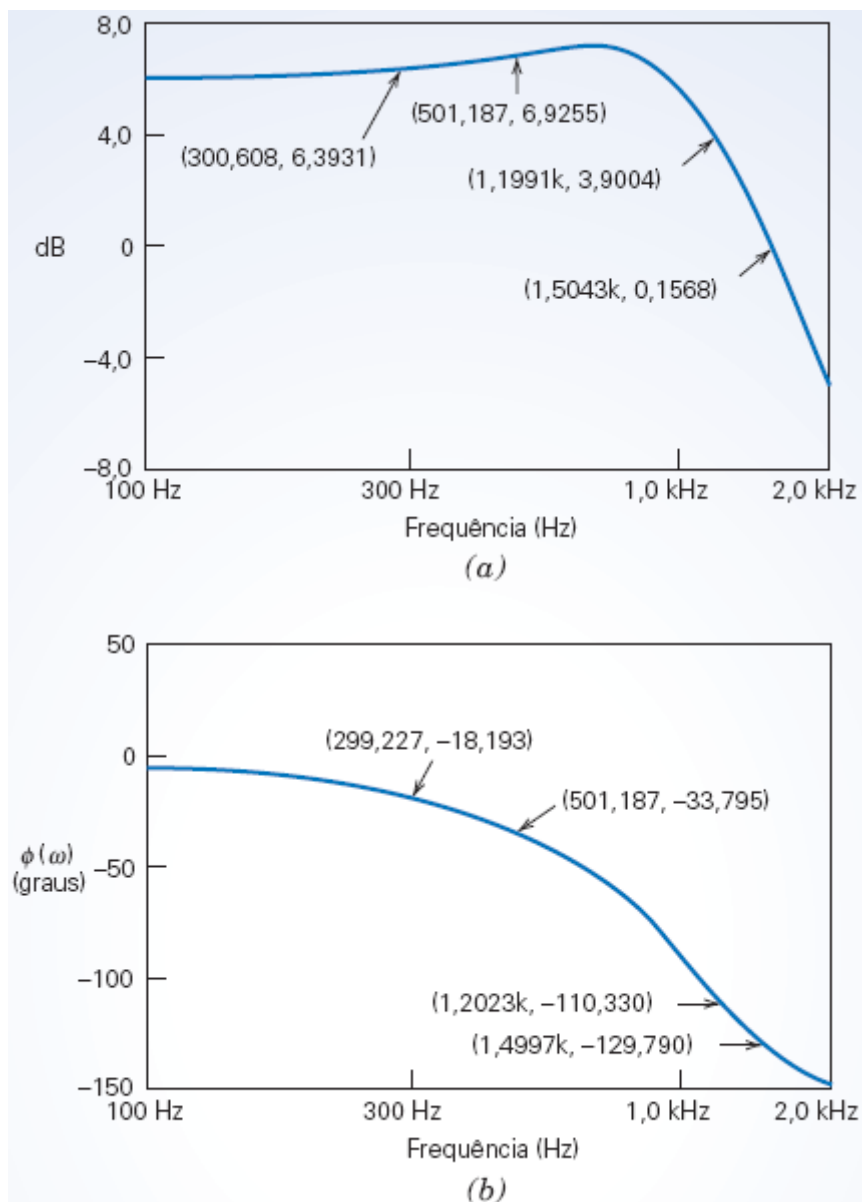



FIGURA 13.8-3 Resposta (*a*) de amplitude e (*b*) de fase do circuito do Exemplo 13.8-3.

Vamos comparar este resultado com as informações a respeito das senoides de entrada e de saída. Como o ângulo de um fasor é igual ao ângulo de fase da senoide correspondente,

$$\angle \mathbf{V}_{\text{out}} - \angle \mathbf{V}_{\text{in}} = 110^\circ - 0^\circ = 110^\circ$$

Os sinais dos ângulos de fase não estão de acordo. Para uma frequência de 1200 Hz, um ângulo de fase de 110º significa que os picos da senoide de saída estão atrasados em relação aos picos da senoide de entrada de

$$t_0 = \frac{110^\circ}{360^\circ} \cdot \frac{1}{1200} = 0{,}255 \text{ ms}$$

enquanto um ângulo de fase de −110º significa que os picos da senoide de saída precedem os picos da senoide de entrada de 0,255 ms. É provável que o ângulo da senoide de saída tenha sido anotado incorretamente no caderno do laboratório.

Encontramos um erro no antigo relatório e propusemos uma explicação para o erro.

13.9 EXEMPLO DE PROJETO Circuito de Sintonia de um Receptor de Rádio

Três estações de rádio transmitem em frequências diferentes, 700 kHz, 1000 kHz e 1400 Hz. A Figura 13.9-1 mostra um diagrama simplificado de um receptor de rádio. Como a antena recebe sinais das três estações, a entrada do circuito de sintonia é a soma dos três sinais. Suponha que a entrada seja descrita pela função

$$v_i(t) = \text{sen}\,(2\pi \cdot 7 \cdot 10^5 t + 135°) + \text{sen}\,(2\pi \cdot 10^6 t) + \text{sen}\,(2\pi \cdot 1{,}4 \cdot 10^6 t + 300°) \qquad (13.9\text{-}1)$$

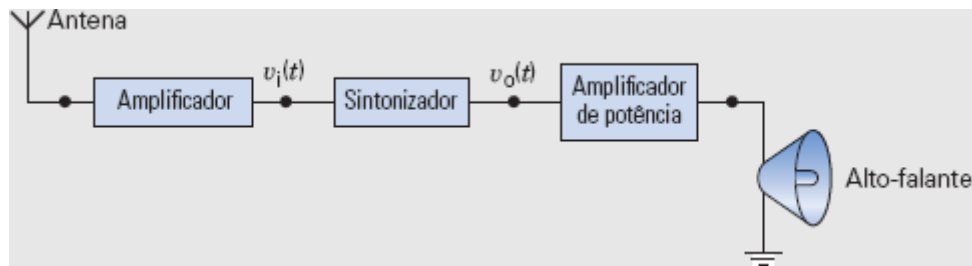



FIGURA 13.9-1 Diagrama simplificado de um receptor de rádio.

Considere o problema de sintonizar o receptor para a estação que transmite em 1000 kHz. O circuito de sintonia deve eliminar o primeiro e o terceiro termo de $v_i(t)$ para produzir o sinal de saída

$$v_o(t) = \text{sen}\,(2\pi \cdot 10^6 t + \theta)$$

Descreva a Situação e as Hipóteses

Seja $\mathbf{H}(\omega)$ a função de transferência do circuito de sintonia. O circuito deve ter um ganho aproximadamente igual a 1 em 1000 kHz [$|\mathbf{H}(2\pi \cdot 10^6|) \cong 1$] e aproximadamente igual a zero em 700 kHz e 1400 kHz [$|\mathbf{H}(2\pi \cdot 7 \cdot 10^5|) \cong 0$] e [$|\mathbf{H}(2\pi \cdot 1{,}4 \cdot 10^6|) \cong 0$]. A saída do circuito de sintonia será

$$\begin{aligned} v_o(t) = {} & |\,\mathbf{H}(2\pi \cdot 7 \cdot 10^5)|\ \text{sen}\,(2\pi \cdot 7 \cdot 10^5 t + 135° \\ & + \angle \mathbf{H}(2\pi \cdot 7 \cdot 10^5) + |\,\mathbf{H}(2\pi\, 10^6)\,|\ \text{sen}\,(2\pi\, 10^6 t + \angle \mathbf{H}(2\pi\, 10^6) \\ & + |\,\mathbf{H}(2\pi \cdot 1{,}4 \cdot 10^6)|\ \text{sen}\,(2\pi \cdot 1{,}4 \cdot 10^6 t + 300° \\ & + \angle \mathbf{H}(2\pi \cdot 1{,}4 \cdot 10^6)) \end{aligned} \qquad (13.9\text{-}2)$$

ou

$$v_o(t) \cong \text{sen}\,(2\pi \cdot 10^6 t + \theta)$$

em que

$$\theta = \mathbf{H}(2\pi \cdot 10^6)$$

Estabeleça a Meta

A meta é projetar um circuito formado por resistores, capacitores e amplificadores operacionais que possua um ganho igual a 1 em 1000 kHz e um ganho igual a zero em 700 e 1400 kHz.

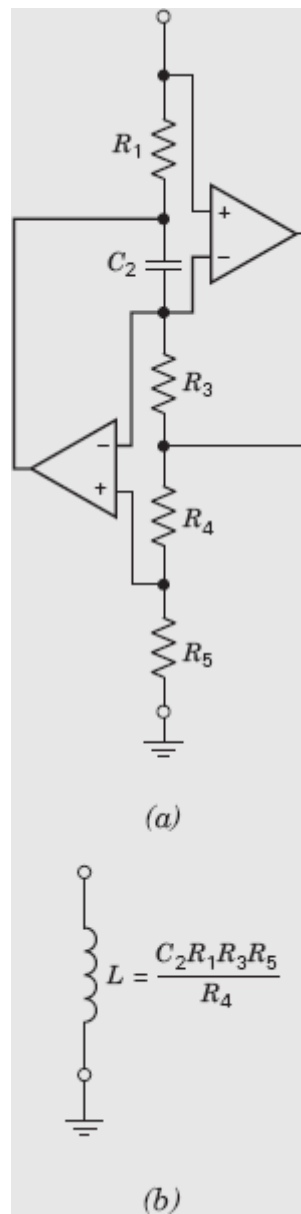



FIGURA 13.9-2 (*a*) Circuito com amplificadores operacionais conhecido como indutor simulado; (*b*) indutor equivalente.

Formule um Plano

O circuito de sintonia será baseado em um circuito ressonante com $\omega_0 = 2\pi \cdot 10^6 = 6{,}283 \cdot 10^6$ rad/s e $Q = 15$. A Figura 13.9-2 mostra um circuito com amplificadores operacionais conhecido como indutor simulado. O circuito se comporta como um indutor aterrado com uma indutância dada por

$$L = \frac{C_2R_1R_3R_5}{R_4} \tag{13.9-3}$$

A Figura 13.9-3 mostra de que forma um circuito ressonante paralelo pode ser usado como circuito de sintonia. A Figura 13.9-3*a* mostra um circuito ressonante paralelo convencional. O circuito deve ser modificado para ser usado como circuito de sintonia. A entrada do circuito de sintonia é uma tensão, mas a entrada do circuito ressonante paralelo convencional é uma corrente. Usando uma transformação de fonte, podemos obter um circuito cuja entrada é uma tensão, como mostra a Figura 13.9-3*b*. Em seguida, substituímos o indutor pelo indutor simulado para produzir o circuito da Figura 13.9-3*c*, que será usado como circuito de sintonia.

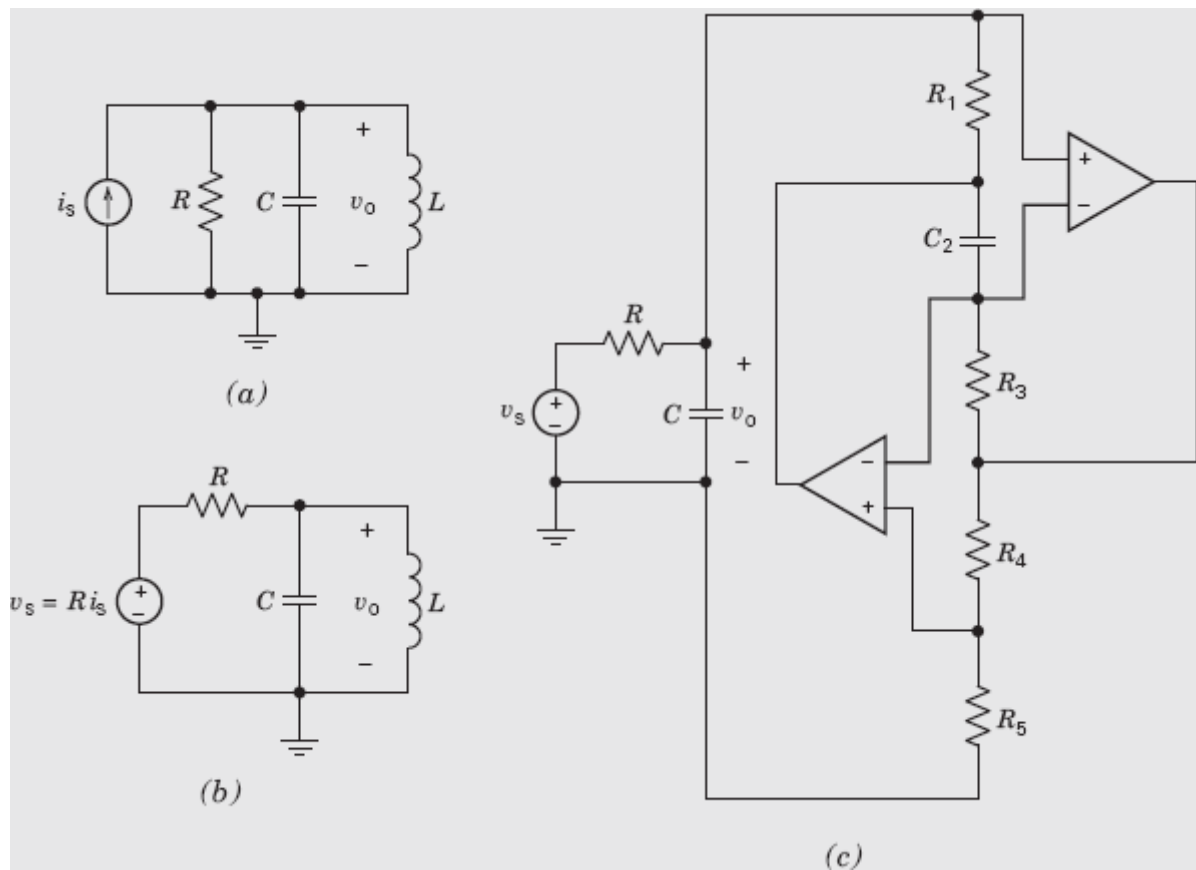



FIGURA 13.9-3 (*a*) Circuito ressonante. (*b*) Filtro passa-banda. (*c*) Filtro passa-banda com um indutor simulado.

O projeto pode ser completado em duas etapas. Primeiro, o valor de L, R e C é calculado para que o circuito ressonante paralelo tenha $\omega_0 = 6{,}283 \cdot 10^6$ rad/s e $Q = 15$. Em seguida, o capacitor e os resistores do indutor simulado são escolhidos para que o valor de L, dado pela a Eq. 13.9-3, seja o valor desejado.

Execute o Plano

Em primeiro lugar, projetamos o circuito ressonante para que $\omega_0 = 6{,}283 \cdot 10^6$ rad/s e $Q = 15$. Escolhemos um valor conveniente para a capacitância, $C = 0{,}001\ \mu$F. Nesse caso,

$$L = \frac{1}{\omega_0^2 C} = \frac{1}{\left(6{,}283 \cdot 10^6\right)^2 \cdot 10^{-9}} = 25{,}33\ \mu\text{H}$$

e

$$R = Q\sqrt{\frac{L}{C}} = 15\sqrt{\frac{25{,}33 \cdot 10^{-6}}{10^{-9}}} = 2387\ \Omega$$

Em seguida, projetamos o indutor simulado para que tenha uma indutância $L = 25{,}33\ \mu$H. Existem muitas possibilidades. Vamos escolher $C_2 = 0{,}001\ \mu$F, $R_1 = 1{,}5$ kΩ, $R_3 = 1{,}5$ kΩ e $R_4 = 80$ kΩ. Nesse caso,

$$R_5 = \frac{R_4 L}{C_2 R_1 R_3} = \frac{80 \cdot 10^3 \cdot 25{,}33 \cdot 10^{-6}}{10^{-9} \cdot 1{,}5 \cdot 10^3 \cdot 1{,}5 \cdot 10^3} = 900\ \Omega$$

Verifique se a Solução Proposta Está Correta

A Figura 13.9-4 mostra os resultados de uma simulação do circuito de sintonia usando o programa PSpice. A entrada do circuito (curva azul) é a tensão $v_i(t)$ da Eq. 13.9-1; o sinal não é senoidal. A saída do filtro (curva preta) é uma senoide com uma amplitude de aproximadamente 1 e uma frequência de 1000 kHz, como a senoide da Eq. 13.9-2. Isso significa que as especificações do projeto foram satisfeitas.

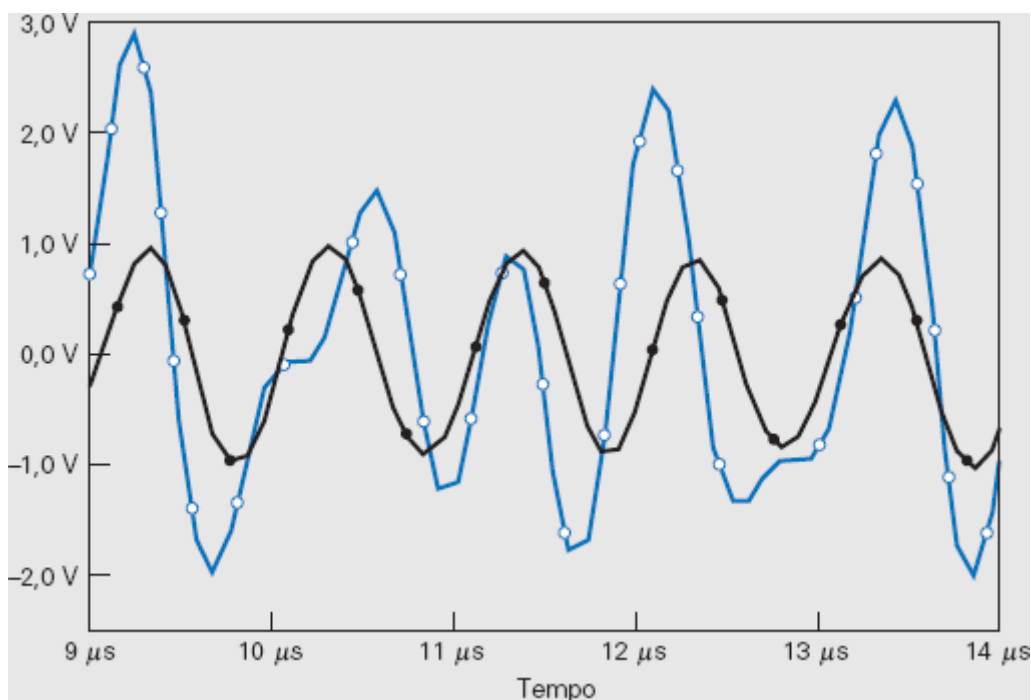



FIGURA 13.9-4 Simulação do circuito de sintonia usando o programa PSpice.

13.10 RESUMO

- O ganho, o deslocamento de fase e a função de transferência são propriedades dos circuitos lineares usadas para descrever o efeito de um circuito sobre uma tensão ou corrente de entrada senoidal.
- O ganho de um circuito é um parâmetro que descreve a relação entre a intensidade do sinal de entrada e a intensidade do sinal de saída. No caso de sinais senoidais em circuitos lineares, o ganho é a razão entre a amplitude da senoide da saída e a amplitude da senoide da entrada.
- O deslocamento de fase de um circuito é um parâmetro que descreve a relação entre o ângulo de fase do sinal de entrada e o ângulo de fase do sinal de saída. No caso de sinais senoidais em circuitos lineares, o deslocamento de fase é a diferença entre o ângulo de fase da senoide de saída e o ângulo de fase da senoide de entrada.
- A função de transferência de um circuito descreve o modo como o comportamento do circuito depende da frequência do sinal de entrada. A função de transferência é definida apenas no domínio da frequência; é a razão entre o fasor correspondente ao sinal de saída e o fasor correspondente ao sinal de entrada.
- A Tabela 13.3-2 mostra as funções de transferência de vários circuitos com amplificadores operacionais.
- A resposta de frequência descreve a forma como o ganho e o deslocamento de fase de um circuito variam com a frequência. Equações, tabelas e gráficos podem ser usados para expressar a resposta de frequência.
- Os gráficos de Bode representam a resposta de frequência na forma de gráficos do ganho em decibéis e da fase usando uma escala logarítmica para a frequência. Os gráficos de Bode de amplitude assintóticos são gráficos de Bode aproximados, mais fáceis de desenhar que os gráficos exatos. Os termos *frequência de canto* e *frequência de quebra* são muito usados para descrever circuitos lineares. Esses termos estão relacionados ao gráfico de Bode assintótico.
- Alguns circuitos lineares exibem um fenômeno conhecido como ressonância. Esses circuitos contêm elementos reativos, mas agem como se fossem puramente resistivos em uma certa frequência, que é chamada de frequência de ressonância. Os circuitos ressonantes são descritos por três parâmetros: a frequência de ressonância, o fator de qualidade e a banda passante. A Tabela 13.4-1 mostra as principais propriedades dos circuitos ressonantes série e paralelo.
- O ganho dos amplificadores operacionais depende da frequência da entrada. O uso de um modelo para o amplificador operacional que inclui um ganho que varia com a frequência torna a análise mais precisa, mas

também mais complicada. Usamos o modelo mais complicado quando precisamos de alta precisão e o modelo mais simples quando isso não é necessário.

- O programa PSpice pode ser usado para analisar um circuito e plotar a resposta de frequência.
- O programa MATLAB pode ser usado para plotar a resposta de frequência de um circuito, uma vez conhecida a função de transferência.

PROBLEMAS

Seção 13.2 Ganho, Deslocamento de Fase e Função de Transferência

P 13.2-1 A entrada do circuito da Figura P 13.2-1 é a tensão da fonte de tensão, $v_i(t)$. A saída é a tensão $v_o(t)$ entre os terminais da associação em paralelo do capacitor e o resistor de 10 Ω. Determine a função de transferência do circuito, $\mathbf{H}(\omega) = \mathbf{V}_o(\omega)/\mathbf{V}_i(\omega)$.

Resposta: $\mathbf{H}(\omega) = \dfrac{0,2}{1 + j4\omega}$

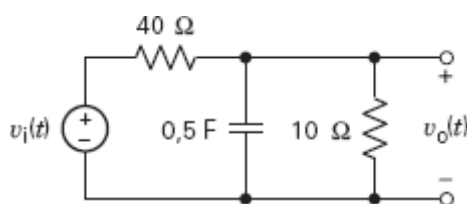



Figura P 13.2-1

P 13.2-2 A entrada do circuito da Figura P 13.2-2 é a tensão da fonte de tensão, $v_i(t)$. A saída é a tensão $v_o(t)$ entre os terminais da associação em série do capacitor e o resistor de 160 kΩ. Determine a função de transferência do circuito, $\mathbf{H}(\omega) = \mathbf{V}_o(\omega)/\mathbf{V}_i(\omega)$.

Resposta: $\mathbf{H}(\omega) = \dfrac{1 + j(0,004)\omega}{1 + j(0,005)\omega}$

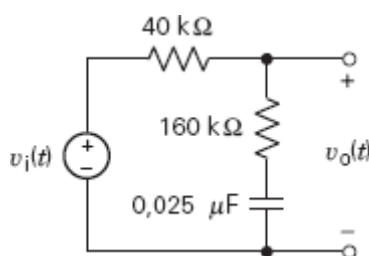



Figura P 13.2-2

P 13.2-3 A entrada do circuito da Figura P 13.2-3 é a tensão da fonte de tensão, $v_i(t)$. A saída é a tensão $v_o(t)$ entre os terminais do resistor de 6 Ω. Determine a função de transferência do circuito, $\mathbf{H}(\omega) = \mathbf{V}_o(\omega)/\mathbf{V}_i(\omega)$.

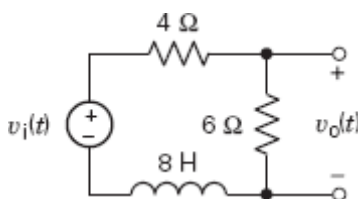



Figura P 13.2-3

P 13.2-4 A entrada do circuito da Figura P 13.2-4 é a tensão da fonte de tensão, $v_i(t)$. A saída é a tensão $v_o(t)$ entre os terminais da associação em série do indutor e o resistor de 60 Ω. A função de transferência do circuito é

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_i(\omega)} = (0{,}6)\frac{1 + j\frac{\omega}{12}}{1 + j\frac{\omega}{20}}$$

Determine o valor da indutância L e da resistência R.

Resposta: $L = 5$ H e $R = 40\ \Omega$

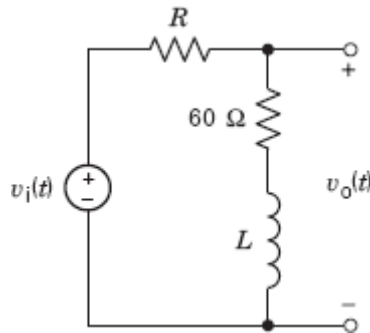



Figura P 13.2-4

P 13.2-5 A entrada do circuito da Figura P 13.2-5 é a tensão da fonte de tensão, $v_i(t)$. A saída é a tensão $v_o(t)$ entre os terminais da associação em paralelo do capacitor e o resistor de 2 Ω. A função de transferência do circuito é

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_i(\omega)} = \frac{0{,}2}{1 + j4\omega}$$

Determine o valor da capacitância C e da resistência R.

Resposta: $C = 2{,}5$ F e $R = 8\ \Omega$

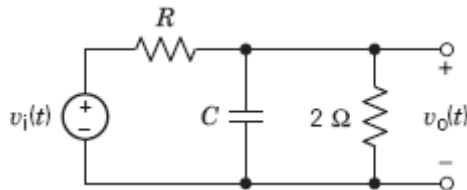



Figura P 13.2-5

P 13.2-6 A entrada do circuito da Figura P 13.2-6 é a tensão da fonte de tensão, $v_i(t)$. A saída é a tensão $v_o(t)$ entre os terminais do capacitor. Determine a função de transferência do circuito, $\mathbf{H}(\omega) = \mathbf{V}_o(\omega)/\mathbf{V}_i(\omega)$.

Resposta: $\mathbf{H}(\omega) = \dfrac{0,6}{(j\omega)(1 + j(0,2)\omega)}$

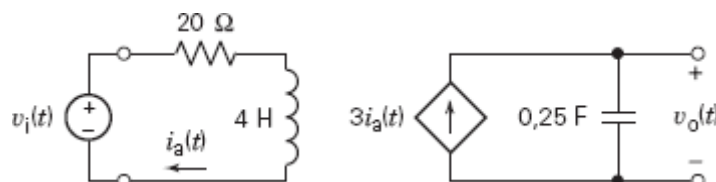



Figura P 13.2-6

P 13.2-7 A entrada do circuito da Figura P 13.2-7 é a tensão da fonte de tensão, $v_i(t)$. A saída é a tensão $v_o(t)$ entre os terminais do resistor de 30 kΩ. A função de transferência do circuito é

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_i(\omega)} = \frac{4}{1 + j\frac{\omega}{100}}$$

Determine o valor da capacitância C e do ganho A da FTCT.

Resposta: $C = 5\ \mu$F e $A = 6$ V/V

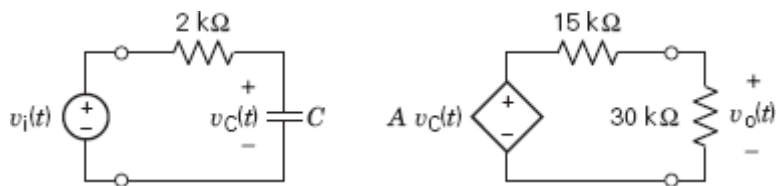



Figura P 13.2-7

P 13.2-8 A entrada do circuito da Figura P 13.2-8 é a tensão da fonte de tensão, $v_i(t)$. A saída é a tensão $v_o(t)$ entre os terminais de R_L. Determine a função de transferência do circuito.

Resposta: $$\mathbf{H}(\omega) = -\frac{5}{1 + j\dfrac{\omega}{10}}$$

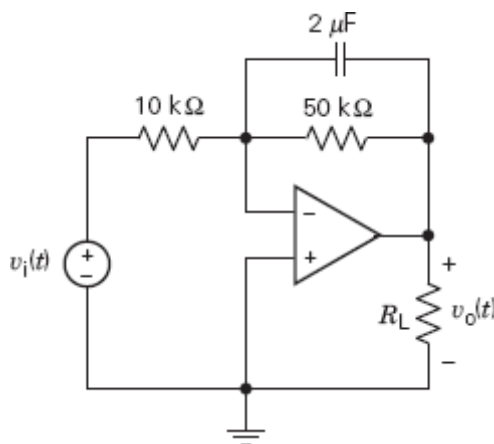



Figura P 13.2-8

P 13.2-9 A entrada do circuito da Figura P 13.2-9 é a tensão da fonte de tensão, $v_i(t)$, e a saída é a tensão em R_L, $v_o(t)$. Expresse o ganho e o deslocamento de fase em função da frequência angular ω.

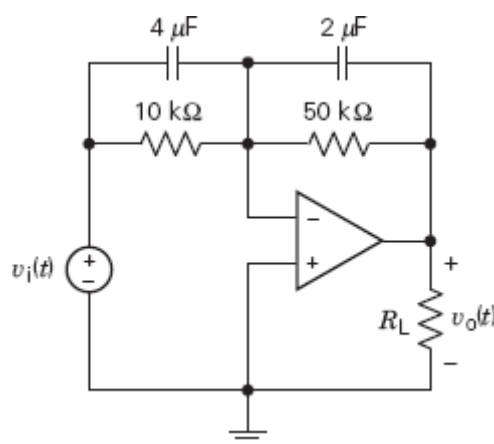



Figura P 13.2-9

P 13.2-10 A entrada do circuito da Figura P 13.2-10 é a tensão da fonte de tensão, $v_i(t)$, e a saída é a tensão de R_L, $v_o(t)$. O valor de resistência R_1 é 10 kΩ. Projete o circuito para que satisfaça as seguintes especificações:

(a) O ganho em baixas frequências deve ser 5.

(b) O ganho em baixas frequências deve ser 2.

Resposta: $R_2 = 20$ kΩ e $R_3 = 30$ kΩ.

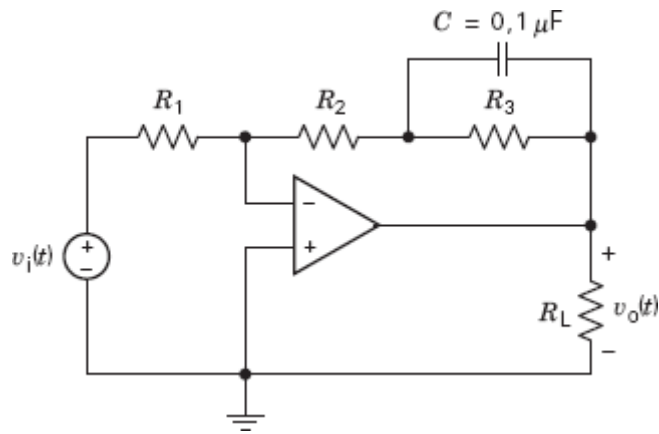



Figura P 13.2-10

P 13.2-11 A entrada do circuito da Figura P 13.2-11 é a tensão da fonte de tensão, $v_i(t)$, e a saída é a tensão de R_L, $v_o(t)$. Projete o circuito para que satisfaça as seguintes especificações:

(a) O deslocamento de fase em ω = 1000 rad/s deve ser 135º.

(b) O ganho em altas frequências deve ser 10.

Resposta: R_1 = 1 kΩ e R_2 = 10 kΩ.

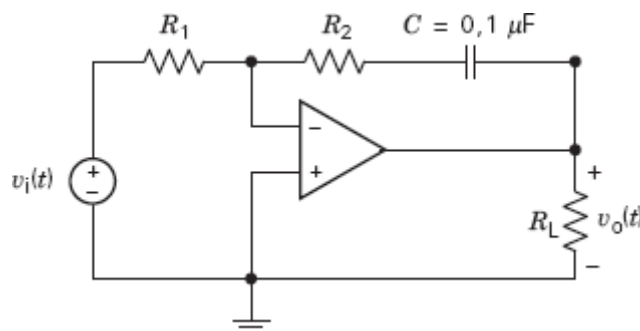



Figura P 13.2-11

P 13-2.12 A entrada do circuito da Figura P 13.2-12 é a tensão da fonte de tensão, $v_i(t)$, e a saída é a tensão de R_L, $v_o(t)$. Projete o circuito para que satisfaça as seguintes especificações:

(a) O deslocamento de fase em ω = 1000 rad/s deve ser 225º.

(b) O ganho em altas frequências deve ser 10.

Resposta: R_1 = 10 kΩ e R_2 = 100 kΩ.

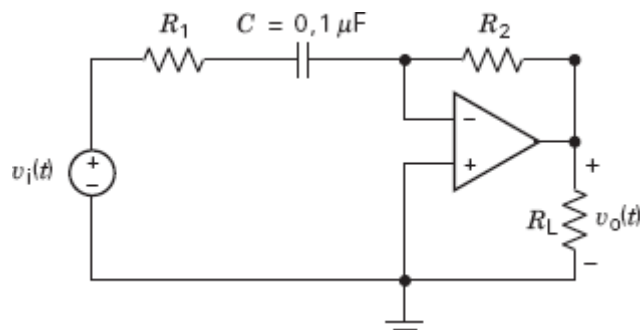



Figura P 13.2-12

P 13.2-13 A entrada do circuito da Figura P 13.2-13 é

$$v_s = 50 + 30 \cos(500t + 115°) - 20 \cos(2500t + 30°) \text{ mV}$$

Determine a tensão de saída no regime estacionário, v_o, (a) para $C = 0{,}1\ \mu$F e (b) para $C = 0{,}01\ \mu$F.

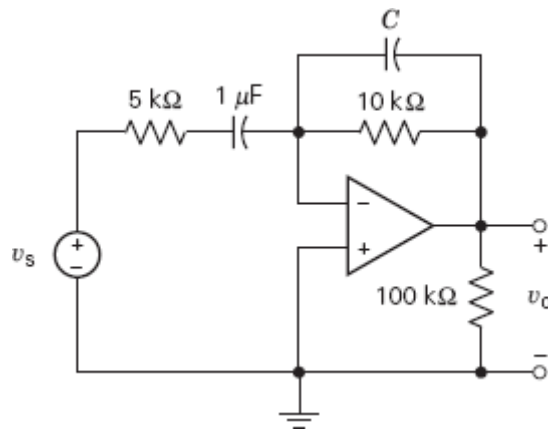



Figura P 13.2-13

P 13.2-14 A fonte de tensão v_s do circuito da Figura P 13.2-14*a* é senoidal, com uma frequência de 500 Hz e uma amplitude de 8 V. O circuito está no regime estacionário. A Figura P 13.2-14*b* mostra as formas de onda da entrada e da saída do circuito na tela de um osciloscópio.

(a) Determine o ganho e o deslocamento de fase do circuito para uma frequência de 500 Hz.

(b) Determine o valor do capacitor.

(c) Se a frequência da entrada muda, o ganho e o deslocamento de fase do circuito também mudam. Qual é o valor do ganho e do deslocamento de fase em 200 Hz? E em 2000 Hz? Para que frequência o deslocamento de fase é –45º? Para que frequência o deslocamento de fase é –135º?

(d) Qual deve ser o valor da capacitância para que o deslocamento de fase em 500 Hz seja –60º? Qual deve ser o valor da capacitância para que o deslocamento de fase em 500 Hz seja –300º?

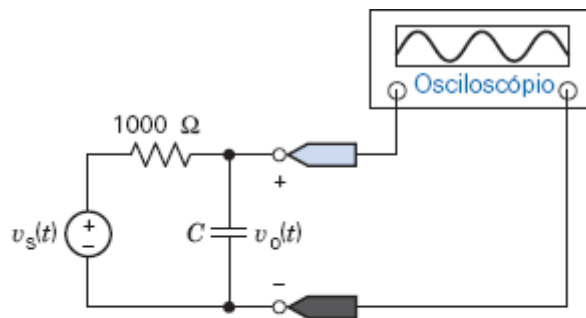
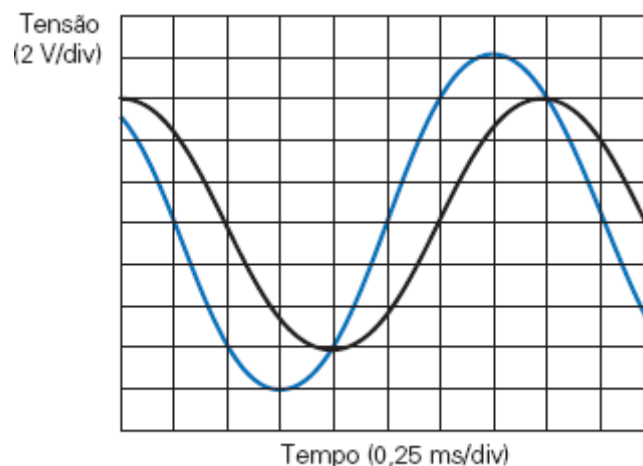
(e) Suponha que o deslocamento de fase fosse –120º em 500 Hz. Qual seria o valor do capacitor?

(*a*)

(*b*)

Figura P 13.2-14

Resposta: (a) 0,775; (b) C = 0,26 μF e –39º; (c) 0,95 e –18º; 0,26 e –73º; o circuito não pode produzir um deslocamento de fase de –135º; (d) 0,55 μF; o circuito não pode produzir um deslocamento de fase de –300º; (e) o circuito não pode produzir um deslocamento de fase de –120º.

P 13.2-15 A entrada do circuito da Figura P 13.2-15 é a tensão da fonte de tensão, $v_i(t)$. A saída é a tensão $v_o(t)$. A função de transferência do circuito é

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_i(\omega)} = \frac{(-0,1)j\omega}{\left(1 + j\dfrac{\omega}{p}\right)\left(1 + j\dfrac{\omega}{125}\right)}$$

Determine o valor da capacitância C e do polo p.

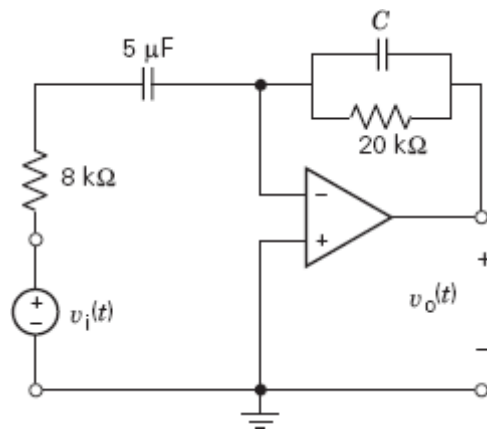



Figura P 13.2-15

P 13.2-16 A entrada do circuito da Figura P 13.2-16 é a tensão da fonte de tensão, $v_s(t)$. A saída é a tensão $v_o(t)$. A função de transferência do circuito é

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_s(\omega)} = k\frac{1 + j\dfrac{\omega}{z}}{1 + j\dfrac{\omega}{p}}$$

Escreva expressões que relacionem os parâmetros k, z e p da função de transferência aos parâmetros R_1, R_2, L, N_1 e N_2 do circuito.

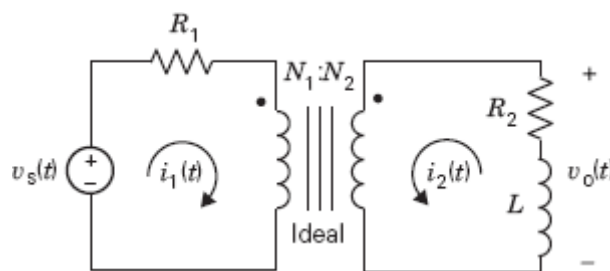



Figura P 13.2-16

P 13.2-17 A entrada do circuito da Figura P 13.2-17 é a tensão da fonte de tensão, $v_s(t)$. A saída é a tensão $v_o(t)$. A função de transferência do circuito é

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_s(\omega)} = k\frac{j\omega}{1 + j\dfrac{\omega}{p}}$$

Escreva expressões que relacionem os parâmetros k e p da função de transferência aos parâmetros R_1, R_2, M, L_1 e L_2 do circuito.

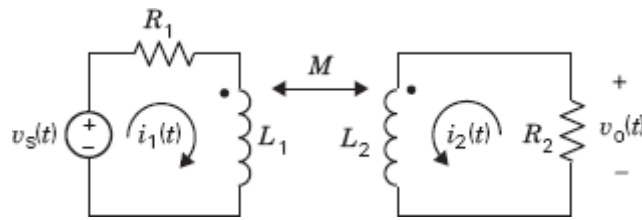



Figura P 13.2-17

P 13.2-18 A entrada do circuito da Figura P 13.2-18 é a tensão da fonte de tensão, $v_i(t)$. A saída é a tensão $v_o(t)$. A função de transferência do circuito é

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_i(\omega)} = k\frac{j\omega}{\left(1 + j\dfrac{\omega}{p_1}\right)\left(1 + j\dfrac{\omega}{p_2}\right)}$$

Escreva expressões que relacionem os parâmetros k, p_1 e p_2 da função de transferência aos parâmetros R_1, R_2, R_3, R_4, A, C e L do circuito.

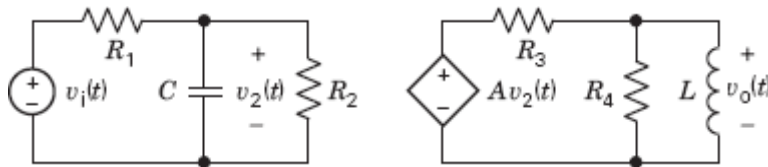



Figura P 13.2-18

P 13.2-19 A entrada do circuito da Figura P 13.2-19 é a tensão da fonte de tensão, v_s. A saída do circuito é a tensão no capacitor, v_o. Determine o valor das resistências R_1, R_2, R_3 e R_4 para que a função de transferência do circuito seja

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_s(\omega)} = \frac{21}{\left(1 + j\dfrac{\omega}{5}\right)\left(1 + j\dfrac{\omega}{200}\right)}$$

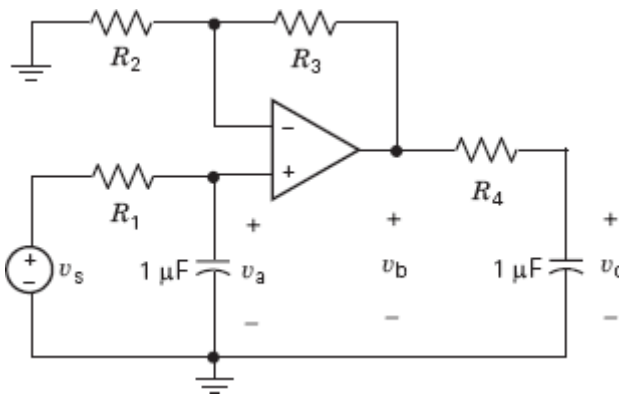



Figura P 13.2-19

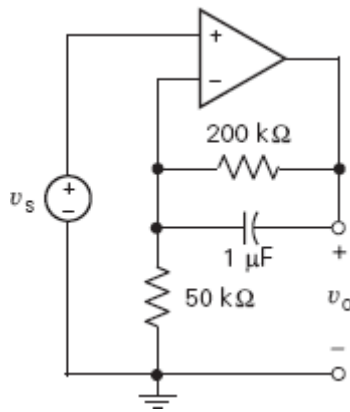
P 13.2-20 A entrada do circuito da Figura P 13.2-20 é a tensão da fonte de tensão, v_s. A saída do circuito é a tensão v_o. Determine a função de transferência do circuito,

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_s(\omega)}$$

Figura P 13.2-20

P 13.2-21 A entrada do circuito da Figura P 13.2-21 é a tensão da fonte de tensão, v_s. A saída do circuito é a tensão v_o. Determine a função de transferência do circuito,

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_s(\omega)}$$

100 kΩ
100 kΩ
v_s
1 μF
1 μF
+
v_o
−

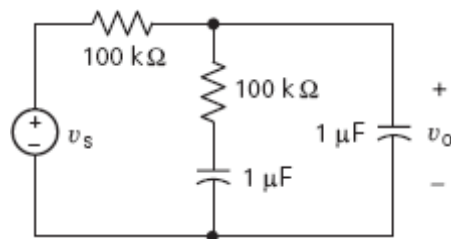



Figura P 13.2-21

P 13.2-22 A entrada do circuito da Figura P 13.2-22 é a tensão da fonte de tensão, v_s. A saída do circuito é a tensão do capacitor, v_o. A função de transferência do circuito é

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_s(\omega)} = \frac{H_o}{1 + j\dfrac{\omega}{p}}$$

Determine o valor de H_o e p.

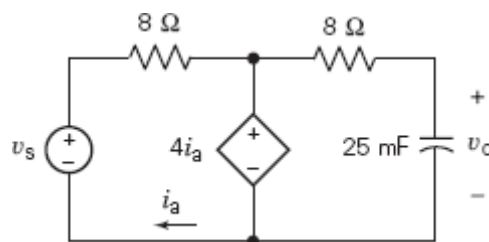



Figura P 13.2-22

P 13.2-23 A entrada do circuito da Figura P 13.2-23 é a corrente da fonte de corrente, i_s. A saída do circuito é a corrente no resistor, i_o. A função de transferência do circuito é

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{I}_o(\omega)}{\mathbf{I}_s(\omega)} = \frac{0{,}8}{1 + j\dfrac{\omega}{40}}$$

Determine o valor das resistências R_1 e R_2.

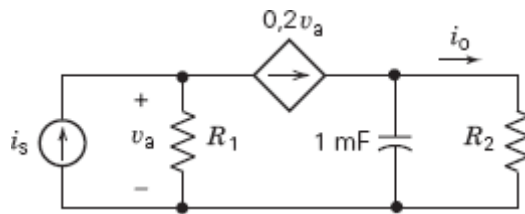



Figura P 13.2-23

P 13.2-24 A entrada do circuito da Figura P 13.2-24 é a tensão da fonte de tensão, v_s. A saída do circuito é a tensão do resistor, v_o. Especifique o valor de L_1, L_2, R e K para que a função de transferência do circuito seja

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_s(\omega)} = \frac{1}{\left(1 + j\dfrac{\omega}{20}\right)\left(1 + j\dfrac{\omega}{50}\right)}$$

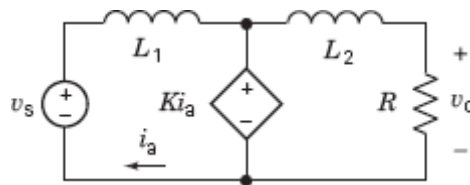



Figura P 13.2-24

P 13.2-25 A entrada do circuito da Figura P 13.2-25 é a tensão da fonte de tensão, v_s. A saída do circuito é a tensão do resistor, v_o. Especifique o valor de R e C para que a função de transferência do circuito seja

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_s(\omega)} = \frac{-8}{1 + j\dfrac{\omega}{250}}$$

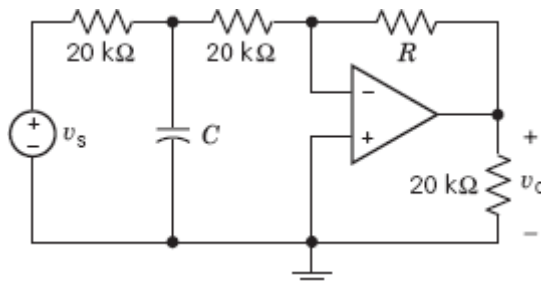



Figura P 13.2-25

P 13.2-26 A função de transferência de um circuito é $\mathbf{H}(\omega) = \dfrac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_s(\omega)} = \dfrac{j40\omega}{120 + j20\omega}$. Quando a entrada do circuito é $v_s(t) = 5 \cos(5t + 15°)$ V, a saída é $v_o(t) = A \cos(5t + 65{,}194°)$ V. Quando a entrada é $v_s(t) = 5 \cos(8t + 15°)$ V, a saída é $v_o(t) = 8 \cos(8t + \theta)$ V. Determine o valor de A e de θ.

Resposta: $A = 6{,}4018$ V e $\theta = 51{,}87°$

P 13.2-27 A função de transferência de um circuito é $\mathbf{H}(\omega) = \dfrac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_s(\omega)} = \dfrac{k}{1 + j\dfrac{\omega}{p}}$, em que $k > 0$ e $p > 0$.

Quando a tensão de entrada é

$$v_s(t) = 12 \cos(120t + 30°) \text{ V}$$

a tensão de saída é

$$v_o(t) = 42{,}36 \cos(120t - 48{,}69°) \text{ V}$$

Determine o valor de k e p.

Resposta: $k = 18$ e $p = 24$ rad/s

P 13.2-28 A função de transferência de um circuito é $\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_s(\omega)} = \frac{20}{8 + j\omega}$. Quando a entrada do circuito é senoidal, a saída também é senoidal. Seja ω_1 a frequência para a qual a senoide da saída é duas vezes maior que a senoide da entrada e seja ω_2 a frequência para a qual a frequência da senoide de saída está atrasada de um décimo de período em relação à senoide de entrada. Determine o valor de ω_1 e ω_2.

P 13.2-29 A entrada do circuito da Figura P 13.2-29 é a tensão da fonte de tensão, $v_s(t)$, e a saída é a tensão $v_o(t)$. Quando a entrada é $v_s(t) = 8 \cos(40t)$ V, a saída é $v_o(t) = 2{,}5 \cos(40t + 14°)$ V. Determine o valor das resistências R_1 e R_2.

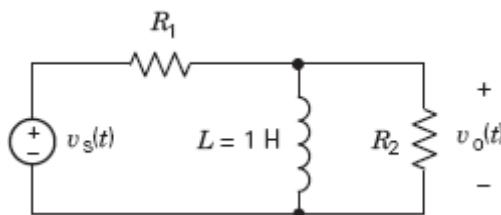



Figura P 13.2-29

P 13.2-30 A entrada do circuito da Figura P 13.2-30 é a tensão da fonte de tensão, $v_s(t)$. A saída é a tensão $v_o(t)$. Quando a entrada é $v_s(t) = 2{,}5 \cos(1000t)$ V, a saída é $v_o(t) = 8 \cos(1000t + 104°)$ V. Determine o valor das resistências R_1 e R_2.

Resposta: $R_1 = 1515\ \Omega$ e $R_2 = 20$ kΩ

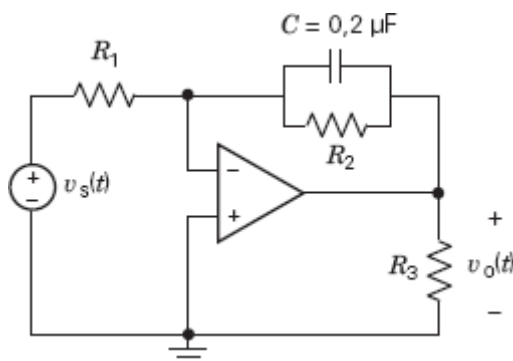



Figura P 13.2-30

Seção 13.3 Gráficos de Bode

P 13.3-1 Plote o gráfico de Bode de amplitude da função $\mathbf{H}(\omega) = \dfrac{4(5 + j\omega)}{1 + j\dfrac{\omega}{50}}$.

P 13.3-2 Compare os gráficos de Bode de amplitude das funções $\mathbf{H}_1(\omega) = \dfrac{10(5 + j\omega)}{50 + j\omega}$ e $\mathbf{H}_2(\omega) = \dfrac{100(5 + j\omega)}{50 + j\omega}$.

P 13.3-3 A entrada do circuito da Figura P 13.3-3 é a tensão da fonte de tensão, $v_{in}(t)$, e a saída é a tensão de R_1, $v_{out}(t)$. Os valores dos componentes são $R_1 = 5$ kΩ, $R_2 = 10$ kΩ, $C_1 = 0{,}1\ \mu$F e $C_2 = 0{,}1\ \mu$F. Plote o gráfico de Bode de amplitude assintótico da função de transferência.

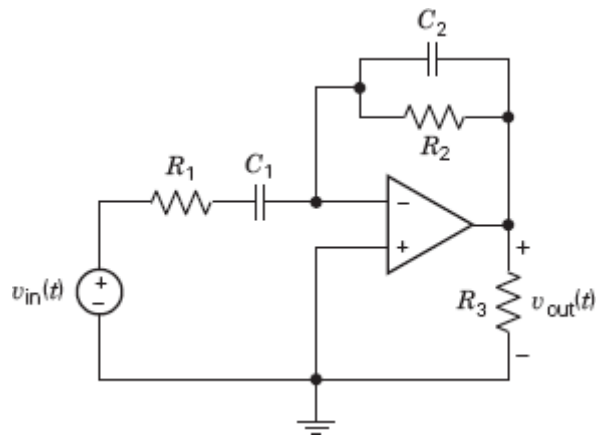



Figura P 13.3-3

P 13.3-4 A entrada do circuito da Figura P 13.3-4 é a tensão da fonte de tensão, $v_s(t)$, e a saída é a tensão de R_3, $v_o(t)$. Determine $\mathbf{H}(\omega)$ e plote o gráfico de Bode.

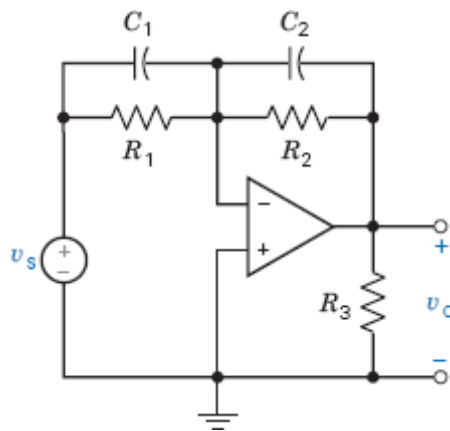



Figura P 13.3-4

P 13.3-5 A entrada do circuito da Figura P 13.3-5*a* é a tensão $v_i(t)$ da fonte de tensão independente e a saída é a tensão $v_o(t)$ do capacitor. Projete o circuito para que o gráfico de Bode de amplitude seja o que aparece na Figura P 13.3-5*b*.

Sugestão: Para começar, mostre que a função de transferência do circuito é

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_i(\omega)} = \frac{j\omega\left(\dfrac{ALR_4}{R_1(R_3 + R_4)}\right)}{\left(1 + j\omega\dfrac{L(R_1 + R_2)}{R_1R_2}\right)\left(1 + j\omega\dfrac{CR_3R_4}{R_3 + R_4}\right)}$$

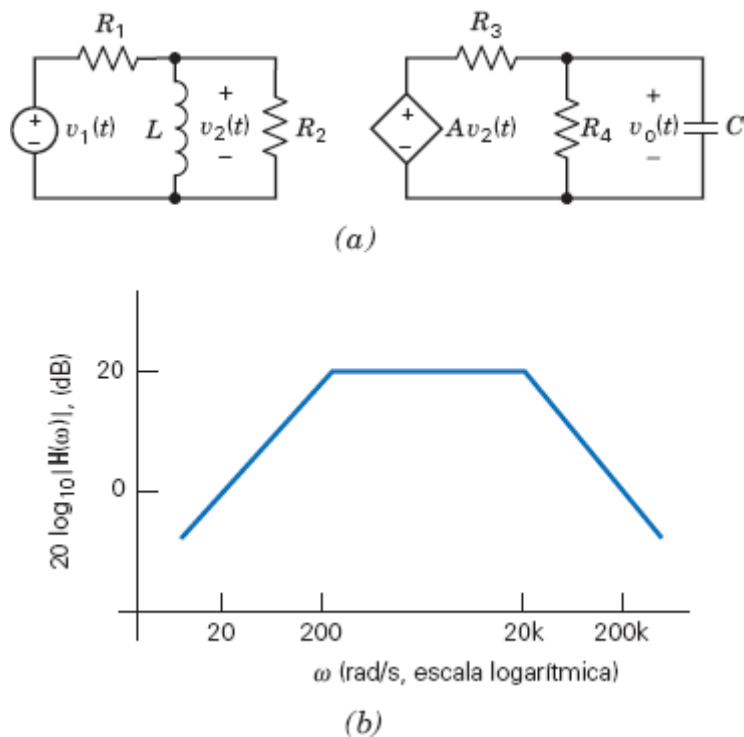



Figura P 13.3-5

P 13.3-6 A entrada do circuito da Figura P 13.3-6*b* é a tensão da fonte de tensão, $v_i(t)$, e a saída é a tensão $v_o(t)$. A função de transferência do circuito é $\mathbf{H}(\omega) = \mathbf{V}_o(\omega)/\mathbf{V}_i(\omega)$. Determine o valor de R_2, C_1 e C_2 para que o gráfico de Bode de amplitude do circuito seja o que aparece na Figura P 13.3-6*a*.

Resposta: R_2 = 400 kΩ, C_1 = 25 nF e C_2 = 6,25 nF.

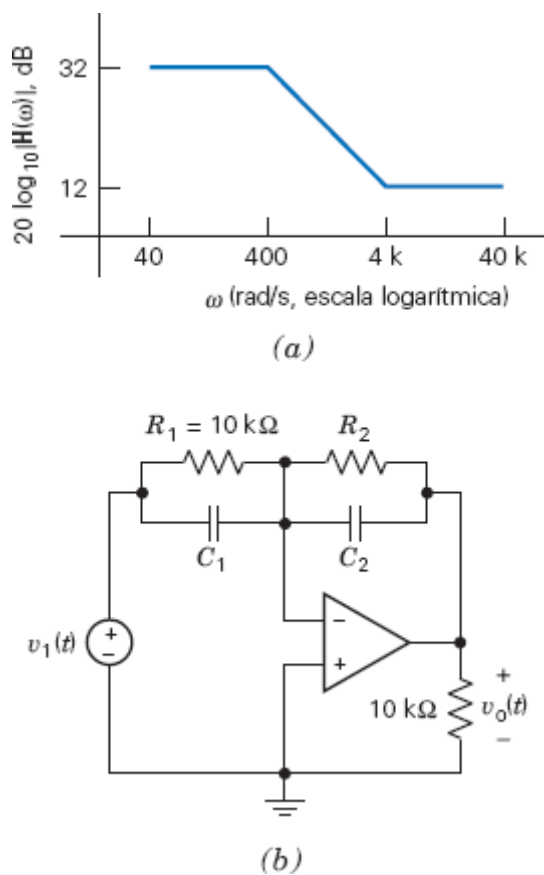



Figura P 13.3-6

P 13.3-7 A entrada do circuito da Figura P 13.3-7*b* é a tensão da fonte de tensão, $v_i(t)$, e a saída é a tensão $v_o(t)$. A função de transferência do circuito é $\mathbf{H}(\omega) = \mathbf{V}_o(\omega)/\mathbf{V}_i(\omega)$. O gráfico de Bode de amplitude do circuito aparece na Figura P 13.3-7*a*. Determine as frequências de canto, *z* e *p*, e o ganho de baixa frequência, *k*.

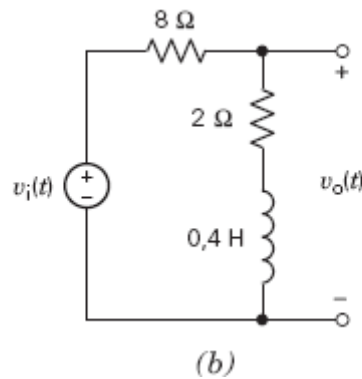
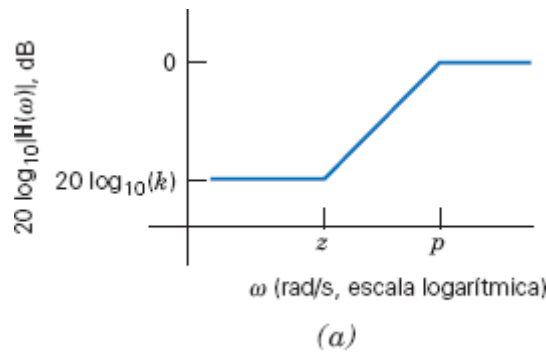



Figura P 13.3-7

P 13.3-8 Determine $\mathbf{H}(\omega)$ a partir do gráfico de Bode assintótico da Figura P 13.3-8.

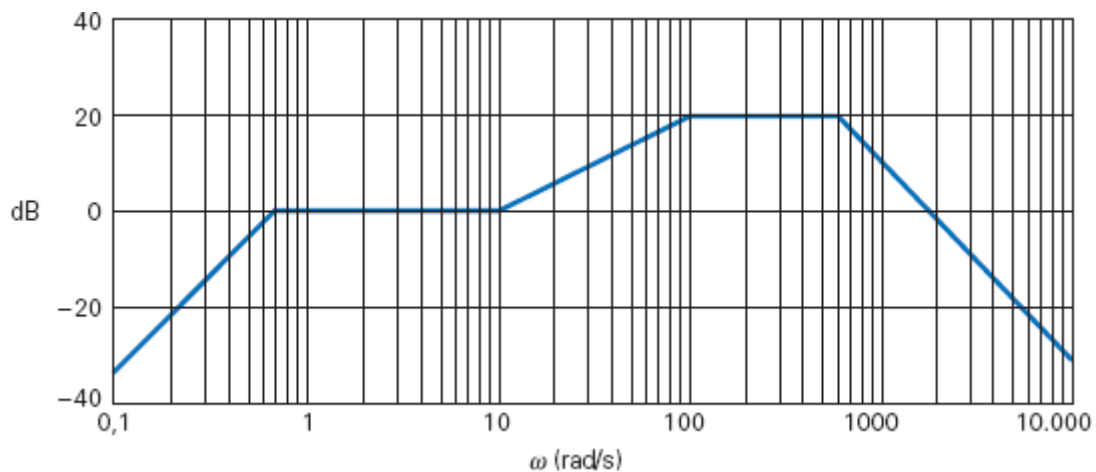



Figura P 13.3-8

P 13.3-9 A função de transferência de um circuito é

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{k(1 + j\omega/z)}{j\omega}$$

(a) Determine a assíntota de baixa frequência e a assíntota de alta frequência do gráfico de Bode de amplitude.

(b) As assíntotas de baixa e alta frequência formam o gráfico de Bode de amplitude assintótico. Em que intervalos de frequências a diferença entre o gráfico de Bode assintótico de $\mathbf{H}(\omega)$ e o gráfico exato é menor que 1%?

P 13.3-10 Os médicos usam eletrodos para aplicar correntes elétricas a tecidos humanos. O eletrodo em contato com um tecido pode ser modelado pelo circuito *RC* da Figura P 13.3-10. O valor dos componentes depende do tipo de eletrodo e do tipo de tecido. Plote o diagrama de Bode da função $\mathbf{H}(\omega) = \mathbf{V}_o/\mathbf{V}_s$ para $R_1 = 1$ kΩ e $C = 1\ \mu$F, supondo que a resistência do tecido seja $R_t = 5$ kΩ.

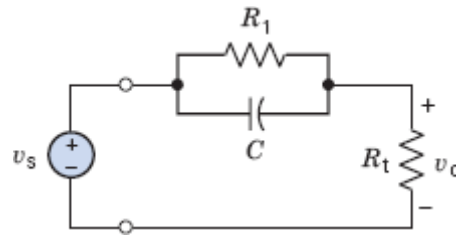



Figura P 13.3-10

P 13.3-11 A Figura P 13.3-11 mostra um circuito e o gráfico de Bode de amplitude assintótico correspondente. A entrada do circuito é a tensão da fonte de tensão $v_{in}(t)$ e a saída é a tensão $v_o(t)$. Os valores dos componentes são $R_1 = 80$ Ω, $R_2 = 20$ Ω, $L_1 = 0{,}03$ H, $L_2 = 0{,}07$ H e $M = 0{,}01$ H. Determine o valor de K_1, K_2, p e z.

Resposta: $K_1 = 0{,}75$, $K_2 = 0{,}2$, $z = 333$ rad/s e $p = 1250$ rad/s.

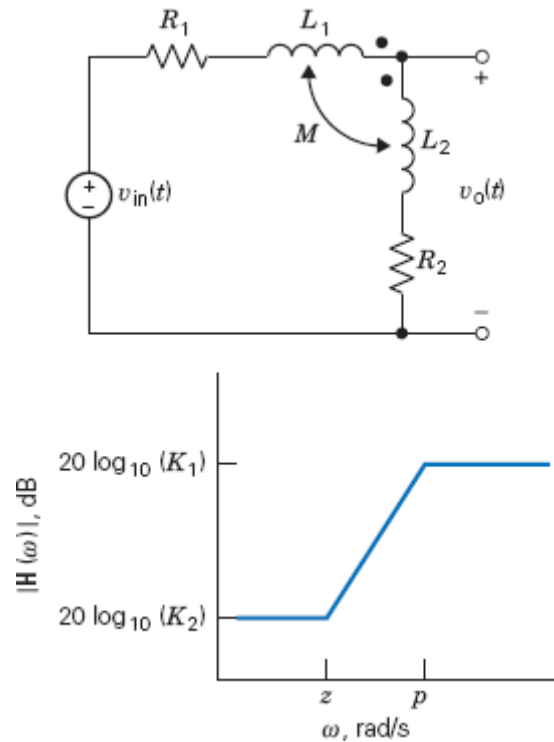



Figura P 13.3-11

P 13.3-12 A entrada do circuito da Figura P 13.3-12 é a tensão da fonte de tensão, $v_{in}(t)$, e a resposta é a tensão de R_3, $v_{out}(t)$. Os valores dos componentes são $R_1 = 10$ kΩ, $C_1 = 0{,}025\ \mu$F e $C_2 = 0{,}05\ \mu$F. Plote o gráfico de Bode de amplitude assintótico da função de transferência do circuito.

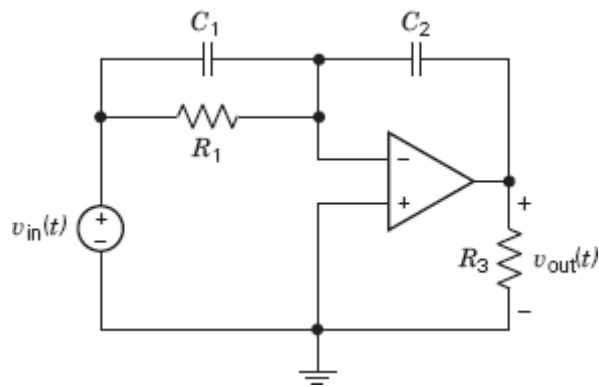



Figura P 13.3-12

P 13.3-13 Projete um circuito cujo gráfico de Bode de amplitude assintótico seja o que aparece na Figura P 13.3-13.

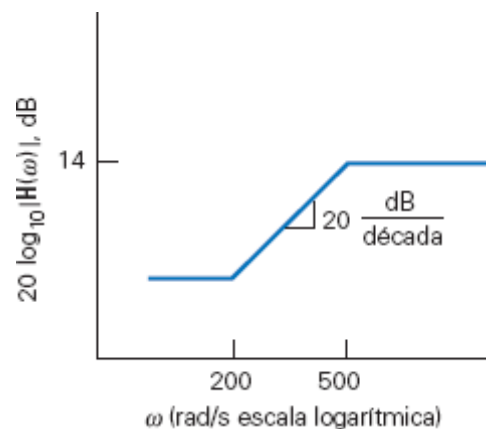



Figura P 13.3-13

P 13.3-14 Projete um circuito cujo gráfico de Bode de amplitude assintótico seja o que aparece na Figura P 13.3-14.

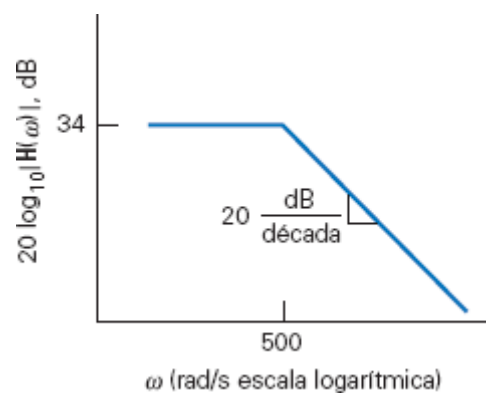



Figura P 13.3-14

P 13.3-15 Projete um circuito cujo gráfico de Bode de amplitude assintótico seja o que aparece na Figura P 13.3-15.

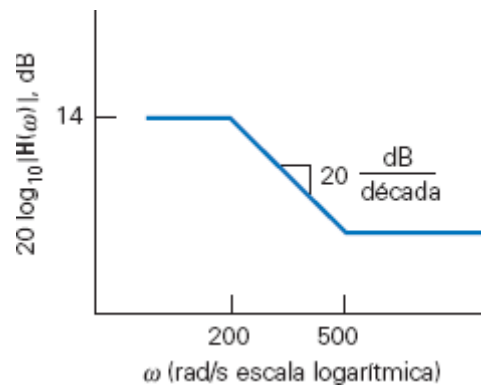



Figura P 13.3-15

P 13.3-16 Projete um circuito cujo gráfico de Bode de amplitude assintótico seja o que aparece na Figura P 13.3-16.

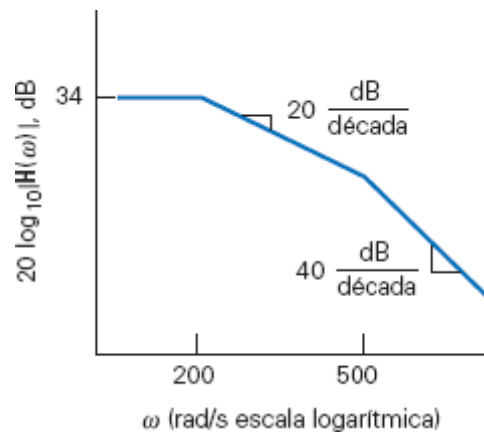



Figura P 13.3-16

P 13.3-17 O implante coclear é recomendado para pacientes que sofrem de surdez por causa do mau funcionamento das células da cóclea, situada no ouvido interno (Loeb, 1985). O aparelho utiliza um microfone para captar os sons e um processador para produzir sinais que estimulem o sistema nervoso da forma correta. O implante coclear se baseia no fato de que muitas fibras nervosas do sistema auditivo permanecem intactas em pacientes com esse tipo de perda de audição. A transmissão de sinais elétricos do microfone para as células nervosas pode ser representada pela função

$$\mathbf{H}(j\omega) = \frac{10(j\omega/50 + 1)}{(j\omega/2 + 1)(j\omega/20 + 1)(j\omega/80 + 1)}$$

Plote o gráfico de Bode de amplitude de $\mathbf{H}(j\omega)$ para $1 \le \omega \le 100$.

P 13.3-18 A Figura P 13.3-18 mostra um circuito com um amplificador operacional no qual $R_2 = 5$ kΩ e $C = 0{,}02$ μF.

(a) Determine a função de transferência $\mathbf{H}(\omega) = \mathbf{V}_o/\mathbf{V}_s$ e plote o diagrama de Bode de amplitude assintótico.

(b) Qual é o ganho do circuito, $|\mathbf{V}_o/\mathbf{V}_s|$, para $\omega = 0$?

(c) Em que frequência $|\mathbf{V}_o/\mathbf{V}_s|$ cai para $1/\sqrt{2}$ do valor em baixas frequências?

Resposta: (a) $\mathbf{H}(\omega) = -\dfrac{10}{1 + j\dfrac{\omega}{10.000}}$; (b) 20 dB; (c) 10.000 rad/s.

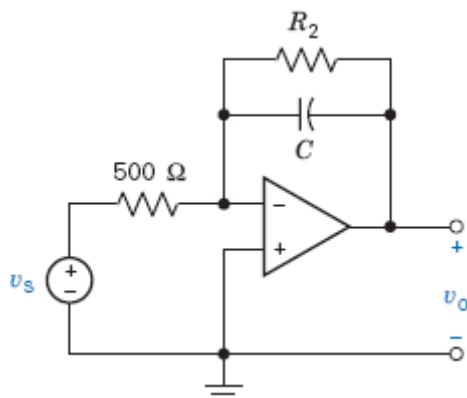



Figura P 13.3-18

P 13.3-19 Determine a função de transferência $\mathbf{H}(\omega)$ do circuito da Figura P 13.3-19 e plote o diagrama de Bode.

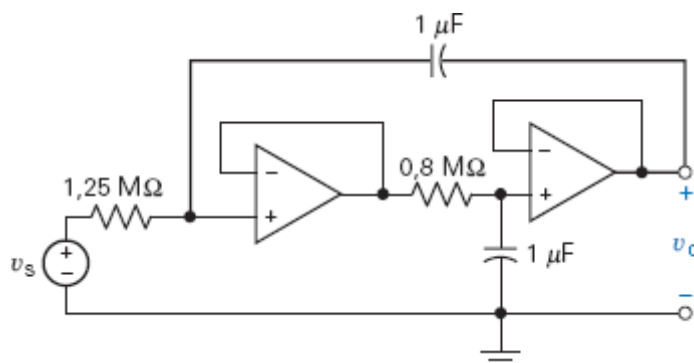



Figura P 13.3-19

P 13.3-20 A função de transferência de um circuito é

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{-3(5 + j\omega)}{j\omega(2 + j\omega)}$$

Plote o gráfico de Bode de amplitude assintótico correspondente a **H**.

P 13.3-21 A função de transferência de um circuito é

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{(j\omega)^3}{(4 + j2\omega)}$$

Plote o gráfico de Bode de amplitude assintótico correspondente a **H**.

P 13.3-22 A função de transferência de um circuito é

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{2(j2\omega + 5)}{(4 + j3\omega)(j\omega + 2)}$$

Plote o gráfico de Bode de amplitude assintótico correspondente a **H**.

P 13.3-23 A função de transferência de um circuito é

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{4(20 + j\omega)(20.000 + j\omega)}{(200 + j\omega)(2000 + j\omega)}$$

Plote o gráfico de Bode de amplitude assintótico correspondente a **H**.

P 13.3-24 A entrada do circuito da Figura P 13.3-24*a* é a tensão da fonte de tensão, v_s, e a saída é a tensão do capacitor, v_o. A função de transferência do circuito é

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_s(\omega)}$$

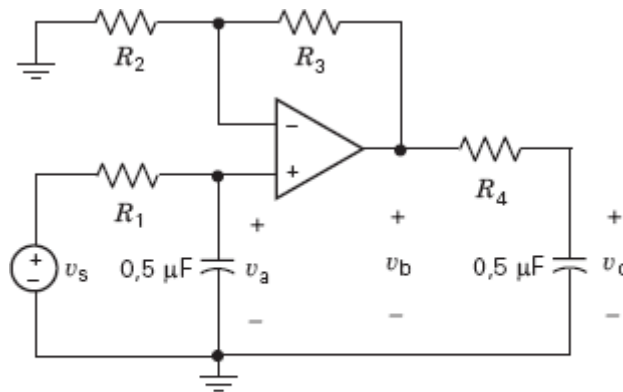
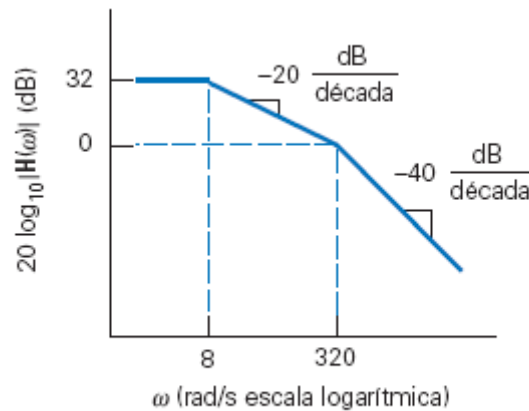
Determine o valor das resistências R_1, R_2, R_3 e R_4 para que a função de transferência corresponda ao gráfico de Bode assintótico da Figura P 13.3-24*b*.

(a)

(b)

Figura P 13.3-24

P 13.3-25 A entrada do circuito da Figura P 13.3-25*a* é a tensão da fonte de tensão, v_s, e a saída do circuito é a tensão v_o. A função de transferência do circuito é

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_s(\omega)}$$

Determine o valor das resistências R_1, R_2 e R_3 para que a função de transferência corresponda ao gráfico de Bode assintótico da Figura P 13.3-25*b*.

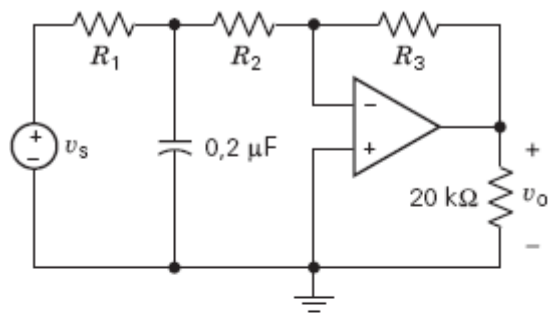
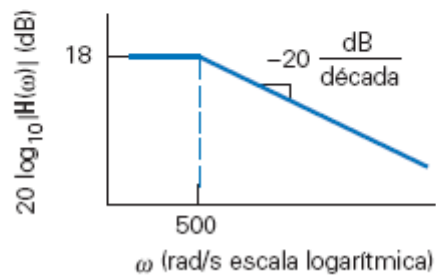



Figura P 13.3-25

P 13.3-26 A entrada do circuito da Figura P 13.3-26*a* é a tensão da fonte de tensão, v_s, e a saída é a tensão v_o. A função de transferência do circuito é

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_s(\omega)}$$

(a) Determine o valor das resistências R_1 e R_2 para que a função de transferência do circuito corresponda ao gráfico de Bode assintótico da Figura P 13.3-26*b*.

(b) Determine o valor dos ganhos K_1 e K_2 na Figura P13.3-26*b*.

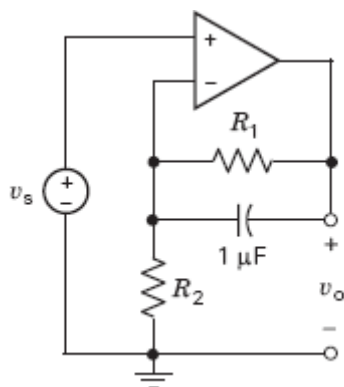
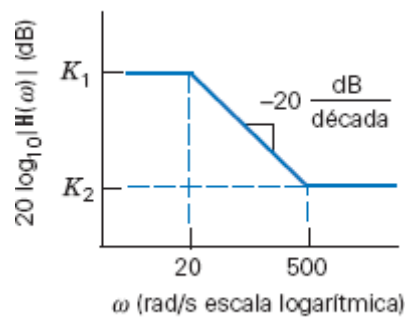



Figura P 13.3-26

P 13.3-27 A entrada do circuito da Figura P 13.3-27*a* é a tensão da fonte de tensão, v_s, e a saída é a tensão v_o. A função de transferência do circuito é

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_s(\omega)}$$

Determine o valor de R, C, R_1 e R_2 para que a função de transferência do circuito corresponda ao gráfico de Bode assintótico da Figura P 13.3-27*b*.

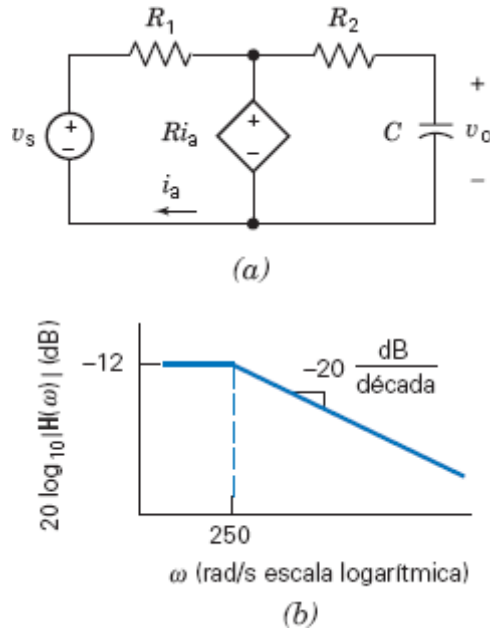



Figura P 13.3-27

P 13.3-28 A entrada do circuito da Figura P 13.3-28*a* é a corrente da fonte de corrente, i_s, e a saída é a corrente i_o. A função de transferência do circuito é

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{I}_o(\omega)}{\mathbf{I}_s(\omega)}$$

Determine o valor de G, C, R_1 e R_2 para que a função de transferência do circuito corresponda ao gráfico de Bode assintótico da Figura P 13.3-28*b*.

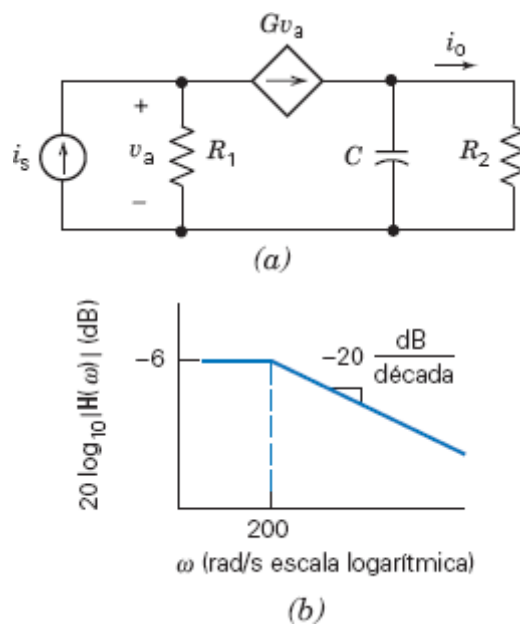



Figura P 13.3-28

P 13.3-29 A Figura P 13.3-29 mostra um circuito de primeira ordem. Determine a razão $\mathbf{V}_o/\mathbf{V}_s$ e plote o diagrama de Bode para $RC = 0{,}1$ e $R_1/R_2 = 3$.

Resposta: $\mathbf{H} = \left(1 + \dfrac{R_1}{R_2}\right)\dfrac{1}{1 + j\omega RC}$

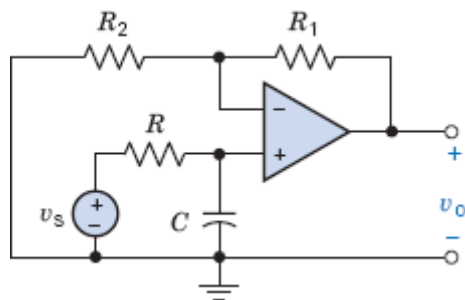



Figura P 13.3-29

P 13.3-30 (a) Plote o diagrama de Bode da função de transferência $\mathbf{V}_o/\mathbf{V}_s$ do circuito da Figura P 13.3-30. (b) Determine $v_o(t)$ para $v_s = 10 \cos 20t$ V.

Resposta: (b) $v_o = 4{,}18 \cos (20t - 24{,}3°)$ V.

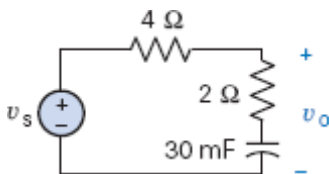



Figura P 13.3-30

P 13.3-31 Plote o diagrama de Bode de amplitude assintótico da função

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{10(1 + j\omega)}{j\omega(1 + j0{,}5\omega)(1 + j0{,}6(\omega/50) + (j\omega/50)^2)}$$

Sugestão: Para $\omega = 0{,}1$ rad/s, o ganho é 40 dB e a inclinação do gráfico de Bode assintótico é –20 dB/década. Existe um zero em 1 rad/s, um polo em 2 rad/s e um polo de segunda ordem em 50 rad/s. A inclinação do gráfico de Bode assintótico aumenta de 20 dB/década quando a frequência ultrapassa o zero, diminui de 20 dB/década quando a frequência ultrapassa o polo e, finalmente, diminui de 40 dB/década quando a frequência ultrapassa o polo de segunda ordem.

Seção 13.4 Circuitos Ressonantes

P 13.4-1 Para um circuito *RLC* paralelo com $R = 10$ kΩ,$L = 1/120$ H e $C = 1/30$ μF, determine ω_0, Q, ω_1, ω_2 e a banda passante *BP*.

Resposta: $\omega_0 = 60$ krad/s, $Q = 20$, $\omega_1 = 58{,}519$ krad/s, $\omega_2 = 61{,}519$ krad/s e $BP = 3$ krad/s

P 13.4-2 Um circuito *RLC* paralelo é alimentado por uma fonte de corrente $i_s = 20 \cos \omega t$ mA e apresenta uma resposta máxima de 8 V para $\omega = 1000$ rad/s e uma resposta de 4 V para $\omega = 897{,}6$ rad/s. Determine *R*, *L* e *C*.

Resposta: $R = 400$ Ω, $L = 50$ mH e C = 20 μF

P 13.4-3 Em um circuito *RLC* série, $L = 10$ mH, $C = 0{,}01$ μF e $R = 100$ Ω. Determine ω_0, Q e *BP*.

Resposta: $\omega_0 = 10^5$, $Q = 10$ e $BP = 10^4$.

P 13.4-4 Um cristal de quartzo apresenta a seguinte propriedade: quando uma tensão mecânica é aplicada a uma das faces, uma diferença de potencial aparece entre duas faces opostas. Quando uma tensão alternada é aplicada, ocorrem vibrações mecânicas e uma ressonância eletromecânica é observada. Um cristal de quartzo

pode ser representado por um circuito *RLC*. Um cristal de quartzo, em particular, pode ser representado por um modelo com $L = 1$ mH, $C = 10\ \mu$F e $R = 1\ \Omega$. Determine ω_0, Q e a banda passante para esse cristal de quartzo.

Resposta: $\omega_0 = 10^4$ rad/s, $Q = 10$ e BP $= 10^3$ rad/s

P 13.4-5 Projete um circuito *RLC* paralelo com $\omega_0 = 2500$ rad/s, $\mathbf{Z}(\omega_0) = 100\ \Omega$ e $BP = 500$ rad/s.

Resposta: $R = 100\ \Omega$, $L = 8$ mH e C $= 20\ \mu$F.

P 13.4-6 Projete um circuito *RLC* série com $\omega_0 = 2500$ rad/s, $\mathbf{Y}(\omega_0) = 1/100\ \Omega$ e $BP = 500$ rad/s.

Resposta: $R = 100\ \Omega$, $L = 0{,}3$ H e $C = 0{,}8\ \mu$F

P 13.4-7 O circuito da Figura P 13.4-7 representa um capacitor, um indutor e um resistor em paralelo. Calcule a frequência de ressonância, a banda passante e o Q do circuito.

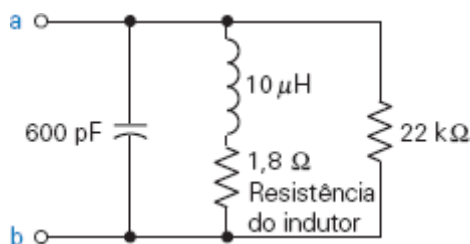



Figura P 13.4-7

P 13.4-8 Considere o modelo simples de sistema de distribuição de energia elétrica que aparece na Figura P 13.4-8. A indutância, $L = 0{,}25$ H, representa a linha de transmissão e o transformador. A carga do consumidor é $R_L = 100\ \Omega$ e o consumidor usa um capacitor $C = 25\ \mu$F para aumentar o módulo de $\mathbf{V}_o$. A fonte é $v_s = 1000 \cos 400t$ V e se deseja que $|\mathbf{V}_o|$ também seja 1000 V.

(a) Determine $|\mathbf{V}_o|$ para $R_L = 100\ \Omega$.

(b) Quando o consumidor encerra a jornada de trabalho, desliga boa parte da carga, fazendo R_L aumentar para 1 kΩ. Nesse instante, centelhas e fumaça começam a aparecer nos equipamentos que ainda estão ligados. O que está acontecendo?

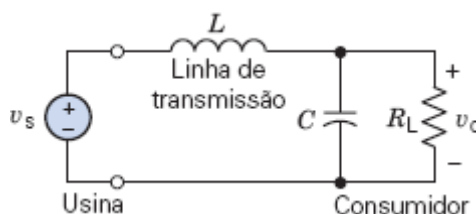



Figura P 13.4-8 Modelo de um sistema de distribuição de energia elétrica.

P 13.4-9 Considere o circuito da Figura P 13.4-9, em que $R_1 = R_2 = 1\ \Omega$. Escolha C e L para que a frequência de ressonância seja $\omega_0 = 100$ rad/s.

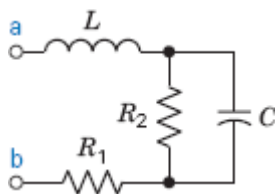



Figura P 13.4-9

P 13.4-10 Para o circuito da Figura P 13.4-10, (a) escreva uma expressão para o módulo da impedância de entrada, $|\mathbf{Z}_{in}|$, em função de ω; (b) plote $|\mathbf{Z}_{in}|$ em função de ω; (c) determine o valor de $|\mathbf{Z}_{in}|$ para $\omega = 1/1/\sqrt{LC}$.

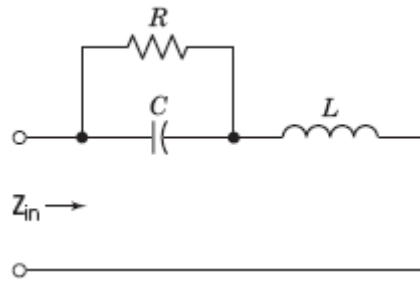



Figura P 13.4-10

P 13.4-11 O circuito da Figura P 13.4-11 mostra uma montagem experimental que pode ser usada para medir os parâmetros k, Q e ω_0 de um circuito RLC série. Esses parâmetros podem ser determinados a partir de um gráfico da resposta de frequência do módulo da admitância $\mathbf{Y} = \mathbf{I}/\mathbf{V}$. Como é mais conveniente medir tensões do que correntes, foram medidas as tensões de nó $\mathbf{V}$ e $\mathbf{V}_2$. Expresse $|\mathbf{Y}|$ em função de $\mathbf{V}$ e $\mathbf{V}_2$.

Sugestão: Faça $\mathbf{V} = A$ e $\mathbf{V}_2 = B\angle\theta$; nesse caso, $\mathbf{I} = \dfrac{(A - B\cos\theta) - jB\,\text{sen}\,\theta}{R}$

Resposta: $|\mathbf{Y}| = \dfrac{\sqrt{(A - B\cos\theta)^2 + (B\,\text{sen}\,\theta)^2}}{AR}$

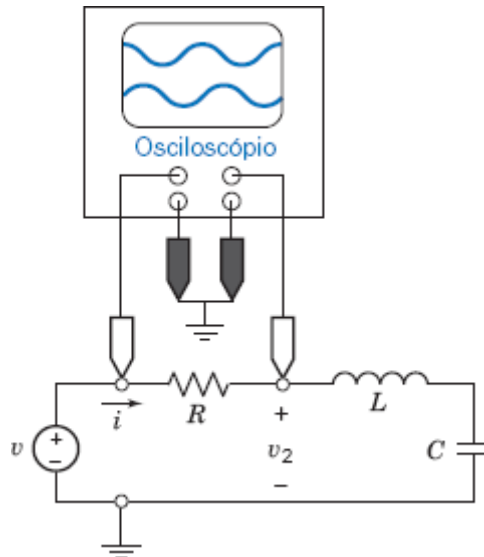



Figura P 13.4-11

Seção 13.6 Plotagem de Gráficos de Bode Usando o Programa MATLAB

P 13.6-1 A entrada do circuito da Figura P 13.6-1 é a tensão da fonte de tensão, v_s. A saída do circuito é a tensão v_o. Use o programa MATLAB para plotar o ganho e a fase do circuito em função da frequência para frequências no intervalo $1 < \omega < 1000$ rad/s.

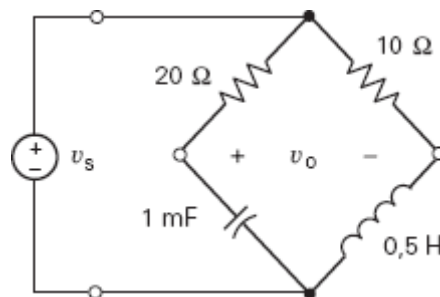



Figura P 13.6-1

P 13.6-2 A entrada do circuito da Figura P 13.6-2 é a tensão da fonte de tensão, v_s. A saída do circuito é a tensão v_o. Use o programa MATLAB para plotar o ganho e a fase do circuito em função da frequência para frequências no intervalo $1 < \omega < 1000$ rad/s.

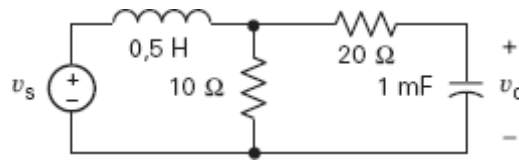



Figura P 13.6-2

P 13.6-3 A entrada do circuito da Figura P 13.6-3 é a tensão da fonte de tensão, v_s. A saída do circuito é a tensão v_o. Use o programa MATLAB para plotar o ganho e a fase do circuito em função da frequência para frequências no intervalo $1 < \omega < 1000$ rad/s.

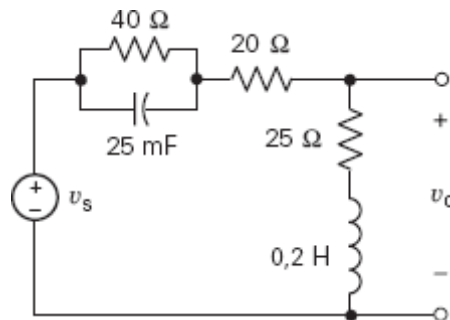



Figura P 13.6-3

Seção 13.8 Como Podemos Testar . . . ?

P 13.8-1 De acordo com um velho caderno de laboratório, a função de transferência de um circuito é

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{1 + j\dfrac{\omega}{630}}{10\left(1 + j\dfrac{\omega}{6300}\right)}$$

O livro também contém os dados de resposta de frequência mostrados a seguir, supostamente obtidos a partir de medidas realizadas no circuito. Os dados parecem razoáveis?

ω, rad/s	200	400	795	1585	3162
$\lvert\mathbf{H}(\omega)\rvert$	0,105	0,12	0,16	0,26	0,460
ω, rad/s	6310	12.600	25.100	50.000	100.000
$\lvert\mathbf{H}(\omega)\rvert$	0,71	1,0	1,0	1,0	1,0

P 13.8-2 Um circuito *RLC* paralelo (veja a Figura P 13.4-2) tem $Q = 70$ e uma frequência de ressonância $\omega_0 =$ 10.000 rad/s. De acordo com um relatório, a banda passante do circuito é 71,43 rad/s. Verifique se esse resultado é razoável.

P 13.8-3 Um circuito *RLC* série (veja a Figura P 13.4-4) tem $L = 1$ mH, $C = 10$ μF e $R = 0{,}5$ Ω. Uma análise do circuito em computador mostra que a frequência de ressonância é f_0 =1,59 kHz e que a banda passante é *BP* = 79,6 Hz. Esses resultados estão corretos?

P 13.8-4 Um relatório antigo mostra o gráfico de Bode aproximado da Figura P 13.8-4 e conclui que a função de transferência do circuito é

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{40\left(1 + j\dfrac{\omega}{200}\right)}{\left(1 + j\dfrac{\omega}{800}\right)}$$

Você concorda?

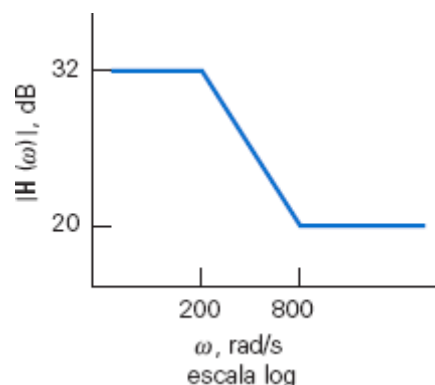



Figura P 13.8-4

Problemas com o PSpice

PS 13-1 A entrada do circuito da Figura PS 13-1 é a tensão da fonte de tensão, $v_i(t)$. A saída é a tensão $v_o(t)$ entre os terminais da associação em paralelo do capacitor com o resistor de 1 kΩ. A função de transferência do circuito é

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_i(\omega)} = \frac{k}{1 + j\dfrac{\omega}{p}}$$

Use o programa PSpice para plotar a resposta de frequência do circuito. Determine o valor do polo p e do ganho k.

Resposta: $p = 250$ rad/s e $k = 0{,}2$ V/V

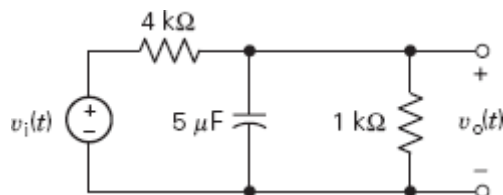



Figura PS 13-1

PS 13-2 A entrada do circuito da Figura PS 13-2 é a tensão da fonte de tensão, $v_i(t)$. A saída é a tensão $v_o(t)$ entre os terminais da associação em série do indutor e do resistor de 60 Ω. A função de transferência do circuito é

$$\mathbf{H}\ (\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_i(\omega)} = k\frac{1 + j\dfrac{\omega}{z}}{1 + j\dfrac{\omega}{p}}$$

Use o programa PSpice para plotar a resposta de frequência do circuito. Determine os valores do polo p, do zero z e de k, o ganho de CC.

Resposta: $p = 20$ rad/s, $z = 12$ rad/s e $k = 0{,}6$ V/V

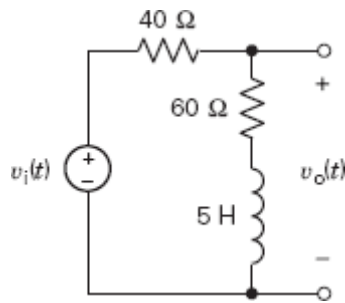



Figura PS 13-2

PS 13-3 A entrada do circuito da Figura PS 13-3 é a tensão da fonte de tensão, $v_i(t)$. A saída é a tensão $v_o(t)$ do resistor de30 kΩ. A função de transferência do circuito é

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_i(\omega)} = \frac{k}{1 + j\dfrac{\omega}{p}}$$

Use o programa PSpice para plotar a resposta de frequência do circuito. Determine os valores do polo p e de k, o ganho de CC.

Resposta: $p = 100$ rad/s e $k = 4$ V/V

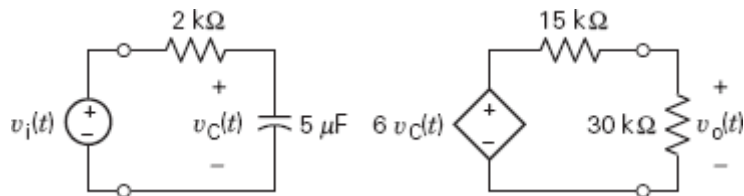



Figura PS 13-3

PS 13-4 A entrada do circuito da Figura PS 13-4 é a tensão da fonte de tensão, $v_i(t)$. A saída é a tensão $v_o(t)$ do resistor de 20 kΩ. A função de transferência do circuito é

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_i(\omega)} = \frac{k}{1 + j\dfrac{\omega}{p}}$$

Use o programa PSpice para plotar a resposta de frequência do circuito. Determine o valor do polo p e de k, o ganho de CC.

Resposta: $p = 10$ rad/s e $k = 5$ V/V

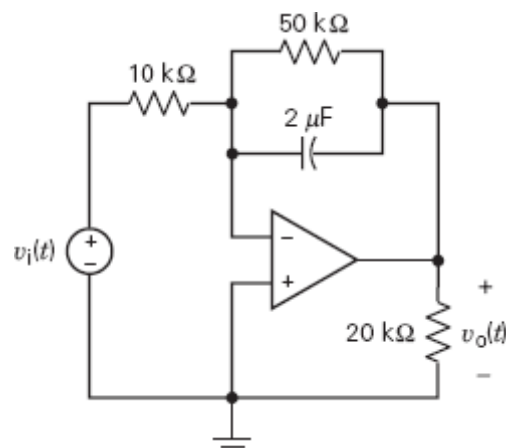



Figura PS 13-4

PS 13-5 A Figura PS 13-5 mostra um circuito e uma resposta de frequência. Os gráficos de resposta de frequência foram obtidos usando PSpice e Probe. V(R3:2) e Vp(R3:2) representam o módulo e o ângulo do fasor correspondente a $v_o(t)$. V(V1:+) e Vp(V1:+) representam o módulo e o ângulo do fasor correspondente a $v_i(t)$. Assim, V(R3:2)/ V(V1:+) é o ganho do circuito e Vp(R3:2) – Vp(V1:+) é o deslocamento de fase introduzido pelo circuito.

Determine o valor de R e C para que a resposta de frequência esteja de acordo com o circuito dado.

Sugestão: PSpice e Probe usam um ponto decimal em vez de vírgula e a letra m para indicar divisão por mil. Assim, as coordenadas (159.513, 892.827 m) indicam que o ganho do circuito é $892{,}827 \times 10^{-3} = 0{,}892827$ para a frequência de 159,513 Hz ≈ 1000 rad/s.

Resposta: $R = 5$ kΩ e $C = 0{,}2\ \mu$F

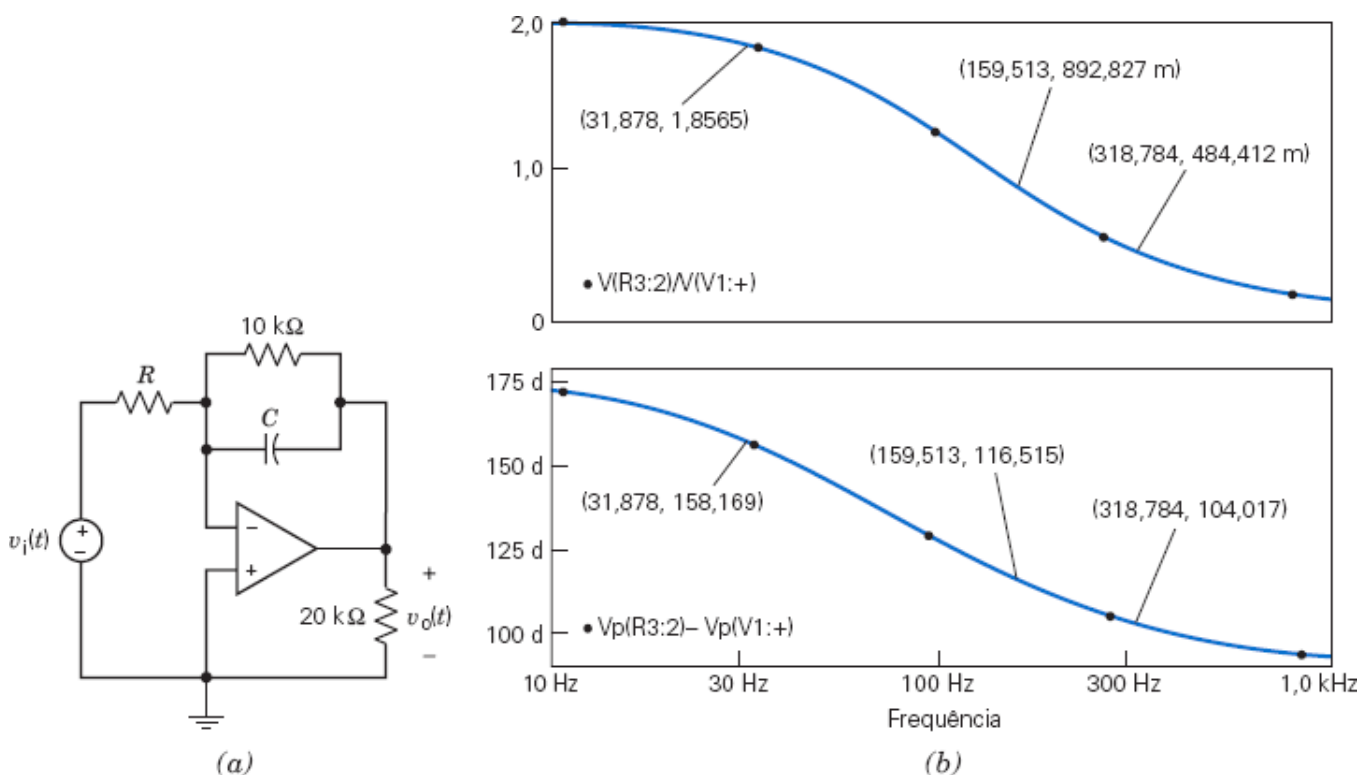



Figura PS 13-5 *(a)* Circuito do Problema PS 13-5; *(b)* resposta de frequência correspondente.

PS 13-6 A Figura PS 13-6 mostra um circuito e uma resposta de frequência. Os gráficos de resposta de frequência foram obtidos usando PSpice e Probe. V(R2:2) e Vp(R2:2) representam o módulo e o ângulo do fasor correspondente a $v_o(t)$. V(V1:+) e Vp(V1:+) representam o módulo e o ângulo do fasor correspondente a v_i(t). Assim, V(R2:2)/ V(V1:+) é o ganho do circuito e Vp(R2:2) – Vp(V1:+) é o deslocamento de fase introduzido pelo circuito.

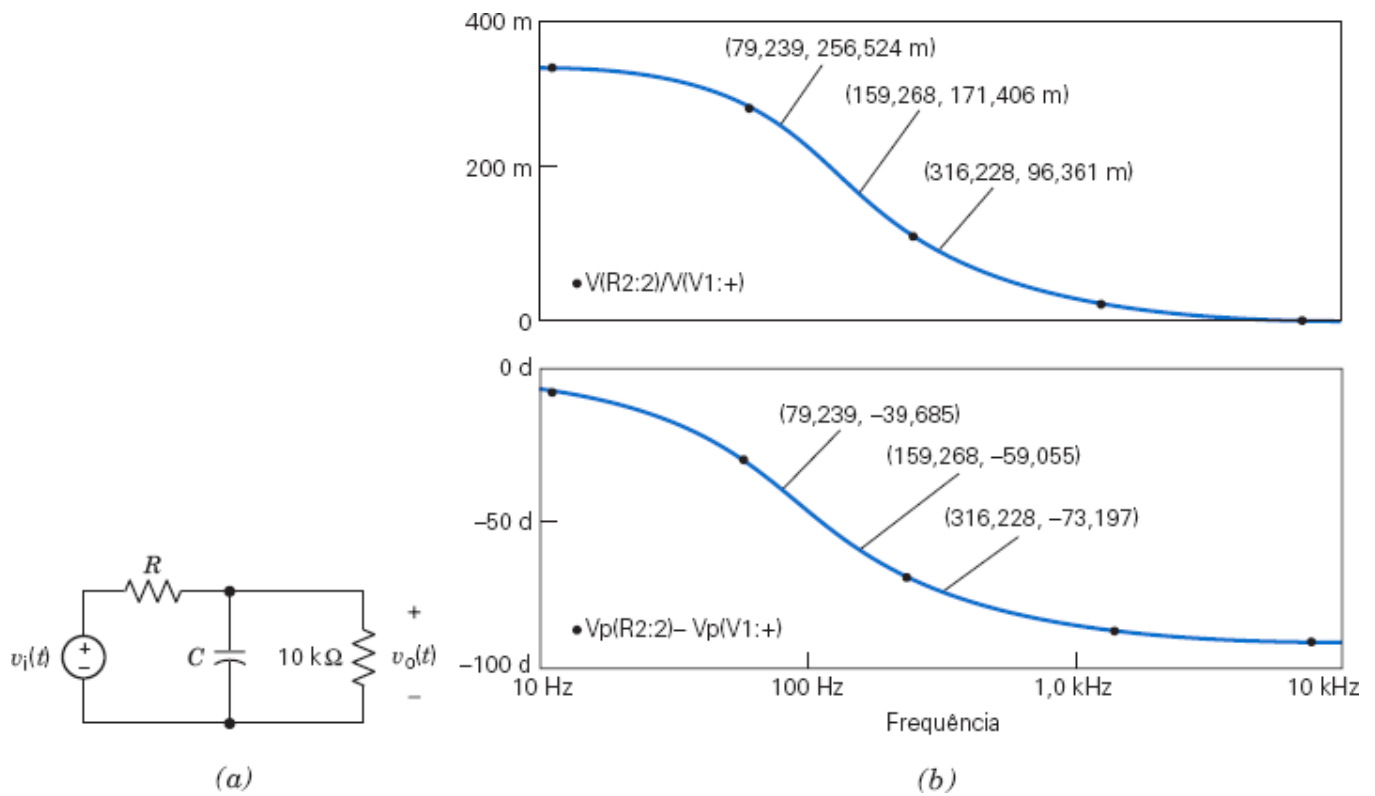



Figura PS 13-6 ***(a)*** Circuito do Problema PS 13-6; *(b)* resposta de frequência correspondente.

Determine o valor de R e C para que a resposta de frequência esteja de acordo com o circuito dado.

Sugestão: PSpice e Probe usam um ponto decimal em vez de vírgula e a letra m para indicar divisão por mil. Assim, as coordenadas (159.268, 171.408 m) indicam que o ganho do circuito é $171{,}408 \times 10^{-3} = 0{,}171408$ para a frequência de 159.268 Hz ≈ 1000 rad/s.

Resposta: $R = 20$ kΩ e $C = 0{,}25$ μF.

Problemas de Projeto

PP 13-1 Projete um circuito que apresente um ganho de baixa frequência de 2, um ganho de alta frequência de 5 e uma transição de $H = 2$ para $H = 5$ entre as frequências de 1 kHz e 10 kHz.

PP 13-2 Determine L e C no circuito da Figura PP 13-2 para que o circuito se comporte como um filtro passa-baixa com um ganho de –3 dB em 100 kHz.

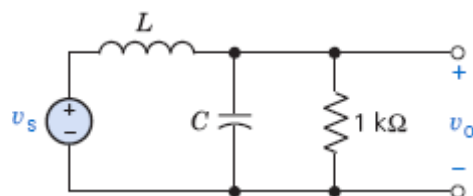



Figura PP 13-2

PP 13-3 A empresa ferroviária inglesa British Rail construiu um vagão instrumentado que pode ser puxado a uma velocidade de 180 km/h e é capaz de medir a inclinação dos trilhos. Usando o vagão, os engenheiros podem acompanhar a degradação da ferrovia, especialmente no que diz respeito à compensação das curvas, e programar serviços de manutenção preventiva antes que qualquer problema mais grave venha a ocorrer.

O vagão instrumentado dispõe de vários sensores, como sensores de velocidade angular (instrumentos que produzem um sinal proporcional à velocidade angular) e acelerômetros (instrumentos que produzem um sinal proporcional à aceleração), cujos sinais são filtrados e combinados de modo a criar um sensor misto conhecido como acelerômetro compensado (Lewis, 1988). Um dos componentes do sinal do sensor misto é obtido integrando o

sinal do acelerômetro e fazendo o sinal resultante passar por um filtro passa-alta. Um filtro passa-baixa de primeira ordem se comporta aproximadamente como um circuito integrador para frequências muito maiores que a frequência de canto, o que pode ser demonstrado calculando o deslocamento de fase da função do filtro para várias frequências. Em altas frequências, o deslocamento de fase tende a 90º, a fase característica de um circuito integrador.

Um possível circuito de filtro para o sinal do acelerômetro é o que aparece na Figura PP 13-3. O circuito possui três partes, que foram chamadas de A, B e C. Descreva o objetivo de cada parte e escreva a função de transferência correspondente. Em seguida, determine o ganho global do circuito, $\mathbf{V}_o/\mathbf{V}_s$. Para os valores dos componentes indicados na figura, calcule a amplitude e a fase da resposta do circuito nas frequências de 0,01; 0,02; 0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 2,0; 5,0 e 10,0 Hz. Plote o gráfico de Bode. Para que frequência o deslocamento de fase é aproximadamente 0º? Qual é o significado dessa frequência?

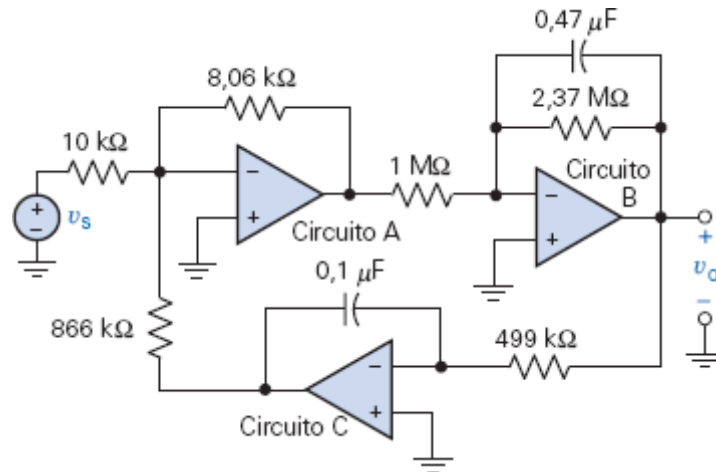



Figura PP 13-3

PP 13-4 Projete um circuito cuja função de transferência seja

$$\mathbf{H}(\omega) = 10\frac{j\omega}{\left(1 + j\frac{\omega}{200}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{500}\right)}$$

Sugestão: Use dois circuitos da Tabela 13.3-2 ligados em cascata, ou seja, com a saída de um dos circuitos ligada à entrada do outro. Nesse caso, $\mathbf{H}(\omega)$ será o produto das funções de transferência dos circuitos escolhidos.

PP 13-5 Instrumentos sensíveis a deformações podem ser usados para medir a orientação e o módulo de deformações do terreno. A busca de um meio de prever terremotos está concentrada na identificação de certas modificações no terreno que constituam uma indicação segura de que um terremoto está prestes a acontecer. Como poucos terremotos ocorreram nas proximidades de locais em que existem sensores de deformação, esta tem sido uma busca lenta e frustrante. Estudos realizados em laboratório mostram que antes que as rochas sofram fraturas, causando um terremoto, as deformações internas aumentam. Isso significa que as rochas começam a ceder antes de se partirem. A deformação que precede a fratura recebeu o nome de "fluência terciária" (Brown, 1989).

A frequência dos sinais de deformação varia de 0,1 a 100 rad/s. Um circuito chamado filtro passa-banda é usado para selecionar essa faixa de frequências. A função de transferência de um filtro passa-banda é

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{Kj\omega}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_2}\right)}$$

Especifique os valores de ω_1, ω_2 e K para que o filtro satisfaça as seguintes especificações:

1. Ganho de pelo menos 17 dB no intervalo de 0,1 a 100 rad/s.

2. Ganho menor que 17 dB na faixa de 0,1 a 100 rad/s.

3. Ganho máximo de 20 dB.

PP 13-6 É possível projetar o circuito da Figura PP 13-6 para que, na frequência de 1000 rad/s, o circuito tenha um ganho de 2 V/V e um deslocamento de fase de –45º? O capacitor C deve ter o valor de 0,1 μF e os resistores não podem ser menores que 1 kΩ nem maiores que 200 kΩ.

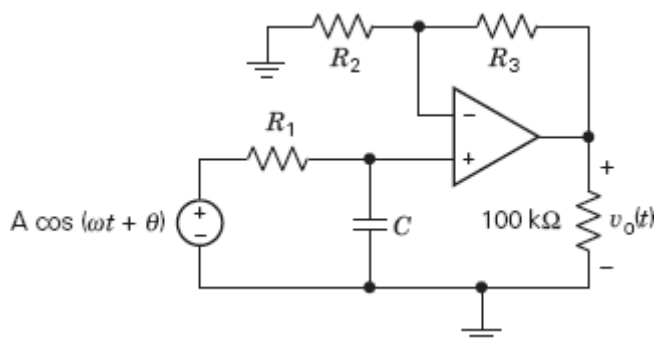



Figura PP 13-6

PP 13-7 Projete o circuito da Figura PP 13-7a para que a função de transferência do circuito corresponda ao gráfico de Bode assintótico da Figura PP 13-7b.

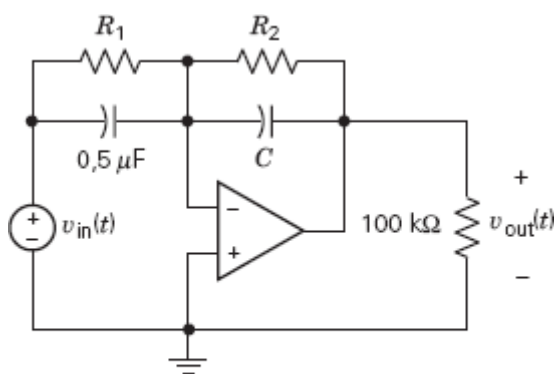
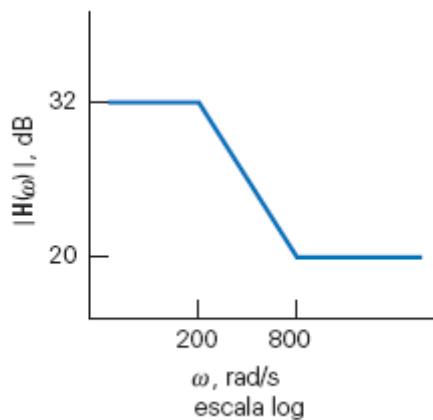



Figura PP 13-7

PP 13-8 No circuito da Figura PP 13-8, escolha R_1 e R_2 para que o ganho em altas frequências seja 10 V/V e o deslocamento de fase seja 195º para ω = 1000 rad/s. Determine o ganho para ω = 10 rad/s.

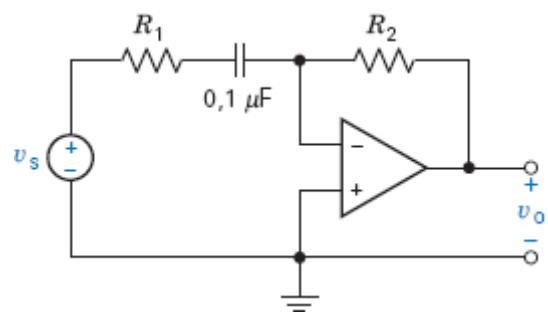



Figura PP 13-8

* Outra definição de função de transferência será apresentada no Capítulo 14. (N.T.)

CAPÍTULO 14 A Transformada de Laplace

NESTE CAPÍTULO

14.1 Introdução

- Nos Capítulos 1 a 6, discutimos os circuitos que não possuem capacitores e indutores. Aprendemos muita coisa a respeito desses circuitos, entre elas o fato de que podem ser representados por equações algébricas.
- Os capacitores e indutores foram discutidos no Capítulo 7.

Os circuitos que contêm capacitores e/ou indutores são representados por equações diferenciais cuja ordem é, no máximo, igual ao número de capacitores mais o número de indutores.

- No Capítulo 8, analisamos os circuitos de primeira ordem.
- No Capítulo 9, analisamos os circuitos de segunda ordem.

A resposta de um circuito que contém capacitores e/ou indutores pode ser separada em duas partes: a resposta transitória e a resposta estacionária.

- Nos Capítulos 10 a 13, estudamos a resposta estacionária de circuitos de qualquer ordem com entrada senoidal e vimos que é possível analisar esses circuitos representando-os no domínio da frequência.
- Neste capítulo, vamos determinar a resposta completa (a soma da resposta transitória com a resposta estacionária) de circuitos de qualquer ordem e com qualquer tipo de entrada.

Inicialmente, vamos discutir a transformada de Laplace, uma ferramenta matemática que transforma um sistema de equações diferenciais no domínio do tempo, como o que é usado para descrever um circuito, para o

domínio da frequência complexa, no qual o sistema se torna um sistema de equações algébricas lineares. Usando manipulações algébricas relativamente simples, é possível determinar o valor das variáveis de interesse e, por meio da transformada inversa de Laplace, voltar ao domínio do tempo e expressar as variáveis em função do tempo. Trata-se de uma ferramenta realmente poderosa!

A seguir, vamos aprender a representar o próprio circuito no domínio da frequência complexa. Depois de fazer isso, podemos analisar o circuito escrevendo e resolvendo um sistema de equações algébricas, como, por exemplo, equações de correntes de malha ou equações de tensões de nó. Em outras palavras, a representação do circuito no domínio da frequência complexa elimina a necessidade de escrever equações diferenciais.

Finalmente, vamos aprender a representar um circuito linear por uma função de transferência.

14.2 A Transformada de Laplace

Como vimos em capítulos anteriores, uma forma de facilitar a análise de circuitos complexos é *transformar* as equações que descrevem o circuito do domínio do tempo para o domínio da frequência, realizar a análise e transformar a solução de volta para o domínio do tempo. No Capítulo 10, definimos o fasor como uma transformação matemática usada para simplificar a solução da resposta estacionária do circuito a uma fonte senoidal. Usando a transformação fasorial, é possível converter um problema que envolve *equações diferenciais* em um problema que envolve apenas *equações algébricas*. O método da transformação está representado, de forma esquemática, na Figura 14.2-1.

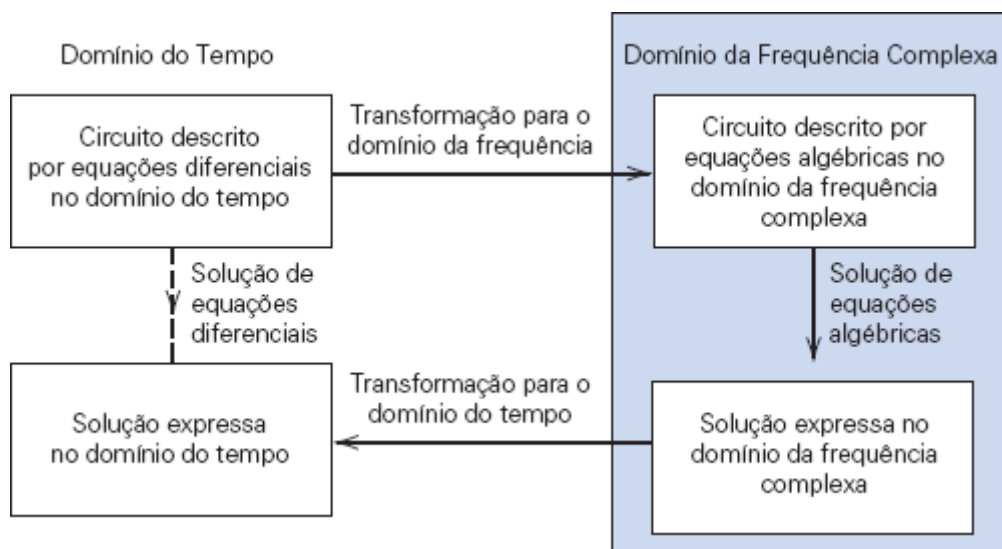



FIGURA 14.2-1 O método da transformação.

Neste capítulo, vamos usar a transformação de Laplace, em vez da transformação fasorial, para transformar equações diferenciais em equações algébricas. Isso nos permitirá determinar a resposta completa de um circuito a qualquer sinal de entrada em vez da resposta estacionária a sinais senoidais, único caso ao qual podia ser aplicada a transformação fasorial. (A resposta completa é a soma da resposta estacionária com a parte transitória da resposta. Teremos mais a dizer a respeito daqui a pouco.) Pierre-Simon Laplace, que aparece na Figura 14.2-2, foi o criador da transformação que recebeu o seu nome.

A transformada de Laplace (unilateral) é definida pela equação

$$F(s) = \mathscr{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \qquad (14.2\text{-}1)$$

em que s é uma variável complexa dada por

$$s = \sigma + j\omega \qquad (14.2\text{-}2)$$

Como o expoente st de e na Eq. 14.2-1 deve ser adimensional, a unidade do parâmetro s é a frequência; s é chamado de frequência complexa. O limite inferior da integral da Eq. 14.2-1 é 0^-, o instante imediatamente anterior a $t = 0$. Em consequência, a transformada de Laplace inclui o efeito de qualquer descontinuidade da função $f(t)$ que aconteça no instante $t = 0$. Por outro lado, a transformada de Laplace não leva em conta o comportamento da função para $t < 0$.

Foto de Universal History Archive/Getty Images

FIGURA 14.2-2 Pierre-Simon Laplace (1749–1827) foi o criador da transformada que recebeu o seu nome.

A notação $\mathcal{L}[f(t)]$ indica a operação usada para obter a transformada de Laplace de $f(t)$. O resultado, $F(s)$, é chamado de transformada de Laplace de $f(t)$. Dizemos que a função $f(t)$ pertence ao domínio do tempo, enquanto a função $F(s)$ pertence ao domínio da frequência complexa ou domínio s. (Às vezes, o domínio da frequência complexa é chamado informalmente de domínio da frequência.)

A transformada inversa de Laplace é definida pela equação

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} F(s)e^{st}ds \qquad (14.2\text{-}3)$$

A integral da Eq. 14.2-3 é uma integral de linha no plano complexo. O cálculo dessa integral requer o uso de ferramentas matemáticas sofisticadas e está fora do escopo deste livro. Em vez de calcular a integral, usamos o fato de que, conhecendo uma função e sua transformada, podemos usar esse fato para saber qual é a função cuja transformada é uma função dada. Em outras palavras, se sabemos que $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, também sabemos que $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$. Nesse caso, dizemos que $f(t)$ e $F(s)$ formam um par de transformadas de Laplace, o que é representado usando a notação

$$f(t) \leftrightarrow F(s) \qquad (14.2\text{-}4)$$

Lembrando que o comportamento de $f(t)$ para $t < 0$ não tem nenhum efeito sobre $F(s)$, vemos que $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ $f(t)$ apenas para $t > 0$. (Alguns matemáticos eliminam a incerteza a respeito do comportamento de $f(t)$ para $t < 0$ impondo a condição adicional de que $f(t) = 0$ para $t < 0$ para todas as transformadas inversas.)

EXEMPLO 14.2-1 Pares de Transformadas de Laplace

(a) Calcule a transformada de Laplace da função $f(t) = e^{-at}$, em que $a > 0$.

(b) Calcule a transformada de Laplace da função $g(t) = e^{-at}u(t)$, em que $a > 0$ e $u(t)$ é a função degrau unitário.

Solução

(a) De acordo com a Eq. 14.2-1, temos

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[e^{-at}] = \int_{0-}^{\infty} e^{-at}e^{-st}dt = \left.\frac{-e^{-(s+a)t}}{s+a}\right|_{0^-}^{\infty} = \frac{1}{s+a}$$

(b) Novamente de acordo com a Eq. 14.2-1, temos

$$G(s) = \mathscr{L}[g(t)] = \mathscr{L}[e^{-at}u(t)] = \int_{0-}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-st}dt = \int_{0-}^{\infty} e^{-at}e^{-st}dt = \frac{-e^{-(s+a)t}}{s+a}\bigg|_{0-}^{\infty} = \frac{1}{s+a}$$

Neste exemplo, $f(t) \neq g(t)$ para $t < 0$, mas $f(t) = g(t)$ para $t > 0$. Em consequência, $F(s) = G(s)$. A transformada inversa de Laplace de $F(s) = G(s)$ fornece apenas a função $f(t)$ para $t > 0$. Podemos resumir os resultados deste exemplo no seguinte par de transformadas de Laplace:

$$e^{-at} \text{ para } t > 0 \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{s+a}$$

Em que condições a integral da Eq. 14.2-1 converge para um valor finito? É possível demonstrar que a integral converge se

$$\int_{0-}^{\infty} |f(t)|\, e^{-\sigma_1 t}dt < \infty$$

para algum valor real e positivo de σ_1. Se o valor absoluto de $f(t)$ é $|f(t)| < e^{at}$ para qualquer valor positivo de t, a integral converge para $\sigma_1 > a$. A região de convergência é, portanto, dada por $\infty > \sigma_1 > a$ e a recebe o nome de abscissa de convergência absoluta. Funções do tempo $f(t)$ que são fisicamente possíveis sempre possuem uma transformada de Laplace.

A linearidade é uma propriedade importante da transformada de Laplace. Considere a função

$$f(t) = a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$$

em que a_1 e a_2 são constantes arbitrárias. De acordo com a Eq. 14.2-1, temos

$$\begin{aligned} F(s) = \mathscr{L}[f(t)] = \mathscr{L}[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] &= \int_{0-}^{\infty} (a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t))e^{-st}dt \\ &= a_1 \int_{0^-}^{\infty} f_1(t)e^{-st}dt + a_2 \int_{0^-}^{\infty} f_2(t)e^{-st}dt \\ &= a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s) \end{aligned}$$

em que $F_1(s)$ e $F_2(s)$ são as transformadas de Laplace das funções do tempo $f_1(t)$ e $f_2(t)$, respectivamente. Podemos resumir a linearidade das transformadas de Laplace na seguinte expressão:

$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \quad \leftrightarrow \quad a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s) \qquad (14.2\text{-}5)$$

EXEMPLO 14.2-2 Linearidade

Calcule a transformada de Laplace de sen ωt.

Solução

De acordo com a identidade de Euler,

$$\operatorname{sen} \omega t = \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right)$$

De acordo com o Exemplo 14.2-1, temos

$$e^{-at} \text{ para } t > 0 \leftrightarrow \frac{1}{s+a}$$

e, portanto,

$$e^{-j\omega t} \text{ para } t > 0 \leftrightarrow \frac{1}{s+j\omega}$$

e

$$e^{j\omega t} \text{ para } t > 0 \leftrightarrow \frac{1}{s-j\omega}$$

Usando a propriedade da linearidade, temos

$$\mathscr{L}[\text{sen } \omega t] = \frac{1}{2j}\mathscr{L}\left[e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right] = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-\omega t} - \frac{1}{s+\omega t}\right) = \frac{(s+j\omega)-(s-j\omega)}{2j(s-\omega)(s+j\omega)} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

Podemos resumir os resultados deste exemplo no seguinte par de transformadas de Laplace:

$$\text{sen } \omega t \text{ para } t > 0 \leftrightarrow \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

Vamos calcular a transformada da derivada primeira de $f(t)$. Temos:

$$\mathscr{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = \int_{0^-}^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st} dt$$

O valor da integral pode ser obtido usando o método da integração por partes, com $u = e^{-st}$ e $dv = \left(\frac{df}{dt}\right) dt = df$. Nesse caso, $du = -se^{-st}$ e $v = f$. O resultado é o seguinte:

$$\mathscr{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = s\int_0^{\infty} f e^{-st} dt + f e^{-st}\Big|_0^{\infty} = sF(s) - f(0^-)$$

A relação entre a derivação no domínio do tempo e no domínio da frequência complexa é, portanto,

$$\frac{df}{dt} \leftrightarrow sF(s) - f(0^-) \qquad (14.2\text{-}6)$$

Isso significa que a transformada da derivada de uma função é igual a s vezes a transformada da função menos o valor inicial da função.

EXEMPLO 14.2-3 Derivação no Domínio do Tempo

Calcule a transformada de Laplace de cos ωt.

Solução

O cosseno pode ser expresso em termos da derivada do seno:

$$\cos \omega t = \frac{1}{\omega}\frac{d}{dt}\text{sen } \omega t$$

Usando a propriedade da linearidade, temos

$$\mathscr{L}[\cos \omega t] = \frac{1}{\omega}\mathscr{L}\left[\frac{d}{dt}\operatorname{sen}\omega t\right]$$

De acordo com a Eq. 14.2-6,

$$\mathscr{L}\left[\frac{d}{dt}\operatorname{sen}\omega t\right] = s\,\mathscr{L}[\operatorname{sen}\omega t] - \operatorname{sen} 0 = s\,\mathscr{L}[\operatorname{sen}\omega t] - 0$$

De acordo com o Exemplo 14.2-2,

$$\mathscr{L}[\operatorname{sen}\omega t] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

Combinando esses resultados, obtemos

$$\mathscr{L}[\cos \omega t] = \frac{1}{\omega}(s)\frac{\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

Assim, usamos a definição de transformada de Laplace, dada pela Eq. 14.2-1, para obter tanto a transformada de Laplace de algumas funções como algumas propriedades da transformada de Laplace. A Tabela 14.2-1 mostra a transformada de Laplace de algumas funções importantes, enquanto a Tabela 14.2-2 mostra algumas propriedades importantes das transformadas de Laplace.

EXEMPLO 14.2-4 Transformadas de Laplace

Calcule a transformada de Laplace da função $5 - 5e^{-2t}(1+2t)$

Solução

Usando a propriedade da linearidade,

$$\mathcal{L}[5 - 5e^{-2t}(1+2t)] = 5\,\mathcal{L}[1] - 5\,\mathcal{L}[e^{-2t}(1+2t)]$$

Usando o deslocamento de frequência da Tabela 14.2-2 com $f(t) = 1 + 2t$, obtemos

$$\mathcal{L}[e^{-2t}(1+2t)] = \mathcal{L}[e^{-2t}f(t)] = F(s+2)$$

em que

$$F(s) = \mathscr{L}[f(t)] = \mathscr{L}[1+2t] = \mathscr{L}[1] + 2\,\mathscr{L}[t] = \frac{1}{s} + 2\left(\frac{1}{s^2}\right)$$

Além disso,

$$F(s+2) = F(s)\big|_{s \leftarrow s+2}$$

Tabela 14.2-1 Algumas Transformadas de Laplace

$f(t)$ para $t > 0$	$F(s) = \mathscr{L}[f(t)u(t)]$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{-at}t^n$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
$\text{sen}\,(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos\,(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$e^{-at}\,\text{sen}\,(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}\cos\,(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

Tabela 14.2-2 Algumas Propriedades das Transformadas de Laplace

PROPRIEDADE	$f(t),\ t > 0$	$F(s) = \mathscr{L}[f(t)u(t)]$
Linearidade	$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$
Escala de tempo	$f(at)$, em que $a > 0$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
Integração no tempo	$\int_0^t f(\tau)d\tau$	$\frac{1}{s}F(s)$
Derivação no tempo	$\frac{df(t)}{dt}$	$sF(s) - f(0^-)$
	$\frac{d^2f(t)}{dt^2}$	$s^2F(s) - \left(sf(0^-) + \frac{df(0^-)}{dt}\right)$
	$\frac{d^nf(t)}{dt^n}$	$s^nF(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k}\frac{d^{k-1}f(0^-)}{dt^{k-1}}$
Deslocamento no tempo	$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
Deslocamento na frequência	$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$
Convolução no tempo	$f_1(t)^*f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$	$F_1(s)F_2(s)$
Integração na frequência	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(\lambda)d\lambda$
Derivação na frequência	$tf(t)$	$-\frac{dF(s)}{ds}$
Valor inicial	$f(0^+)$	$\lim_{s\to\infty} sF(s)$
Valor final	$f(\infty)$	$\lim_{s\to 0} sF(s)$

ou seja, devemos substituir s na função $F(s)$ por $s+2$ para obter $F(s+2)$:

$$F(s+2) = \left(\frac{1}{s} + 2\left(\frac{1}{s^2}\right)\right)\Bigg|_{s \leftarrow s+2} = \frac{1}{s+2} + 2\left(\frac{1}{(s+2)^2}\right) = \frac{s+2+2(1)}{(s+2)^2} + \frac{s+4}{s^2+4s+4}$$

Combinando todos esses resultados, obtemos

$$\mathscr{L}\left[5 - 5e^{-2t}(1+2t)\right] = 5\left(\frac{1}{s}\right) - 5\left(\frac{s+4}{s^2+4s+4}\right) = \frac{5(s^2+4s+4) - 5s(s+4)}{s(s^2+4s+4)} = \frac{20}{s(s^2+4s+4)}$$

Exemplo 14.2-5 Transformadas de Laplace

Calcule a transformada de Laplace da função $10\,e^{-4t}\cos(20t + 36{,}9°)$

Solução

A Tabela 14.2-1 mostra a transformada de $\cos(\omega t)$, mas não mostra a transformada de $\cos(\omega t + \theta)$. Entretanto, podemos usar a identidade trigonométrica

$$A\cos(\omega t + \theta) = (A\cos\theta)\cos(\omega t) - (A\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\mathrm{sen}(\omega t)$$

para escrever

$$10\cos(20t + 36{,}9°) = 8\cos(20t) - 6\,\mathrm{sen}(20t)$$

Usando a propriedade da linearidade, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[10e^{-4t}\cos(20t + 36{,}9°)\right] &= \mathcal{L}\left[e^{-4t}(8\cos(20t) - 6\,\mathrm{sen}(20t))\right] \\ &= 8\,\mathcal{L}\left[e^{-4t}\cos(20t)\right] - 6\,\mathcal{L}\left[e^{-4t}\,\mathrm{sen}(20t)\right]\end{aligned}$$

Usando o deslocamento de frequência da Tabela 14.2-2 com $f(t) = \cos(20t)$, obtemos

$$\mathcal{L}\left[e^{-4t}\cos(20t)\right] = \mathcal{L}\left[e^{-4t}f(t)\right] = F(s+4)$$

em que

$$F(s) = \mathscr{L}[f(t)] = \mathscr{L}[\cos(20t)] = \frac{s}{s^2+20^2} = \frac{s}{s^2+400}$$

Além disso,

$$F(s+4) = F(s)|_{s \leftarrow s+4}$$

ou seja, devemos substituir s na função $F(s)$ por $s + 4$ para obter $F(s+4)$:

$$\mathscr{L}\left[e^{-4t}\cos(20t)\right] = F(s+4) = \frac{s}{s^2+400}\bigg|_{s \leftarrow s+4} = \frac{s+4}{(s+4)^2+400} = \frac{s+4}{s^2+8s+416}$$

Analogamente,

$$\mathscr{L}\left[e^{-4t}\,\mathrm{sen}(20t)\right] = \frac{20}{s^2+400}\bigg|_{s \leftarrow s+4} = \frac{20}{(s+4)^2+400} = \frac{20}{s^2+8s+416}$$

Combinando todos esses resultados, obtemos

$$\mathscr{L}\left[10e^{-4t}\cos(20t + 36{,}9°)\right] = 8\left(\frac{s+4}{s^2+8s+416}\right) - 6\left(\frac{20}{s^2+8s+416}\right) = \frac{8s-88}{s^2+8s+416}$$

EXEMPLO 14.2-6 Transformadas de Laplace

Calcule a transformada de Laplace da função $2\delta(t) + 3 + 4u(t)$.

Solução

Usando a propriedade da linearidade, temos

$$\mathcal{L}[2\delta(t) + 3 + 4u(t)] = 2\mathcal{L}[\delta(t)] + 3\mathcal{L}[1] + 4\mathcal{L}[u(t)]$$

Como $1 = u(t)$ para $t \geq 0$, $\mathcal{L}[1] = \mathcal{L}[u(t)]$. De acordo com a Tabela 14.2-1, temos

$$\mathscr{L}[2\delta(t) + 3 + 4u(t)] = 2\mathscr{L}[\delta(t)] + 3\mathscr{L}[1] + 4\mathscr{L}[u(t)] = 2(1) + 3\left(\frac{1}{s}\right) + 4\left(\frac{1}{s}\right) = 2 + \frac{7}{s}$$

14.3 Transformadas de Laplace de Pulsos e Impulsos

A função degrau,* mostrada na Figura 14.3-1*a*, cuja representação matemática é

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \tag{14.3-1}$$

sofre uma transição abrupta de 0 para 1 no instante $t = 0$. A função impulso, $\delta(t)$, é definida como

$$\delta(t) = \frac{d}{dt}u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ indefinida & t = 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases} \tag{14.3-2}$$

Como a função $\delta(t)$ não é definida no instante $t = 0$, vamos trabalhar provisoriamente com a função $u_\varepsilon(t)$ da Figura 14.3-1*b*, cuja transição de 0 para 1 acontece em um intervalo de tempo finito, de $t = 0$ a $t = \varepsilon$. Note que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(t) = u(t)$$

Vamos definir

$$\delta_\varepsilon(t) = \frac{d}{dt}u_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \dfrac{1}{\varepsilon} & 0 < t < \varepsilon \\ 0 & t > \varepsilon \end{cases}$$

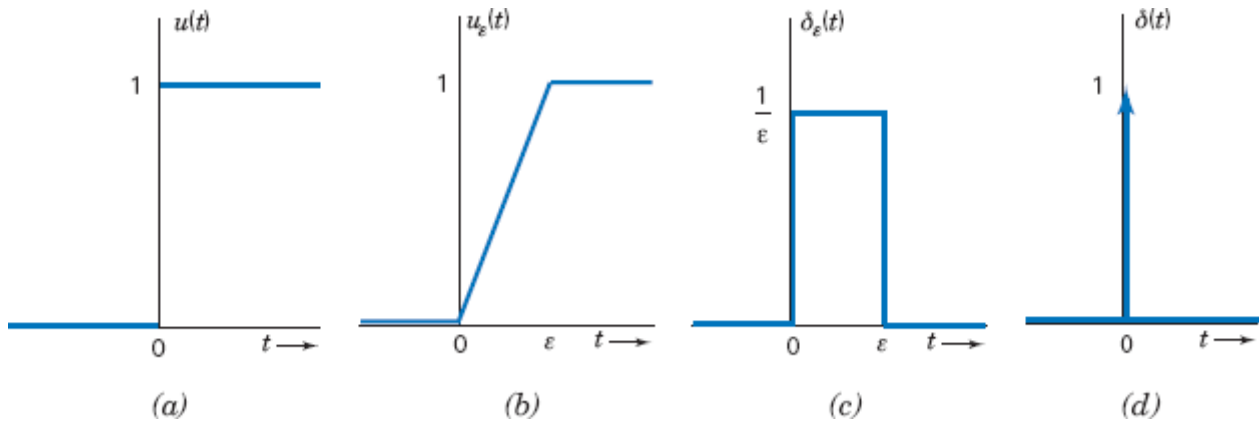



FIGURA 14.3-1 (*a*) Função degrau. (*b*) Aproximação da função degrau. (*c*) Função pulso. (*d*) Função impulso.

Vemos que $\delta_\varepsilon(t)$ é a função pulso mostrada na Figura 14.3-1*c*. Seja qual for o valor de e, a área sob o pulso é dada por

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(t)dt = \int_0^\varepsilon \frac{1}{\varepsilon}dt = 1$$

Vamos definir

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(t)$$

Essa definição de $\delta(t)$ é compatível com a definição da Eq. 14.3-2. Vemos que $\delta(t)$ é um pulso de amplitude infinita, duração infinitesimal e área unitária. Como não é possível desenhar um pulso com essas características, $\delta(t)$ é representado por uma seta vertical, como na Figura 14.3-1*d*, cuja altura é igual à área da função impulso. (A função impulso também é conhecida como *função delta* e sua área também é chamada de *intensidade* do impulso.)

Uma propriedade importante da função impulso é que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0) \qquad (14.3\text{-}3)$$

Fazendo $f(t) = 1$, obtemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

o que mostra mais uma vez que a área sob a função impulso é 1.* Além disso, a Eq. 14.3-3 pode ser usada para determinar a transformada de Laplace da função impulso:

$$\mathscr{L}[\delta(t)] = \int_{0-}^{\infty} e^{-st}\delta(t)dt = e^0 = 1$$

Vamos agora discutir algumas técnicas que podem ser úteis para determinar a transformada de Laplace de pulsos de largura finita.

Podemos retardar uma função do tempo *f*(*t*) substituindo a variável *t* por *t* − *τ*, em que *τ* é o tempo de retardo.

Considere a função do tempo

$$f(t) = mt + b$$

cujo gráfico é mostrado na Figura 14.3-2*a*. Suponha que haja interesse em retardar (atrasar) a função $f(t)$ para que todos os pontos ocorram τ segundos mais tarde. Isso pode ser conseguido substituindo t por $t - \tau$, o que nos dá

$$f(t - \tau) = m(t - \tau) + b = mt + (b - m\tau)$$

representada graficamente na Figura 14.3-2*b*.

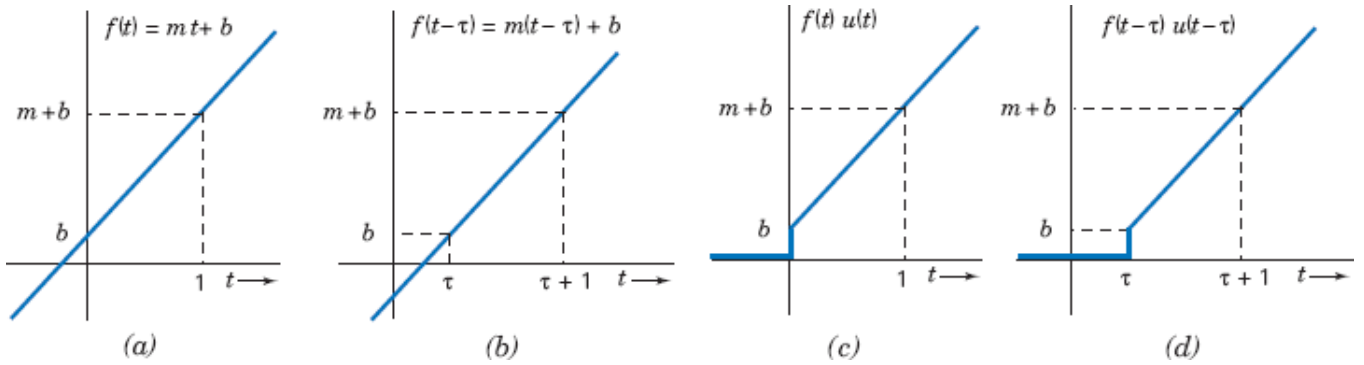



FIGURA 14.3-2 (*a*) Função $f(t)$. (*b*) Cópia retardada da função $f(t)$. (*c*) Uma nova função obtida multiplicando $f(t)$ por uma função degrau. (*d*) Cópia retardada da nova função.

Considere agora a função

$$g(t) = f(t)u(t) = mt + b)u(t)$$

Essa função, cujo gráfico aparece na Figura 14.3-2*c*, é igual a $f(t)$ para $t > 0$, mas é nula para $t < 0$. Suponha que haja interesse em retardar a função $g(t)$ para que todos os pontos ocorram τ segundos mais tarde. Isso pode ser conseguido substituindo t por $t - \tau$, o que nos dá

$$g(t - \tau) = m(t - \tau) + b)u(t - \tau)$$

Essa função, cujo gráfico aparece na Figura 14.3-2*d*, é realmente uma cópia retardada de $g(t)$. Note que $f(t - \tau)u(t - \tau)$ é diferente de $f(t - \tau)u(t)$ e de $f(t)u(t - \tau)$.

A Figura 14.3-3 mostra como essas técnicas podem ser usadas para representar pulsos de largura finita. Nosso ponto de partida é a função $f(t) = 1{,}5t$, uma linha reta que passa pela origem na Figura 14.3-3*a*. Multiplicando $f(t)$ por uma função degrau, obtemos uma função que é nula para $t < 0$ e igual a $f(t)$ para $t > 0$. A Figura 14.3-3*b* mostra o gráfico da função $f(t)u(t)$, juntamente com uma cópia da função retardada de 10 segundos, $f(t - 10)u(t - 10)$. Subtraindo a cópia retardada da função original, obtemos a função

$$g(t) = f(t)\,u(t) - f(t - 10)\,u(t - 10) = 1{,}5\,t\,u(t) - 1{,}5(t - 10)\,u(t - 10) \qquad (14.3\text{-}4)$$

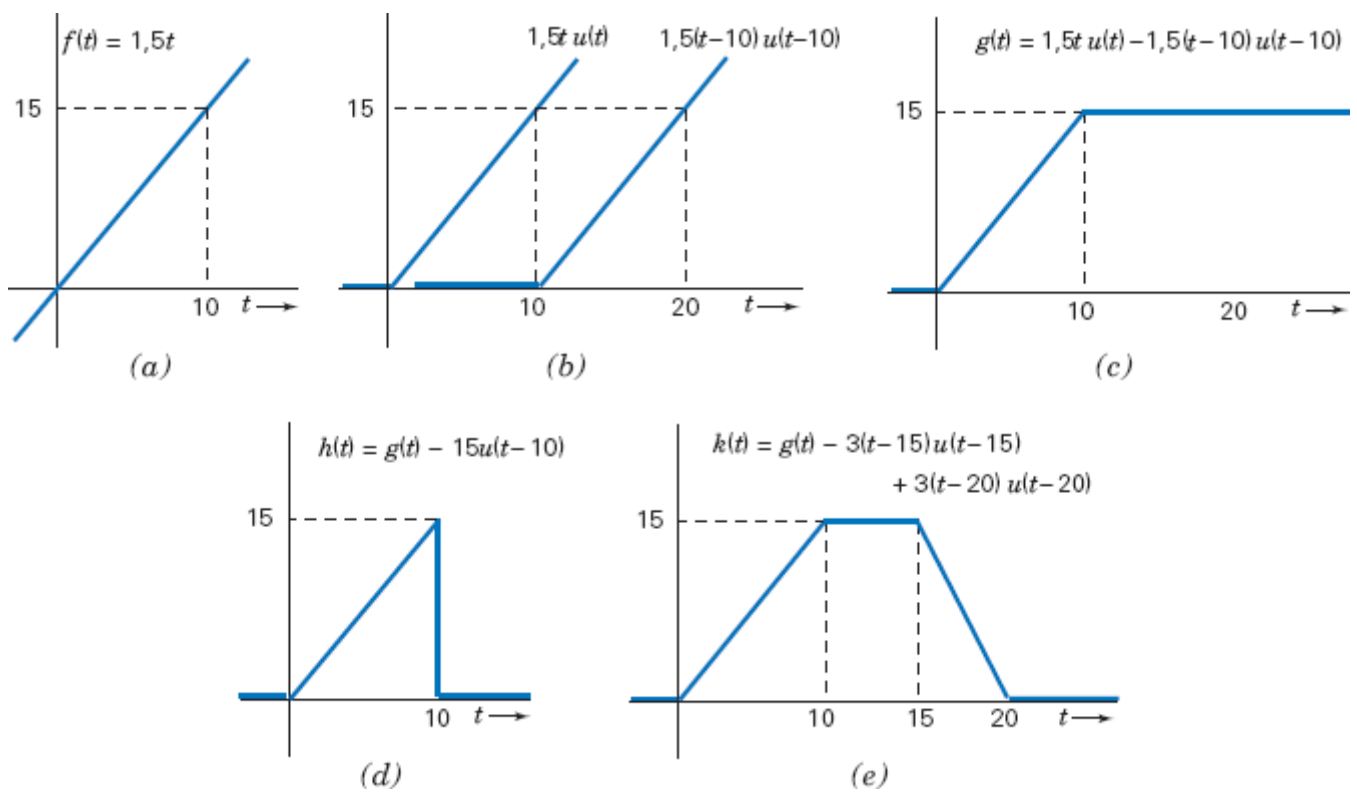



FIGURA 14.3-3 (*a*) Função rampa. (*b*) Função rampa começando em $t = 0$ e uma cópia retardada da mesma função. (*c*) Uma nova função obtida subtraindo a função retardada da função original. (*d*) Um pulso triangular. (*e*) Um pulso trapezoidal.

cujo gráfico aparece na Figura 14.3-3*c*. Subtraindo uma função degrau ampliada e retardada, obtemos o pulso triangular da Figura 14.3-3*d*:

$$h(t) = g(t) - 15\,u(t-10) = 1{,}5\,t\,u(t) - 1{,}5(t-10)u(t-10) - 15u(t-10) \qquad (14.3\text{-}5)$$

Como mostra a Figura 14.3-3*e*, um pulso trapezoidal pode ser obtido a partir de $g(t)$ somando e subtraindo cópias ampliadas e retardadas de $tu(t)$:

$$k(t) = g(t) - 3{,}0(t-15)\,u(t-15) + 3{,}0(t-20)\,u(t-20) \qquad (14.3\text{-}6)$$

(Subtraindo $3{,}0(t-15)u(t-15)$, fazemos com que $k(t)$ comece a diminuir em $t = 15$ s. Somando $3{,}0(t-20)\,u(t-20)$, fazemos com que $k(t)$ pare de diminuir em $t = 20$ s.)

Para obter a transformada de Laplace de uma função deslocada no tempo como $f(t-\tau)u(t-\tau)$, usamos a definição de função degrau e a definição de transformada de Laplace para escrever

$$\mathscr{L}\,[f(t-\tau)u(t-\tau)] = \int_0^\infty f(t-\tau)u(t-\tau)e^{-st}dt = \int_t^\infty f(t-\tau)e^{-st}dt$$

Fazendo $t - \tau = x$, obtemos

$$\mathscr{L}\,[f(t-\tau)u(t-\tau)] = \int_0^\infty f(x)e^{-s(\tau+x)}dx = e^{-s\tau}\int_\tau^\infty f(x)e^{-sx}dx = e^{-s\tau}F(s)$$

Podemos resumir esse resultado na seguinte expressão:

$$f(t-\tau)u(t-\tau) \leftrightarrow e^{-s\tau}F(s) \qquad (14.3\text{-}7)$$

EXEMPLO 14.3-1 Transformada de Laplace de Pulsos

Calcule a transformada de Laplace das funções $g(t)$, $h(t)$ e $k(t)$ da Figura 14.3-3.

Solução

Uma vez conhecidas as funções dadas pelas Eqs. 14.3-4, 14.3-5 e 14.3-6, as transformadas pedidas podem ser obtidas facilmente usando a Eq. 14.3-7:

$$\begin{aligned}G(s) = \mathscr{L}[g(t)] &= \mathscr{L}[1{,}5t\,u(t)] - \mathscr{L}[1{,}5(t-10)\,u(t-10)] \\ &= 1{,}5\left(\frac{1}{s^2}\right) - e^{-10s}\left(1{,}5\left(\frac{1}{s^2}\right)\right) = \frac{1{,}5(1-e^{-10s})}{s^2}\end{aligned}$$

$$H(s) = \mathscr{L}[h(t)] = \mathscr{L}[g(t)] - \mathscr{L}[15\,u(t-10)] = \frac{1{,}5(1-e^{-10s})}{s^2} - e^{-10s}\left(\frac{15}{s}\right)$$

$$\begin{aligned}K(s) &= \mathscr{L}[k(t)] = \mathscr{L}[g(t)] - \mathscr{L}[3{,}0(t-15)\,u(t-15)] + \mathscr{L}[3{,}0(t-20)\,u(t-20)] \\ &= \frac{1{,}5(1-e^{-10s})}{s^2} - e^{-15s}\left(\frac{3{,}0}{s^2}\right) + e^{-20s}\left(\frac{3{,}0}{s^2}\right) = \frac{1{,}5(1-e^{-10s}-2e^{-15s}+2e^{-20s})}{s^2}\end{aligned}$$

14.4 A Transformada Inversa de Laplace

Na análise de circuitos, muitas vezes precisamos determinar a transformada inversa de Laplace de uma função da forma

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \qquad (14.4\text{-}1)$$

em que $N(s)$ e $D(s)$ são dois polinômios em s cujos coeficientes são números reais. Uma função como $F(s)$ é chamada de função racional porque é a razão de dois polinômios. Em geral, $n > m$, caso em que $F(s)$ recebe o nome de fração racional própria.

As raízes de $D(s)$, o polinômio do denominador, são chamadas de polos da função $F(s)$. Fatorando $D(s)$, obtemos

$$D(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = (s - p_1)(s\ p_2)\ \ldots\ (s\ p_n)$$

Os polos, p_i, podem ser reais ou complexos. Os polos complexos são pares de complexos conjugados, ou seja, se $p_1 = a + jb$ é um polo de $F(s)$, existe também um polo $p_i = p_1^* = a - jb$.

Dizemos que um polo p_i de $F(s)$ é um polo simples se nenhum dos outros polos de $F(s)$ é igual a p_i. Se pelo menos um dos outros polos de $F(s)$ é igual a p_i, dizemos que p_i é um polo múltiplo (duplo, triplo, etc., dependendo do número de polos iguais).

As raízes de $N(s)$, o polinômio do numerador, são chamadas de zeros da função $F(s)$.

O método usado para determinar a transformada inversa de Laplace de uma função racional própria $F(s)$ envolve três etapas. Em primeiro lugar, executamos uma expansão em frações parciais para expressar $F(s)$ como a soma de funções mais simples, $F_i(s)$:

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) + \ldots + F_i(s) + \ldots + F_n(s)$$

Em seguida, usamos as transformadas da Tabela 14.2-1 e as propriedades da Tabela 14.2-2 para determinar as transformadas inversas de Laplace inversas de todas as funções $F_i(s)$. Finalmente, usando a propriedade da linearidade, somamos as transformadas inversas das funções $F_i(s)$ para obter a transformada inversa de Laplace de $F(s)$.

Se todos os polos da uma função racional própria $F(s)$ são polos simples, a expansão de $F(s)$ em frações parciais é

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$
$$= \frac{R_1}{s-p_1} + \frac{R_2}{s-p_2} + \cdots + \frac{R_i}{s-p_i} + \cdots + \frac{R_n}{s-p_n} \quad (14.4\text{-}2)$$

em que coeficientes R_i são conhecidos como resíduos e p_i são os polos de $F(s)$. Os resíduos associados a polos reais são números reais; os resíduos associados a polos complexos conjugados são complexos conjugados. Os valores dos resíduos de polos simples são dados pela seguinte expressão:

$$R_i = (s - p_i)F(s)|_{s=p_i} \quad (14.4\text{-}3)$$

EXEMPLO 14.4-1 Transformada Inversa de Laplace: Polos Simples Reais

Determine a transformada inversa da função $F(s) = \frac{s+3}{s^2+7s+10}$.

Solução

Como a função dada é uma função racional própria, fatoramos o denominador e executamos uma expansão em frações parciais. O resultado é o seguinte:

$$F(s) = \frac{s+3}{s^2+7s+10} = \frac{s+3}{(s+2)(s+5)} = \frac{R_1}{s+2} + \frac{R_2}{s+5}$$

em que

$$R_2 = (s+5)\left(\frac{s+3}{(s+2)(s+5)}\right)\bigg|_{s=-5} = \frac{s+3}{s+2}\bigg|_{s=-5} = \frac{-5+3}{-5+2} = \frac{2}{3}$$

e

$$R_2 = (s+5)\left(\frac{s+3}{(s+2)(s+5)}\right)\bigg|_{s=-5} = \frac{s+3}{s+2}\bigg|_{s=-5} = \frac{-5+3}{-5+2} = \frac{2}{3}$$

Assim,

$$F(s) = \frac{\frac{1}{3}}{s+2} + \frac{\frac{2}{3}}{s+5}$$

Determinando a transformada inversa de cada termo e usando a propriedade da linearidade, obtemos

$$F(t) = \mathscr{L}^{-1}[F(s)] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\frac{1}{3}}{s+2} + \frac{\frac{2}{3}}{s+5}\right] = \frac{1}{3}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] + \frac{2}{3}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+5}\right] = \frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{-5t} \text{ para } t \geq 0$$

Suponha agora que $F(s)$ possua um par de raízes simples que sejam complexos conjugados, $p_1 = -a + jb$ e $p_2 = -a - jb$. Os resíduos correspondentes na expansão em frações parciais são também complexos conjugados, $R_1 = c + jd$ e $R_2 = c - jd$. A expansão em frações parciais de $F(s)$ é

$$F(s) = \frac{R_1}{s-p_1} + \frac{R_2}{s-p_2} + F_3(s) = \frac{c+jd}{s-(-a+jb)} + \frac{c-jd}{s-(-a-jb)} + F_3(s) \qquad (14.4\text{-}4)$$

em que $F_3(s)$ é a soma dos termos da expansão em frações parciais associados aos outros polos de $F(s)$. Reduzindo os dois primeiros termos ao denominador comum e somando, obtemos

$$\begin{aligned}
F(s) &= \frac{c+jd}{s+a-jb} + \frac{c-jd}{s+a+jb} + F_3(s) \\
&= \frac{(c+jd)(s+a-jb)+(c-jd)(s+a-jb)}{(s+a-jb)(s+a+jb)} + F_3(s) \\
&= \frac{2cs + 2(ac-bd)}{s^2+2as+a^2+b^2} + F_3(s) \\
&= \frac{2c(s+a) - 2bd}{(s+a)^2+b^2} + F_3(s) \\
&= 2c\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2} - 2d\frac{b}{(s+a)^2+b^2} + F_3(s)
\end{aligned}$$

Note que a expansão de $F(s)$ em frações parciais pode ser expressa na forma

$$F(s) = \frac{K_1 s + K_2}{s^2+2as+a^2+b^2} + F_3(s) \qquad (14.4\text{-}5)$$

em que $K_1 = 2c$ e $K_2 = 2(ac - bd)$.

Determinando a transformada inversa de Laplace dos dois primeiros termos da expansão em frações parciais, obtemos

$$\mathscr{L}^{-1}\left[2c\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}\right] = 2c\,\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}\right] = 2c\,e^{-at}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+b^2}\right] = 2c\,e^{-at}\cos(bt)$$

e

$$\mathscr{L}^{-1}\left[2d\frac{b}{(s+a)^2+b^2}\right] = 2d\,\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{b}{(s+a)^2+b^2}\right] = 2d\,e^{-at}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{b}{s^2+b^2}\right] = 2d\,e^{-at}\,\text{sen}(bt)$$

Usando a propriedade da linearidade, temos

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)] = 2c\,e^{-at}\cos(bt) - 2d\,e^{-at}\text{sen}(bt) + \mathscr{L}^{-1}[F_3(s)] \qquad (14.4\text{-}6)$$

EXEMPLO 14.4-2 Transformada Inversa de Laplace: Polos Simples Complexos

Determine a transformada inversa de Laplace da função $F(s) = \dfrac{10}{(s^2+6s+10)(s+2)}$.

Solução

As raízes da equação do segundo grau $s^2 + 6s + 10$ são complexas; depois de fatorado, o denominador da função $F(s)$ se torna

$$F(s) = \frac{10}{(s+3-j)(s+3+j)(s+2)}$$

Expandindo $F(s)$ em frações parciais, obtemos

$$F(s) = \frac{10}{(s+3-j)(s+3+j)(s+2)} = \frac{R_1}{s-(-3+j)} + \frac{R_2}{s-(3-j)} + \frac{R_3}{s+2}$$

Aplicando a Eq. 14.4-3, temos

$$\begin{aligned} R_1 &= (s+3-j)\left(\frac{10}{(s+3-j)(s+3+j)(s+2)}\right)\Bigg|_{s=-3+j} \\ &= \frac{10}{(s+3+j)(s+2)}\Bigg|_{s=-3+j} = \frac{10}{(-3+j+3+j)(-3+j+2)} = -\frac{5}{2} + j\frac{5}{2} \end{aligned}$$

Comparando com a Eq. 14.4-4, vemos que $a = 3$, $b = 1$ e $c = -2{,}5$. Analogamente,

$$\begin{aligned} R_2 &= (s+3+j)\left(\frac{10}{(s+3-j)(s+3+j)(s+2)}\right)\Bigg|_{s=-3-j} \\ &= \frac{10}{(s+3-j)(s+2)}\Bigg|_{s=-3-j} = \frac{10}{(-3-j+3-j)(-3-j+2)} = -\frac{5}{2} - j\frac{5}{2} \end{aligned}$$

e

$$R_3 = (s+2)\left(\frac{10}{(s+3-j)(s+3+j)(s+2)}\right)\Bigg|_{s=-2} = \frac{10}{s^2+6s+10}\Bigg|_{s=-2} = 5$$

Finalmente, aplicando a Eq. 14.4-6, temos

$$\begin{aligned} f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{10}{(s^2+6s+10)(s+2)}\right] &= 2\,c\,e^{-at}\cos(bt) - 2\,d\,e^{-at}\,\mathrm{sen}(bt) + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{5}{s+2}\right] \\ &= 2(-2{,}5)e^{-3t}\cos(1t) - 2(2{,}5)e^{-3t}\,\mathrm{sen}(1t) + 5e^{-2t} \\ &= -5e^{-3t}\cos(t) - 5e^{-3t}\,\mathrm{sen}(t) + 5\,e^{-2t} \quad \text{para } t \geq 0 \end{aligned}$$

Solução Alternativa

Aplicando a Eq. 14.4-5, podemos expressar $F(s)$ na forma

$$F(s) = \frac{10}{(s^2+6s+10)(s+2)} + \frac{K_1 s + K_2}{s^2+6s+10} + F_3(s) = \frac{K_1 s + K_2}{s^2+6s+10} + \frac{R_3}{s+2}$$

Aplicando a Eq. 14.4-3, temos

$$R_3 = (s+2)\left(\frac{10}{(s^2+6s+10)(s+2)}\right)\Bigg|_{s=-2} = \frac{10}{s^2+6s+10}\Bigg|_{s=-2} = 5$$

e, portanto,

$$\frac{10}{(s^2+6s+10)(s+2)} = \frac{K_1 s + K_2}{s^2+6s+10} + \frac{5}{s+2} \qquad (14.4\text{-}7)$$

Multiplicando ambos os membros da equação pelo denominador do primeiro membro, obtemos

$$10 = (K_1 + 5)s^2 + (2K_1 + K_2 + 30)s + 2K_2 + 50$$

Os coeficientes de s^2, s^1 e s^0 no lado direito da equação devem ser iguais aos coeficientes correspondentes no lado esquerdo. (Os coeficientes de s^2 e s^1 no lado esquerdo são nulos). Igualando os coeficientes correspondentes, obtemos

$$0 = K_1 + 5; \quad 2K_1 + K_2 + 30 \quad \text{e} \quad 10 = 2K_2 + 50$$

o que nos dá $K_1 = -5$ e $K_2 = -20$. Substituindo na Eq. 14.4-7, obtemos

$$\frac{10}{(s^2+6s+10)(s+2)} = \frac{-5s-20}{s^2+6s+10} + \frac{5}{s+2}$$

Além disso,

$$\frac{-5s-20}{s^2+6s+10} = \frac{-5s-20}{(s^2+6s+9)+1} = \frac{-5s-20}{(s+3)^2+1} = \frac{-5(s+3)-5}{(s+3)^2+1} = -5\left(\frac{s+3}{(s+3)^2+1}\right) - 5\left(\frac{1}{(s+3)^2+1}\right)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-5s-20}{s^2+6s+10}\right] &= -5\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+3}{(s+3)^2+1}\right] - 5\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+3)^2+1}\right] \\ &= -5e^{-3t}\cos(t) - 5e^{-3t}\,\text{sen}(t) \end{aligned}$$

Aplicando a propriedade da linearidade, temos

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{10}{(s^2+6s+10)(s+2)}\right] = -5e^{-3t}\cos(t) - 5e^{-3t}\,\text{sen}(t) + 5e^{-2t} \text{ para } t \geq 0$$

que é o resultado obtido anteriormente.

Suponha agora que $F(s)$ possui polos múltiplos, ou seja, que

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{(s-p_1)^q\left(s-p_{q+1}\right)\cdots(s-p_n)}$$

em que o número inteiro q recebe o nome de multiplicidade do polo, p_1, no caso. A expansão em frações parciais da parte de $F(s)$ associada a um polo múltiplo é uma soma de frações cujos denominadores são todas as potências inteiras de $(s - p_1)$ de 1 a q:

$$F(s) = \frac{R_1}{s-p_1} + \frac{R_2}{(s-p_1)^2} + \cdots + \frac{R_q}{(s-p_1)^q} + \frac{R_{q+1}}{s-p_{q+1}} + \cdots + \frac{R_n}{s-p_n} \qquad (14.4\text{-}8)$$

Os resíduos correspondentes aos polos múltiplos são dados por

$$R_{q-k} = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{ds^k}(s-p_1)^q F(s)\right]\Bigg|_{s=p_1} \text{para } k = q-1,\ q-2, \ldots, 2,\ 1,\ 0 \qquad (14.4\text{-}9)$$

ou seja,

$$R_1 = \frac{1}{(q-1)!}\left[\frac{d^{q-1}}{ds^{q-1}}(s-p_1)^q F(s)\right]\bigg|_{s=p_1},$$
$$R_2 = \frac{1}{(q-2)!}\left[\frac{d^{q-2}}{ds^{q-2}}(s-p_1)^q F(s)\right]\bigg|_{s=p_1}, \ldots$$
$$R_q = [(s-p_1)^q F(s)]|_{s=p_1}$$

EXEMPLO 14.4-3 Transformada Inversa de Laplace: Polos Múltiplos

Determine a transformada inversa de Laplace da função $F(s) = \frac{4}{(s+1)^2(s+2)}$.

Solução

De acordo com a Eq. 14.4-8, a função $F(s)$ pode ser expressa na forma

$$F(s) = \frac{4}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{R_1}{s+1} + \frac{R_2}{(s+1)^2} + \frac{R_3}{s+2}$$

De acordo com a Eq. 14.4-3,

$$R_3 = (s+2)\frac{4}{(s+1)^2(s+2)}\bigg|_{s=-2} = \frac{4}{(s+1)^2}\bigg|_{s=-2} = \frac{4}{(-2+1)^2} = 4$$

De acordo com a Eq. 14.4-9,

$$R_1 = \frac{d}{ds}\left((s+1)^2\frac{4}{(s+1)^2(s+2)}\right)\bigg|_{s=-1} = \frac{d}{ds}\frac{4}{s+2}\bigg|_{s=-1} = \frac{-4}{(s+2)^2}\bigg|_{s=-1} = -4$$

e

$$R_2 = (s+1)^2\frac{4}{(s+1)^2(s+2)}\bigg|_{s=-1} = \frac{4}{s+2}\bigg|_{s=-1} + \frac{4}{-1+2} = 4$$

o que nos dá

$$F(s) = \frac{4}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{-4}{s+1} + \frac{4}{(s+1)^2} + \frac{4}{s+2}$$

Usando a propriedade de deslocamento de frequência da Tabela 14.2-2, obtemos

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{4}{(s+1)^2}\right] = e^{-t}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{4}{s^2}\right] = 4t\,e^{-t}$$

Finalmente, usando a propriedade da linearidade, temos

$$f(t) = -4\,e^{-t} + 4\,t\,e^{-t} + 4e^{-2t} \text{ para } t \geq 0$$

Solução Alternativa

De acordo com a Eq. 14.4-8,

$$F(s) = \frac{4}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{R_1}{s+1} + \frac{R_2}{(s+1)^2} + \frac{R_3}{s+2}$$

Como na solução anterior,

$$R_3 = (s+2)\frac{4}{(s+1)^2(s+2)}\bigg|_{s=-2} + \frac{4}{(s+1)^2}\bigg|_{s=-2} = \frac{4}{(-2+1)^2} = 4$$

e

$$R_2 = (s+1)^2\frac{4}{(s+1)^2(s+2)}\bigg|_{s=-1} = \frac{4}{s+2}\bigg|_{s=-1} = \frac{4}{-1+2} = 4$$

o que nos dá

$$\frac{4}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{R_1}{s+1} + \frac{4}{(s+1)^2} + \frac{4}{s+2}$$

Multiplicando ambos os membros por $(s+1)^2(s+2)$, temos

$$4 = R^1(s+1)(s+2) + 4(s+2) + 4(s+1)^2 = (R_1+4)s^2 + (3R_1+4+8)s + 2R_1 + 8 + 4$$

Os coeficientes de s^2, s^1 e s^0 no lado direito da equação devem ser iguais aos coeficientes correspondentes no lado esquerdo. (Os coeficientes de s^2 e s^1 no lado esquerdo são nulos). Igualando os coeficientes correspondentes, obtemos

$$0 = R^1 + 4,\ 0 = 3\,R^1 + 4 + 8 \ \text{ e } \ 4 = 2\,R^1 + 8 + 4$$

o que nos dá $R_1 = -4$. Substituindo R_1 pelo seu valor na expressão de $F(s)$, obtemos

$$F(s) = \frac{4}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{-4}{s+1} + \frac{4}{(s+1)^2} + \frac{4}{s+2}$$

$$f(t) = -4e^{-t} + 4\,t\,e^{-t} + 4e^{-2t} \text{ para } t \geq 0$$

que é o resultado obtido anteriormente.

EXEMPLO 14.4-4 Transformada Inversa de Laplace: Função Racional Imprópria

Determine a transformada inversa de Laplace da função $F(s) = \dfrac{4s^3 + 15s^2 + s + 30}{s^2 + 5s + 6}$.

Solução

Comparando $F(s)$ com a função da Eq. 14.4-1, constatamos que $m = 3$ e $n = 2$. Como m é maior que n, executamos a divisão de polinômios $s^2 + 5x + 6\overline{\big)\,4s^3 + 15s^2 + s + 30}$ para obter

$$F(s) = 4s - 5 + \frac{2s}{s^2 + 5s + 6}$$

Como o último termo do lado direito é uma função racional própria, executamos uma expansão em frações parciais para obter

$$F(s) = 4s - 5 + \frac{2s}{s^2 + 5s + 6} = 4s - 5 + \frac{2s}{(s+3)(s+2)} = 4s - 5 + \frac{6}{s+3} - \frac{4}{s+2}$$

Usando a propriedade de derivação em relação ao tempo da Tabela 14.2-2, obtemos $\mathscr{L}^{-1}[s] = \frac{d}{dt}\delta(t)$. Usando a propriedade da linearidade, obtemos

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{4s^3 + 15s^2 + s + 30}{s^2 + 5s + 6}\right] = 4\frac{d}{dt}\delta(t) - 5\delta(t) + 6e^{-3t} - 4e^{-2t} \text{ para } t \geq 0$$

14.5 Teoremas do Valor Inicial e do Valor Final

O valor inicial de uma função $f(t)$ é o valor da função no instante $t = 0$, contanto que $f(t)$ seja contínua em $t = 0$. Se $f(t)$ for descontínua em $t = 0$, o valor inicial é o limite para $t \to 0^+$, ou seja, o limite quando t tende a 0 pela direita.

O valor inicial de uma função pode ser obtido a partir da transformada de Laplace usando a equação

$$f(0^+) = \lim_{t \to 0^+} f(t) = \lim_{t \to \infty} sF(s) \qquad (14.5\text{-}1)$$

A Eq. 14.5-1 é a expressão matemática do **teorema do valor inicial**. Para provar o teorema, começamos pela propriedade de derivação em relação ao tempo da Tabela 14.2-2:

$$sF(s) - f(0^-) = \mathscr{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = \int_{0^-}^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st} dt$$

Tomando o limite para $s \to \infty$, obtemos

$$\lim_{s \to \infty} [sF(s) - f(0^-)] = \lim_{s \to \infty} \int_{0^-}^{0^+} \frac{df}{dt} e^{-st} dt + \lim_{s \to \infty} \int_{0^+}^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st} dt$$

A primeira integral do lado direito é igual a $f(0^+) - f(0^-)$ porque $e^{-st} = 1$ para $0^- < t < 0^+$. A segunda integral do lado direito é nula porque $e^{-st} \to 0$ para $s \to \infty$. Do lado esquerdo, $\lim_{s \to \infty} f(0^-) = f(0^-)$ porque $f(0^-)$ não depende de s. Assim,

$$\lim_{s \to \infty} sF(s) - f(0^-) = f(0^+) - f(0^-)$$

Somando $f(0^-)$ a ambos os membros, obtemos a Eq. 14.5-1, demonstrando assim o teorema do valor inicial.

O valor final de uma função é dado pela equação

$$f(\infty) = \lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s) \qquad (14.5\text{-}2)$$

A Eq. 14.5-2 é a expressão matemática do teorema do valor final. Para provar o teorema, começamos mais uma vez pela propriedade de derivação em relação ao tempo da Tabela 14.2-2:

$$sF(s) - f(0^-) = \mathscr{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = \int_0^{\infty} \left(\frac{df}{dt}\right) e^{-st} dt$$

e tomamos o limite de ambos os membros para $s \to 0$, o que nos dá

$$\lim_{s\to 0}[sF(s) - f(0^-)] = \lim_{s\to 0}\int_0^{\infty}\left(\frac{df}{dt}\right)e^{-st}dt = \int_0^{\infty}\left(\frac{df}{dt}\right)e^{-0t}dt = f(\infty) - f(0^-)$$

Do lado esquerdo, $\lim_{s\to\infty} f(0^-) = f(0^-)$ porque $f(0^-)$ não depende de s. Assim,

$$\lim_{s\to 0} f(0^-) = f(0^-)$$

Somando $f(0^-)$ a ambos os membros, obtemos a Eq. 14.5-2, demonstrando assim o teorema do valor final.

Exemplo 14.5-1 Teoremas do Valor Inicial e do Valor Final

Considere uma situação na qual montamos um circuito e analisamos o mesmo circuito usando transformadas de Laplace. A Figura 14.5-1 mostra a tensão de saída $v(t)$ em função do tempo, de acordo com medidas realizadas em laboratório. A análise do circuito mostra que a transformada da tensão de saída é

$$V(s) = \mathscr{L}[v(t)] = \frac{2s^2 + 30s + 136}{s(s^2 + 9s + 34)} \qquad (14.5\text{-}3)$$

Os resultados experimentais estão de acordo com a análise teórica?

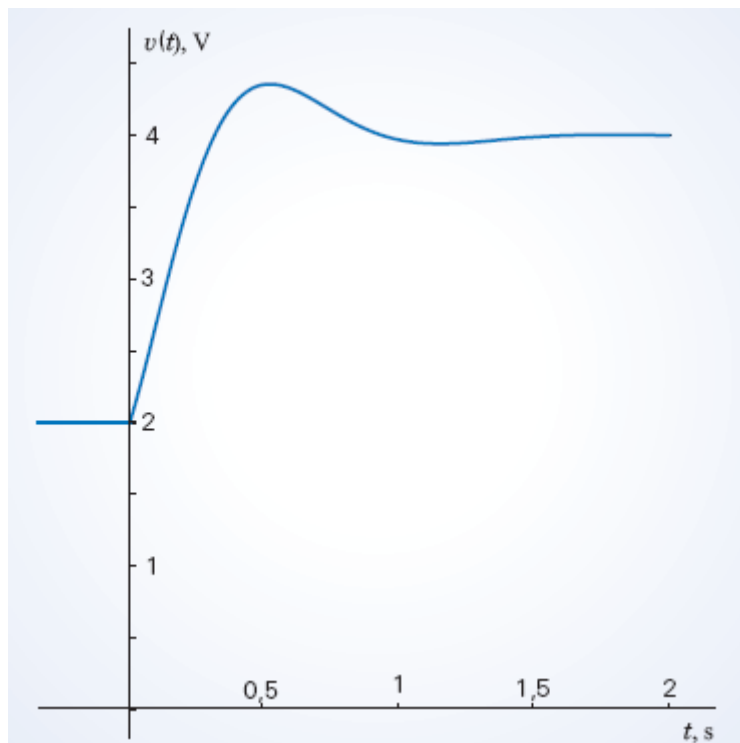



FIGURA 14.5-1 Tensão de saída do circuito do Exemplo 14.5-1.

Solução

Para poder comparar os resultados experimentais com os resultados teóricos, precisamos determinar a transformada inversa de Laplace de $V(s)$. Antes disso, porém, vamos usar os teoremas do valor inicial e do valor final para verificar se é possível que a função $V(s)$ dada pela Eq. 14.5-3 seja a transformada de Laplace da função $v(t)$ da Figura 14.5-1.

De acordo com a Figura 14.5-1, os valores inicial e final são

$$v(0^+) = \lim_{t\to 0^+} v(t) = 2\text{ V} \text{ e } v(\infty) = \lim_{t\to\infty} v(t) = 4\text{ V} \qquad (14.5\text{-}4)$$

De acordo com os teoremas do valor inicial e do valor final, temos

$$v(0) = \lim_{s\to\infty} s\left(\frac{2s^2 + 30s + 136}{s(s^2 + 9s + 34)}\right) = \lim_{s\to\infty} \frac{2s^2 + 30s + 136}{s^2 + 9s + 34} = \lim_{s\to\infty} \frac{\frac{2s^2}{s^2} + \frac{30s}{s^2} + \frac{136}{s^2}}{\frac{s^2}{s^2} + \frac{9s}{s^2} + \frac{34}{s^2}} = \frac{2}{1} = 2 \text{ V}$$

e

$$v(\infty) = \lim_{s\to 0} s\left(\frac{2s^2 + 30s + 136}{s(s^2 + 9s + 34)}\right) = \lim_{s\to 0} \frac{2s^2 + 30s + 136}{s^2 + 9s + 34} = \frac{136}{24} = 4 \text{ V}$$

Como os valores inicial e final dos resultados experimentais são iguais aos valores inicial e final dos resultados teóricos, é possível que $V(s)$, dada pela Eq. 15.5-3, seja a transformada de Laplace da função $v(t)$ da Figura 14.5-1. Vamos agora determinar a transformada inversa de $V(s)$.

Podemos expressar $V(s)$ na forma

$$V(s) = \frac{2s^2 + 30s + 136}{s(s^2 + 9s + 34)} = \frac{K_1 s + K_2}{s^2 + 9s + 34} + \frac{R_3}{s}$$

em que

$$R_3 = s\left(\frac{2s^2 + 30s + 136}{s(s^2 + 9s + 34)}\right)\bigg|_{s=0} = \frac{2s^2 + 30s + 136}{s^2 + 9s + 34}\bigg|_{s=0} = 4$$

Assim,

$$V(s) = \frac{2s^2 + 30s + 136}{s(s^2 + 9s + 34)} = \frac{K_1 s + K_2}{s^2 + 9s + 34} + \frac{4}{s}$$

Multiplicando ambos os membros por $s(s^2 + 9s + 34)$, temos

$$2s^2 + 30s + 136 = s(K^1 s + K^2) + 4(s^2 + 9s + 34) = (K^1 + 4)s^2 + (K^2 + 36)s + 136$$

Igualando os coeficientes de s^2 e s^1, obtemos $K_1 = -2$ e $K_2 = -6$. Assim,

$$V(s) = \frac{2s^2 + 30s + 136}{s(s^2 + 9s + 34)} = \frac{4}{s} - \frac{2s + 6}{s^2 + 9s + 34} = \frac{4}{s} - \frac{2(s + 3)}{(s + 3)^2 + 25}$$

Determinando a transformada inversa de Laplace dos dois termos do lado direito e usando a propriedade da linearidade, obtemos

$$v(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{s} - \frac{2(s + 3)}{(s + 3)^2 + 25}\right] = 4 - 2e^{-3t}\cos(5t) \quad \text{para} \; \geq 0$$

que é realmente a equação que representa a função mostrada na Figura 14.5-1.

14.6 Solução das Equações Diferenciais que Descrevem um Circuito

Podemos resolver as equações diferenciais que descrevem um circuito usando a transformada de Laplace da variável $x(t)$ e suas derivadas. Para isso, basta fazer o seguinte:

1. Usar as leis de Kirchhoff e as equações constitutivas dos componentes para representar o circuito por um sistema de equações diferenciais.
2. Transformar as equações diferenciais em equações algébricas calculando a transformada de Laplace de todos os termos de cada equação.
3. Resolver o sistema de equações algébricas para obter a transformada de Laplace da saída do circuito.
4. Calcular a transformada inversa de Laplace para obter a saída do circuito.

O exemplo a seguir ilustra o processo que acabamos de descrever.

EXEMPLO 14.6-1 Transformada de Laplace de uma Equação Diferencial

Determine $v_C(t)$ no circuito da Figura 14.6-1 para $i_L(0^-) = 0{,}5$ A e $v_C(0^-) = 2{,}5$ V.

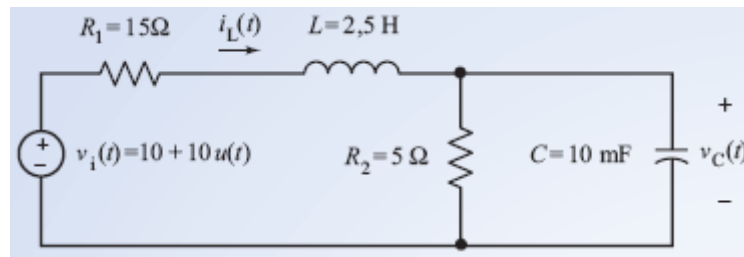



FIGURA 14.6-1 Circuito do Exemplo 14.6-1.

Solução

Aplicando a LKC ao nó superior de R_2, obtemos

$$i_L(t) = \frac{v_C(t)}{R_2} + C\frac{d\,v_C(t)}{dt} \tag{14.6-1}$$

Aplicando a LKT à malha da esquerda, obtemos

$$v_i(t) = R_1 i_L(t) + L\frac{di_L(t)}{dt} + v_C(t) \tag{14.6-2}$$

De acordo com a Tabela 14.2-2,

$$\frac{df}{dt} \leftrightarrow sF(s) - f(0^-)$$

Calculando a transformada de Laplace de todos os termos da Eq. 14.6-1, obtemos

$$I_L(s) = \frac{V_C(s)}{R_2} + C(V_C(s) - v_C(0^-)) \tag{14.6-3}$$

e calculando a transformada de Laplace de todos os termos da Eq. 14.6-2, obtemos

$$V_i(s) = R_1 I_L(s) + L(I_L(s) - i_L(0^-)) + V_C(s) \tag{14.6-4}$$

Substituindo $I_L(s)$ na Eq. 14.6-4 por seu valor, dado pela Eq. 14.6-3, e simplificando, obtemos

$$V_i(s) = \left[LCs^2 + \left(\frac{L}{R_2} + R_1Cs + 1 + \frac{R_1}{R_2}\right)\right]V_C(s) - (LCs + R_1C)v_C(0^-) - Li_L(0^-) \qquad (14\text{-}6\text{-}5)$$

Como $v_i = 20$ V para $t > 0$ $V_i(s) = \mathcal{L}[20] = \frac{20}{s}$. Usando os valores conhecidos das condições iniciais e dos parâmetros do circuito, obtemos

$$\frac{20}{s} = \left(s^2 + 26s + 160\right)V_C(s) - (s+6)(2{,}5) - 2{,}5(0{,}5)$$

Explicitando $V_C(s)$, temos

$$V_C(s) = \frac{2{,}5s^2 + 65s + 800}{s(s^2 + 26s + 160)} = \frac{2{,}5s^2 + 65s + 800}{s(s+10)(s+16)}$$

Expandindo $V_C(s)$ em frações parciais, obtemos

$$V_C(s) = \frac{2{,}5s^2 + 65s + 800}{s(s+10)(s+16)} = \frac{5}{s} + \frac{4{,}17}{s+16} - \frac{6{,}67}{s+10}$$

Calculando a transformada inversa de Laplace de todos os termos e usando a propriedade da linearidade, obtemos, finalmente,

$$v_C(t) = 5 + 4{,}17e^{-16t} - 6{,}67e^{-10t} \text{ V para } t > 0$$

14.7 Análise de Circuitos Usando Impedâncias e Condições Iniciais

Vimos que é possível representar um circuito no domínio do tempo por equações diferenciais e usar a transformada de Laplace para converter as equações diferenciais em equações algébricas. Nesta seção, vamos ver que é possível representar um circuito diretamente no domínio da frequência usando a transformada de Laplace e analisá-lo usando equações algébricas. Esse método elimina a necessidade de usar equações diferenciais para representar o circuito.

A relação entre a tensão e a corrente em um resistor é dada pela lei de Ohm:

$$v(t) = i(t)R \qquad (14.7\text{-}1)$$

Isso significa que a relação entre as transformadas de Laplace da tensão e da corrente em um resistor R é

$$V(s) = I(s)R \qquad (14.7\text{-}2)$$

A Figura 14.7-1 mostra a representação do resistor (*a*) no domínio do tempo e (*b*) no domínio da frequência, usando a transformada de Laplace. Comparando as Eqs. 14.7-1 e 14.7-2, vemos que as representações de um resistor no domínio do tempo e no domínio da frequência são muito parecidas.

A impedância de um componente é definida pela relação

$$Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)} \qquad (14.7\text{-}3)$$

contanto que todas as condições iniciais sejam nulas. Observe que a impedância é definida no domínio da frequência e não no domínio do tempo.

No caso do resistor, não existe uma condição inicial para receber o valor zero. Comparando as Eqs. 14.7-1 e 14.7-2, vemos que a impedância do resistor é igual à resistência.

No domínio do tempo, um capacitor é representado pela equação

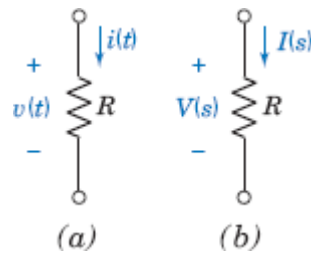



FIGURA 14.7-1 Um resistor representado (*a*) no domínio do tempo e (*b*) no domínio da frequência, usando a transformada de Laplace.

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau + v(0) \tag{14.7-4}$$

A transformada de Laplace da Eq. 14.7-4 é

$$V(s) = \frac{1}{Cs}I(s) + \frac{v(0)}{s} \tag{14.7-5}$$

Para determinar a impedância do capacitor, fazemos a condição inicial, *v*(0), igual a zero. Nesse caso, de acordo com a Eq. 14.7-3, temos

$$Z_C(s) = \frac{1}{Cs}$$

como a impedância do capacitor.

A Eq. 14.7-5 é usada para representar o capacitor no domínio da frequência, como mostra a Figura 14.7-2*b*. A associação de componentes em série na Figura 14.7-2*b* corresponde à soma de tensões da Eq. 14.7-5. A corrente que atravessa a impedância da Figura 14.7-2*b* produz a primeira tensão do lado direito da Eq. 14.7-5, enquanto a fonte de tensão da Figura 14.7-2*b* produz a segunda tensão do lado direito da Eq. 14.7-5.

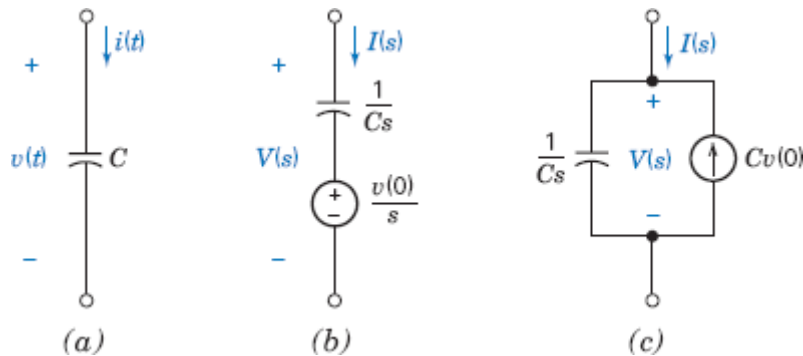



FIGURA 14.7-2 Um capacitor representado (*a*) no domínio do tempo e (*b*) no domínio da frequência, usando a transformada de Laplace. (*c*) Outra representação possível no domínio da frequência.

Explicitando *I*(*s*) na Eq. 14.7-5, obtemos

$$I(s) = CsV(s) - Cv(0) \tag{14.7-6}$$

A Eq. 14.7-6 também pode ser usada para representar o capacitor no domínio da frequência, como mostra a Figura 14.7-2*c*. A ligação de componentes em paralelo na Figura 14.7-2*c* corresponde à soma de correntes da Eq. 14.7-6. A tensão da impedância da Figura 14.7-2*c* produz a primeira corrente no lado direito da Eq. 14.7-6, enquanto a fonte de corrente da Figura 14.7-2*c* produz a segunda corrente. Observe que o sentido de referência da fonte de corrente da Figura 14.7-2*c* foi escolhido de modo a estar de acordo com o sinal negativo da Eq. 14.7-6.

No domínio do tempo, um indutor é representado pela equação

$$v(t) = L\frac{d}{dt}i(t) \qquad (14.7\text{-}7)$$

A transformada de Laplace da Eq. 14.7-7 é

$$V(s) = LsI(s) - Li(0) \qquad (14.7\text{-}8)$$

Para determinar a impedância do indutor, fazemos a condição inicial, $i(0)$, igual a zero. Nesse caso, de acordo com a Eq. 14.7-3, temos

$$Z_L(s) = Ls$$

como a impedância do indutor.

A Eq. 14.7-8 é usada para representar o indutor no domínio da frequência, como mostra a Figura 14.7-3*b*. A associação de componentes em série na Figura 14.7-3*b* corresponde à soma de tensões da Eq. 14.7-8.

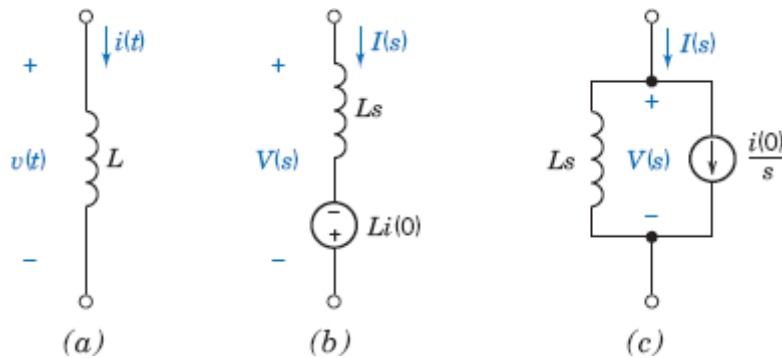



FIGURA 14.7-3 Um indutor representado (*a*) no domínio do tempo e (*b*) no domínio da frequência, usando a transformada de Laplace. (*c*) Outra representação possível no domínio da frequência.

Explicitando $I(s)$ na Eq. 14.7-8, obtemos

$$I(s) = \frac{1}{Ls}V(s) + \frac{i(0)}{s} \qquad (14.7\text{-}9)$$

A Eq. 14.7-9 também pode ser usada para representar o indutor no domínio da frequência, como mostra a Figura 14.7-3*c*. A associação de componentes em paralelo na Figura 14.7-3*c* corresponde à soma de correntes da Eq. 14.7-9.

A Tabela 14.7-1 mostra a representação no domínio do tempo e no domínio da frequência de vários componentes dos circuitos. Além do resistor, do capacitor e do indutor, a Tabela 14.7-1 mostra a representação no domínio do tempo e no domínio da frequência de fontes independentes e dependentes e do amplificador operacional. As fontes independentes são especificadas por funções do tempo, $i(t)$ e $v(t)$, no domínio do tempo e pela transformada de Laplace das funções, $I(s)$ e $V(s)$, no domínio da frequência. As fontes dependentes e os amplificadores operacionais se comportam da mesma forma no domínio do tempo e no domínio da frequência.

Tabela 14.7-1 Representação no Domínio do Tempo e no Domínio da Frequência de Componentes dos Circuitos

NOME	DOMÍNIO DO TEMPO	DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA
Fonte de corrente	+ $v(t)$ – ; $i(t)$	+ $V(s)$ – ; $I(s)$
Fonte de tensão	$i(t)$; $v(t)$ + –	$I(s)$; $V(s)$ + –
Resistor	$i(t)$; + $v(t)$ – ; R	$I(s)$; + $V(s)$ – ; R
Capacitor	$i(t)$; + $v(t)$ – ; C	$I(s)$; + $V(s)$ – ; $\frac{1}{Cs}$; $\frac{v(0)}{s}$ ou $I(s)$; $\frac{1}{Cs}$; + $V(s)$ – ; $Cv(0)$
Indutor	$i(t)$; + $v(t)$ – ; L	$I(s)$; + $V(s)$ – ; Ls ; $Li(0)$ ou $I(s)$; Ls ; + $V(s)$ – ; $\frac{i(0)}{s}$
Fonte dependente	$i_c(t)$; $i(t)$; $v(t) = Ki_c(t)$	$I_c(s)$; $I(s)$; $V(s) = KI_c(s)$
Amplificador operacional	0 A ; + 0 V – ; 0 A ; $i(t)$; + $v(t)$ –	0 A ; + 0 V – ; 0 A ; $I(s)$; + $V(s)$ –

Para representar um circuito no domínio da frequência, substituímos a representação no domínio do tempo de cada componente do circuito pela representação no domínio da frequência.

Para determinar a resposta completa de um circuito linear, a primeira coisa que fazemos é representar o circuito no domínio da frequência usando a transformada de Laplace. Em seguida, analisamos o circuito, possivelmente usando equações de malha e/ou equações de nó. Finalmente, usamos a transformada inversa de Laplace para representar a resposta no domínio do tempo.

EXEMPLO 14.7-1 Análise de Circuitos Usando Transformadas de Laplace

Considere o circuito da Figura 14.7-4. A entrada do circuito é a tensão da fonte de tensão, 24 V; a saída é a tensão do capacitor, dada por

$$v_o(t) = 16 - 12e^{-0,6t} \text{ V para } t > 0 \tag{14.7-10}$$

Determine o valor da capacitância C.

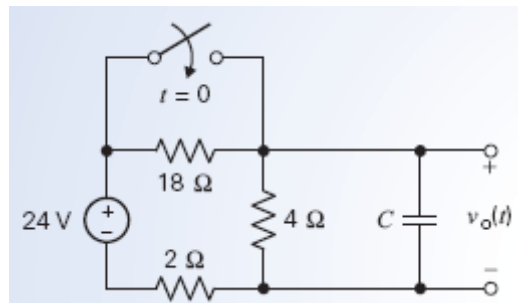



FIGURA 14.7-4 Circuito do Exemplo 14.7-1.

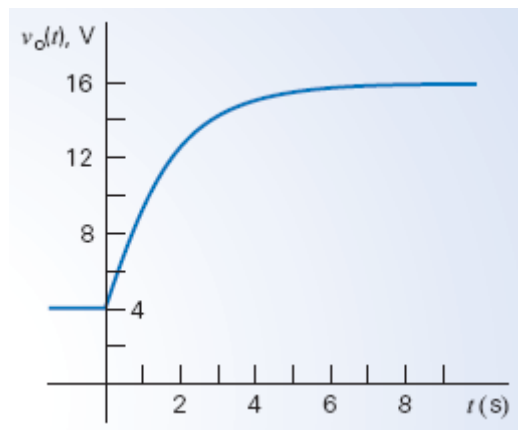



FIGURA 14.7-5 Tensão do capacitor, $v_o(t)$, no circuito da Figura 14.7-4.

Solução

Antes que a chave seja fechada, o circuito está no regime estacionário. Como a única entrada do circuito é a tensão constante da fonte de tensão, todas as correntes e tensões dos elementos, incluindo a tensão do capacitor, são constantes. Ao fechar a chave, perturbamos o circuito, curto-circuitando o resistor de 18 Ω. Após um certo tempo, o circuito atinge um novo regime estacionário, no qual todas as correntes e tensões voltam a ter valores constantes, mas não necessariamente iguais aos valores que tinham antes do fechamento da chave.

Durante a transição do primeiro regime estacionário para o segundo, as tensões e correntes no circuito não são constantes. Assim, por exemplo, a Eq. 14.7-10 descreve a tensão do capacitor depois que a chave é fechada. Observe que a tensão do capacitor é a soma de duas parcelas. Uma delas, $-12e^{-0,6t}$, tende a zero com o passar do tempo. Essa parcela é chamada de parte transitória da resposta ou, simplesmente, reposta transitória. A outra parcela, 16, não

tende a zero com o passar do tempo e é a resposta estacionária. A soma da resposta transitória com a resposta estacionária é a resposta completa. A tensão de saída descrita pela Eq. 14.7-10 é a resposta completa do circuito.

A Figura 14.7-5 mostra um gráfico da tensão do capacitor em função do tempo, dada pela Eq. 14.7-10. Observe que a tensão do capacitor é contínua. Isso é esperado, já que a tensão em um capacitor não pode variar bruscamente. Em particular, o valor da tensão no capacitor imediatamente após o fechamento da chave é igual ao valor da tensão imediatamente antes do fechamento. Como mostra a Figura 14.7-5, no instante $t = 0$ em que a chave é fechada, o valor da tensão no capacitor é $v_o(0) = 4$ V.

De que forma o valor da capacitância C afeta a tensão do capacitor? Para responder a essa pergunta, temos que analisar o circuito. Como estamos interessados em determinar a resposta completa, vamos analisar o circuito usando transformadas de Laplace. A Figura 14.7-6 mostra a representação do circuito no domínio da frequência. A chave fechada se comporta como um curto-circuito em paralelo com o resistor de 18 Ω. Como um curto-circuito em paralelo com um resistor equivale a um curto-circuito, a chave fechada e o resistor de 18 Ω foram substituídos por um curto-circuito. O modelo do capacitor no domínio da frequência envolve dois componentes em série, uma impedância e uma fonte de tensão. A tensão da fonte de tensão depende da condição inicial do capacitor, que no caso é $v_o(0) = 4$ V.

Podemos analisar o circuito da Figura 14.7-6 escrevendo e resolvendo duas equações de malha.

Aplicando a LKT à malha da esquerda, obtemos

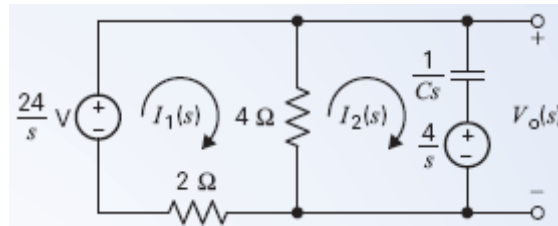



FIGURA 14.7-6 Representação do circuito no domínio da frequência, usando transformadas de Laplace.

$$4(I_1(s) - I_2(s)) + 2I_1(s) - \frac{24}{s} = 0$$

Explicitando $I_1(s)$, temos

$$I_1(s) = \frac{2}{3}I_2(s) + \frac{4}{s} \qquad (14.7\text{-}11)$$

Aplicando a LKT à malha da direita, obtemos

$$\frac{1}{Cs}I_2(s) + \frac{4}{s} - 4(I_1(s) - I_2(s)) = 0$$

Separando os termos que envolvem $I_2(s)$, temos

$$\left(\frac{1}{Cs} + 4\right)I_2(s) = -\frac{4}{s} + 4I_1(s)$$

Substituindo $I_1(s)$ pelo seu valor, dado pela Eq. 14.7-11, temos

$$\left(\frac{1}{Cs} + 4\right)I_2(s) = -\frac{4}{s} + 4\left(\frac{2}{3}I_2(s) + \frac{4}{s}\right) = \frac{12}{s} + \frac{8}{3}I_2(s)$$

Separando os termos que envolvem $I_2(s)$, temos

$$\left(\frac{1}{Cs} + \frac{4}{3}\right)I_2(s) = \frac{12}{s}$$

Multiplicando ambos os membros da equação por $3s/4$, obtemos

$$\left(s+\frac{3}{4C}\right)I_2(s) = 9$$

Explicitando $I_2(t)$, temos

$$I_2(s) = \frac{9}{s+\frac{3}{4C}} \tag{14.7-12}$$

Como se pode ver na Figura 14.7-6, a tensão do capacitor está relacionada à corrente na malha da direita pela equação

$$V_o(s) = \frac{1}{Cs}I_2(s) + \frac{4}{s}$$

Substituindo $I_2(s)$ por seu valor, dado pela Eq. 14.7-12, obtemos

$$V_o(s) = \left(\frac{1}{Cs}\right)\frac{9}{s+\frac{3}{4C}} + \frac{4}{s} = \frac{\frac{9}{C}}{s\left(s+\frac{3}{4C}\right)} + \frac{4}{s}$$

Expandindo o lado direito da equação em frações parciais, temos

$$V_o(s) = \frac{12}{s} - \frac{12}{s+\frac{3}{4C}} + \frac{4}{s} = \frac{16}{s} - \frac{12}{s+\frac{3}{4C}} \tag{14.7-13}$$

De acordo com o enunciado, a tensão $v_o(t)$ é dada pela Eq. 14.7-10, cuja transformada de Laplace é

$$V_o(s) = \mathscr{L}[v_o(t)] = \mathscr{L}\left[\left(16-12e^{-0,6t}\right)u(t)\right] = \frac{16}{s} - \frac{12}{s+0,6} \tag{14.7-14}$$

Comparando as Eqs. 14.7-13 e 14.7-14, temos

$$0,6 = \frac{3}{4C} \quad \Rightarrow \quad C = 1,25\text{ F}$$

Exemplo 14.7-2 Análise de um Circuito Usando Transformadas de Laplace

Considere o circuito da Figura 14.7-7. A entrada do circuito é a tensão da fonte de tensão, 24 V; a saída é a tensão do resistor de 6 Ω, dada por

$$v_o(t) = 12 - 6e^{-0,35t}\text{ V para } t > 0 \tag{14.7-15}$$

Determine o valor da indutância $\mathcal{L}$ e das resistências R_1 e R_2.

Solução

Antes do fechamento da chave, o circuito está no regime estacionário. Como a única entrada do circuito é a tensão constante da fonte de tensão, todas as correntes e tensões dos componentes, incluindo a corrente do indutor, têm valores constantes. Quando a chave é fechada, o circuito sofre uma perturbação, pois o resistor R_1 fica em paralelo com um curto-circuito. Depois de algum tempo, o circuito volta ao regime estacionário. Todas as correntes e tensões voltam a ter valores constantes, mas não necessariamente iguais aos valores que tinham antes do fechamento da chave.

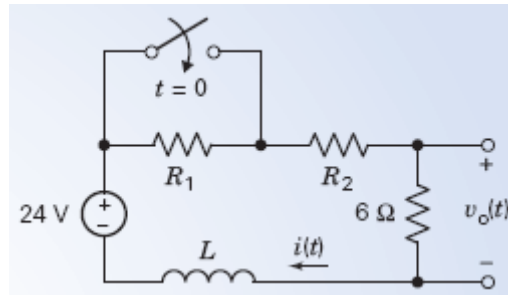



FIGURA 14.7-7 Circuito do Exemplo 14.7-2.

A Eq. 14.7-15 descreve a variação com o tempo da tensão de saída depois que a chave é fechada. Observe que essa tensão tem duas partes. Uma delas, $-6e^{-0,35t}$, diminui com o tempo. Essa parte é chamada de parte transitória da resposta, ou, simplesmente, resposta transitória. A outra parte, 12, não varia com o tempo e é a resposta estacionária. A soma da resposta transitória e da resposta estacionária é a resposta completa. A tensão de saída descrita pela Eq. 14.7-15 é a resposta completa do circuito.

De que forma os valores dos parâmetros do circuito, L, R_1 e R_2, afetam a tensão de saída? Para responder a essa pergunta, devemos analisar o circuito. Como estamos interessados em determinar a resposta completa, vamos analisar o circuito usando transformadas de Laplace. O modelo do indutor no domínio da frequência envolve dois componentes em série, uma impedância e uma fonte de tensão ou de corrente. O valor da tensão da fonte de tensão ou da corrente da fonte de corrente depende da condição inicial do indutor, ou seja, da corrente do indutor no instante $t = 0$. Para representar os circuitos usando transformadas de Laplace, precisamos conhecer a corrente inicial do indutor.

De acordo com a Figura 14.7-7, a corrente do indutor é igual à corrente no resistor de 6 Ω. Assim,

$$i(t) = \frac{v(t)}{6} = \frac{12 - 6e^{-0,35t}}{6} = 2 - e^{-0,35t} \text{ A} \quad \text{para} \quad t > 0 \qquad (14.7\text{-}16)$$

Como a corrente em um indutor não pode variar bruscamente, a corrente imediatamente antes do fechamento da chave é igual à corrente imediatamente após o fechamento. Para determinar a corrente inicial no indutor, fazemos $t = 0$ na Eq. 14.7-6, o que nos dá $i(0) = 1$ A.

A Figura 14.7-8 mostra a representação do circuito no domínio da frequência. Escolhemos o modelo do indutor que usa uma fonte de tensão para levar em conta a condição inicial, já que pretendemos escrever uma equação de malha. A tensão dessa fonte de tensão é

$$Li(0) = (L)(1) = L$$

Na Figura 14.7-8, a chave fechada se comporta como um curto-circuito em paralelo com o resistor R_1. Como um curto-circuito em paralelo com um resistor é equivalente a um curto-circuito, a chave fechada e R_1 foram substituídos por um curto-circuito.

Para analisar o circuito da Figura 14.7-8, escrevemos e resolvemos uma equação de malha. Aplicando a LKT à única malha do circuito, obtemos:

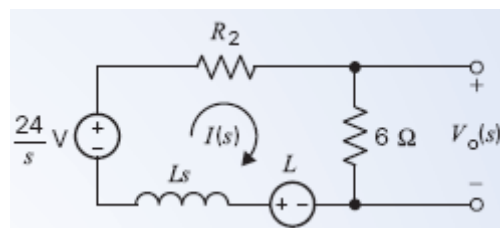



FIGURA 14.7-8 Representação do circuito no domínio da frequência, usando transformadas de Laplace.

$$(R_2 + 6 + Ls)I(s) = L + \frac{24}{s}$$

Explicitando *I*(s), temos

$$I(s) = \frac{L + \frac{24}{s}}{Ls + R_2 + 6} = \frac{s + \frac{24}{L}}{s\left(s + \frac{R_2 + 6}{L}\right)}$$

De acordo com a lei de Ohm,

$$V_o(s) = 6I(s) = \frac{6s + \frac{(6)(24)}{L}}{s\left(s + \frac{R_2 + 6}{L}\right)}$$

Expandindo o lado direito da equação em frações parciais, temos

$$V_o(s) = \frac{\frac{(6)(24)}{R_2 + 6}}{s} - \frac{\frac{6(18 - R_2)}{R_2 + 6}}{s + \frac{R_2 + 6}{L}} \qquad (14.7\text{-}17)$$

De acordo com o enunciado, a tensão $v_o(t)$ é dada pela Eq. 14.7-15, cuja transformada de Laplace é

$$V_o(s) = \mathscr{L}[v_o(t)] = \mathscr{L}\left[\left(12 - 6\,e^{-0{,}35t}\right)u(t)\right] = \frac{12}{s} - \frac{6}{s + 0{,}35} \qquad (14.7\text{-}18)$$

Comparando as Eqs. 14.7-17 e 14.7-18, temos

$$\frac{(6)(24)}{R_2 + 6} = 12 \quad \Rightarrow \quad R_2 = 6\,\Omega$$

e

$$0{,}35 = \frac{R_2 + 6}{L} = \frac{12}{L} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{12}{0{,}35} = 34{,}29\,\text{H}$$

Como calcular R_1? O resistor R_1 é removido do circuito quando a chave é fechada, mas fazia parte do circuito antes do fechamento da chave. A corrente inicial do indutor depende do valor de R_1. A única entrada do circuito da Figura 14.7-9 é a tensão constante de 24 V. Assim, quando o circuito está no regime estacionário, o indutor se comporta como um curto-circuito. A Figura 14.7-9 mostra o circuito no regime estacionário antes do fechamento da chave. A chave aberta é modelada por um circuito aberto e o indutor por um curto-circuito. Escrevendo e resolvendo uma equação de malha, obtemos

$$i(t) = \frac{24}{R_1 + 6 + 6}$$

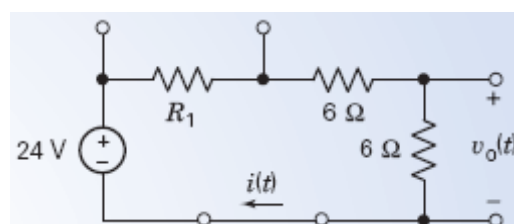



FIGURA 14.7-9 O circuito no regime estacionário, antes do fechamento da chave.

Fazendo $t = 0$, obtemos

$$\frac{24}{R_1 + 6 + 6} = i(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad R_1 = 12\,\Omega$$

EXEMPLO 14.7-3 Análise de um Circuito Usando Transformadas de Laplace

Considere o circuito da Figura 14.7-10*a*. A entrada do circuito é a tensão da fonte de tensão, 12 V; a saída é a corrente no indutor, $i_L(t)$. Determine a corrente no indutor, $i_L(t)$, para $t > 0$.

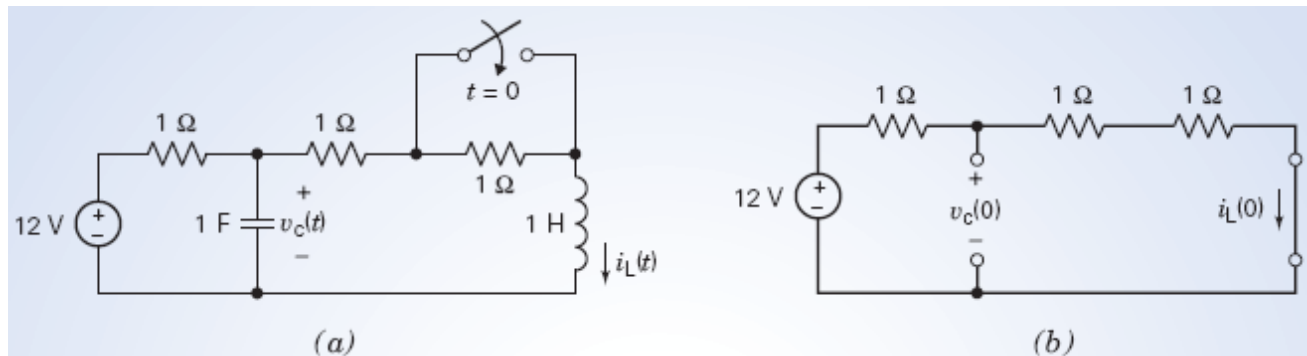



FIGURA 14.7-10 (*a*) Circuito do Exemplo 14.7-3. (*b*) O circuito no regime estacionário, antes do fechamento da chave.

Solução

Vamos escrever e resolver equações de malha. O circuito série que representa o capacitor e o indutor no domínio da frequência contém apenas fontes de tensão. Como é mais fácil lidar com fontes de tensão quando usamos equações de malha, escolhemos essa forma de representar as condições iniciais tanto do capacitor como do indutor. De acordo com a Figura 14.7-10*b*, as condições iniciais são $v_C(0) = 8$ V e $v_L(0) = Li_L(0) = 4$ V. A Figura 14.7-11*b* mostra a representação do circuito no domínio da frequência.

As equações de malha são

$$\left(1 + \frac{1}{s}\right) I_1(s) - \frac{1}{s} I_2(s) = \frac{12}{s} - \frac{8}{s}$$

e

$$-\frac{1}{s} I_1(s) + \left(1 + s + \frac{1}{s}\right) I_2(s) = 4 + \frac{8}{s}$$

Resolvendo este sistema de equações, obtemos

$$I_2(s) = \frac{4(s^2 + 3s + 3)}{s(s^2 + 2s + 2)}$$

A expansão em frações parciais mais conveniente é

$$\frac{I_2(s)}{4} = \frac{s^2 + 3s + 3}{s(s^2 + 2s + 2)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + D}{s^2 + 2s + 2}$$

o que nos dá $A = 1{,}5$, $B = -0{,}5$ e $D = 0$. Assim, temos

$$\frac{I_2(s)}{4} = \frac{1,5}{s} + \frac{-0,5s}{(s+1)^2+1}$$

Usando as Tabelas 14.2-1 e 14.2-2, obtemos

$$i_L(t) = i_2(t) = \{6 + 2\sqrt{2}\, e^{-t} \operatorname{sen}(t - 45°)\}\ \text{A} \quad \text{para } t > 0$$

Verificando o valor inicial de i_2, obtemos $i_2(0) = i_L(0) = 4$ A, o que mostra que os cálculos estão corretos. O valor final é $i_2(\infty) = 6$ A.

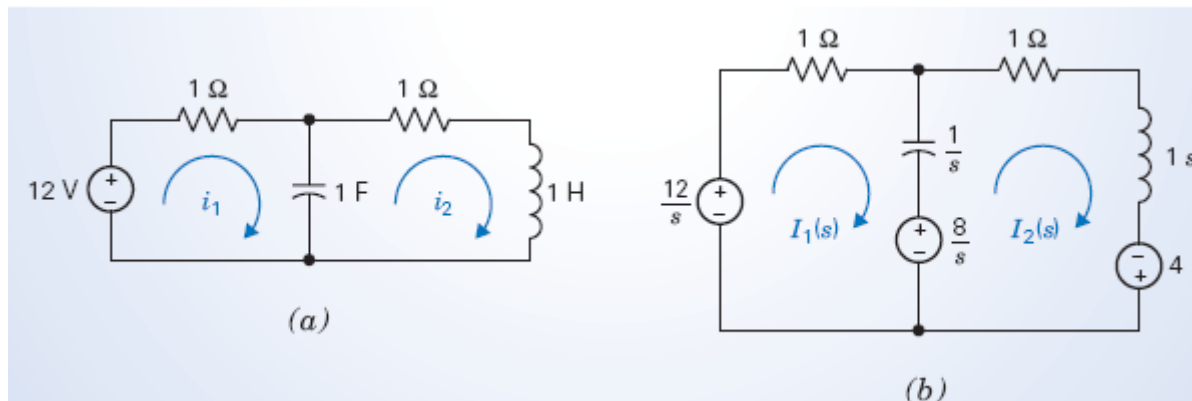



FIGURA 14.7-11 (*a*) Circuito com correntes de malha. (*b*) Representação do circuito no domínio da frequência, usando transformadas de Laplace.

EXEMPLO 14.7-4 Análise de um Circuito Usando Transformadas de Laplace

A chave do circuito da Figura 14.7-12*a* é fechada no instante $t = 0$. Determine a tensão $v(t)$ após o fechamento da chave.

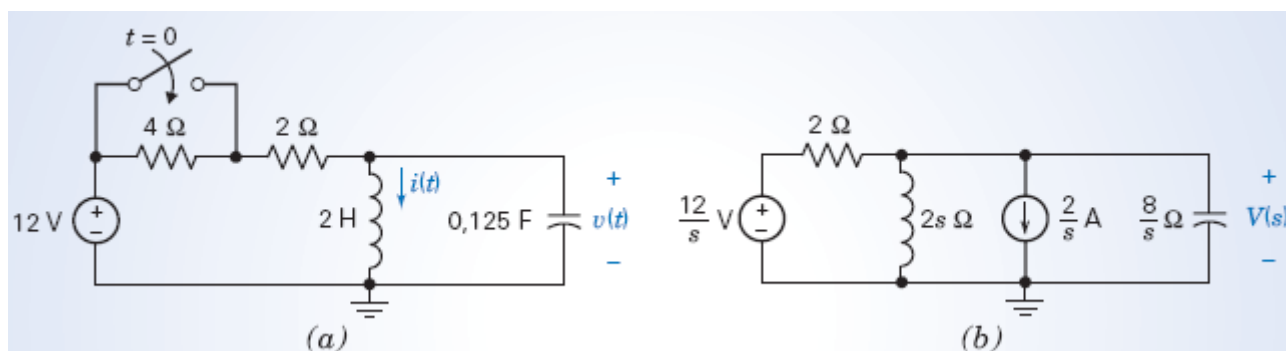



FIGURA 14.7-12 Representação do circuito do Exemplo 14.7-4 (*a*) no domínio do tempo e (*b*) no domínio da frequência, usando transformadas de Laplace.

Solução

Vamos escrever e resolver equações de nó. No domínio da frequência, usaremos circuitos paralelos para modelar o capacitor e o indutor porque esses circuitos contêm fontes de corrente. As condições iniciais são $i(0) = 2$ A e $v(0) = 0$ V. Como $v(0) = 0$, a corrente da fonte de corrente na representação do capacitor no domínio da frequência é zero. Uma fonte de corrente de corrente zero equivale a um circuito aberto. A Figura 14.7-12*b* mostra a representação do circuito no domínio da frequência depois que a chave é fechada.

Aplicando a LKC ao nó de cima do indutor, obtemos a equação

$$\frac{V(s) - \frac{12}{s}}{2} + \frac{V(s)}{2s} + \frac{2}{s} + \frac{V(s)}{\frac{8}{s}} = 0$$

Explicitando $V(s)$, temos

$$V(s) = \frac{32}{s^2 + 4s + 4} = \frac{32}{(s+2)^2}$$

Finalmente, tomamos a transformada inversa de Laplace para obter $v(t)$:

$$v(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{32}{(s+2)^2}\right] = 32te^{-2t}u(t) \text{ V}$$

EXERCÍCIO 14.7-1 Determine a tensão $v_C(t)$ e a corrente $i_C(t)$ para $t \geq 0$ no circuito da Figura E 14.7-1.

Sugestão:: $v_C(0) = 4$ V

Resposta: $v_C(t) = (6 - 2e^{-0,67t})u(t)$ V e $i_C(t) = \frac{2}{3}e^{-0,67t}u(t)$ A

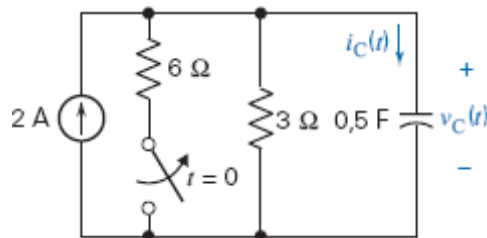



FIGURA E 14.7-1

14.8 Função de Transferência e Impedância

A **função de transferência** de um circuito é definida como a razão entre a transformada de Laplace da resposta do circuito e a transformada de Laplace da entrada do circuito quando as condições iniciais são nulas.*

No caso do circuito da Figura 14.8-1*a*, a entrada é a tensão da fonte de tensão, $v_1(t)$, e a saída é a tensão do resistor, $v_o(t)$. A função de transferência do circuito, representada pelo símbolo $H(s)$, é dada pela equação

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_1(s)} \qquad (14.8\text{-}1)$$

contanto que todas as condições iniciais sejam nulas. Nesse caso, a única condição inicial é a corrente no indutor; assim, devemos ter $i(0) = 0$.

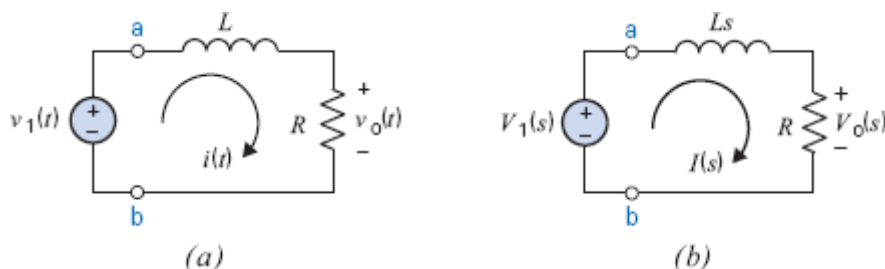



FIGURA 14.8-1 Representação de um circuito (*a*) no domínio do tempo e (*b*) no domínio da frequência, usando transformadas de Laplace.

A Eq. 14.8-1 pode ser escrita na forma

$$V_o(s) = H(s)V_1(s) \tag{14.8-2}$$

o que significa que a transformada de Laplace da saída é igual ao produto da função de transferência pela transformada de Laplace da entrada, contanto que todas as condições iniciais sejam nulas. Estamos ficando cansados de escrever "contanto que todas as condições iniciais sejam nulas". Uma saída sujeita à condição de que todas as condições iniciais sejam nulas é chamada de resposta de estado zero. Usando esta terminologia, podemos interpretar a Eq. 14.8-1 da seguinte forma: "A função de transferência é a razão entre a transformada de Laplace da resposta de estado zero e a transformada de Laplace da entrada." Analogamente, podemos interpretar a Eq. 14.82 da seguinte forma: "A transformada de Laplace da resposta de estado zero é o produto da função de transferência pela transformada de Laplace da entrada."

Dois casos especiais são muito importantes. Quando a entrada é uma função degrau, temos

$$V_1(s) = \mathscr{L}[u(t)] = \frac{1}{s}$$

e a Eq. 14.8-2 se torna

$$V_o(s) = \frac{H(s)}{s}$$

Nesse caso, a resposta de estado zero recebe o nome de resposta a um degrau, ou seja,

$$\text{resposta a um degrau} = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{H(s)}{s}\right] \tag{14.8-3}$$

Quando a entrada é uma função impulso, temos

$$V_1(s) = \mathscr{L}[\delta(t)] = 1$$

e a Eq. 14.8-2 se torna

$$V_o(s) = H(s)$$

Nesse caso, a resposta de estado zero é chamada de resposta a um impulso, ou seja,

$$\text{resposta a um impulso} = \mathscr{L}^{-1}[H(s)] \tag{14.8-4}$$

É importante notar que tanto a resposta a um degrau como a resposta a um impulso são respostas de estado zero, ou seja, respostas quando todas as condições iniciais são nulas.

Tanto a entrada como a saída de um circuito pode ser uma corrente ou uma tensão. Quando a entrada é uma corrente e a resposta é uma tensão, dizemos que a função de transferência é uma impedância. Quando a entrada é uma tensão e a resposta é uma corrente, dizemos que a função de transferência é uma admitância. Essa terminologia é coerente com o modo como os termos *impedância* e *admitância* foram definidos anteriormente. Considere, por exemplo, a linha da Tabela 14.7-1 correspondente ao capacitor e observe a representação no domínio da frequência do capacitor que utiliza uma fonte de tensão. A restrição de que a condição inicial seja zero, $v(0) = 0$, faz com que a tensão da fonte de tensão seja zero, ou seja, que a fonte de tensão seja substituída por um curto-circuito. Nesse caso, a representação do capacitor no domínio da frequência se reduz a um só componente. Considerando a corrente do capacitor como a entrada e a tensão do capacitor como a saída, a impedância do capacitor é dada por

$$Z_C(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = \frac{1}{Cs} \tag{14.8-5}$$

Observe agora a representação no domínio da frequência do capacitor que utiliza uma fonte de corrente. A restrição de que a condição inicial seja zero, $v(0) = 0$, faz com que a corrente da fonte de corrente seja zero, caso em que a fonte de corrente pode ser substituída por um circuito aberto. Mais uma vez, a representação do capacitor no domínio da frequência se reduz a um só componente e a impedância do capacitor é dada pela Eq. 14.8-5.

Um raciocínio semelhante mostra que a imposição de que as condições iniciais sejam nulas reduz a representação de um indutor no domínio da frequência a uma impedância,

$$Z_L(s) = Ls \qquad (14.8\text{-}6)$$

EXEMPLO 14.8-1 Função de Transferência e Resposta a um Degrau

No circuito da Figura 14.8-2, a entrada é a tensão da fonte de tensão, $v_i(t)$, e a saída é a tensão do resistor, $v_a(t)$. Determine a resposta do circuito a um degrau.

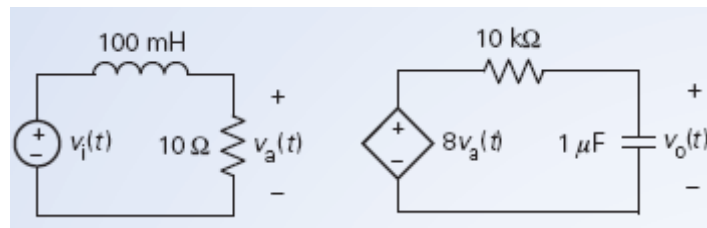



FIGURA 14.8-2 Circuito do Exemplo 14.8-1.

Solução

A Figura 14.8-3 mostra a representação do circuito da Figura 14.8-2 no domínio da frequência complexa, o que facilita a análise do circuito de dois modos:

1. A entrada $v_i(t)$, que é uma função degrau, passa a ser simplesmente $V_i(s) = L[u(t)] = 1/s$ V.
2. Como as condições iniciais são nulas, o capacitor e o indutor podem ser representados por impedâncias, sem necessidade de usar fontes de tensão ou de corrente para levar em conta as condições iniciais.

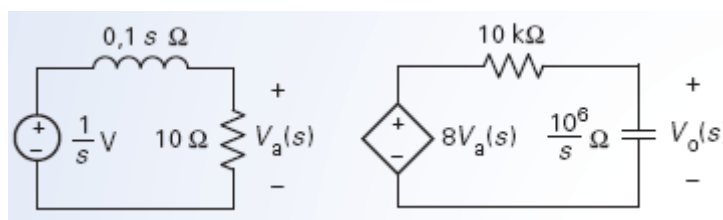



FIGURA 14.8-3 Representação do circuito do Exemplo 14.8-1 no domínio da frequência complexa, usada para calcular a resposta do circuito a um degrau.

Aplicando duas vezes o método da divisão de tensão ao circuito da Figura 14.8-3, temos

$$V_o(s) = \frac{\dfrac{10^6}{s}}{\dfrac{10^6}{s} + 10^4} 8V_a(s) \qquad \text{e} \qquad V_a(s) = \frac{10}{10 + 0{,}1s}\left(\frac{1}{s}\right)$$

Combinando as duas equações e executando algumas manipulações algébricas, obtemos

$$V_o(s) = \frac{80000}{(s+100)^2}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{80000}{s\,(s+100)^2}$$

o que nos dá, depois de uma expansão em frações parciais,

$$V_o(s) = \frac{80000}{s(s+100)^2} = \frac{8}{s} + \frac{8}{(s+100)} - \frac{800}{(s+100)^2}$$

Finalmente, tomando a transformada inversa de Laplace, obtemos

$$v_o(t) = [8 - 8(1 + 100t)e^{-100t})u(t)$$

Solução Alternativa

Em vez de calcular diretamente a resposta a um degrau, podemos determinar a função de transferência do circuito da Figura 14.8-2 e, em seguida, usar a Eq. 14.8-3 para calcular a resposta a um degrau a partir da função de transferência. Para determinar a função de transferência, representamos o circuito no domínio da frequência complexa, como mostra a Figura 14.8-4. (O circuito da Figura 14.8-4 é semelhante ao da Figura 14.8-3; a diferença é que, na Figura 14.8-3, a tensão de entrada foi considerada simplesmente como $v_i(t)$, já que não levamos em conta, desde o início, que se tratava de uma função degrau.)

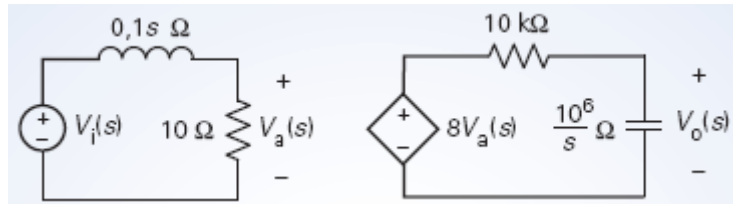



FIGURA 14.8-4 Representação do circuito do Exemplo 14.8-1 no domínio da frequência complexa, usada para calcular a função de transferência.

Aplicando duas vezes o método da divisão de tensão ao circuito da Figura 14.8-4 e executando algumas manipulações algébricas, obtemos a função de transferência

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{80000}{(s+100)^2}$$

Uma vez conhecida a função de transferência, podemos calcular a resposta do circuito a um degrau usando a Eq. 14.8-3:

$$\text{resposta a um degrau} = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{H(s)}{s}\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{80000}{s(s+100)^2}\right] = \left[8 - 8(1 + 100\,t)e^{-100\,t}\right] u(t)$$

EXEMPLO 14.8-2 Função de Transferência e Resposta a um Degrau

A entrada do circuito da Figura 14.8-5*a* é a tensão $v_i(t)$ e a saída é a tensão $v_o(t)$. Projete o circuito da Figura 14.8-5*a* para que a resposta a um impulso seja

$$v_o(t) = [4 - e^{-2t}(4\cos(4t) - 2\,\text{sen}(4t))]u(t)$$

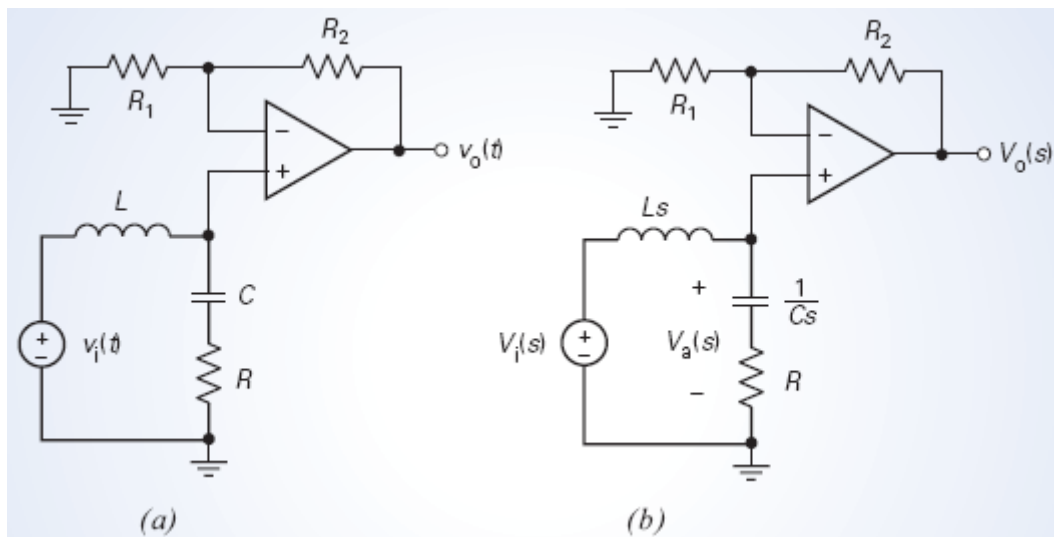



FIGURA 14.8-5 Circuito do Exemplo 14.8-2 representado (*a*) no domínio do tempo; (*b*) no domínio da frequência complexa.

Solução

Uma forma de resolver o problema é calcular a função de transferência duas vezes, uma a partir do circuito e outra a partir da resposta a um degrau. Em seguida, comparamos as duas soluções e escolhemos valores de R, L, C, R_1 e R_2 que tornem iguais as duas soluções.

Para começar, determinamos a função de transferência do circuito da Figura 14.8-5*a*. A Figura 14.8-5*b* mostra a representação do circuito no domínio da frequência complexa considerando nulas as condições iniciais, como deve ser feito no cálculo da função de transferência.

Usando o método da divisão de tensão, obtemos

$$V_a(s) = \frac{R + \dfrac{1}{Cs}}{Ls + R + \dfrac{1}{Cs}} V_i(s) = \frac{\dfrac{R}{L}s + \dfrac{1}{LC}}{s^2 + \dfrac{R}{L}s + \dfrac{1}{LC}} V_i(s) \qquad (14.8\text{-}7)$$

Reconhecendo a combinação de R_1, R_2 e o amplificador operacional como um amplificador não inversor, podemos escrever

$$V_o(s) = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) V_a(s) \qquad (14.8\text{-}8)$$

Combinando as Eqs. 14.8-7 e 14.8-8, obtemos a função de transferência:

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_1(s)} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{\dfrac{R}{L}s + \dfrac{1}{LC}}{s^2 + \dfrac{R}{L}s + \dfrac{1}{LC}} \qquad (14.8\text{-}9)$$

A função de transferência também pode ser obtida aplicando a Eq. 14.8-3 à transformada da tensão de saída:

$$\begin{aligned}
\frac{H(s)}{s} &= \mathscr{L}[4 - e^{-2t}(4\cos(4t) - 2\,\text{sen}\,(4t))] \\
&= \frac{4}{s} - \left[4\frac{s}{s^2+16} - 2\frac{4}{s^2+16}\right]_{s \leftarrow s+2} \\
&= \frac{4}{s} - \left[4\frac{s+2}{(s+2)^2+16} - \frac{8}{(s+2)^2+16}\right] = \frac{4}{s} - \frac{4s}{s^2+4s+20} = \frac{16s+80}{s(s^2+4s+20)}
\end{aligned}$$

o que nos dá

$$H(s) = \frac{16s + 80}{s^2 + 4s + 20} \tag{14.8-10}$$

Comparando as Eqs. 14.8-9 e 14.8-10, vemos que as duas funções de transferência serão iguais se

$$\frac{R}{L} = 4, \quad \frac{1}{LC} = 20 \text{ e } \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) = 4$$

Como existem cinco incógnitas e apenas três equações, o número de soluções é infinito. Uma solução possível é a seguinte:

$L = 0{,}5$ H, $C = 0{,}1$ F, $R = 2\ \Omega$, $R_1 = 10$ kΩ, e $R_2 = 30$ kΩ

EXEMPLO 14.8-3 Função de Transferência e Resposta a um Degrau

A entrada do circuito da Figura 14.8-6*a* é a tensão $v_i(t)$ e a saída é a tensão $v_o(t)$. Projete o circuito da Figura 14.8-6*a* para que a resposta a um impulso seja

$$v_o(t) = [1 - (10^4 t + 1)e^{-10{,}000t}]u(t) \text{ V}$$

Solução

Como no Exemplo 14.8-2, vamos calcular a função de transferência duas vezes, uma a partir do circuito e outra a partir da resposta a um degrau. Em seguida, comparamos as duas soluções e escolhemos valores de *R*, *L*, *C* que tornem iguais as duas soluções.

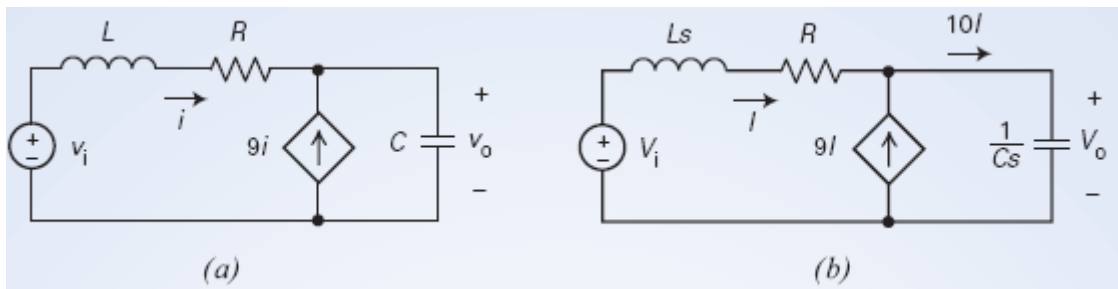



FIGURA 14.8-6 Circuito do Exemplo 14.8-3 representado (*a*) no domínio do tempo; (*b*) no domínio da frequência complexa.

Para começar, determinamos a função de transferência do circuito da Figura 14.8-6*a*. A Figura 14.8-6*b* mostra a representação do circuito no domínio da frequência complexa considerando nulas as condições iniciais, como deve ser feito no cálculo da função de transferência.

Já usamos a LKC na Figura 14.8-6*b* ao chamar de 10*I* a corrente do capacitor. Aplicando a LKT à malha externa do circuito, obtemos

$$V_i = Ls\,I + R\,I + \frac{1}{Cs}(10\,I) \Rightarrow I = \frac{1}{Ls + R + \frac{10}{Cs}} V_i \tag{14.8-11}$$

Aplicando a lei de Ohm ao capacitor, temos:

$$V_o = \frac{1}{Cs}(10\,I) \tag{14.8-12}$$

Assim, a função de transferência é

$$H = \frac{V_o}{V_i} = \frac{\frac{10}{C\,s}}{Ls + R + \frac{10}{Cs}} = \frac{\frac{10}{C\,L}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{10}{C\,L}} \tag{14.8-13}$$

A função de transferência também pode ser obtida aplicando a Eq. 14.8-3 à transformada da tensão de saída:

$$\begin{aligned}
\frac{H}{s} &= \mathcal{L}\left[1 - (10^4 t + 1)e^{-10.000t}\right] \\
&= \frac{1}{s} - \left[\frac{1}{s} + \frac{10^4}{s^2}\right]_{s \leftarrow s+10.000} \\
&= \frac{1}{s} + \frac{-1}{s + 10.000} + \frac{-10^4}{(s + 10.000)^2} \\
&= \frac{1(s + 10.000)^2 - 1s(s + 10.000) - 10^4}{s(s + 10.000)^2} = \frac{10^8}{s(s + 10.000)^2}
\end{aligned} \tag{14.8-14}$$

o que nos dá

$$H = \frac{10^8}{s^2 + 20.000 + 10^8} \tag{14.8-15}$$

Comparando as Eqs. 14.8-13 e 14.8-15, vemos que as duas funções de transferência serão iguais se

$$\frac{\frac{10}{C\,L}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{10}{C\,L}} = \frac{10^8}{s^2 + 20.000 + 10^8} \tag{14.8-16}$$

A Eq. 14.8-16 requer

$$\frac{R}{L} = 20.000 \quad \text{e} \quad \frac{10}{C\,L} = 10^8 \tag{14.8-17}$$

Como existem três incógnitas e apenas duas equações, o número de soluções é infinito. Uma solução possível é a seguinte:

$R = 200\ \Omega$, $L = 10$ mH e $C = 10\ \mu$F

EXERCÍCIO 14.8-1 A função de transferência de um circuito é $H(s) = \frac{-5s}{s^2 + 15s + 50}$. Determine a resposta do circuito a um impulso e a um degrau.

Respostas: **(a)** Resposta a um impulso: $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{5}{s+5} - \frac{10}{s+10}\right] = (5e^{-5t} - 10e^{-10t})u(t)$

(b) Resposta a um degrau: $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+10} - \frac{1}{s+5}\right] = (e^{-10t} - e^{-5t})u(t)$

EXERCÍCIO 14.8-2 A resposta de um circuito a um impulso é $h(t) = 5e^{-2t}$ sen $(4t)\,u(t)$. Determine a resposta do circuito a um degrau.

Sugestão:: $H(s) = \mathscr{L}[5e^{-2t}\,\text{sen}(4t)u(t)] = \dfrac{5(4)}{(s+2)^2+4^2} = \dfrac{20}{s^2+4s+20}$

Resposta: $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{H(s)}{s}\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s} - \dfrac{s+4}{s^2+4s+20}\right] = \left[1 - e^{-2t}\left(\cos 4t + \dfrac{1}{2}\,\text{sen}\,4t\right)\right]u(t)$

14.9 Convolução

Nesta seção, vamos mostrar que é possível calcular a resposta de um circuito linear invariante no tempo a uma excitação arbitrária a partir da resposta do mesmo circuito a um impulso. Essa situação está ilustrada na Figura 14.9-1, em que $x(t)$ é o sinal de entrada, $y(t)$ é o sinal de saída e $h(t)$ é a resposta do circuito a um impulso. Vamos supor que $x(t) = 0$ para $t < 0$ porque $t = 0$ é o instante no qual o sinal de entrada é aplicado ao circuito e que $h(t) = 0$ para $t < 0$ porque $t = 0$ também é o instante no qual o impulso é aplicado e a reposta não pode ocorrer antes da aplicação do impulso.

$x(t) \longrightarrow$ [$h(t)$] $\longrightarrow y(t)$

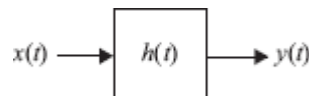



FIGURA 14.9-1 Um circuito linear invariante no tempo.

Para que a saída possa ser calculada corretamente por esse método, é preciso que o circuito seja linear e invariante no tempo. Para explicar o motivo, vamos usar a notação

$$x(t) \rightarrow y(t)$$

para indicar que a entrada $x(t)$ produz a saída $y(t)$.

Se o circuito for linear,

$$k\,x(t) \rightarrow k\,y(t)$$

em que k é uma constante.

[Suponha que $k = 2$. Se entrada for $2x(t)$, ou seja, duas vezes maior que a entrada $x(t)$, a saída será $2y(t)$, ou seja, duas vezes maior que a saída $y(t)$.]

Se o circuito for invariante no tempo,

$$x(t-\tau) \rightarrow k\,y(t-\tau)$$

em que t é uma constante.

[Suponha que $\tau = 4$ s. Se a entrada for $x(t-4)$, ou seja, se estiver atrasada de 4 s em relação a $x(t)$, a saída será $y(t-4)$, ou seja, estará atrasada de 4 s em relação a $y(t)$.

Se o circuito for linear e invariante no tempo, teremos, portanto,

$$k\,x(t-\tau) \rightarrow k\,y(t-\tau)$$

Vamos agora fazer uso do fato de que a resposta do circuito a um impulso é $h(t)$. Isso significa que se a entrada do circuito for $x(t) = \delta(t)$, a saída será $y(t) = h(t)$, ou, simbolicamente,

$$\delta(t) \rightarrow h(t)$$

o que significa que, em um circuito linear e invariante no tempo,

$$k\,\delta(t-\tau) \rightarrow k\,h(t-\tau) \qquad (14.9\text{-}1)$$

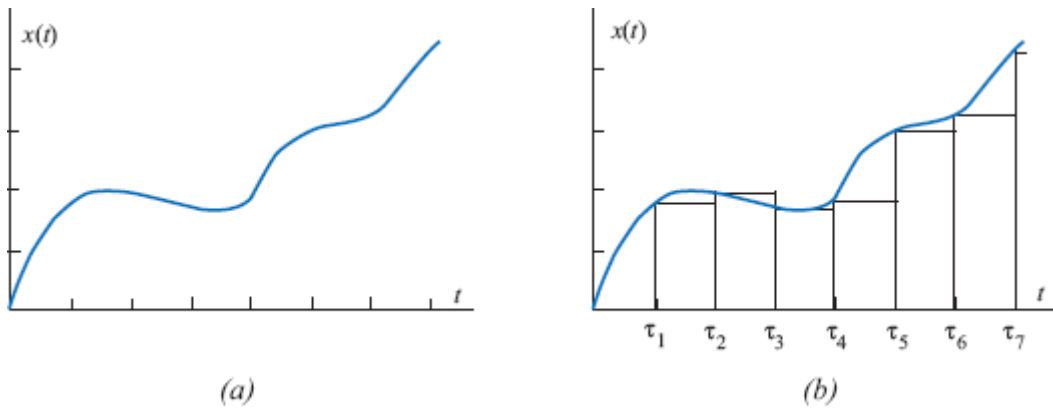



FIGURA 14.9-2 (*a*) Sinal de entrada de forma irregular. (*b*) Aproximação do sinal por uma sequência de pulsos retangulares.

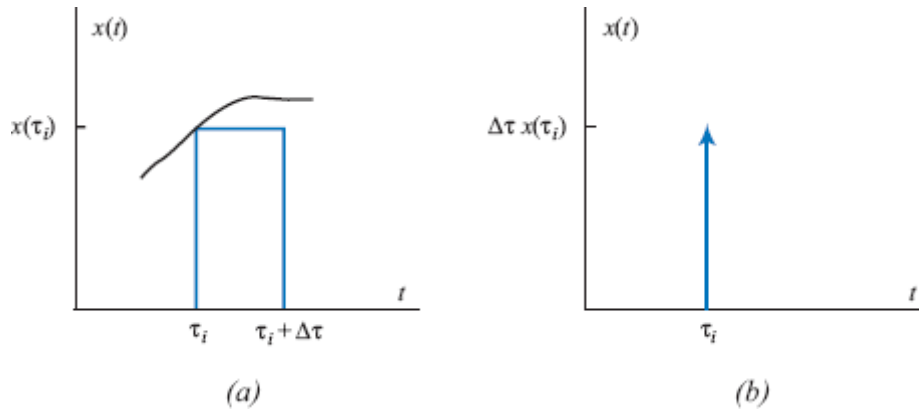



FIGURA 14.9-3 (*a*) Um dos pulsos da aproximação do sinal de entrada e (*b*) o impulso correspondente.

Considere o sinal de entrada irregular $x(t)$ da Figura 14.9-2*a*. Esse sinal pode ser aproximado por uma sequência de pulsos retangulares, como mostra a Figura 14.9-2*b*. Os instantes τ_1, τ_2, τ_3, . . . estão uniformemente espaçados, ou seja,

$$\tau_{i+1} = \tau_i + \Delta\tau \text{ para } i = 1, 2, 3, ...$$

em que o incremento $\Delta\tau$ não depende do índice i. Quanto menor o valor de $\Delta\tau$, menor o erro da aproximação.

A Figura 14.9-3(*a*) mostra um dos pulsos da aproximação do sinal de entrada. Note que a área do pulso é $x(\tau_i)\Delta\tau$. Se o incremento de tempo $\Delta\tau$ é pequeno, o pulso pode ser aproximado por uma função impulso de mesma área, $x(\tau_i)\Delta\tau\delta(t - \tau_i)$, como mostra a Figura 14.9-3*b*.

O sinal de entrada pode ser representado pela soma das funções impulso que aproximam os pulsos da Figura 14.9-2*b*,

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x(\tau_i)\Delta\tau\delta(t - \tau_i) \qquad (14.9\text{-}2)$$

Como o circuito é linear, a resposta à soma de funções impulso é igual à soma das respostas individuais às funções impulso. Como o circuito é invariante no tempo, as respostas individuais às funções impulso são dadas por

$$[x(\tau_i)\Delta\tau)\delta(t - \tau_i)] \rightarrow [x(\tau)\Delta\tau)\ h(t - \tau_i)] \text{ para } i = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

A resposta do circuito é, portanto,

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x(\tau_i)\Delta\tau\, h(t - \tau_i) = \sum_{i=0}^{\infty} x(\tau_i) h(t - \tau_i)\Delta\tau \qquad (14.9\text{-}3)$$

Para $\Delta\tau \rightarrow 0$, o somatório se torna uma integral e temos

$$y(t) = \int_0^\infty x(\tau)h(t-\tau)d\tau \qquad (14.9\text{-}4)$$

A integral do lado direito da Eq. 14.9-4 é chamada de integral de convolução e representada pelo símbolo $x(t)*h(t)$, ou seja,

$$y(t) = x(t)^* h(t) \qquad (14.9\text{-}5)$$

De acordo com a Eq. 14.9-5, a saída do circuito linear da Figura 14.9-1 é a convolução da entrada com a resposta a um impulso.

O programa MATLAB dispõe de uma função chamada conv que executa convoluções. No exemplo a seguir, essa função do MATLAB é usada para gerar o gráfico da saída de um circuito linear invariante no tempo.

EXEMPLO 14.9-1 Convolução

Plote a saída $y(t)$ do circuito da Figura 14.9-1 se a entrada $x(t)$ é a forma de onda triangular da Figura 14.9-4 e a resposta do circuito a um impulso é

$$h(t) = \frac{5}{4}\left(e^{-t} - e^{-5t}\right)u(t)$$

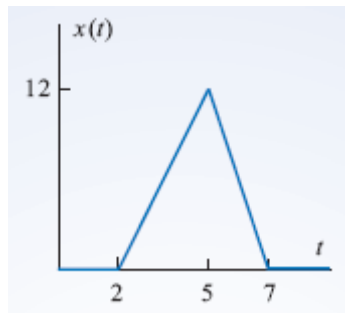



FIGURA 14.9-4 Forma de onda da entrada do Exemplo 14.9-1.

Solução

A Figura 14.9-5 mostra um arquivo de entrada do MATLAB que gera o gráfico pedido. Os comentários do arquivo de entrada do MATLAB mostram que o problema pode ser resolvido em quatro etapas:

1. Obter uma lista de instantes de tempo uniformemente espaçados.
2. Obter a entrada $x(t)$ e a resposta a um impulso $h(t)$.
3. Calcular a convolução $x(t)*h(t)$.
4. Plotar a saída $y(t)$.

Alguns comentários podem ajudar o leitor a compreender o arquivo de entrada do MATLAB. Em primeiro lugar, usando as equações das linhas retas que constituem a forma de onda triangular do sinal de entrada, temos

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad t \le 2 \\ 4t - 8 & \text{para} \quad 2 \le t \le 5 \\ -4t + 42 & \text{para} \quad 5 \le t \le 7 \\ 0 & \text{para} \quad t \ge 7 \end{cases}$$

Esse conjunto de equações, que permitem calcular o valor de $x(\tau_1)$ para todos os valores desejados de τ_1, é implementado em um bloco "if-then-else" do MATLAB. Como, de acordo com a Eq. 14.9-2, a intensidade dos impulsos é $x(\tau_1)\Delta\tau$, precisamos multiplicar os valores de $x(t_1)$ pelo incremento de tempo, o que é feito na linha "x = x*dt" do arquivo de entrada do MATLAB.

O resultado final dos cálculos está em duas listas, a lista t, com os valores do tempo, e a lista y, com os valores da convolução. A função de plotagem do MATLAB requer duas listas que devem ter o mesmo número de elementos. Como, no nosso caso, o número de elementos de y é maior que o número de elementos de t, a expressão do MATLAB "(1:length(t))" é usada para truncar a lista y para que tenha o mesmo número de elementos que a lista t.

A Figura 14.9-6 mostra o gráfico produzido pelo programa MATLAB.

```
% convol.m - plotar o gráfico do Exemplo 14.9-1
% ------------------------------------------------------------
%  Obter uma lista de instantes de tempo igualmente espaçados
% ------------------------------------------------------------
t0 = 0; % instante inicial
tf = 12;  % instante final
N = 5000;  % número de pontos
dt = (tf-t0)/N; % incremento
t = t0:dt:tf; % tempo em segundos

% ------------------------------------------------------------
% Obter a entrada x(t) e a resposta a um impulso h(t)
% ------------------------------------------------------------
for k = 1 : length(t)
    if t(k) < 2
        x(k) = 0;
    elseif t(k) < 5
        x(k) = -8 + 4*t(k); %
    elseif t(k) < 7
        x(k) = 42 - 6*t(k); %
    else
        x(k) = 0;
    end
end
x=x*dt;
h=1.25*exp(-t)-1.25*exp(-5*t);

% ------------------------------------------------------------
%             Calcular a convolução
% ------------------------------------------------------------
x(t)*h(t);

% ------------------------------------------------------------
%             Plotar a saída y(t)
% ------------------------------------------------------------
plot(t,y(1:length(t)))
axis([t0, tf, 0, 9])
xlabel('t')
ylabel('y(t)')
```

FIGURA 14.9-5 Arquivo de entrada do MATLAB do Exemplo 14.9-1.

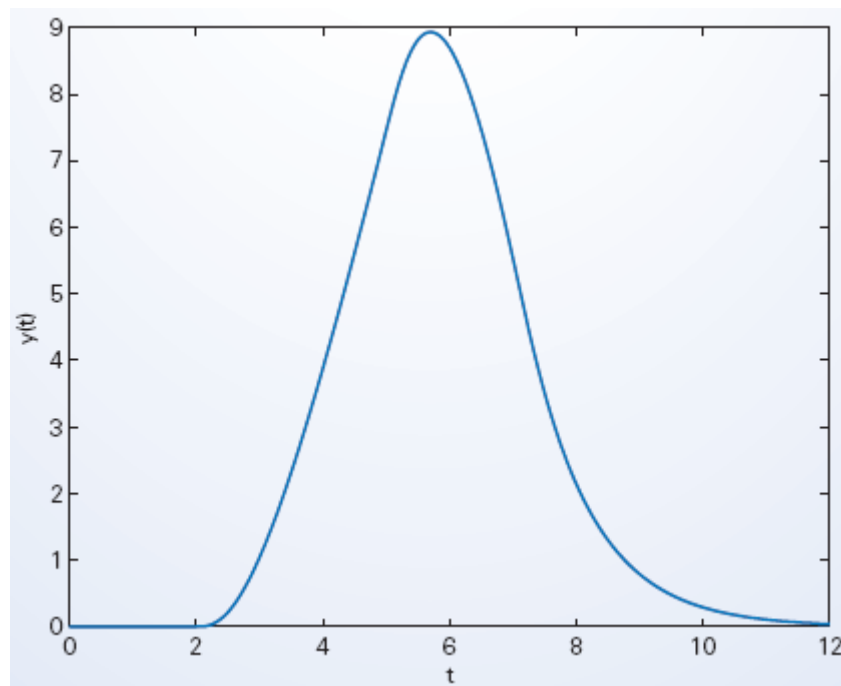



FIGURA 14.9-6 Gráfico do Exemplo 14.9-1.

14.10 Estabilidade

Dizemos que um circuito é *estável* se a resposta a qualquer sinal de entrada finito é um sinal de saída finito. Se um circuito não é estável, é chamado de *instável*.

Produzir uma resposta finita a uma entrada finita pode ser considerado um comportamento razoável. Na maioria dos casos, os circuitos estáveis são potencialmente úteis e os circuitos instáveis são potencialmente perigosos. Quando analisamos um circuito do ponto de vista da estabilidade, provavelmente estamos tentando fazer uma de duas coisas. Uma delas é investigar um circuito para saber se é aproveitável; rejeitaremos o circuito se for instável. A outra é escolher os valores dos parâmetros do circuito para assegurar que seja estável.

Considere um circuito representado pela função de transferência $H(s)$. Fatorando o denominador da função de transferência, obtemos

$$H(s) = \frac{N(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_N)}$$

As constantes p_i são os polos da função da função de transferência, também chamados de polos do circuito. Os polos podem ser números reais ou complexos. Os polos complexos sempre aparecem na forma de pares de complexos conjugados; assim, por exemplo, se $-2 + j3$ é um polo, $-2 - j3$ também é um polo.

Um circuito é **estável** se, e apenas se, a parte real de todos os polos é negativa.

(Isso significa também que todos os polos reais devem ser negativos.) Outra forma de dizer a mesma coisa é afirmar que um circuito é estável se, e apenas se, todos os polos estão situados no semiplano esquerdo do plano s.

Podemos usar a resposta a um impulso, $h(t)$, para determinar se um circuito é estável. Um circuito é estável se, e apenas se, sua resposta a um impulso satisfaz a condição

$$\lim_{t \to \infty} |h(t)| = 0$$

Vamos mostrar que os dois testes de estabilidade, um em termos de $H(s)$ e o outro em termos de $h(s)$, são equivalentes. Suponhamos, por conveniência, que todos os polos de $H(s)$ são reais. A resposta a um impulso é dada por

$$h(t) = \mathscr{L}^{-1}[H(s)] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{N(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_N)}\right] = \sum_{i=1}^{N} A_i e^{p_i t} u(t)$$

Se o circuito é instável, pelo menos um dos polos tem um valor positivo, como, por exemplo, $p_4 = 6$. Em consequência, a resposta a um impulso inclui o termo A_4e^{6t} e $|A_4e^{6t}| \to \infty$ para $t \to \infty$, de modo que $\lim_{t\to\infty}|h(t)| = \infty$. Por outro lado, se o circuito é estável, todos os polos têm valores negativos. Assim, $\left|A_i e^{p_i t}\right| \to 0$ para $t \to \infty$ e portanto $\lim_{t\to\infty}|h(t)| = 0$.

A função de transferência $\mathbf{H}(\omega)$ de um circuito estável pode ser obtida a partir da função de transferência, $H(s)$, fazendo $s = j\omega$:

$$\mathbf{H}(\omega) = |H(s)|_{s=j\omega}$$

(Essa igualdade se aplica apenas aos circuitos estáveis. Como os circuitos instáveis não possuem um regime estacionário, não apresentam uma resposta estacionária e, portanto, não é possível definir uma função de transferência que dependa apenas de ω.)

EXEMPLO 14.10-1 Estabilidade

A entrada do circuito da Figura 14.10-1 é a tensão $v_i(t)$ da fonte de tensão independente e a saída é a tensão $v_o(t)$ da fonte de tensão dependente. A função de transferência do circuito é

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{\dfrac{k}{RC}s}{s^2 + \dfrac{4-k}{RC}s + \dfrac{2}{R^2C^2}} = \frac{ks}{s^2 + (4-k)s + 2}$$

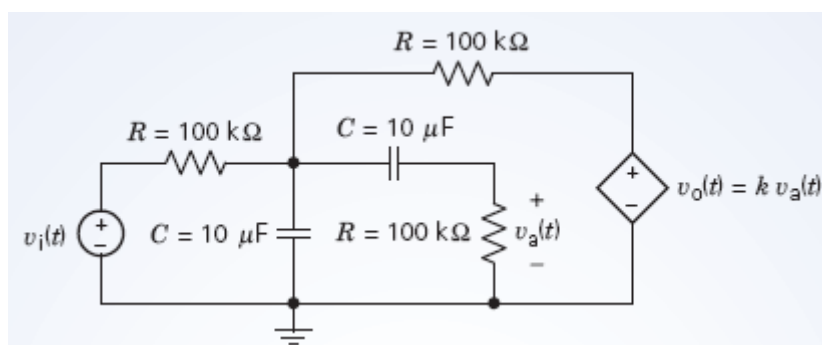



FIGURA 14.10-1 Circuito do Exemplo 14.10-1.

Determine o seguinte:

(a) A resposta estacionária para $v_i(t) = 5 \cos 2t$ V e um ganho $k = 3$ V/V da FTCT

(b) A resposta a um impulso para $k = 4 - 2\sqrt{2} = 1{,}17$ V/V

(c) A resposta a um impulso para $k = 4 + 2\sqrt{2} = 6{,}83$ V/V

Solução

Os polos da função de transferência são $p_{1,2} = \dfrac{-(4-k) \pm \sqrt{(4-k)^2 - 8}}{2}$

(a)

Para $k = 3$ V/V, os polos são $p_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2} = \dfrac{-1 \pm j7}{2}$ e, portanto, o circuito é estável. A função de transferência é

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{3s}{s^2 + s + 2}$$

Como o circuito é estável para $k = 3$ V/V, podemos determinar a função de transferência $\mathbf{H}(\omega)$ fazendo $s = j\omega$ na função de transferência $H(s)$.

$$\frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_i(\omega)} = \mathbf{H}(\omega) = H(s)_{s=j\omega} = \left.\frac{3s}{s^2 + s + 2}\right|_{s=j\omega} = \frac{3j\omega}{(2+\omega^2) + j\omega}$$

A entrada é $v_i(t) = 5 \cos 2t$ V. O fasor da resposta estacionária pode ser determinado multiplicando a função de transferência para w = 2 rad/s pelo fasor da entrada:

$$\mathbf{V}_o(\omega) = \mathbf{H}(\mathrm{v})|_{\omega=2} \times \mathbf{V}_i(\omega) = \left(\left.\frac{3j\omega}{(2-\omega^2) + j\omega}\right|_{\omega=2}\right)(5\angle 0^\circ) = \left(\frac{j6}{-2+j2}\right)(5\angle 0^\circ) = 10{,}61\angle -45^\circ$$

A resposta estacionária é, portanto, $v_o(t) = 10{,}61 \cos(2t - 45^\circ)$ V.

(b)

Para $k = 4 - 2\sqrt{2}$, os polos são $p_{1,2} = \dfrac{-2\sqrt{2} \pm \sqrt{0}}{2} = -\sqrt{2}$ e, portanto, o circuito é estável. A função de transferência é

$$H(s) = \frac{1{,}17s}{\left(s+\sqrt{2}\right)^2} = \frac{1{,}17}{\left(s+\sqrt{2}\right)} - \frac{1{,}17\sqrt{2}}{\left(s+\sqrt{2}\right)^2}$$

A resposta a um impulso é

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = 1{,}17e^{-\sqrt{2}t}\left(1 - \sqrt{2}t\right)u(t)$$

Vemos que, para $k = 4 - 2\sqrt{2}$, o circuito é estável e $\lim_{t\to\infty} |h(t)| = 0$.

(c)

Para $k = 4 + 2\sqrt{2}$, os polos são $p_{1,2} = \dfrac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{0}}{2} = \sqrt{2}$ e, portanto, o circuito não é estável. A função de transferência é

$$H(s) = \frac{6{,}83s}{\left(s-\sqrt{2}\right)^2} = \frac{6{,}83}{\left(s-\sqrt{2}\right)} + \frac{6{,}83\sqrt{2}}{\left(s-\sqrt{2}\right)^2}$$

A resposta a um impulso é

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = 6{,}83e^{\sqrt{2}t}\left(1 + \sqrt{2}t\right)u(t)$$

Vemos que, para $k = 4 + 2\sqrt{2}$, o circuito é instável e $\lim_{t\to\infty} |h(t)| = \infty$.

EXERCÍCIO 14.10-1 A entrada de um circuito é a tensão $v_i(t)$. A saída é a tensão $v_o(t)$. A função de transferência do circuito é

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{ks}{s^2 + (3-k)s + 2}$$

Determine o seguinte:

(a) A resposta estacionária para $v_i(t) = 5 \cos 2t$ V e um ganho $k = 2$ V/V da FTCT

(b) A resposta a um impulso para $k = 3 - 2\sqrt{2} = 0{,}17$ V/V

(c) A resposta a um impulso para $k = 3 + 2\sqrt{2} = 5{,}83$ V/V

Respostas: **(a)** $v_o(t) = 7{,}07 \cos(2t - 45°)$ V

(b) $h(t) = 0{,}17\, e^{-\sqrt{2}t}\left(1 - \sqrt{2}t\right)u(t)$

(c) $h(t) = 5{,}83\, e^{\sqrt{2}t}\left(1 + \sqrt{2}t\right)u(t)$

14.11 *Expansão em Frações Parciais Usando o MATLAB*

O programa MATLAB dispõe de uma função chamada *residue* que realiza a expansão em frações parciais de funções de transferência. Considere uma função de transferência da forma

$$H(s) = \frac{b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s^1 + b_0 s^0}{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s^1 + a_0 s^0} \tag{14.11-1}$$

Na Eq. 14.11-1, a função de transferência está representada como a razão entre dois polinômios em s. No MATLAB, a função de transferência da Eq. 14.11-1 pode ser representada por duas listas. Uma lista especifica os coeficientes do polinômio do numerador; a outra lista especifica os coeficientes do polinômio do denominador. Eis um exemplo:

$$\text{num} = [b_3 \quad b_2 \quad b_1 \quad b_0]$$

e

$$\text{den} = [a_3 \quad a_2 \quad a_1 \quad a_0]$$

(Neste caso, os dois polinômios são de terceiro grau, mas os polinômios podem ter graus diferentes.)

Uma expansão em frações parciais pode ser usada para representar $H(s)$ da seguinte forma:

$$H(s) = \frac{R_1}{s - p_1} + \frac{R_2}{s - p_2} + \frac{R_3}{s - p_3} + k(s) \tag{14.11-2}$$

em que R_1, R_2 e R_3 recebem o nome de resíduos e p_1, p_2 e p_3 são os polos. Tanto os resíduos como os polos podem ser números complexos. O termo $k(s)$ é um polinômio em s. O MATLAB representa essa forma da função de transferência por meio de três listas:

$$R = [R_1 \quad R_2 \quad R_3]$$

é uma lista dos resíduos,

$$p = [p_1 \quad p_2 \quad p_3]$$

é uma lista dos polos e

$$k = [c_2 \quad c_1 \quad c_0]$$

é a lista dos coeficientes do polinômio $k(s)$.

O comando do MATLAB

[R, p, k] = residue (num,den)

executa a expansão em frações parciais, calculando os polos e resíduos a partir dos coeficientes dos polinômios do numerador e do denominador. O comando do MATLAB

[n, d] = residue (R, P, k)

realiza a operação inversa, calculando os coeficientes dos polinômios do numerador e do denominador a partir dos polos e dos resíduos.

```
MATLAB
File  Edit  Debug  Desktop  Window  Help
>> num = [1 2 3 4];
>> den = [1 6 11 6];
>> [R, p, k] = residue(num, den)

R =

   -7.0000
    2.0000
    1.0000


p =

   -3.0000
   -2.0000
   -1.0000


k =

     1

>> [n, d] = residue(R, p, k)

n =

    1.0000    2.0000    3.0000    4.0000


d =

    1.0000    6.0000   11.0000    6.0000
Start
```

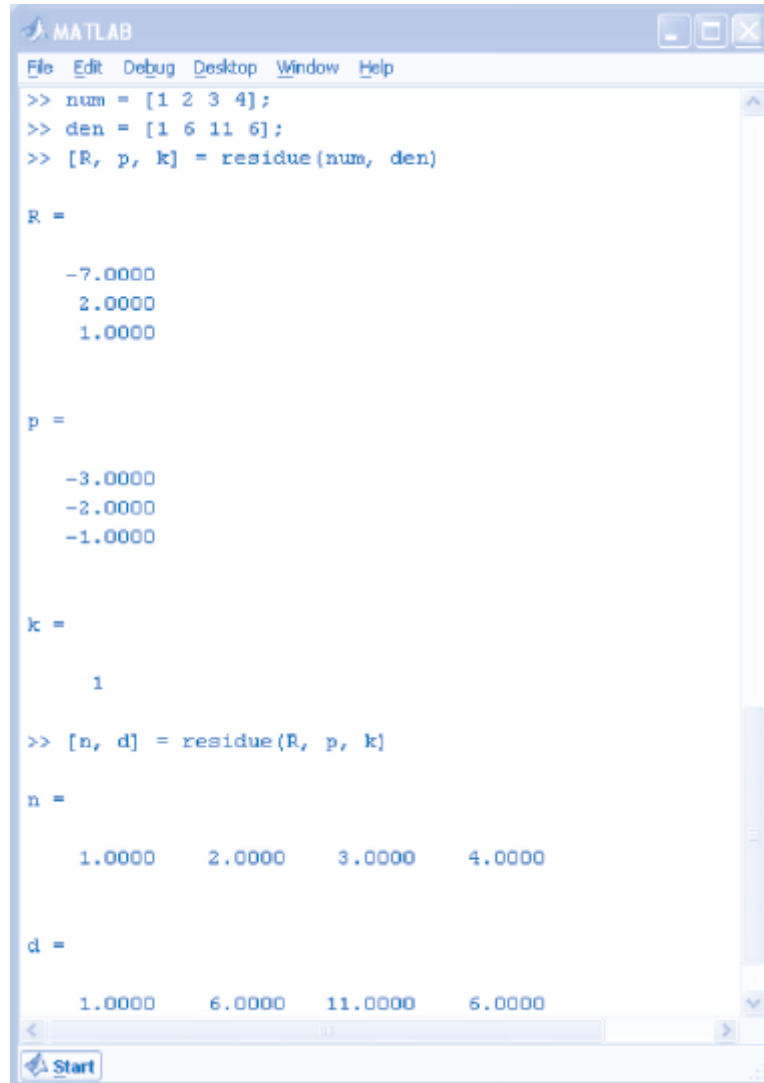



FIGURA 14.11-1 Uso do programa MATLAB para realizar uma expansão em frações parciais.

A Figura 14.11-1 mostra uma tela do MATLAB que ilustra o processo. Nesse exemplo, a expansão em frações parciais de

$$H(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + 3s + 4}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

resulta na expressão

$$H(s) = \frac{-7}{s+3} + \frac{2}{s+2} + \frac{1}{s+1} + 1$$

Os exemplos a seguir ilustram o uso do MATLAB para determinar a transformação inversa de Laplace de funções com polos repetidos e com polos complexos.

EXEMPLO 14.11-1 Polos Reais Repetidos

Determine a transformada inversa de Laplace da função

$$V(s) = \frac{12}{s(s^2 + 8s + 16)}$$

Solução

Em primeiro lugar, vamos resolver o problema sem usar o programa MATLAB. Notando que $s^2 + 8s + 16 = (s + 4)^2$, escrevemos a seguinte expansão em frações parciais:

$$V(s) = \frac{12}{s(s^2 + 8s + 16)} + \frac{12}{s(s+4)^2} = \frac{k}{s+4} + \frac{-3}{(s+4)^2} + \frac{\frac{3}{4}}{s}$$

Para determinar o valor da constante k, multiplicamos ambos os membros da equação por $s(s + 4)^2$:

$$12 = ks(s+4) - 3s + \frac{3}{4}(s+4)^2 = \left(\frac{3}{4} + k\right)s^2 + (3 + 4k)s + 12 \quad \Rightarrow k = -\frac{3}{4}$$

Finalmente,

$$v(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{-\frac{3}{4}}{s+4} + \frac{-3}{(s+4)^2} + \frac{\frac{3}{4}}{s}\right] = \left(\frac{3}{4} - e^{-4t}\left(\frac{3}{4} + 3t\right)\right)u(t)\ \text{V}$$

Vamos agora executar a expansão em frações parciais usando a função residue do MATLAB:

```
>>num = [12];
>>den = [1 8 16 0];
>>[r, p] = residue(num, den)
```

MATLAB responds

```
r =
    -0.7500
    -3.0000
     0.7500
P =
    -4
    -4
     0
```

Um polo repetido de multiplicidade m é indicado m vezes pelo MATLAB e corresponde aos termos

$$\frac{r_1}{s-p}, \frac{r_2}{(s-p)^2}, \ldots \frac{r_m}{(s-p)^m}$$

na ordem crescente das potências de $s - p$. As constantes $r_1, r_2, \ldots, r_m$ são os resíduos correspondentes, também na ordem crescente das potências de $s - p$. No caso que estamos analisando, a polo $p = -4$ tem multiplicidade 2 e os primeiros dois termos da expansão em frações parciais são

$$\frac{-0{,}75}{s-(-4)}+\frac{-3}{(s-(-4))^2}=\frac{-0{,}75}{s+4}+\frac{-3}{(s+4)^2}$$

A expansão completa em frações parciais é

$$\frac{-0{,}75}{s-(-4)}+\frac{-3}{(s-(-4))^2}+\frac{0{,}75}{s-(0)}=\frac{-0{,}75}{s+4}+\frac{-3}{(s+4)^2}+\frac{0{,}75}{s}$$

Finalmente,

$$v(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-0{,}75}{s+4}+\frac{-3}{(s+4)^2}+\frac{0{,}75}{s}\right]=\left(0{,}75-e^{-4t}(0{,}75+3t)\right)u(t)\text{ V}$$

que é o mesmo resultado obtido anteriormente.

EXEMPLO 14.11-2 Polos Complexos

Determine a transformada inversa de Laplace da função

$$V(s)=\frac{12s+78}{s^2+8s+52}$$

Solução

Em primeiro lugar, vamos resolver o problema sem usar o MATLAB. Note que o denominador não pode ser faturado em números reais. Vamos completar o quadrado do denominador:

$$V(s)=\frac{12s+78}{s^2+8s+52}=\frac{12s+78}{(s^2+8s+16)+36}=\frac{12s+78}{(s+4)^2+36}=\frac{12(s+4)+30}{(s+4)^2+36}=\frac{12(s+4)}{(s+4)^2+6^2}+\frac{5(6)}{(s+4)^2+6^2}$$

Em seguida, vamos usar a propriedade $e^{-at}f(t)\leftrightarrow F(s+a)$ e os pares de transformadas de Laplace

$$\operatorname{sen}\omega t \text{ para } t\geq 0 \quad\leftrightarrow\quad \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \quad \text{e} \quad \cos\omega t \text{ para } t\geq 0\leftrightarrow\frac{s}{s^2+\omega^2}$$

para obter a transformada inversa de Laplace:

$$v(t)=e^{-4t}\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{12s}{s^2+6^2}+\frac{5(6)}{s^2+6^2}\right]=e^{-4t}[12\cos(6t)+5\operatorname{sen}(6t)]\text{ para } t>0$$

Vamos agora usar o MATLAB para executar a expansão em frações parciais. Para começar, entramos com os polinômios do numerador e o denominador como vetores, colocando os coeficientes na ordem crescente de potências de s:

```
>>num = [12 78];
>>den = [1 8 52];
```

Em seguida, o comando

```
>>[r, p] = residue(num, den)
```

faz com que o MATLAB execute a expansão em frações parciais e forneça uma lista dos polos e dos resíduos correspondentes de $V(s)$. No caso que estamos analisando, o MATLAB fornece

```
r =
     6.0000 - 2.5000i
     6.0000 + 2.5000i
p =
    -4.0000 + 6.0000i
    -4.0000 - 6.5000i
```

ou seja,

$$V(s) = \frac{6 - j2{,}5}{s - (-4 + j6)} + \frac{6 + j2{,}5}{s - (-4 - j6)}$$

Note que o primeiro resíduo corresponde ao primeiro polo e o segundo resíduo corresponde ao segundo polo. (Além disso, esperamos que os polos complexos sejam complexos conjugados e que os resíduos correspondentes também sejam complexos conjugados.) Tomando a transformada inversa de Laplace, obtemos

$$v(t) = (6 - j\,2{,}5)e^{-(-4 + j6)t} + (6 + j\,2{,}5)e^{-(-4 - j6)t}$$

Essa expressão não é muito conveniente, pois contém números complexos. Felizmente, podemos usar a identidade de Euler para obter uma expressão equivalente que não contém números complexos. Como os polos complexos são muito comuns na prática, vale a penas examinar o caso geral:

$$V(s) = \frac{a + jb}{s - (c + jd)} + \frac{a - jb}{s - (c - jd)}$$

A transformada inversa de Laplace é

$$\begin{aligned} v(t) &= (a + jb)e^{(c+jd)t} + (a - jb)e^{(c-jd)t} \\ &= e^{ct}\left[(a + jb)\,e^{j\,dt} + (a + jb)e^{-j\,dt}\right] = e^{ct}\left[2a\left(\frac{e^{j\,dt} + e^{-j\,dt}}{2}\right) - 2b\left(\frac{e^{j\,dt} - e^{-j\,dt}}{2j}\right)\right] \end{aligned}$$

De acordo com a identidade de Euler,

$$\frac{e^{j\,dt} + e^{-j\,dt}}{2} = \cos(dt) \;\text{ e }\; \frac{e^{j\,dt} - e^{-j\,dt}}{2j} = \text{sen}\,(dt)$$

Assim,

$$v(t) = e^{ct}\,[2a\cos(dt) - 2b\,\text{sen}(dt)]$$

o que nos dá o seguinte par de transformadas:

$$e^{ct}[2a\cos(dt) - 2b\,\text{sen}(dt)] \leftrightarrow \frac{a + jb}{s - (c + jd)} + \frac{a - jb}{s - (c - jd)}$$

Como, no caso que estamos analisando, $a = 6$, $b = -2{,}5$, $c = -4$ e $d = 6$, temos:

$$v(t) = e^{-4t}[12\cos(6t) + 5\,\text{sen}(6t)] \text{ para } t > 0$$

Às vezes é conveniente expressar o resultado de outra forma. Transformando o termo em seno em um termo equivalente em cosseno, temos:

$$v(t) = e^{-4t}[12\cos(6t) + 5\,\text{sen}(6t) - 90°] \text{ para } t > 0$$

Podemos usar fasores para combinar os dois termos em cosseno:

$$\mathbf{V}(\omega) = 12\,\underline{/0^\circ} + 5\,\underline{/-90^\circ} = 12 - j5 = 13\,\underline{/-22{,}62^\circ}$$

Passando de volta para o domínio do tempo, obtemos

$$v(t) = 13e^{-4t}\cos(6t - 22{,}62^\circ] \text{ para } t > 0$$

EXEMPLO 14.11-3 Polos Reais e Complexos

Determine a transformada inversa de Laplace da função

$$V(s) = \frac{105s+840}{(s^2+9{,}5s+17{,}5)(s^2+8s+80)}$$

Solução

Usando o MATLAB,

```
>> num=[105 840];
>> den=conv([1 9.5 17.5],[1 8 80]);
>> [r,p] = residue (num, den)
r =
     -0.8087 + 0.2415i
     -0.8087 - 0.2415i
     -0.3196
     1.9371
P =
     -4.0000 + 8.0000i
     -4.0000 - 8.0000i
     -7.0000
     -2.5000
```

o que nos dá

$$V(s) = \frac{-0{,}8087 + j0{,}2415}{s-(-4+j8)} + \frac{-0{,}8087 - j0{,}2415}{s-(-4-j8)} + \frac{-0{,}3196}{s-(-7)} + \frac{1{,}9371}{s-(-2{,}5)}$$

Usando o par de transformadas de Laplace

$$e^{ct}[2\,a\cos(dt) - 2b\,\text{sen}\,(dt)] \quad \leftrightarrow \quad \frac{a+jb}{s-(c+jd)} + \frac{a-jb}{s-(c-jd)}$$

com $a = -0{,}8087$, $b = 0{,}2415$, $c = -4$ e $d = 8$, temos

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{-0{,}8087 + j0{,}2415}{s-(-4+j8)} + \frac{-0{,}8087 - j0{,}2415}{s-(-4-j8)}\right] = e^{-4t}[-1{,}6174\cos(8t) + 0{,}483\,\text{sen}\,(8t)]$$

Tomando a transformada inversa de Laplace dos termos restantes de $V(s)$, obtemos

$$v(t) = e^{-4t}[-1{,}6174\cos(8t) + 0{,}483\,\text{sen}\,(8t)] - 0{,}3196e^{-7t} + 1{,}9371e^{-2{,}5t} \text{ para } t > 0$$

14.12 *Como Podemos Testar . . . ?*

Os engenheiros são frequentemente encarregados de verificar se a solução de um problema está correta. As soluções de problemas de projeto, por exemplo, devem ser verificadas para confirmar que todas as especificações estão sendo atendidas. Além disso, os resultados obtidos com o auxílio de computadores devem ser revistos para evitar possíveis erros na digitação dos dados e as afirmações dos vendedores a respeito dos seus produtos devem ser confirmadas.

Os estudantes de engenharia muitas vezes também precisam verificar se os resultados que obtiveram estão corretos. Às vezes falta muito pouco tempo para terminar um exame e é importante poder identificar rapidamente as questões que precisam ser refeitas.

Os exemplos a seguir ilustram algumas técnicas que podem ser usadas para verificar se as soluções de problemas do tipo discutido neste capítulo estão corretas.

EXEMPLO 14.12-1 Como Podemos Testar Funções de Transferência?

De acordo com as especificações de um circuito, a função de transferência é

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_1(s)} = \frac{25}{s^2 + 10s + 125} \tag{14.12-1}$$

e a resposta a um degrau é

$$v_o(t) = 0{,}1\left(2 - e^{-5t}(3\cos 10t + 2\,\mathrm{sen}\,10t)\right)u(t) \tag{14.12-2}$$

Como podemos verificar se essas especificações são coerentes?

Solução

Se as especificações forem coerentes, a resposta a um degrau e a função de transferência estarão relacionadas pela equação

$$\mathscr{L}\left[v_o(t)\right] = H(s)\frac{1}{s} \tag{14.12-3}$$

já que $v_1(t) = u(t)$ e, portanto, $V_1(s) = 1/s$.

Podemos verificar se a Eq. 14.12-3 é satisfeita calculando a transformada de Laplace de $v_o(t)$ ou calculando a transformada inversa de Laplace de $H(s)/s$. Os dois cálculos são trabalhosos. Por outro lado, os teoremas do valor final e do valor inicial permitem realizar um teste mais rápido, embora menos concludente. (Se o teorema do valor final ou o teorema do valor inicial não é satisfeito, isso indica que a resposta a um degrau não é coerente com a função da transferência. Entretanto, a resposta a um degrau pode não ser coerente com a função de transferência mesmo que os teoremas do valor inicial e do valor final sejam satisfeitos.) Vejamos o que dizem os teoremas do valor final e do valor inicial.

De acordo com o teorema do valor final,

$$v_o(\infty) = \lim_{s \to 0} s\left[H(s)\frac{1}{s}\right] \tag{14.12-4}$$

Usando a função $H(s)$ da Eq. 14.12-1, obtemos

$$\lim_{s \to 0} s\left[\frac{25}{s^2 + 10s + 125} \cdot \frac{1}{s}\right] = \lim_{s \to 0}\left[\frac{25}{s^2 + 10s + 125}\right] = \frac{25}{125} = 0{,}2 \tag{14.12-5}$$

Calculando o limite da função da Eq. 14.12-2 para $t \to \infty$, obtemos

$$v_o(\infty) = 0{,}1(2 - e^{-\infty}(2\cos\infty + \text{ sen }\infty)) = 0{,}1(2 - 0) = 0{,}2 \qquad (14.12\text{-}6)$$

e, portanto, o teorema do valor final é satisfeito.

De acordo com o teorema do valor inicial,

$$v_o(0) = \lim_{s\to\infty} s\left[H(s)\,\frac{1}{s}\right] \qquad (14.12\text{-}7)$$

Usando a função $H(s)$ da Eq. 14.12-1, obtemos

$$\lim_{s\to\infty} s\left[\frac{25}{s^2 + 10s + 125} \cdot \frac{1}{s}\right] = \lim_{s\to\infty} \frac{25/s^2}{1 + 10/s + 125/s^2} = \frac{0}{1} = 0 \qquad (14.12\text{-}8)$$

Calculando o limite da função da Eq. 14.12-2 para $t \longrightarrow 0$, obtemos

$$\begin{aligned} v_o(0) &= 0{,}1(2 - e^{-0}(3\cos 0 + 2\text{ sen }0)) \\ &= 0{,}1(2 - 1(3 + 0)) \\ &= -0{,}1 \end{aligned} \qquad (14.12\text{-}9)$$

Como o teorema do valor inicial não é satisfeito, a resposta a um degrau não é coerente com a função de transferência.

Exemplo 14.12-2 Como Podemos Testar Funções de Transferência?

De acordo com as especificações de um circuito, a função de transferência é

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_1(s)} = \frac{25}{s^2 + 10s + 125} \qquad (14.12\text{-}10)$$

e a resposta a um degrau é

$$v_o(t) = 0{,}1\,(2 - e^{-5t}(2\cos 10t + 3\text{ sen }10t))\,u(t) \qquad (14.12\text{-}11)$$

Como podemos verificar se essas especificações são coerentes? (Esta resposta a um degrau é uma versão ligeiramente alterada da resposta a um degrau do Exemplo 14.12-1.)

Solução

Fica a cargo do leitor verificar que, nesse caso, tanto o teorema do valor final como o teorema do valor inicial são respeitados. Isso sugere, mas não garante, que a função de transferência e a resposta a um degrau são coerentes. Para ter certeza de que isso é verdade, é preciso verificar se

$$\mathscr{L}[v_o(t)] = H(s)\,\frac{1}{s} \qquad (14.12\text{-}12)$$

calculando a transformada de Laplace de $v_o(t)$ ou calculando a transformada inversa de Laplace de $H(s)/s$. Vamos calcular a transformada de Laplace de $v_o(t)$:

$$\mathcal{L}\left[0{,}1(2 - e^{-5t}(2\cos 10t + 3\,\text{sen}\,10t))u(t)\right] = 0{,}1\left[\frac{2}{s} - \frac{2(s+5)}{(s+5)^2 + 10^2} - 3\frac{10}{(s+5)^2 + 10^2}\right]$$
$$= 0{,}1\left[\frac{2}{s} - \frac{2s + 40}{s^2 + 10s + 125}\right]$$
$$= \frac{-2s + 25}{s(s^2 + 10s + 125)}$$

Como essa transformada não é igual a *H*(*s*)/*s*, a Eq. 14.12-12 não é satisfeita. Isso significa que a resposta a um degrau não é coerente com a função de transferência, embora os valores inicial e final de $v_o(t)$ o sejam.

EXERCÍCIO 14.12-1 De acordo com as especificações de um circuito, a função de transferência é

$$H(s) = \frac{25}{s^2 + 10s + 125}$$

e a resposta a um degrau é

$$v_o(t) = 0{,}1\ (2\ e^{-5t}(2\cos 10t + \text{sen}\,10t))u(t)$$

Verifique se essas especificações são coerentes.

14.13 EXEMPLO DE PROJETO Porta do Compartimento de Carga do Ônibus Espacial

O ônibus espacial norte-americano acoplou várias vezes com a estação espacial russa *Mir*. O eletroímã que abria a porta do compartimento de carga do ônibus espacial era ativado por uma corrente de 0,1 A. Na Figura 14.13-1, o enrolamento do eletroímã está representado por um indutor *L* e a corrente que ativa o eletroímã foi chamada de i_1. De acordo com as especificações, o tempo que a corrente i_1 leva para atingir o valor de 0,1 A deve ser menor que 3 s. Escolha um valor adequado para *L*.

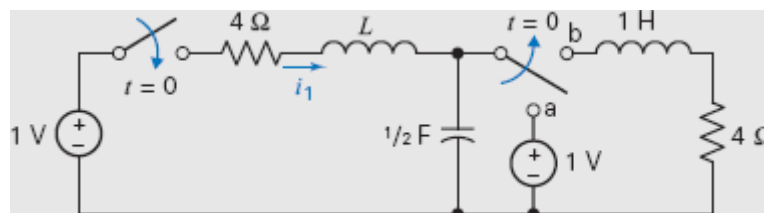



FIGURA 14.13-1 Circuito de controle da porta do compartimento de carga do ônibus espacial.

Descreva a Situação e as Hipóteses1.

1. As duas chaves são fechadas em $t = 0$ e o movimento da segunda chave do terminal a para o terminal b é instantâneo.
2. As chaves permaneceram por um longo tempo na mesma posição antes do instante $t = 0$.

Estabeleça a Meta

Determinar o valor de *L* para que o tempo que a corrente i_1 leva para atingir o valor de 0,1 A seja menor que 3 s.

Formule um Plano1.

1. Determinar o valor inicial das correntes dos dois indutores e da tensão do capacitor.
2. Definir duas correntes de malha e escrever duas equações de malha, usando as transformadas de Laplace das variáveis e as impedâncias dos componentes.

3. Escolher um valor provisório de L e calcular $I_1(s)$.

4. Determinar $i_1(t)$.

5. Plotar $i_1(t)$ em função do tempo e determinar o instante t_1 no qual $i_1(t_1) = 0{,}1$ A.

6. Verificar se $t_1 < 3$ s; caso a resposta seja negativa, voltar ao 3º passo e escolher outro valor para L.

OBJETIVO	EQUAÇÕES	NECESSIDADE	INFORMAÇÃO
Determinar a condição inicial em $t = 0$.	$i(0) = i(0^-)$ $v_c(0) = v_c(0^-)$	Preparar um esquema do circuito para $t = 0^-$. Determinar $i_1(0^-)$, $i_2(0^-)$, $v_C(0^-)$.	
Definir duas correntes de malha e aplicar a LKT.		$I_1(s)$, $I_2(s)$; as condições iniciais $i_1(0)$, $i_2(0)$.	
Obter $I_1(s)$ e escolher L.			Use a Regra de Cramer.
Determinar $i_1(t)$.	$i_1(t) = \mathscr{L}^{-1}[I_1(s)]$		Use uma expansão em frações parciais.
Plotar $i_1(t)$ e determinar t_1.	$i_1(t_1) = 0{,}1$ A		

Execute o Plano

A Figura 14.13-2 mostra o circuito com as chaves nas posições que ocupam no instante $t = 0^-$. É evidente que as correntes nos indutores são $i_1(0^-) = 0$ e $i_2(0^-) = 0$. Além disso, temos

$$v_c(0) = 1 \text{ V}$$

O passo seguinte consiste em desenhar o circuito para $t > 0$, como na Figura 14.13-3, e definir as correntes de malha i_1 e i_2.

A impedância é Ls para o indutor e $1/Cs$ para o capacitor. No caso do capacitor, temos que levar em conta a condição inicial. A tensão do capacitor é dada por

$$v_c(t) = v_c(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i_c(\tau)d\tau$$

A transformada de Laplace dessa equação é

$$V_c(s) = \frac{v_c(0)}{s} + \frac{1}{Cs}I_c(s)$$

em que $I_C(s) = I_1(s) - I_2(s)$. Podemos agora aplicar a LKT às duas malhas para $t \geq 0$, com $v_C(0) = 1$ V:

$$\text{malha 1:} \quad -V_1(s) + (4 + Ls)I_1(s) + V_c(s) = 0$$

$$\text{malha 2:} \quad (4 + 1s)I_2(s) - V_c(s) = 0$$

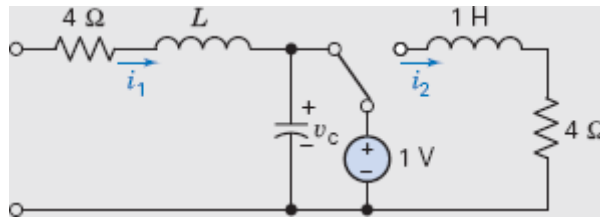



FIGURA 14.13-2 Circuito da Figura 14.13-1 no instante $t = 0^-$.

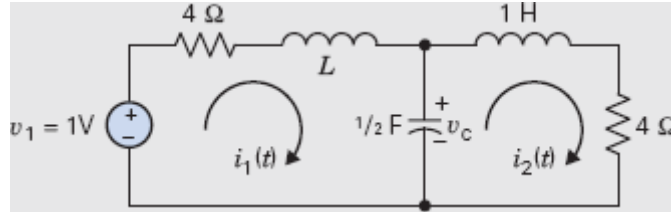



FIGURA 14.13-3 Circuito da Figura 14.13-1 para $t > 0$.

A transformada de Laplace da tensão de entrada é

$$V_1(s) = \frac{1}{s}$$

e a transformada de Laplace da tensão do capacitor é

$$V_c(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{Cs}(I_1(s) - I_2(s))$$

Substituindo V_1 e V_C nas equações de malha, temos (para $C = 1/2$ F):

$$\left(4 + Ls + \frac{2}{s}\right)I_1(s) - \left(\frac{2}{s}\right)I_2(s) = 0$$

e

$$-\left(\frac{2}{s}\right)I_1(s) + \left(4 + s + \frac{2}{s}\right)I_2(s) = \frac{1}{s}$$

O terceiro passo consiste em escolher o valor de L e calcular $I_1(s)$. Observe a Figura 14.13-3: as duas malhas são simétricas para $L = 1$ H. Escolhendo esse valor e usando a regra de Cramer, obtemos

$$I_1(s) = \frac{\left(\frac{2}{s}\right)\frac{1}{s}}{\left(4 + s + \frac{2}{s}\right)^2 - \left(\frac{2}{s}\right)^2} = \frac{2}{s(s^3 + 8s^2 + 20s + 16)}$$

Para determinar $i_1(t)$, usamos uma expansão em frações parciais. Fatorando o denominador de $I_1(s)$, obtemos

$$I_1(s) = \frac{2}{s(s+4)(s+2)^2}$$

Assim, a expansão em frações parciais é

$$I_1(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+4} + \frac{C}{(s+2)^2} + \frac{D}{s+2}$$

É fácil verificar que $A = 1/8$, $B = -1/8$ e $C = -1/2$. Para determinar o valor de D, usamos o método de derivação da Seção 14.4 para obter

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{(2-1)!}\left[\frac{d}{ds}(s+2)^2 I_1(s)\right]_{s=-2} \\ &= \left.\frac{-2(2s+4)}{s^4+8s^3+16s^2}\right|_{s=-2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Tomando as transformadas inversas de Laplace de todos os termos, obtemos

$$i_1(t) = 1/8 - (1/8)e^{-4t} - (1/2)te^{-2t} \text{ A } t \geq 0$$

Verifique se a Solução Proposta Está Correta

A Figura 14.13-4 mostra o gráfico de $i_1(t)$ em função do tempo. O gráfico mostra que $i_1(t)$ atinge o valor estacionário de 0,125 A em $t = 4$ s.

Para determinar o instante t_1 no qual

$$i_1(t_1) = 0{,}1 \text{ A}$$

estimamos que t_1 é aproximadamente 2 s. Depois de calcular o valor de $i_1(t)$ para alguns valores de t nas vizinhanças de 2 s, concluímos que $t_1 = 1{,}8$ s. Assim, as especificações são satisfeitas para $L = 1$ H. Naturalmente, seria possível escolher outros valores de L que também satisfazem as especificações.

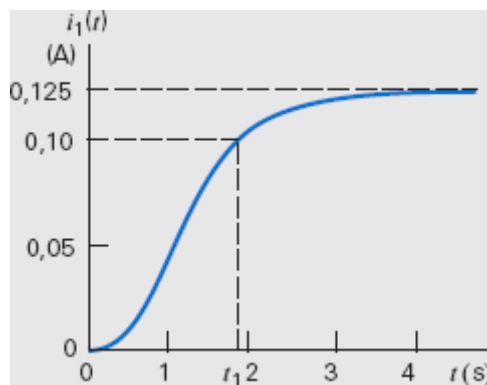



FIGURA 14.13-4 Gráfico de $i_1(t)$.

14.14 RESUMO

- Pierre-Simon Laplace foi o criador da transformada que tem o seu nome. A transformada de Laplace é definida pela equação

$$\mathscr{L}[f(t)] = \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt$$

- A transformada de Laplace converte a equação diferencial que descreve um circuito no domínio do tempo em uma equação algébrica no domínio da frequência complexa. Depois de resolver a equação algébrica, usamos a transformada inversa de Laplace para obter a resposta do circuito no domínio do tempo. O processo está ilustrado na Figura 14.2-1.
- A Tabela 14.2-1 mostra alguns pares de transformadas de Laplace que aparecem frequentemente na prática. A Tabela 14.2-2 mostra algumas propriedades da transformada de Laplace.
- Em muitos casos, a transformada inversa de Laplace pode ser obtida usando expansões em frações parciais.
- A Tabela 14.7-1 mostra que os circuitos podem ser representados no domínio da frequência de uma forma que leva em conta as condições iniciais dos capacitores e indutores.

- Para determinar a resposta completa de um circuito linear, representamos o circuito no domínio da frequência usando a transformada de Laplace e analisamos esse circuito, possivelmente escrevendo equações de malha e/ou equações de nó. Em seguida, usamos a transformada inversa de Laplace para representar a resposta no domínio do tempo.
- A função de transferência $H(s)$ de um circuito é definida como a razão entre a resposta $Y(s)$ e a excitação $X(s)$ do circuito, ambas expressas no domínio da frequência complexa:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

Essa razão é calculada supondo que todas as condições iniciais são iguais a zero.

- A resposta de um circuito a um impulso é a resposta de um circuito a uma entrada em forma de impulso no instante $t = 0$ com todas as condições iniciais iguais a zero. A relação entre a resposta a um impulso e a função de transferência é a seguinte:

$$\text{resposta a um degrau} = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{H(s)}{s}\right]$$

- A resposta de um circuito a um degrau é a resposta de um circuito a uma entrada constante no instante $t = 0$ com todas as condições iniciais iguais a zero. A relação entre a resposta a um degrau e a função de transferência é a seguinte:

$$\text{resposta a um impulso} = \mathcal{L}^{-1}[H(s)]$$

- Dizemos que um circuito é *estável* se a resposta do circuito a um sinal de entrada finito é um sinal de saída finito. Para que um circuito seja estável, é preciso que todos os polos da função de transferência estejam no semiplano esquerdo do plano s.
- O programa MATLAB pode ser usado para calcular os coeficientes de uma expansão em frações parciais.

PROBLEMAS

Seção 14.2 A Transformada de Laplace

P 14.2-1 Determine a transformada de Laplace de

$$v(t) = (17\, e^{-4t} - 14\, e^{-5t})\, u(t) \text{ V}$$

Resposta: $V(s) = \dfrac{3s + 29}{s^2 + 9s + 20}$

P 14.2-2 Determine a transformada de Laplace de

$$v(t) = 13 \cos(6t - 22{,}62°) \text{ V}$$

Resposta: $V(s) = \dfrac{12s + 30}{s^2 + 36}$

P 14.2-3 Determine a transformada de Laplace de

$$v(t) = (17\, e^{-5t} \cos(4t + 36{,}86°)\, u(t) \text{ V}$$

Resposta: $V(s) = \dfrac{8s + 16}{s^2 + 25s + 41}$

P 14.2-4 Determine a transformada de Laplace de

$$v(t) = 3t\, e^{-2t}\, u(t) \text{ V}$$

Resposta: $V(s) = \frac{3}{s^2 + 4s + 4}$

P 14.2-5 Determine a transformada de Laplace de

$$v(t) = 16(1 - 2t)e^{-4t}\,u(t)\text{ V}$$

Resposta: $V(s) = \frac{16(s+2)}{s^2 + 8s + 16}$

Seção 14.3 Transformadas de Laplace de Pulsos e Impulsos

P 14.3-1 Determine a transformada de Laplace da função $f(t)$ da Figura P 14.3-1.

Sugestão:: $f(t) = \left(5 - \frac{5}{3}t\right)u(t) + \frac{5}{3}\left(t - \frac{21}{5}\right)u\left(t - \frac{21}{5}\right)$

Resposta: $F(s) = \frac{5e^{-4,2s} + 15s - 5}{3s^2}$

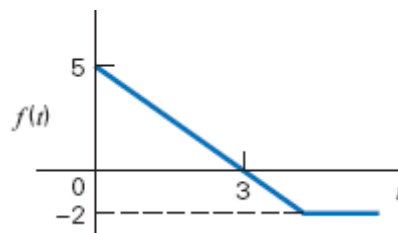



Figura P 14.3-1

P 14.3-2 Determine a transformada de Laplace da função $f(t)$ da Figura P 14.3-2.

Resposta: $F(s) = \frac{3(1 - e^{-2s})}{s}$

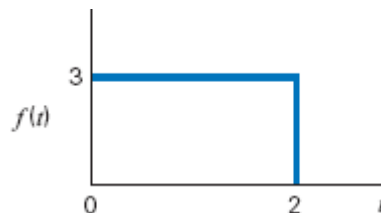



Figura P 14.3-2

P 14.3-3 Determine a transformada de Laplace da função $f(t)$ da Figura P 14.3-3.

Resposta: $F(s) = \frac{5}{2s^2}\left(1 - e^{-2s} - 2se^{-2s}\right)$

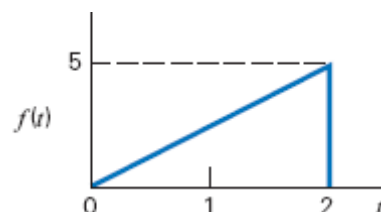



Figura P 14.3-3

P 14.3-4 Determine a transformada de Laplace da função $f(t)$ da Figura P 14.3-4.

Resposta: $F(s) = \frac{1 - e^{-(s-a)T}}{s - a}$

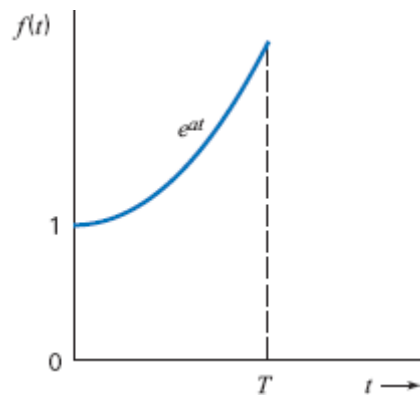



Figura P 14.3-4

P 14.3-5 Determine a transformada de Laplace da função $g(t) = e^{-t}u(t - 0{,}5)$.

P 14.3-6 Determine a transformada de Laplace da função

$$f(t) = \frac{-(t-T)}{T}u(t-T)$$

Resposta: $F(s) = \dfrac{-1e^{-sT}}{Ts^2}$

Seção 14.4 A Transformada Inversa de Laplace

P 14.4-1 Determine $f(t)$ para

$$F(s) = \frac{s+3}{s^2 + 3s^2 + 6s + 4}$$

Resposta: $f(t) = \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{-t}\cos\sqrt{3}t + \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-t} \times \text{sen}\sqrt{3}, t \geq 0$

P 14.4-2 Determine $f(t)$ para

$$F(s) = \frac{s^2 - 2s + 1}{s^3 + 3s^2 + 4s + 2}$$

P 14.4-3 Determine $f(t)$ para

$$F(s) = \frac{5s-1}{s^3 - 3s - 2}$$

Resposta: $f(t) = e^{-t} + 2t\,e^{-t} + e^{2t};\ t \geq 0$

P 14.4-4 Determine a transformada inversa de

$$Y(s) = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 4s + 2}$$

Resposta: $y(t) = e^{-t}\,(1 - \cos t),\ t \geq 0$

P 14.4-5 Determine a transformada inversa de

$$F(s) = \frac{2s+6}{(s+1)(s^2+2s+5)}$$

P 14.4-6 Determine a transformada inversa de

$$F(s) = \frac{2s+6}{s(s^2+3s+2)}$$

Resposta: $f(t) = [3 - 4e^{-t} + e^{-2t}]u(t)$

P 14.4-7 Determine a transformada inversa de $F(s)$, expressando $f(t)$ na forma de seno ou cosseno.

(a) $F(s) = \dfrac{8s - 3}{s^2 + 4s + 13}$

(b) $F(s) = \dfrac{3e^{-s}}{s^2 + 2s + 17}$

Respostas: **(a)** $f(t) = 10{,}2e^{-2t} \cos(3t + 38{,}4°);\ t \geq 0$

(b) $f(t) = \dfrac{3}{4}e^{-(t-1)} \operatorname{sen}[4(t-1)],\ t \geq 1$

P 14.4-8 Determine a transformada inversa das seguintes funções:

(a) $F(s) = \dfrac{s^2 - 5}{s(s+1)^2}$

(b) $F(s) = \dfrac{4s^2}{(s+3)^3}$

Respostas: **(a)** $f(t) = -5 + 6e^{-t} + 4te^{-t};\ t \geq 0$

(b) $f(t) = 4e^{-3t} - 24te^{-3t} + 18t^2 e^{-3t};\ t \geq 0$

Seção 14.5 Teoremas do Valor Inicial e do Valor Final

P 14.5-1 A transformada de Laplace de uma função do tempo é

$$F(s) = \frac{2s^2 - 3s + 4}{s^3 + 3s^2 + 2s}$$

(a) Determine o valor inicial de $f(t)$.

(b) Determine o valor final de $f(t)$.

P 14.5-2 Determine os valores inicial e final de $v(t)$ para

$$V(s) = \frac{(s + 16)}{s^2 + 4s + 12}$$

Resposta: $v(0) = 1$, $v(\infty) = 0$ V

P 14.5-3 Determine os valores inicial e final de $v(t)$ para

$$V(s) = \frac{(s + 10)}{(3s^3 + 2s^2 + 1s)}$$

Resposta: $v(0) = 0$, $v(\infty) = 10$ V

P 14.5-4 Determine os valores inicial e final de $f(t)$ para

$$F(s) = \frac{-2(s + 7)}{s^2 - 2s + 10}$$

Resposta: $f(0) = -2$; $f(\infty)$ não existe.

P 14.5-5 Dado que $\mathscr{L}[v(t)] = \dfrac{as + b}{s^2 + 8s}$ em que $v(t)$ é a tensão mostrada na Figura P 14.5-5, determine o valor de a e b.

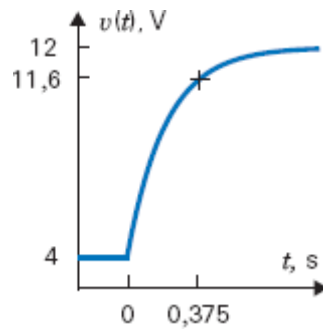



Figura P 14.5-5

P 14.5-6 Dado que $\mathscr{L}[v(t)] = \dfrac{as+b}{2s^2+40s}$ em que $v(t)$ é a tensão mostrada na Figura P 14.5-6, determine o valor de a e b.

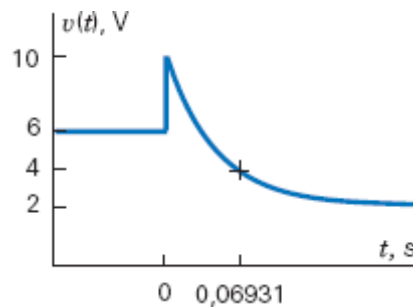



Figura P 14.5-6

Seção 14.6 Solução das Equações Diferenciais que Descrevem um Circuito

P 14.6-1 O circuito da Figura P 14.6-1 está no regime estacionário quando a chave é fechada no instante $t = 0$. Determine a corrente $i(t)$ do indutor depois que a chave é fechada.

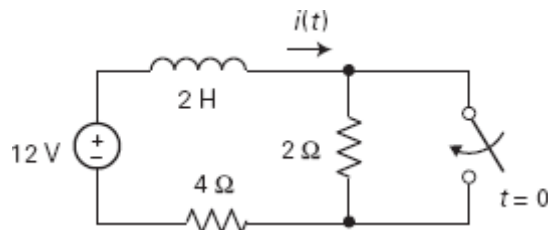



Figura P 14.6-1

P 14.6-2 O circuito da Figura P 14.6-2 é representado pela equação diferencial

$$\frac{d^2v(t)}{dt^2} + 7\frac{dv(t)}{dt} + 10v(t) = 120$$

para $t > 0$. As condições iniciais são

$$i(0) = 0 \text{ e } v(0) = 4\text{V}$$

Determine a tensão do capacitor $v(t)$ para $t > 0$.

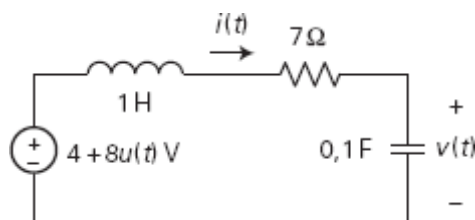



Figura P 14.6-2

P 14.6-3 O circuito da Figura P 14.6-3 está no regime estacionário no instante $t = 0$. A entrada do circuito é

$$v_s(t) = 2{,}4u(t)\text{ V}$$

o que significa que as condições iniciais são $i_1(0) = 0$ e $i_2(0) = 0$. Determine a corrente $i_2(t)$ para $t > 0$.

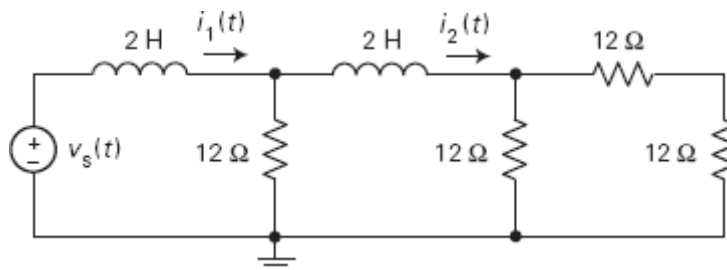



Figura P 14.6-3

P 14.6-4 O circuito da Figura P 14.6-4 está no regime estacionário quando a chave é aberta no instante $t = 0$. Determine a tensão $v(t)$ para $t > 0$.

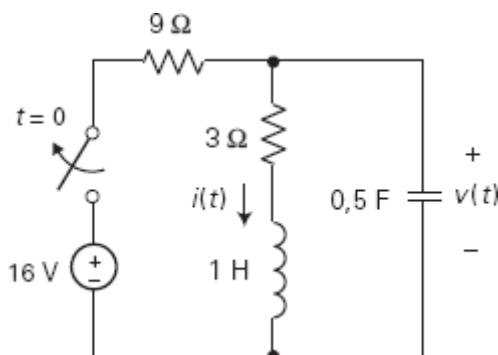



Figura P 14.6-4

P 14.6-5 O circuito da Figura P 14.6-5 está no regime estacionário quando a chave é fechada no instante $t = 0$. Determine a tensão $v(t)$ para $t > 0$.

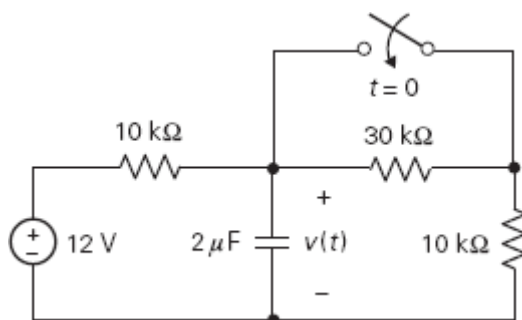



Figura P 14.6-5

Seção 14.7 Análise de Circuitos Usando Impedâncias e Condições Iniciais

P 14.7-1 A Figura P 14.7-1*a* mostra um circuito representado no domínio do tempo. A Figura P 14.7-1*b* mostra o mesmo circuito representado no domínio da frequência complexa. A Figura P 14.7-1*c* mostra um gráfico da corrente do indutor em função do tempo.

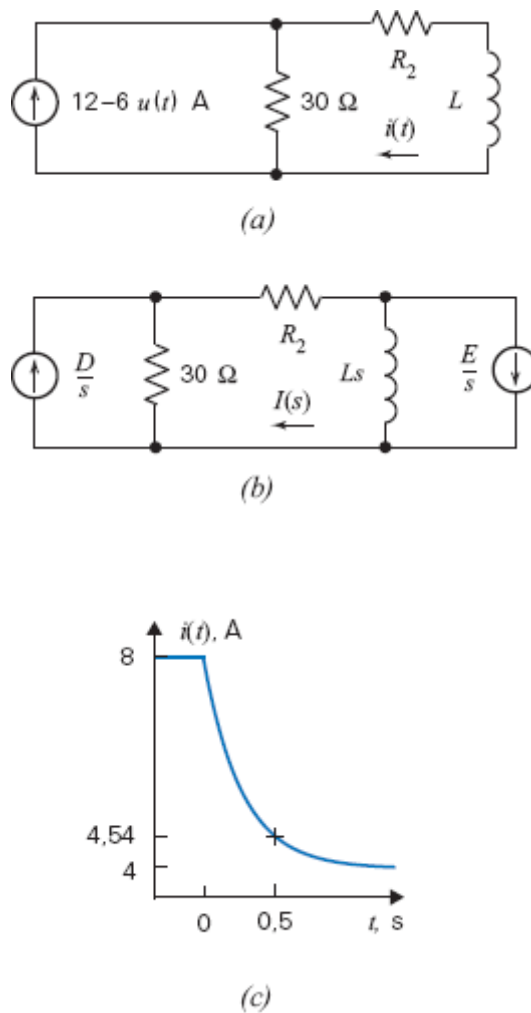



Figura P 14.7-1

Determine o valor de D e E no circuito da Figura P 14.7-1b. Analise o circuito e determine o valor da resistência R_2 e da indutância L.

P 14.7-2 A Figura P 14.7-2a mostra um circuito representado no domínio do tempo. A Figura P 14.7-2b mostra o mesmo circuito representado no domínio da frequência complexa. A Figura P 14.7-2c mostra um gráfico da corrente do indutor em função do tempo.

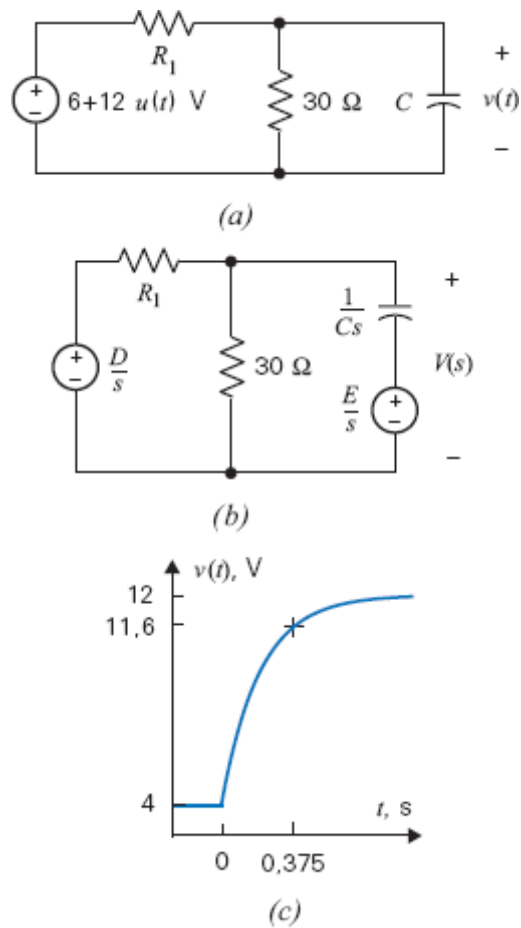



Figura P 14.7-2

Determine o valor de D e E no circuito da Figura P 14.7-2b. Analise o circuito e determine o valor da resistência R_1 e da capacitância C.

P 14.7-3 A Figura P 14.7-3a mostra um circuito representado no domínio do tempo. A Figura P 14.7-3b mostra o mesmo circuito representado no domínio da frequência. Determine o valor de a, b, c e d no circuito da Figura P 14.7-3b.

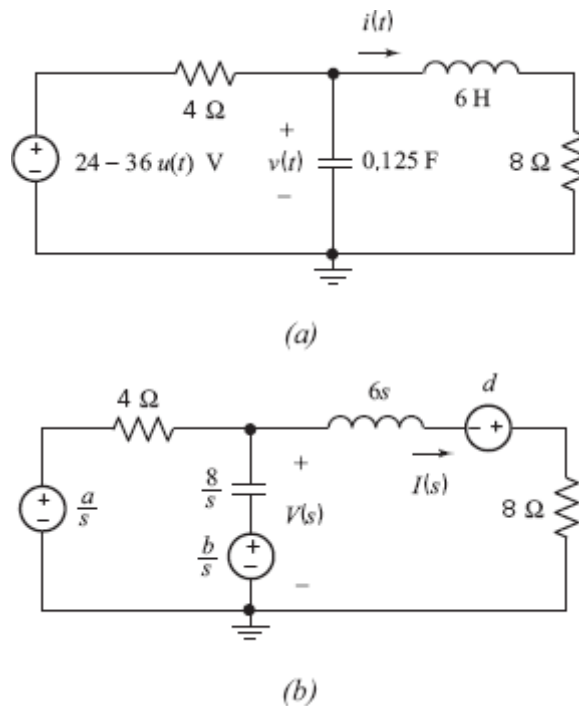



Figura P 14.7-3

P 14.7-4 A entrada do circuito da Figura P 14.7-4 é a tensão da fonte de tensão, 12 V, e a saída é a tensão do capacitor, v_o. Determine $v_o(t)$ para $t > 0$.

Resposta: $v_o(t) = -4(4 + 2e^{-t/2})$ V

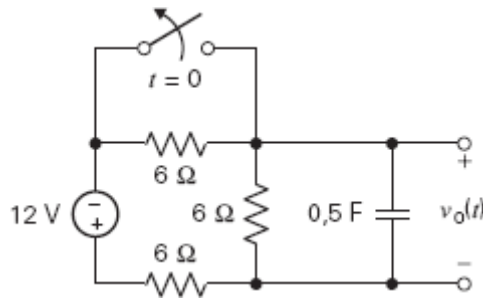



Figura P 14.7-4

P 14.7-5 A entrada do circuito da Figura P 14.7-5 é a tensão da fonte de tensão, 12 V, e a saída é a corrente do indutor, $i(t)$. Determine $i(t)$ para $t > 0$.

Resposta: $i(t) = -3(1 + e^{-0,8t})$ A

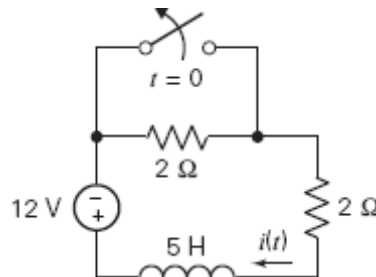



Figura P 14.7-5

P 14.7-6 A entrada do circuito da Figura P 14.7-6 é a tensão da fonte de tensão, 18 V e a saída é a tensão do capacitor, dada por

$$v_o(t) = 6 + 12e^{-2t} \text{ V} \quad \text{para} \quad t > 0$$

Determine o valor da capacitância C e o valor da resistência R.

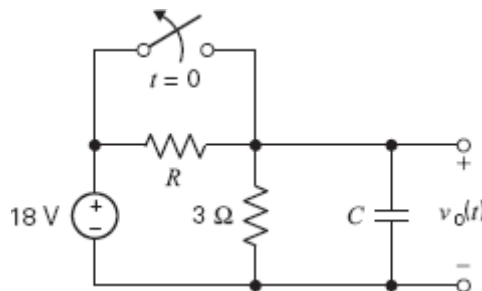



Figura P 14.7-6

P 14.7-7 A entrada do circuito da Figura P 14.7-7 é a tensão da fonte de tensão,

$$v_s(t) = 3 - u(t) \text{ V}$$

A saída é a tensão

$$v_o(t) = 10 + 5e^{-100t} \text{ V} \quad \text{para } t \geq 0$$

Determine o valor de R_1 e R_2.

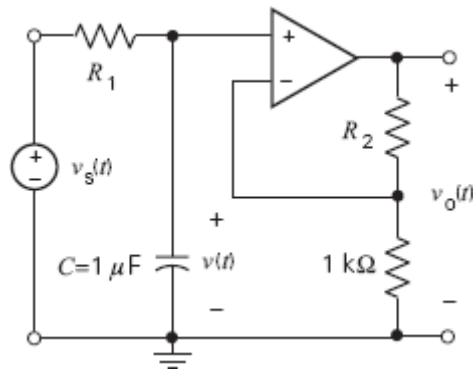



Figura P 14.7-7

P 14.7-8 Determine a corrente $i_L(t)$ do indutor no circuito da Figura P 14.7-8 para os seguintes casos:

(a) $R = 2\ \Omega$, $L = 4{,}5$ H, $C = 1/9$ F, $A = 5$ mA, $B = -2$ mA

(b) $R = 1\ \Omega$, $L = 0{,}4$ H, $C = 0{,}1$ F, $A = 1$ mA, $B = -2$ mA

(c) $R = 1\ \Omega$, $L = 0{,}08$ H, $C = 0{,}1$ F, $A = 0{,}2$ mA, $B = -2$ mA

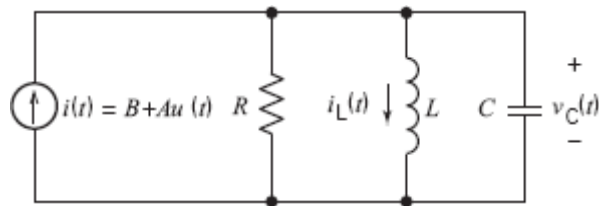



Figura P 14.7-8

P 14.7-9 Determine a corrente $i_C(t)$ do indutor no circuito da Figura P 14.7-9 para os seguintes casos:

(a) $R = 3\ \Omega$, $L = 2$ H, $C = 1/24$, $A = 12$ V

(b) $R = 2\ \Omega$, $L = 2$ H, $C = 1/8$ F, $A = 12$ V

(c) $R = 10\ \Omega$, $L = 2$ H, $C = 1/40$ H, $A = -12$ V

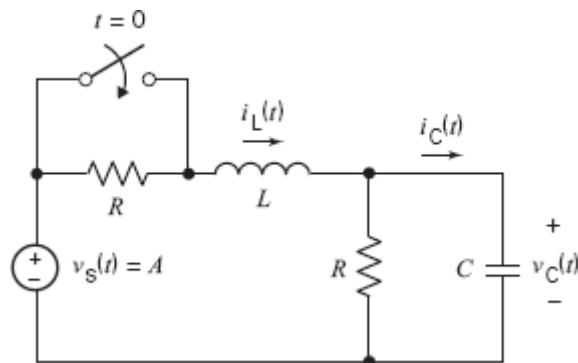



Figura P 14.7-9

P 14.7-10 A tensão da fonte de tensão do circuito da Figura P 14.7-10 é

$$v_s(t) = 12 - 6u(t) \text{ V}$$

Determine $v(t)$ para $t \geq 0$.

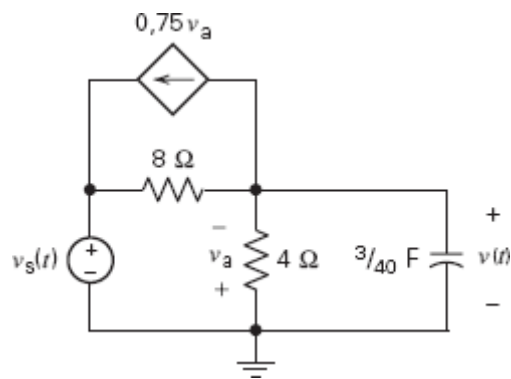



Figura P 14.7-10

P 14.7-11 Determine a tensão de saída $v_o(t)$ no circuito da Figura P 14.7-11.

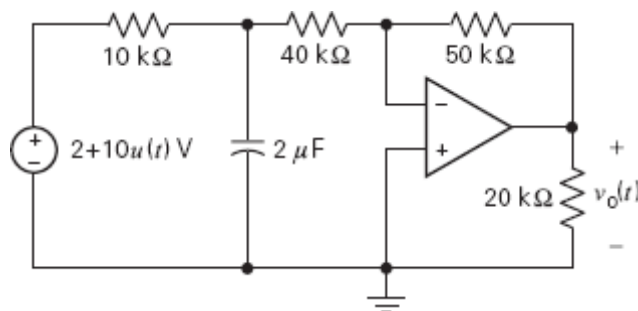



Figura P 14.7-11

P 14.7-12 Determine a tensão $v(t)$ do capacitor no circuito da Figura P 14.7-12.

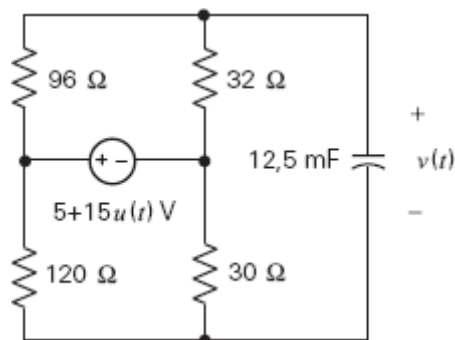



Figura P 14.7-12

P 14.7-13 Determine a tensão $v_o(t)$ para $t \geq 0$ no circuito da Figura P 14.7-13.

Sugestão: $v_C(0) = 4$ V

Resposta: $v_o(t) = 24e^{0,75t}\,u(t)$ V (O circuito é instável.)

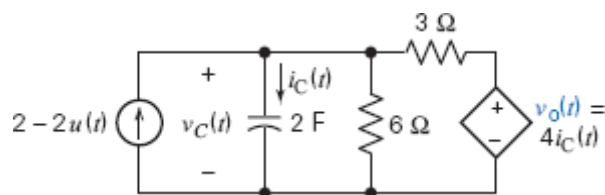



Figura P 14.7-13

P 14.7-14 Determine a corrente $i_L(t)$ para $t \geq 0$ no circuito da Figura P 14.7-14.

Sugestão: $v_C(0) = 8$ V e $i_L(0) = 1$ A

Resposta: $i_L(t)$ 5 $\left(e^{-t}\cos 2t \text{ 1 } \frac{1}{2}e^{-t}\text{sen } 2t\right)u(t)$ A

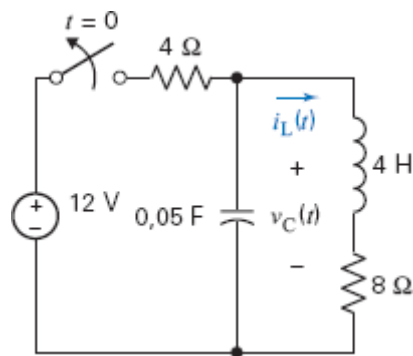



Figura P14.7-14

P 14.7-15 O circuito da Figura P 14.7-15 está no regime estacionário quando a chave é aberta no instante t = 0. Determine a tensão $v(t)$ para $t > 0$.

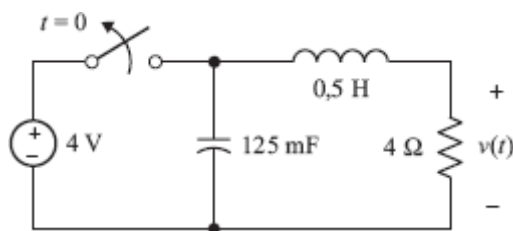



Figura P 14.7-15

P 14.7-16 O circuito da Figura P 14.7-16 está no regime estacionário antes do instante $t = 0$. Determine a tensão $v(t)$ para $t > 0$.

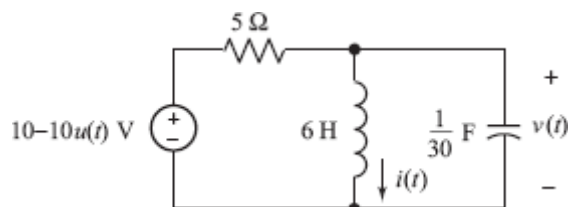



Figura P 14.7-16

P 14.7-17 A entrada do circuito da Figura P 14.7-17 é a tensão da fonte de tensão

$$v_i(t) = 10 + 5u(t)\text{ V} = \begin{cases} 10\text{ V} & \text{para } t < 0 \\ 15\text{ V} & \text{para } t > 0 \end{cases}$$

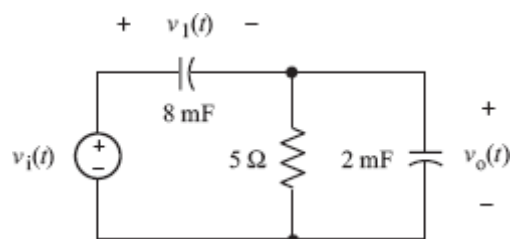



Figura P 14.7-17

Determine a resposta $v_o(t)$. Suponha que o circuito está no regime estacionário para $t < 0$. Plote $v_o(t)$ em função de t.

P 14.7-18 A entrada do circuito da Figura P 14.7-18 é a corrente da fonte de corrente

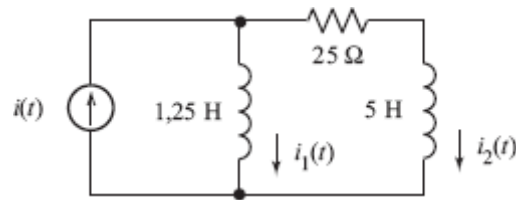



Figura P 14.7-18

Determine a resposta $i_2(t)$. Suponha que o circuito está no regime estacionário para $t < 0$. Plote $i_2(t)$ em função de t.

P 14.7-19 Todas as novas residências nos Estados Unidos têm que instalar um dispositivo conhecido como GFCI (ground fault circuit interrupter – circuito de proteção contra falta de terra) que protege os moradores de choques elétricos. Monitorando as correntes que entram e saem das tomadas, o GFCI percebe quando existe uma diferença e abre o circuito em menos de 1/40 de segundo. Isso é particularmente importante quando uma pessoa serve inadvertidamente de condutor entre um aparelho elétrico e a terra. A Figura P 14.7-19 mostra o tipo de situação que o GFCI se propõe a evitar. Determine a corrente que atravessa a pessoa e o aparelho, $i(t)$, para $t \geq 0$, se o aparelho é ligado no instante $t = 0$. Suponha que a tensão é $v = 160 \cos 400t$ e que o capacitor está inicialmente descarregado.

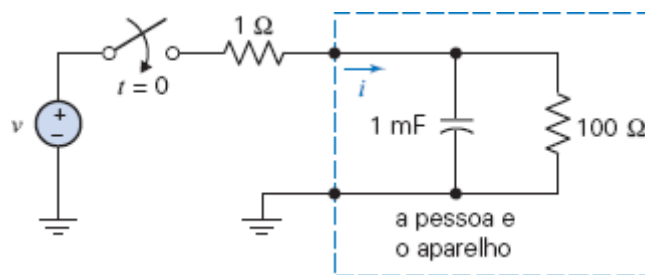



Figura P 14.7-19 Modelo de uma pessoa que leva um choque elétrico.

P 14.7-20 Use a transformada de Laplace para determinar $v_C(t)$ para $t > 0$ no circuito da Figura P 14.7-20. As condições iniciais são nulas.

Sugestão: Use uma transformação de fonte para obter um circuito com uma única malha.

Resposta: $v_C = -5e^{-2t} + 5(\cos 2t + \text{sen } 2t)$ V

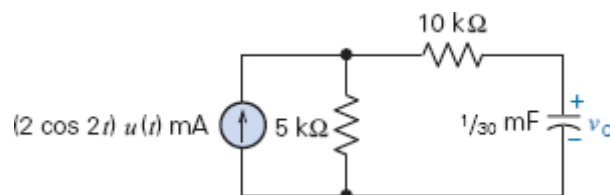



Figura P 14.7-20

P 14.7-21 Determine a corrente $i(t)$ do indutor no circuito da Figura P 14.7-21.

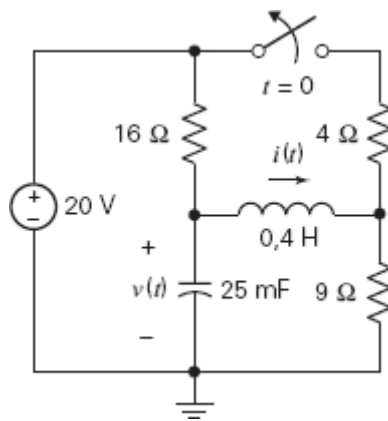



Figura P 14.7-21

P 14.7-22 Determine $v_2(t)$ no circuito da Figura P 14.7-22 para $t \geq 0$. As condições iniciais são $v_1(0)$ e $v_2(0) = 25$ V e a tensão da fonte é $v_s = 50 \cos 2t\, u(t)$.

Sugestão: Escreva equações de nó para os nós a e b em termos de v_1 e v_2.

Resposta: $v_2(t) = \frac{23}{3}e^{-t} + \frac{16}{3}e^{-t} + 12\cos 2t + 12\,\text{sen}\,2t$ V

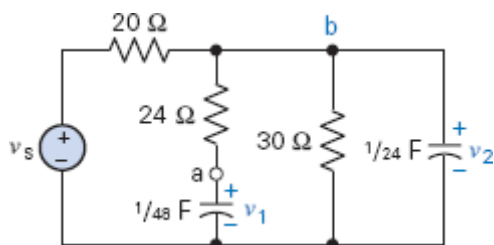



Figura P 14.7-22

P 14.7-23 O circuito usado para alimentar o motor que move a grua da Figura P 14.7-23*a* aparece na Figura 14.7-23*b*. Determine a corrente no motor, $I_2(s)$, sabendo que as condições iniciais são $i_1(0^-) = 2$ A e $i_2(0^-) = 3$ A. Determine $i_2(t)$ e plote essa corrente em função do tempo no intervalo $0 < t < 10$ s. A corrente faz a grua se mover suavemente?

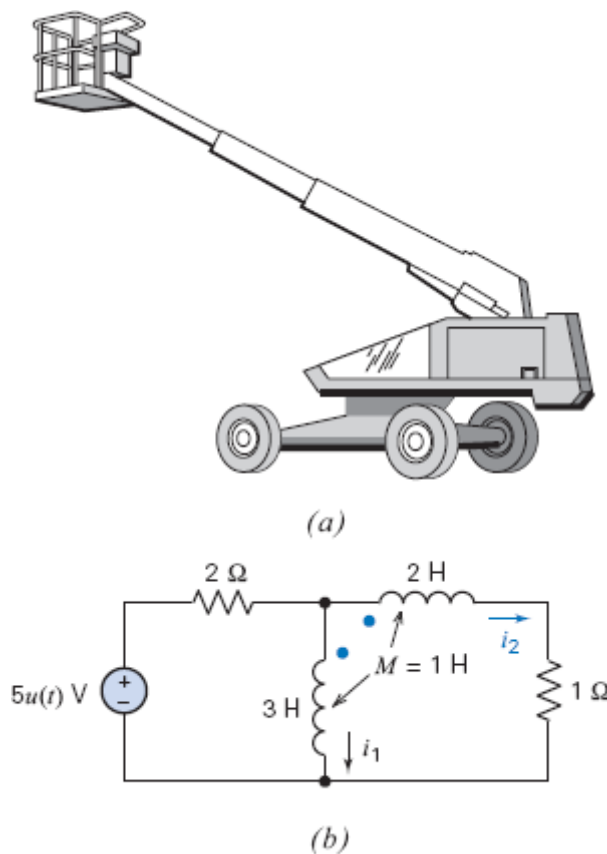



Figura P 14.7-23 Circuito de um motor de grua.

P 14.7-24 Use a transformada de Laplace para determinar $v_o(t)$ para $t > 0$ no circuito da Figura P 14.7-24.

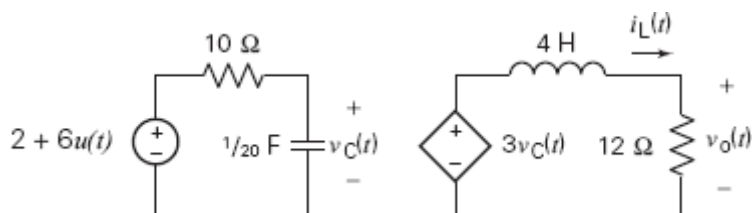



Figura P 14.7-24

P 14.7-25 O circuito da Figura P 14.7-25 está no regime estacionário quando a chave é aberta no instante $t = 0$. Determine a tensão $v(t)$ do indutor para $t > 0$.

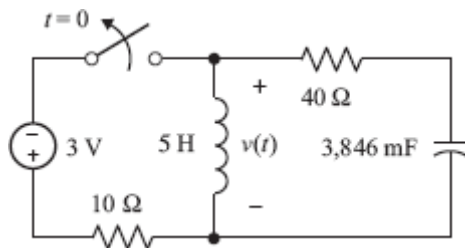



Figura P 14.7-25

P 14.7-26 O circuito da Figura P 14.7-26 está no regime estacionário quando a chave é aberta no instante $t = 0$. Determine da tensão $v(t)$ para $t > 0$.

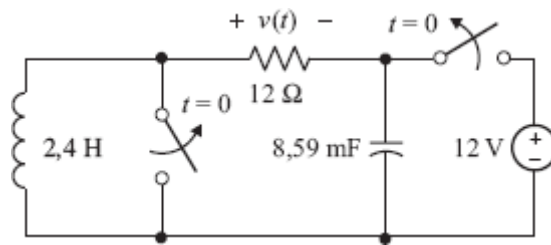



Figura P 14.7-26

Seção 14.8 Função de Transferência e Impedância

P 14.8-1 A entrada do circuito da Figura P 14.8-1 é a tensão $v_i(t)$ e a saída é a tensão $v_o(t)$. Determine o valor de L, C, k, R_1 e R_2 para que a resposta do circuito a um degrau seja

$$v_o(t) = (5 + 20e^{-5000t} - 25e^{-4000t})u(t)\text{ V}$$

Resposta: Uma solução possível é $L = 0{,}1$ H, $C = 0{,}1$ mF, $k = 5$ V/V, $R_1 = 400\ \Omega$ e $R_2 = 2$ kΩ

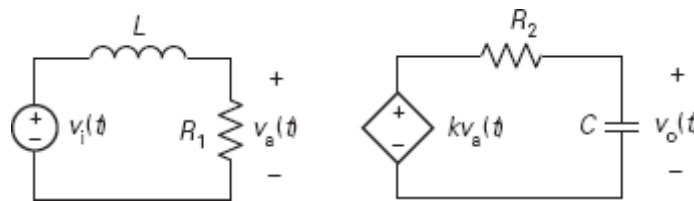



Figura P 14.8-1

P 14.8-2 A entrada do circuito da Figura P 14.8-2 é a tensão $v_i(t)$ e a saída é a tensão $v_o(t)$. Determine a resposta do circuito a um degrau.

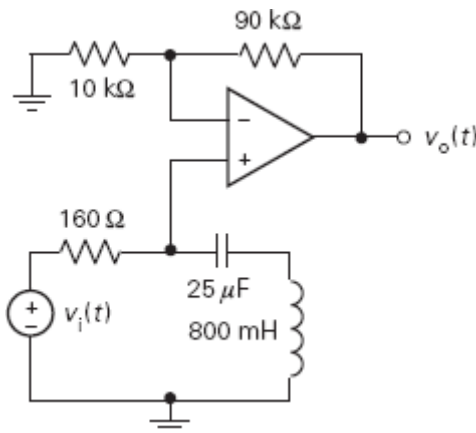



Figura P 14.8-2

P 14.8-3 A entrada do circuito da Figura P 14.8-3 é a tensão $v_i(t)$ e a saída é a tensão $v_o(t)$. Determine a resposta do circuito a um impulso.

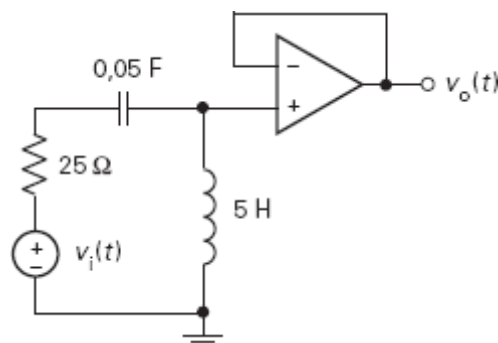



Figura P 14.8-3

P 14.8-4 A entrada do circuito da Figura P 14.8-4 é a tensão $v_i(t)$ e a saída é a tensão $v_o(t)$. Determine a resposta do circuito a um degrau.

Resposta: $v_o(t) = [5 - (5 + 20t)e^{-4t}]\, u(t)$

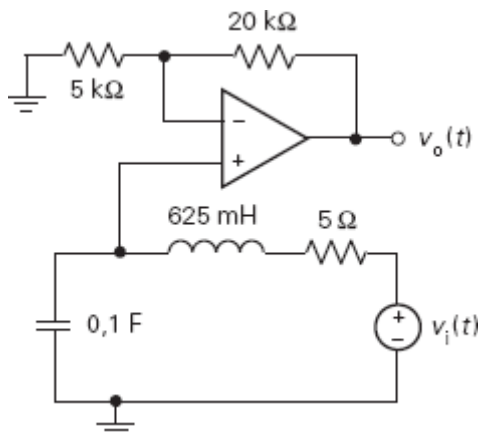



Figura P 14.8-4

P 14.8-5 A entrada do circuito da Figura P 14.8-5 é a tensão $v_i(t)$ da fonte de tensão e a saída é a tensão $v_o(t)$ do resistor de 5 kΩ. Especifique o valor da resistência R, da capacitância C e da indutância L para que a função de transferência do circuito seja

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{15 \times 10^6}{(s + 2000)(s + 5000)}$$

Resposta: Uma solução possível é R = 5 kΩ, C = 0,5 mF e L = 1 H

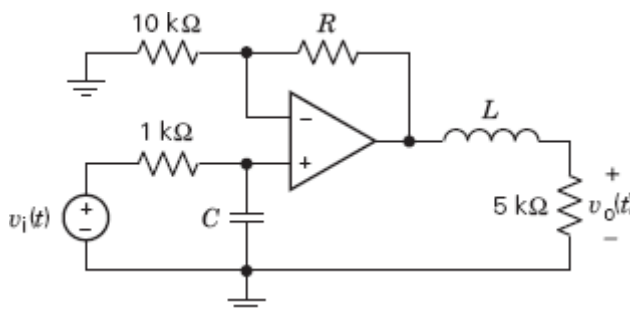



Figura P 14.8-5

P 14.8-6 A entrada do circuito da Figura P 14.8-6 é a tensão $v_i(t)$ da fonte de tensão e a saída é a tensão $v_o(t)$ do resistor de 10 kΩ. Especifique o valor das resistências R_1 e R_2 para que a resposta do circuito a um degrau seja

$$v_o(t) = -4(1 - e^{-250t}\, u(t) \text{ V}$$

Resposta: R_1 = 10 kΩ e R_2 = 40 kΩ

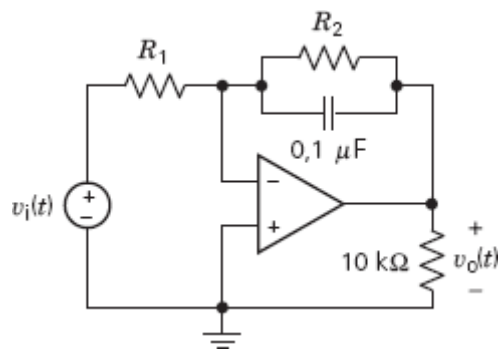



Figura P 14.8-6

P 14.8-7 A entrada do circuito da Figura P 14.8-7 é a tensão $v_i(t)$ e a saída é a tensão $v_o(t)$. Determine a resposta do circuito a um degrau.

Resposta: $v_o(t) = (4 \times 10^3)tu(t)$ V

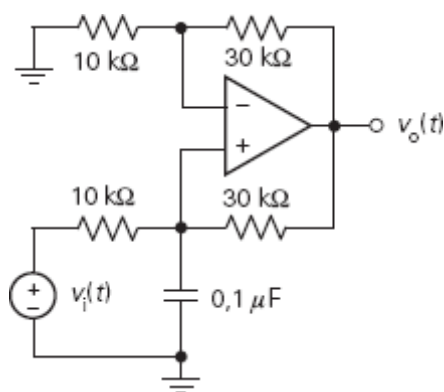



Figura P 14.8-7

P 14.8-8 A entrada do circuito da Figura P 14.8-8 é a tensão $v_i(t)$ e a saída é a tensão $v_o(t)$. Determine a resposta do circuito a um degrau.

Resposta: $v_o(t) = \left[2 - \left(\frac{4}{3}e^{-1000t} + \frac{2}{3}e^{-4000t}\right)\right]u(t)$ V

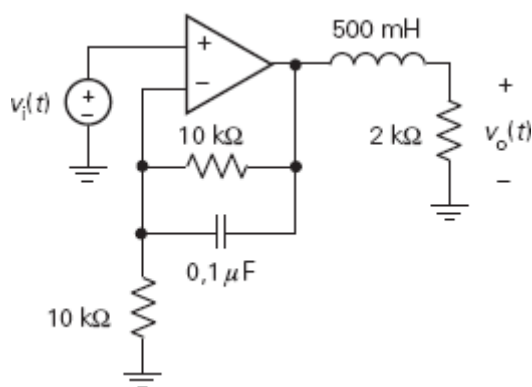



Figura P 14.8-8

P 14.8-9 A entrada do circuito da Figura P 14.8-9 é a tensão $v_i(t)$ da fonte de tensão e a saída é a tensão $v_o(t)$. A resposta do circuito a um degrau é

$$v_o(t) = 0{,}5(1 + e^{-4t})\, u(t) \text{ V}$$

Determine o valor da indutância L e da resistência R.

Resposta: $L = 6$ H e $R = 12\ \Omega$

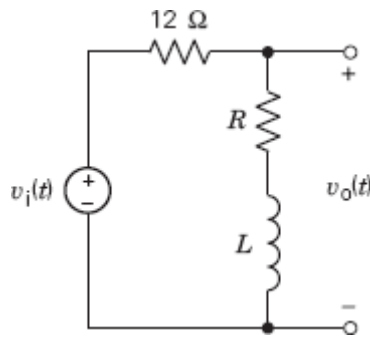



Figura P 14.8-9

P 14.8-10 Um microfone elétrico e o circuito associado podem ser representados pelo circuito da Figura P 14.8-10. Determine a função de transferência $H(s) = V_o(s)/V(s)$

Resposta: $\dfrac{V_o(s)}{V(s)} = \dfrac{RCs}{(R_1Cs + 2)(2RCs + 1) - 1}$

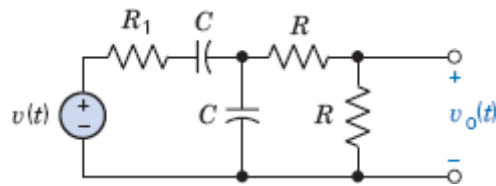



Figura P 14.8-10 Circuito de um microfone.

P 14.8-11 Os engenheiros procuravam evitar a indutância em circuitos de longa distância porque tornava a transmissão mais lenta, mas Oliver Heaviside provou que a inclusão de uma indutância permitiria transmitir sinais com menos distorções. George A. Campbell, do Bell Telephone Laboratories, projetou os primeiros indutores de compensação, nos quais os campos magnéticos produzidos pelas espiras se somavam, de modo que o dispositivo produzia, proporcionalmente, mais indutância que resistência. Cada um dos 300 indutores de teste produzidos por Campbell acrescentava 0,11 H e 12 Ω, a intervalos regulares, a uma linha telefônica de 56 km (Nahin, 1990). Os indutores compensavam os efeitos da impedância de fuga entre os fios telefônicos, representada por R e C na Figura P 14.8-11. Determine a função de transferência $V_2(s)/V_1(s)$.

Resposta: $\dfrac{V_2(s)}{V_1(s)} = \dfrac{R}{RLCs^2 + (L + R_xRC)s + R_x + R}$

12 Ω 0,11 H
R_x L
Indutor de compensação
C R
Caminho de fuga
v_1 v_2

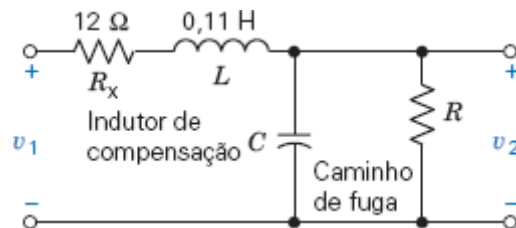



Figura P 14.8-11 Circuito com um indutor de compensação.

P 14.8-12 A entrada do circuito da Figura P 14.8-12 é a corrente $i(t)$ e a saída é a tensão $v(t)$. Determine a resposta do circuito a um impulso.

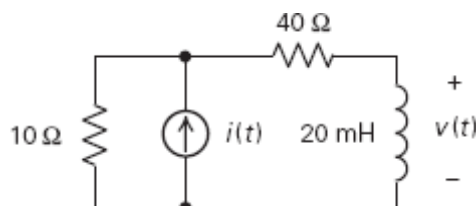



Figura P 14.8-12

P 14.8-13 A entrada do circuito da Figura P 14.8-13 é a corrente $i(t)$ e a saída é a tensão $v(t)$. Determine a resposta do circuito a um impulso.

Resposta: $v(t) = 1{,}25 \times 10^7(e^{-5000t} - e^{-25000t})u(t)$ V

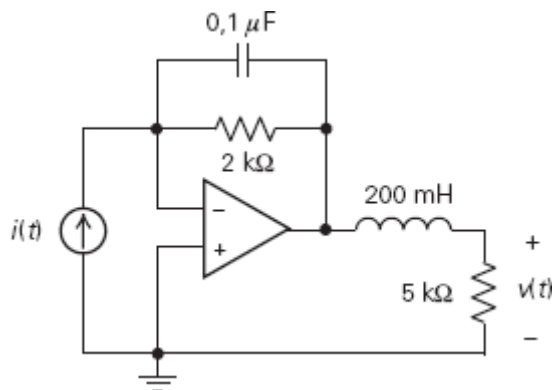



Figura P 14.8-13

P 14.8-14 A Figura P 14.8-14 mostra um circuito *RLC* série. Determine (a) a função de transferência $H(s)$, (b) a resposta do circuito a um impulso e (c) a resposta do circuito a um degrau para os conjuntos de parâmetros que aparecem na tabela a seguir.

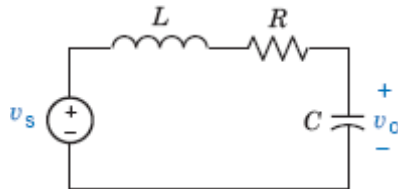



Figura P 14.8-14

	L	*C*	*R*
a	2 H	0,025 F	18 Ω
b	2 H	0,025 F	8 Ω
c	1 H	0,391 F	4 Ω
d	2 H	0,125 F	8 Ω

P 14.8-15 Um circuito é descrito pela função de transferência

$$\frac{V_o}{V_1} = H(s) = \frac{9s + 18}{3s^3 + 18s^2 + 39s}$$

Determine a resposta do circuito a um degrau e a um impulso.

P 14.8-16 A entrada do circuito da Figura P 14.8-16 é a tensão $v_i(t)$ da fonte de tensão e a saída é a tensão $v_o(t)$ do resistor de 15 kΩ.

(a) Determine a resposta $v_o(t)$ do circuito no regime estacionário se a entrada for $v_i(t) = 1{,}5$ V.

(b) Determine a resposta $v_o(t)$ do circuito no regime estacionário se a entrada for $v_i(t) = 4\cos(100t + 30^o)$ V.

(c) Determine a resposta $v_o(t)$ do circuito a um degrau.

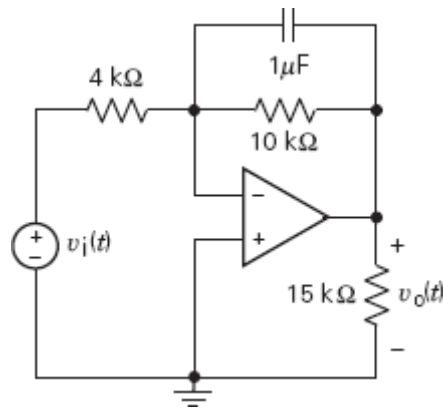



Figura P 14.8-16

P 14.8-17 A entrada do circuito da Figura P 14.8-17 é a tensão $v(t)$ da fonte de tensão e a saída é a tensão $v_o(t)$ do capacitor. Determine a resposta do circuito a um degrau.

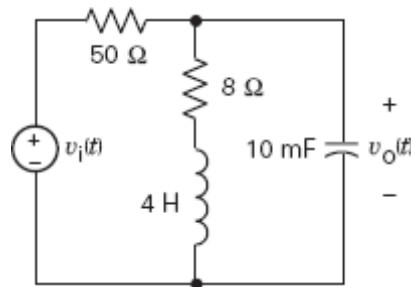



Figura P 14.8-17

P 14.8-18 A entrada do circuito da Figura P 14.8-18 é a tensão $v_i(t)$ da fonte de tensão e a saída é a tensão $v_o(t)$ do resistor. Especifique os valores de L_1, L_2, R e K para que a resposta do circuito a um degrau seja

$$v_o(t) = (1 + 0{,}667e^{-50t} - 1{,}667e^{-20t}\ u(t)\ \text{V}$$

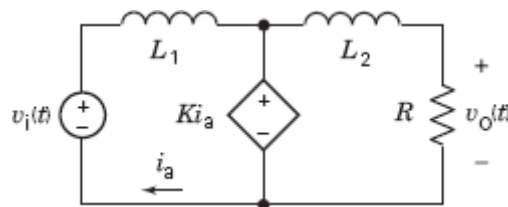



Figura P 14.8-18

P 14.8-19 A entrada do circuito da Figura P 14.8-19 é a tensão $v_i(t)$ da fonte de tensão e a saída é a tensão $v_o(t)$ do capacitor. Determine a resposta do circuito a um degrau.

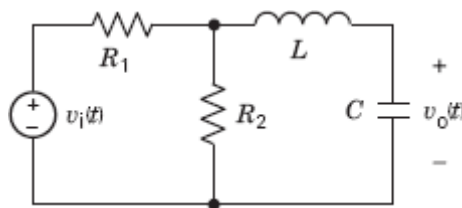



Figura P 14.8-19

P 14.18-20 A entrada do circuito da Figura P 14.8-20 é a tensão $v_i(t)$ da fonte de tensão e a saída é a corrente $i_o(t)$ do indutor. Especifique os valores de L, C e K para que a resposta do circuito a um impulso seja

$$v_o(t) = (3{,}2 - (3{,}2e^{-5t} + 16te^{-5t}))\ u(t)\ \text{V}$$

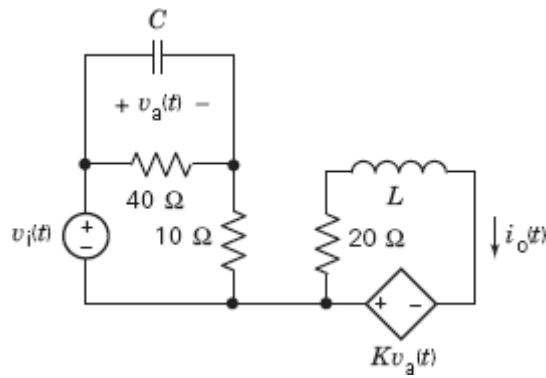



Figura P 14.8-20

P 14.8-21 A entrada de um circuito é a tensão $v_i(t)$ e a saída é a tensão $v_o(t)$. A resposta do circuito a um impulso é

$$v_o(t) = 6{,}5e^{-2t} \cos (2t + 22{,}6°)\, u(t) \text{ V}$$

Determine a resposta do circuito a um degrau.

P 14.8-22 A entrada de um circuito é a tensão $v_i(t)$ e a saída é a tensão $v_o(t)$. A resposta do circuito a um degrau é

$$v_o(t) = [1 - e^{-t}(1 + 3t)]u(t) \text{ V}$$

Determine a resposta do circuito a um impulso.

P 14.8-23 A entrada do circuito da Figura P 14.8-23 é a tensão $v_i(t)$ da fonte de tensão e a saída é a tensão $v_o(t)$. Determine a resposta do circuito a um degrau.

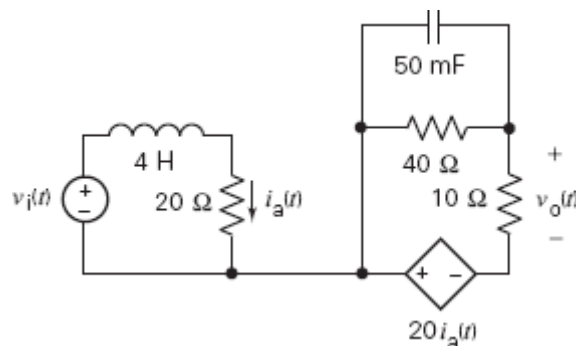



Figura P 14.8-23

P 14.8-24 A função de transferência de um circuito é $H(s) = \dfrac{12}{s^2 + 8s + 16}$. Determine a resposta do circuito a um degrau.

P 14.8-25 A função de transferência de um circuito é $H(s) = \dfrac{80s}{s^2 + 8s + 25}$. Determine a resposta do circuito a um degrau.

P 14.8-26 A entrada do circuito da Figura P 14.8-26 é a tensão $v_i(t)$ e a saída é a tensão $v_o(t)$. Determine a resposta do circuito a um impulso.

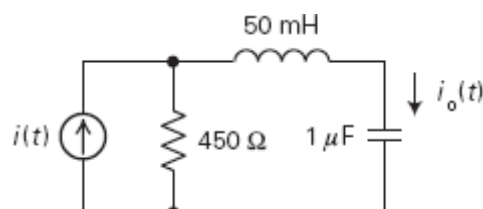



Figura P 14.8-26

P 14.8-27 A entrada do circuito da Figura P 14.8-27 é a tensão $v_i(t)$ e a saída é a tensão $v_o(t)$. Determine a resposta do circuito a um impulso.

Resposta: $h(t) = 10323(e^{-10.000t} - e^{-320.000t})u(t)$ V

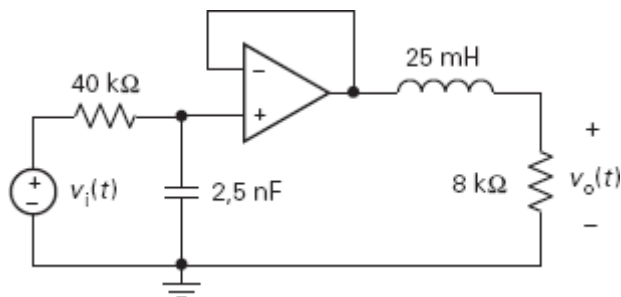



Figura P 14.8-27

P 14.8-28 A entrada do circuito da Figura P 14.8-28 é a tensão $v_i(t)$ e a saída é a tensão $v_o(t)$. Determine a resposta do circuito a um impulso.

Resposta: $h(t) = (10.323\ e^{-320.000t} - 322{,}6\ e^{-10.000t})u(t)$ V

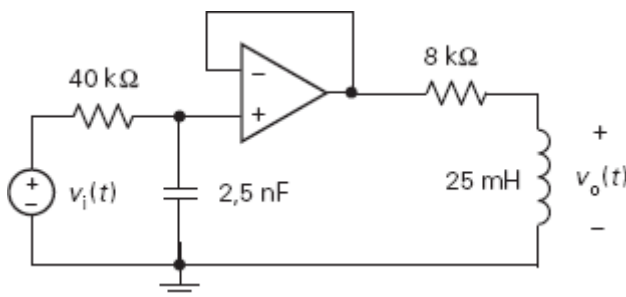



Figura P 14.8-28

P 14.8-29 A entrada do circuito da Figura P 14.8-29 é a tensão $v_i(t)$ e a saída é a tensão $v_o(t)$. Determine a resposta do circuito a um impulso.

Resposta: $h(t) = \tau(t) + (322{,}6\ e^{-10.000t} - 330.323\ e^{-320.000t})u(t)$ V

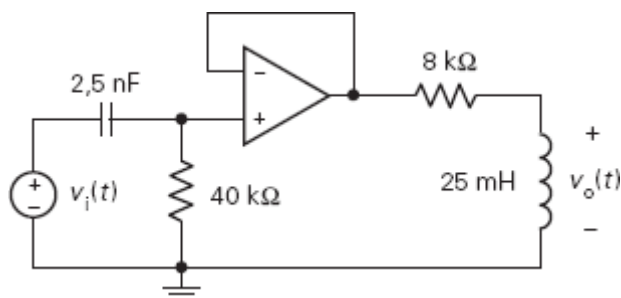



Figura P 14.8-29

Seção 14.9 Convolução

P 14.9-1 A entrada do circuito da Figura P 14.9-1*a* é a tensão $v_i(t)$ da Figura P 14.9-1*b*. Plote a tensão $v_o(t)$ em função do tempo no intervalo $0 \leq t \leq 12$ s.

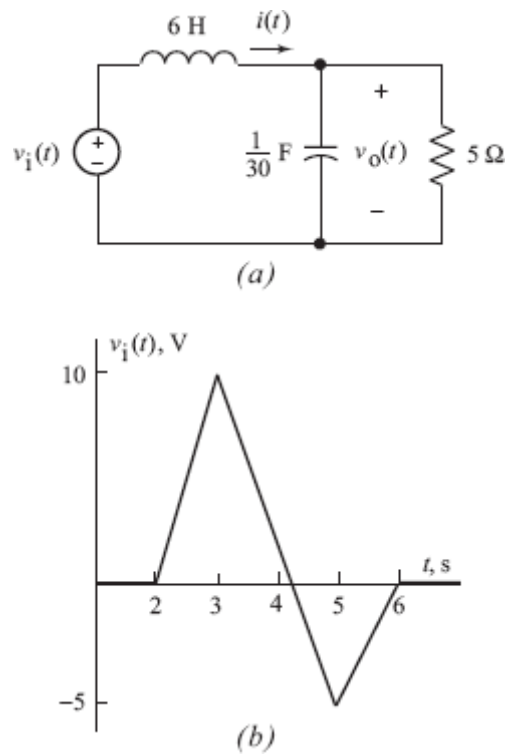



Figura P 14.9-1

P 14.9-2 A entrada do circuito da Figura P 14.9-2*a* é a tensão $v_i(t)$ da Figura P 14.9-2*b*. [A tensão $v_i(t)$ pode estar representando a sequência binária 1101, que, por sua vez, representa o número decimal 13.] Plote a tensão de $v_o(t)$ em função do tempo no intervalo $0 \leq t \leq 12$ s.

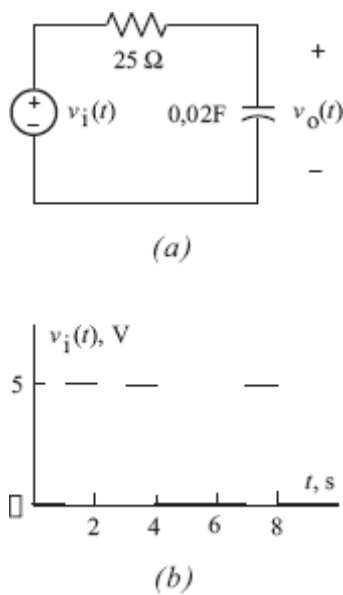



Figura P 14.9-2

Seção 14.10 Estabilidade

P 14.10-1 A entrada do circuito da Figura P 14.10-1 é a tensão $v_i(t)$ da fonte de tensão e a saída é a tensão $v_o(t)$ do resistor. A resposta do circuito a um degrau é

$$v_o(t) = (3/4)(1 - e^{-100t})\, u(t) \text{ V}$$

(a) Determine o valor da indutância L e da resistência R.

(b) Determine a resposta do circuito a um impulso.

(c) Determine a resposta estacionária do circuito a uma entrada $v_i(t) = 5 \cos 100t$ V.

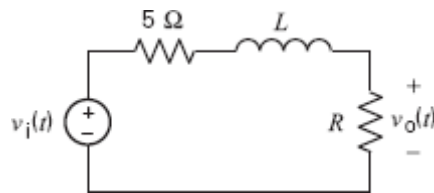



Figura P 14.10-1

P 14.10-2 A entrada do circuito da Figura P 14.10-2 é a tensão $v_i(t)$ da fonte de tensão e a saída é a tensão $v_o(t)$ do capacitor. A resposta do circuito a um degrau é

$$v_o(t) = [5 - 5e^{-2t}\,(1 + 2t)]\;u(t)\text{ V}$$

Determine a resposta estacionária do circuito se a entrada for

$$v_i(t) = 5\cos(2t + 45°)\text{ V}$$

Resposta: $v_o(t) = 12{,}5\cos(2t - 45°)$ V

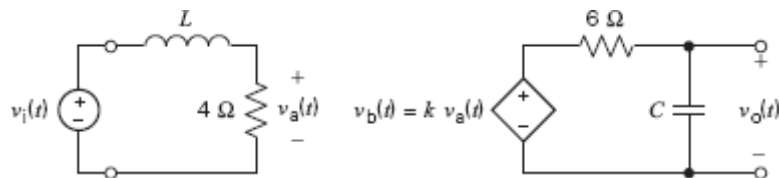



Figura P 14.10-2

P 14.10-3 A entrada de um circuito linear é a tensão $v_i(t)$ e a saída é a tensão $v_o(t)$. A resposta do circuito a um impulso é

$$h(t) = 30\,te^{-5t}u(t)\text{V}$$

Determine a resposta estacionária do circuito se a entrada for

$$v_i(t) = 10\cos(3t)\text{ V}$$

Resposta: $v_o(t) = 8{,}82\cos(3t - 62°)$ V

P 14.10-4 A entrada de um circuito é a tensão v_s e a saída é a tensão v_o. A resposta do circuito a um degrau é

$$v_o(t) = (40 + 1{,}03e^{-8t} - 41e^{-320t})u(t)$$

Determine a função de transferência

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_s(\omega)}$$

do circuito e plote o gráfico de Bode de amplitude assintótico.

P 14.10-5 A entrada de um circuito é a tensão v_s e a saída é a tensão v_o. A resposta do circuito a um degrau é

$$v_o(t) = 60(e^{-2t} - e^{-6t})u(t)$$

Determine a função de transferência

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_s(\omega)}$$

do circuito e plote o gráfico de Bode de amplitude assintótico.

P 14.10-6 A entrada de um circuito é a tensão v_s e a saída é a tensão v_o. A resposta do circuito a um degrau é

$$v_o(t) = (4 + 32e^{-90t})u(t)$$

Determine a função de transferência

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_s(\omega)}$$

do circuito e plote o gráfico de Bode de amplitude assintótico.

P 14.10-7 A entrada de um circuito é a tensão v_s e a saída é a tensão v_o. A resposta do circuito a um degrau é

$$v_o(t) = \frac{5}{3}\left(e^{-5t} - e^{-20t}\right)u(t) \text{ V}$$

Determine a resposta estacionária do circuito se a entrada for

$$v_s(t) = 12 \cos(30t) \text{ V}$$

P 14.10-8 A entrada de um circuito é a tensão v_s e a saída é a tensão v_o. A resposta do circuito a um impulso é

$$v_o(t) = e^{-5t}(10 - 50t)u(t) \text{ V}$$

Determine a resposta estacionária do circuito quando a entrada for

$$v_o(t) = 12 \cos(10t) \text{ V}$$

P 14.10-9 A entrada de um circuito é a tensão v_s e a saída é a tensão v_o. A resposta do circuito a um degrau é

$$v_o(t) = (1 - e^{-20t}(\cos(4t) + 0{,}5 \text{ sen}(4t)))u(t) \text{ V}$$

Determine a resposta estacionária do circuito se a entrada for

$$v_s(t) = 12 \cos(4t) \text{ V}$$

P 14.10-10 A função de transferência de um circuito é $H(s) = \dfrac{20}{s+8}$. Se a entrada do circuito é senoidal, a saída também é senoidal. Seja w_1 a frequência na qual a amplitude da senoide de saída é duas vezes maior que a amplitude da senoide de entrada e seja w_2 a frequência na qual a senoide de saída está atrasada de um décimo de período em relação à senoide de entrada. Determine o valor de ω_1 e ω_2.

P 14.10-11 A entrada de um circuito linear é a tensão v_i e a saída é tensão v_o. A função de transferência do circuito é

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$$

O diagrama de polos e zeros da Figura P 14.10-11 mostra os polos de $H(s)$. (A função não possui zeros e existe um polo duplo em $s = -2$.) O ganho de CC do circuito é $H(0) = 5$. Determine a resposta do circuito a um degrau.

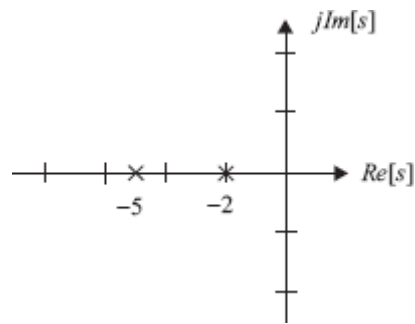



Figura P 14.10-11

P 14.10-12 A entrada de um circuito linear é a tensão v_i e a saída é a tensão v_o. A função de transferência do circuito é

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$$

O diagrama de polos e zeros da Figura P 14.10-12 mostra os polos de $H(s)$. Para w = 5 rad/s, o ganho do circuito é $H(5) = 10$. Determine a resposta do circuito a um degrau.

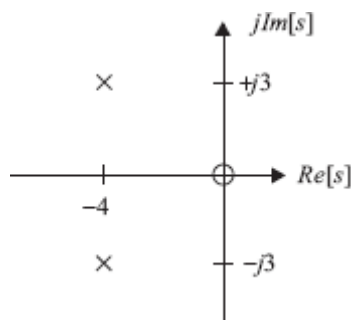



Figura P 14.10-12

P 14.10-13 A entrada de um circuito linear é a tensão v_i e a saída é a tensão v_o. A função de transferência do circuito é

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$$

O diagrama de polos e zeros da Figura P 14.10-13 mostra os polos de $H(s)$. (Existe um polo duplo em s = −4.) O ganho de CC do circuito é $H(0) = 5$. Determine a resposta do circuito a um degrau.

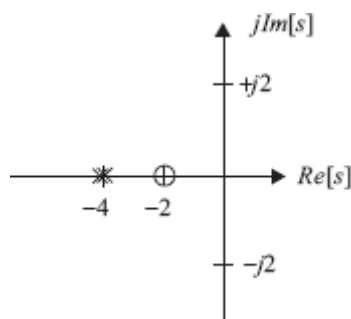



Figura P 14.10-13

P 14.10-14 A entrada de um circuito é a tensão v_i. A resposta do circuito a um degrau é

$$v_o = 5e^{-4t}\,\text{sen}(2t)u(t)\text{ V}$$

Plote o diagrama de polos e zeros do circuito.

P 14.10-15 A entrada de um circuito é a tensão v_i. A resposta do circuito a um degrau é

$$v_o = 5te^{-4t}\, u(t)\ \text{V}$$

Plote o diagrama de polos e zeros do circuito.

P 14.10-16 A entrada do circuito da Figura P 14.10-16 é a tensão v_i da fonte de tensão independente e a saída é a tensão v_o do resistor R_3. A função de transferência do circuito é

$$H(s) = \frac{120s}{s^2 + 24s + 208}$$

(a) Determine o valor de A, R, R_2, R_3 e L.

(b) Determine a resposta do circuito se $v_i(t) = u(t)$.

(c) Determine a resposta do circuito no regime estacionário se $v_i(t) = 3{,}2\cos(10\,t + 30^\circ)$ V.

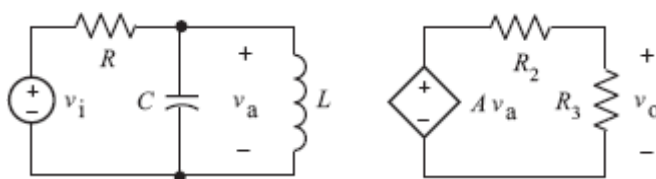



Figura P 14.10-16

14.11 Expansão em Frações Parciais Usando o MATLAB

P 14.11-1 Determine a transformada inversa de Laplace da função

$$V(s) = \frac{11{,}6s^2 + 91{,}83s + 186{,}525}{s^3 + 10{,}95s^2 + 35{,}525s + 29{,}25}$$

P 14.11-2 Determine a transformada inversa de Laplace da função

$$V(s) = \frac{8s^3 + 139s^2 + 774s + 1471}{s^4 + 12s^3 + 77s^2 + 296s + 464}$$

P 14.11-3 Determine a transformada inversa de Laplace da função

$$V(s) = \frac{s^2 + 6s + 11}{s^3 + 12s^2 + 48s + 64} = \frac{s^2 + 6s + 11}{(s+4)^3}$$

P 14.11-4 Determine a transformada inversa de Laplace da função

$$V(s) = \frac{-60}{s^2 + 5s + 48{,}5}$$

P 14.11-5 Determine a transformada inversa de Laplace da função

$$V(s) = \frac{-30}{s^2 + 25}$$

P 14.11-6 A entrada do circuito da Figura P 14.11-6 é a tensão $v_i(t)$ e a saída é a tensão $v_o(t)$. Determine a tensão de saída se a tensão de entrada for

$$v_i(t) = 5\cos(4000t)u(t)\ \text{mV}$$

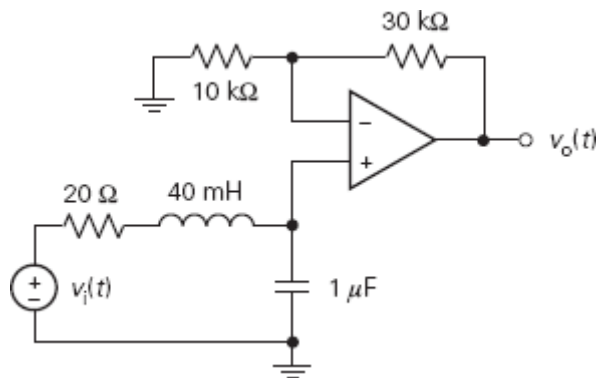



Figura P 14.11-6

Seção 14.12 Como Podemos Testar . . . ?

P 14.12-1 Uma análise em computador do circuito da Figura P 14.12-1 indica que

$$v_C(t) = 6 + 3{,}3e^{-2{,}1t} + 2{,}7e^{-15{,}9t} \text{ V}$$

e

$$i_L(t) = 2 + 0{,}96e^{-2{,}1t} + 0{,}04e^{-15{,}9t} \text{ A}$$

depois que a chave é aberta no instante $t = 0$. Mostre que a análise está correta verificando (a) que a LKT é satisfeita na malha formada pela fonte de tensão, o indutor e o resistor de 12 Ω; (b) que a LKC é satisfeita no nó b.

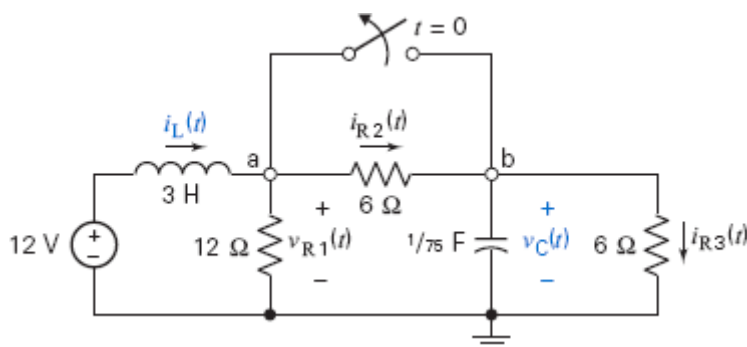



Figura P 14.12-1

Sugestão: Use as expressões conhecidas de $v_C(t)$ e $i_L(t)$ para determinar expressões para $v_L(t)$, $i_C(t)$, $v_{R1}(t)$, $i_{R2}(t)$ e $i_{R3}(t)$.

P 14.12-2 A análise do circuito da Figura P 14.12-2 para $v_C = -12$ V indica que

$$i_1(t) = 18e^{-0{,}75t} \text{ A} \quad \text{e} \quad i_2(t) = 20e^{-0{,}75t} \text{ A}$$

para $t > 0$. Mostre que a análise está correta representando o circuito no domínio da frequência complexa, usando $I_1(s)$ e $I_2(s)$ para calcular as tensões dos componentes e verificando que as tensões nas duas malhas satisfazem a LKT.

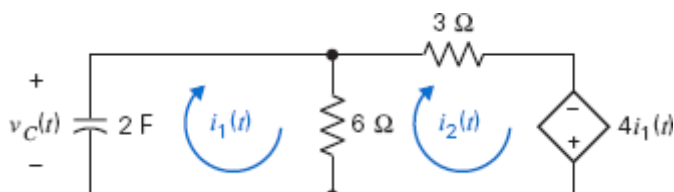



Figura P 14.12-2

P 14.12-3 A Figura P 14.12-3 mostra a representação de um circuito (a) no domínio do tempo e (b) no domínio da frequência complexa, usando transformadas de Laplace. Uma análise incorreta do circuito indica que

$$I_L(s) = \frac{s+2}{s^2+s+5} \quad \text{e} \quad V_C(s) = \frac{-20(s+2)}{s(s^2+s+5)}$$

(a) Use os teoremas do valor inicial e do valor final para identificar o erro cometido na análise.

(b) Corrija o erro.

Sugestão: Aparentemente, o erro aconteceu quando $V_C(s)$ foi calculada a partir de $I_L(s)$.

Resposta: $V_C(s) = -\frac{20}{s}\left(\frac{s+2}{s^2+s+5}\right) + \frac{8}{s}$

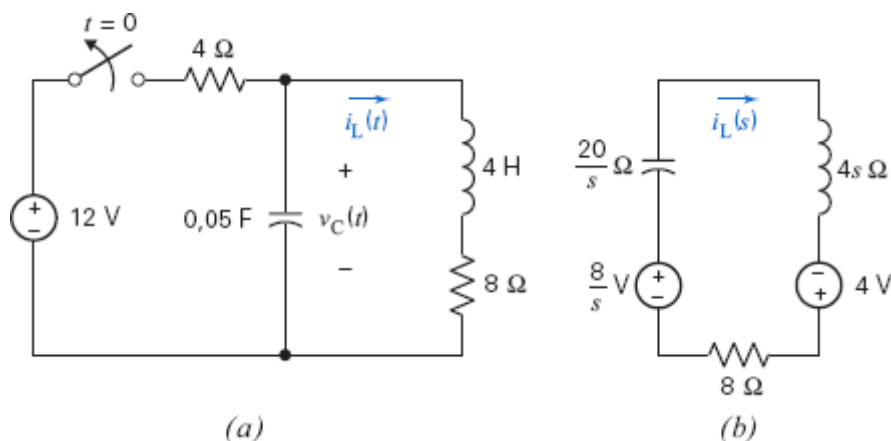



Figura P 14.12-3

Problemas com o PSpice

PS 14-1 A entrada do circuito da Figura PS 14-1 é a tensão da fonte de tensão, $v_i(t)$, e a saída é a tensão do capacitor, $v_o(t)$. A tensão de entrada é o sinal pulsado que aparece na figura ao lado. Use o programa PSpice para plotar a saída, $v_o(t)$, em função de t.

Sugestão: Represente a fonte de tensão usando o módulo do PSpice chamado VPULSE.

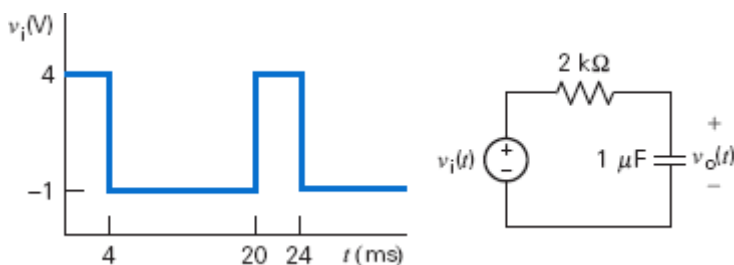



Figura PS 14-1

PS 14-2 O circuito da Figura PS 14-2 está no regime estacionário quando a chave é fechada no instante $t = 0$. A entrada do circuito é a tensão da fonte de tensão, 12 V, e a saída é a tensão do capacitor, $v(t)$. Use o programa PSpice para plotar a saída, $v(t)$, em função de t. Use o gráfico para obter uma representação analítica de $v(t)$ para $t > 0$.

Sugestão: Esperamos que $v(t) = A + Be^{-t/\tau}$ para $t > 0$, em que A, B e τ são constantes a determinar.

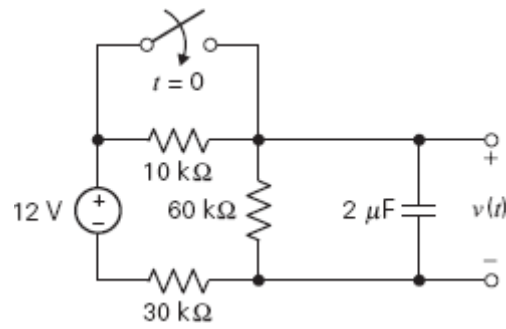



Figura PS 14-2

PS 14-3 O circuito da Figura PS 14-3 está no regime estacionário quando a chave é fechada no instante $t = 0$. A entrada do circuito é a corrente da fonte de corrente, 4 mA, e a saída é a corrente do indutor, $i(t)$. Use o programa PSpice para plotar a saída, $i(t)$, em função de t. Use o gráfico para obter uma representação analítica de $i(t)$ para $t > 0$.

Sugestão: Esperamos que $i(t) = A + Be^{-t/\tau}$ para $t > 0$, em que A, B e τ são constantes a determinar.

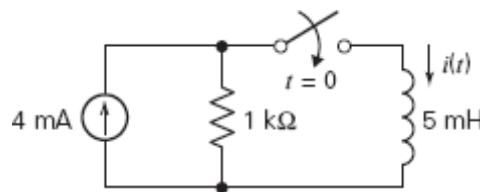



Figura PS 14-3

PS 14-4 A entrada do circuito da Figura PS 14-4 é a tensão da fonte de tensão, $v_i(t)$ e a saída é a tensão do capacitor, $v_o(t)$. A tensão de entrada é o sinal pulsado que aparece na figura a seguir. Use o programa PSpice para plotar a saída, $v_o(t)$, em função de t para os seguintes casos:

(a) $C = 1$ F, $L = 0{,}25$ H, $R_1 = R_2 = 1{,}309\ \Omega$

(b) $C = 1$ F, $L = 1$ H, $R_1 = 3\ \Omega$, $R_2 = 1\ \Omega$

(c) $C = 0{,}125$ F, $L = 0{,}5$ H, $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 4\ \Omega$

Plote as três saídas no mesmo gráfico.

Sugestão: Represente as fontes de tensão usando o módulo do PSpice chamado VPULSE.

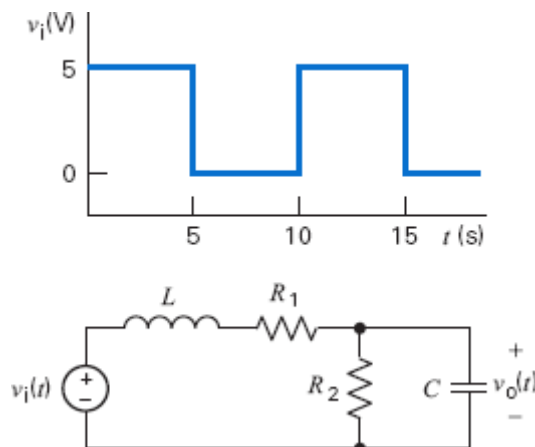



Figura PS 14-4

PS 14-5 A entrada do circuito da Figura PS 14-5 é a tensão $v_i(t)$ da fonte de tensão e a saída é a tensão $v_o(t)$ do resistor R_2. A tensão de entrada é o sinal pulsado que aparece na figura a seguir. Use o programa PSpice para plotar a saída, $v_o(t)$, em função de t para os seguintes casos:

(a) $C = 1$ F, $L = 0{,}25$ H, $R_1 = R_2 = 1{,}309\ \Omega$

(b) $C = 1$ F, $L = 1$ H, $R_1 = 3\ \Omega$, $R_2 = 1\ \Omega$

(c) $C = 0{,}125$ F, $L = 0{,}5$ H, $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 4\ \Omega$

Plote as três saídas no mesmo gráfico.

Sugestão: Represente a fonte de tensão usando o módulo do PSpice chamado VPULSE.

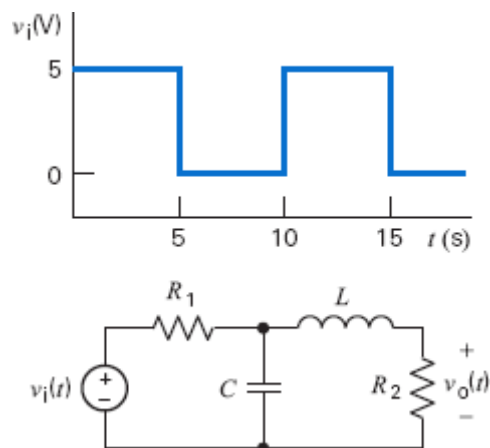



Figura PS 14-5

Problemas de Projeto

PP 14-1 Projete o circuito da Figura PP 14-1 para que a resposta a um degrau seja

$$v_o = 5te^{-4t}\, u(t)\ \text{V}$$

Sugestão: Determine a função de transferência do circuito da Figura PP 14-1 em termos de k, R, C e L. Em seguida, determine a transformada de Laplace da resposta a um degrau do circuito da Figura 14-1 e a transformada de Laplace da resposta a um degrau pedida no enunciado. Finalmente, determine k, R, C e L para que as duas respostas sejam iguais.

Resposta: Uma solução possível é $L = 1$ H, $k = 0{,}625$ V/V, $R = 8\ \Omega$ e $C = 0{,}0625$ F.

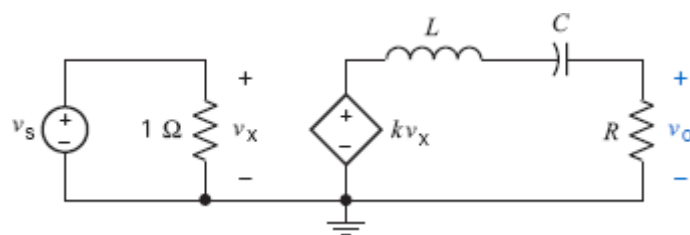



Figura PP 14-1

PP 14-2 Projete o circuito da Figura PP 14-1 para que a resposta a um degrau seja

$$v_o(t) = 5e^{-4t}\ \text{sen}\ (2\ t)u(t)\ \text{V}$$

Sugestão: Determine a função de transferência do circuito da Figura PP 14-1 em termos de k, R, C e L. Em seguida, determine a transformada de Laplace da resposta a um degrau do circuito da Figura 14-1 e a transformada de Laplace da resposta a um degrau pedida no enunciado. Finalmente, determine k, R, C e L para que as duas respostas sejam iguais.

Resposta: Uma solução possível é $L = 1$ H, $k = 1{,}25$ V/V, $R = 8\ \Omega$ e $C = 0{,}05$ F.

PP 14-3 Projete o circuito da Figura PP 14-1 para que a resposta a um degrau seja

$$v_o(t) = 5\ (e^{-2t} - e^{-4t}\ u(t)\ \text{V}$$

Sugestão: Determine a função de transferência do circuito da Figura PP 14-1 em termos de k, R, C e L. Em seguida, determine a transformada de Laplace da resposta a um degrau do circuito da Figura PP 14-1 e a transformada de Laplace da resposta a um degrau pedida no enunciado. Finalmente, determine k, R, C e L para que as duas respostas sejam iguais.

Resposta: Uma solução possível é $L = 1$ H, $k = 1{,}667$ V/V, $R = 6\ \Omega$ e $C = 0{,}125$ F.

PP 14-4 Mostre que o circuito da Figura PP 14-1 não pode ser projetado para que a resposta a um degrau seja

$$v_o(t) = 5\ (e^{-2t} + e^{-4t})\ u(t)\ \text{V}$$

Sugestão: Determine a função de transferência do circuito da Figura PP 14-1 em termos de k, R, C e L. Em seguida, determine a transformada de Laplace da resposta a um degrau do circuito da Figura PP 14-1 e a transformada de Laplace da resposta a um degrau pedida no enunciado. Observe que as duas funções têm formas diferentes e não existem valores de k, R, C e L que tornem as respostas iguais.

PP 14-5 A entrada do circuito da Figura PP 14-5 é a corrente $i(t)$ e a saída é a corrente $i_o(t)$. Determine o valor de R, L e C para que a resposta do circuito a um impulso seja

$$i_o(t) = (k_1 e^{-2000t} + k_1 e^{-8000t})\ u(t)\ \text{A}$$

em que k_1 e k_2 são constantes.

Resposta: Uma solução possível é $L = 125$ mH, $R = 1250\ \Omega$ e $C = 0{,}5\ \mu$F.

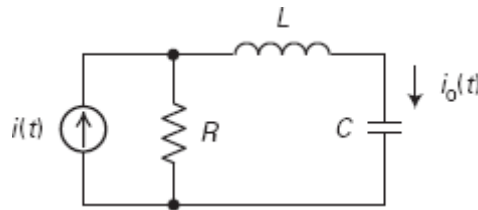



Figura PP 14-5

PP 14-6 A entrada dos circuitos da Figura PP 14-6 é a tensão $v_i(t)$ e a saída é a tensão $v_o(t)$. Escolha um dos circuitos e determine o valor dos componentes para que a resposta do circuito a um degrau seja

$$v_o(t) = \left(\frac{4}{3}e^{-20t} - \frac{1}{3}e^{-5t}\right)u(t)\ \text{V}$$

Resposta: O circuito escolhido deve ser o circuito (b). Uma solução possível para o valor dos componentes é $L = 1$ H, $R = 125\ \Omega$, $C = 2$ mF e $k = 4$A/A.

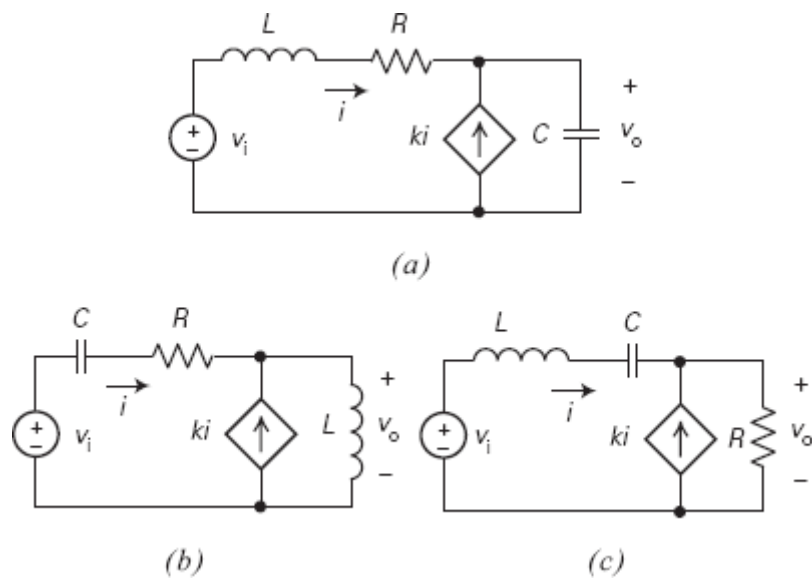



Figura PP 14-6

PP 14-7 A entrada dos circuitos da Figura PP 14-7 é a tensão $v_i(t)$ e a saída é a tensão $v_o(t)$. Escolha um dos circuitos e determine o valor dos componentes para que a resposta do circuito a um degrau seja

$$v_o(t) = 5\,(e^{-10t} - e^{-15t})\,u(t)\text{ V}$$

PP 14-8 A entrada dos circuitos da Figura PP 14-6 é a tensão $v_i(t)$ e a saída é a tensão $v_o(t)$. Escolha um dos circuitos e determine o valor dos componentes para que a resposta do circuito a um degrau seja

$$v_o(t) = (1 - e^{-20t} - 20te^{-20t})\,u(t)\text{ V}$$

PP 14-9 A entrada dos circuitos da Figura PP 14-6 é a tensão $v_i(t)$ e a saída é a tensão $v_o(t)$. Escolha um dos circuitos e determine o valor dos componentes para que a resposta do circuito a um degrau seja

$$v_o(t) = e^{-10t}\text{ sen }(40t)u(t)\text{ V}$$

Resposta: O circuito escolhido deve ser o circuito (c). Uma solução possível para o valor dos componentes é L = 0,5 H, R = 4 Ω, C = 1 mF e k = 4A/A.

PP 14-10 A entrada dos circuitos da Figura PP 14-6 é a tensão $v_i(t)$ e a saída é a tensão $v_o(t)$. Escolha um dos circuitos e determine o valor dos componentes para que a resposta do circuito a um degrau seja

$$v_o(t) = e^{-10t}\cos(40t)u(t)\text{ V}$$

Resposta: Nenhum dos circuitos da Figura PP 14-6 pode produzir a resposta pedida.

* Na verdade, essa é a definição da função *degrau unitário*. Deste ponto em diante, quando o autor se refere à função degrau, está implícito que se trata da função degrau unitário. (N.T.)

* Na verdade, essa é a definição da função *impulso unitário*. Deste ponto em diante, quando o autor se refere à função impulso, está implícito que se trata da função impulso unitário. (N.T.)

* Outra definição de função de transferência foi apresentada no Capítulo 13. As duas definições são equivalentes para $s = j\omega$, ou seja, no regime estacionário senoidal. (N.T.)

CAPÍTULO 15 Série de Fourier e Transformada de Fourier

NESTE CAPÍTULO

15.1 *Introdução*

Neste capítulo são apresentadas a série de Fourier e a transformada de Fourier. A série de Fourier, que representa uma forma de onda periódica não senoidal como uma soma de formas de onda senoidais, pode ser útil de duas formas:

- Mostrando que uma forma de onda periódica pode ser vista como uma soma de componentes senoidais de diferentes frequências, a série de Fourier permite discutir a distribuição de frequências de uma forma de onda periódica arbitrária. Assim, por exemplo, passa a fazer sentido falar da "parte de alta frequência de uma onda quadrada".
- Podemos usar o princípio de superposição para determinar a resposta estacionária de um circuito a uma entrada representada por uma série de Fourier e assim determinar a resposta estacionária do circuito a qualquer forma de onda periódica.

Obtemos a transformada de Fourier como uma generalização da série de Fourier, tomando o limite quando o período de uma forma de onda periódica tende a infinito. A transformada de Fourier pode ser útil de duas formas:

- A transformada de Fourier representa uma forma de onda aperiódica no domínio da frequência, o que permite discutir a distribuição de frequências de uma forma de onda aperiódica arbitrária. Assim, por exemplo, passa a fazer sentido falar da "parte de alta frequência de um pulso quadrado".
- Podemos representar tanto a entrada de um circuito como o próprio circuito no domínio da frequência: a entrada é representada pela transformada de Fourier do sinal de entrada e o circuito é representado por uma função de transferência. A representação da saída do circuito no domínio da frequência é obtida como o produto da transformada de Fourier do sinal de entrada pela função de transferência do circuito.

15.2 A Série de Fourier

Em 1807, o barão Jean-Baptiste-Joseph Fourier declarou que qualquer função de onda periódica podia ser expressa como uma soma infinita de funções senoidais. De acordo com essa surpreendente afirmação, mesmo formas de onda descontínuas, como ondas quadradas, poderiam ser representadas por somas de senoides. A princípio, a declaração de Fourier foi recebida com reservas. Matemáticos famosos, como Pierre Simon de Laplace e Joseph Louis Lagrange, expressaram dúvidas de que a representação proposta por Fourier pudesse ser aplicada a todas as funções periódicas. Em 1828, Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet definiu as condições necessárias para que uma função periódica possa ser expressa na forma de uma soma infinita de senoides, hoje conhecida como série de Fourier. Atualmente, as séries de Fourier são usadas de forma rotineira por cientistas e engenheiros.

Vamos começar nosso estudo da série de Fourier com algumas definições relativas a funções periódicas. Dizemos que uma função do tempo $f(t)$ é periódica se existe um intervalo de tempo τ tal que

$$f(t) = f(t - \tau) \qquad (15.2\text{-}1)$$

para qualquer valor de t. Esse valor de τ não é único. Em particular, se τ satisfaz a Eq. 15.2-1, qualquer múltiplo inteiro de τ também satisfaz a Eq. 15.2-1. Em outras palavras, se τ satisfaz a Eq. 15.2-1 e k é um número inteiro,

$$f(t) = f(t - k\tau)$$

para qualquer valor de t. O **período** T da função periódica $f(t)$ é definido como o menor valor positivo de τ que satisfaz a Eq. 15.2-1.

A frequência fundamental* ω_0 da função periódica $f(t)$ é definida a partir do período T, através da equação

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \qquad (15.2\text{-}2)$$

A frequência fundamental é medida em rad/s. Múltiplos inteiros da frequência fundamental são chamados de frequências harmônicas.

Qualquer função periódica $f(t)$ pode ser representada por uma série infinita de senoides cujas frequências são as frequências harmônicas de $f(t)$:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\,\omega_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} n\,\omega_0 t \qquad (15.2\text{-}3)$$

em que ω_0 é a frequência fundamental e os coeficientes (reais) a_0, a_n e b_n são chamados de **coeficientes de Fourier**. Os coeficientes de Fourier são dados pelas seguintes equações:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{T+t_0} f(t)dt = \text{valor médio de } f(t) \qquad (15.2\text{-}4)$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{T+t_0} f(t)\cos n\,\omega_0 t\,dt \qquad n > 0 \tag{15.2-5}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{T+t_0} f(t)\,\text{sen}\, n\,\omega_0 t\,dt \qquad n > 0 \tag{15.2-6}$$

As condições propostas por Dirichlet são suficientes para assegurar a convergência da série de Fourier dada pela Eq. 15.2-3. Essas condições são as seguintes:

1. $f(t)$ deve ser uma função unívoca, exceto, possivelmente, em um número finito de pontos dentro do período T.
2. $f(t)$ deve ser absolutamente integrável, ou seja, $\int_{t_0}^{t_0+T} |f(t)|\,dt < \infty$ para qualquer valor de t_0.
3. $f(t)$ deve ser contínua, exceto, possivelmente, em um número finito de pontos dentro do período T.
4. $f(t)$ deve possuir um número finito de máximos e mínimos dentro do período T.

Em nossos estudos, $f(t)$ será usada para representar uma forma de onda de tensão ou de corrente. Como, na prática, não é possível gerar uma tensão ou corrente que não satisfaça as condições de Dirichlet, podemos supor que as quatro condições mencionadas acima são sempre satisfeitas por tensões e correntes periódicas.

A **série de Fourier** é uma representação precisa de um sinal periódico e consiste em uma soma de senoides cujas frequências são as frequências harmônicas do sinal.

Dada uma tensão ou corrente periódica, podemos obter a representação em série de Fourier da tensão ou corrente em quatro passos:

1º passo: Determinar o período T e a frequência fundamental ω_0.
2º passo: Representar a tensão ou corrente em função de t para um período completo.
3º passo: Usar as Eqs. 15.2-4, 5 e 6 para calcular os coeficientes de Fourier a_0, a_n e b_n.
4º passo: Substituir os coeficientes a_0, a_n e b_n da Eq. 15.2-3 pelos valores calculados no 3º passo.

O exemplo a seguir ilustra o método que acabamos de descrever.

EXEMPLO 15.2-1 Série de Fourier de um Cosseno Retificado

A Figura 15.2-1 mostra um circuito retificador de onda completa cuja entrada é uma cossenoide. A saída é o valor absoluto da entrada, como mostra a Figura 15.2-2. O retificador de onda completa é um circuito usado em quase todos os aparelhos eletrônicos. Determine a série de Fourier da forma de onda periódica da Figura 15.2-2.

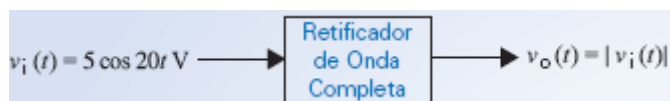



FIGURA 15.2-1 Circuito do Exemplo 15.2-1.

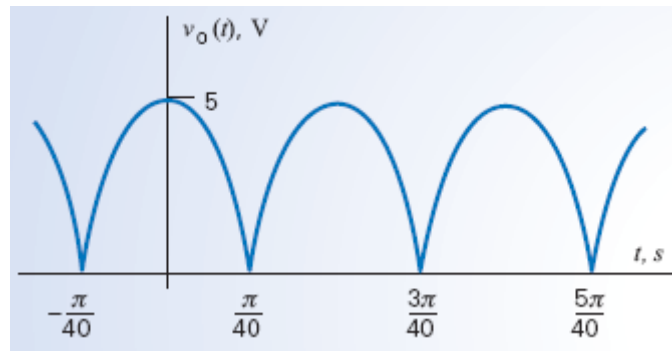



FIGURA 15.2-2 Cossenoide retificada.

Solução

1º passo: De acordo com a Figura 15.2-2, o período de $v_o(t)$ é

$$T = \frac{3\pi}{40} - \frac{\pi}{40} = \frac{\pi}{20} \text{ s}$$

A frequência fundamental é

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 40 \text{ rad/s}$$

2º passo: As Eqs. 15.2-4, 5 e 6 envolvem uma integral ao longo de um período completo de $v_o(t)$. Como o ponto inicial do período é arbitrário, pode ser escolhido de modo a facilitar a integração. Em muitos casos, os limites mais simples são 0 e T ou $-T/2$ e $T/2$. Neste exemplo, a forma de onda periódica pode ser representada como

$$v_o(t) = \begin{cases} 5\cos(20t) & \text{para} \quad -\frac{\pi}{40} \le t \le \frac{\pi}{40} \\ -5\cos(20t) & \text{para} \quad \frac{\pi}{40} \le t \le \frac{3\pi}{40} \end{cases}$$

Considere o cálculo de a_0 usando a Eq. 15.2-4. Integrando de 0 a T, obtemos

$$a_0 = \frac{20}{\pi}\int_0^{\pi/20} v_o(t)dt = \frac{20}{\pi}\int_0^{\pi/40} 5\cos(20t)dt + \frac{20}{\pi}\int_{\pi/40}^{\pi/20} -5\cos(20t)dt$$

Por outro lado, integrando de $-T/2$ a $T/2$, temos:

$$a_0 = \frac{20}{\pi}\int_{-\pi/40}^{\pi/40} v_o(t)dt = \frac{20}{\pi}\int_{-\pi/40}^{\pi/40} 5\cos(20t)dt$$

Como a segunda equação é mais simples, damos preferência a integrar de $-T/2$ a $T/2$.

3º passo: Agora vamos usar as Eqs. 15.2-4, 5 e 6 para calcular os coeficientes de Fourier a_0, a_n e b_n.

$$a_0 = \frac{20}{\pi}\int_{-\pi/40}^{\pi/40} 5\cos(20t)dt = \frac{100}{\pi}\left(\frac{1}{20}\,\text{sen}(20t)\Big|_{-\pi/40}^{\pi/40}\right) = \frac{5}{\pi}\left(\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{10}{\pi}$$

e

$$a_n = \frac{40}{\pi}\int_{-\pi/40}^{\pi/40} 5\cos(20\,t)\cos(n\omega_0 t)dt = \frac{40}{\pi}\int_{-\pi/40}^{\pi/40} 5\cos(20t)\cos(40nt)dt$$

Usando uma identidade trigonométrica,

$$\begin{aligned}\cos(20t)\cos(40nt) &= \frac{1}{2}\left(\cos(20t + 40nt) + \cos(20t + 40nt)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\cos((1 + 2n)20t) + \cos((1 - 2n)20t)\right)\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{100}{\pi}\int_{-\pi/40}^{\pi/40}\left(\cos((1+2n)20t) + \cos((1-2n)20t)\right)dt\\ &= \frac{100}{\pi}\left(\left.\frac{\operatorname{sen}((1+2n)20t)}{(1+2n)20}\right|_{-\pi/40}^{\pi/40} + \left.\frac{\operatorname{sen}((1-2n)20t)}{(1-2n)20}\right|_{-\pi/40}^{\pi/40}\right)\\ &= \frac{5}{\pi}\left(\frac{\operatorname{sen}\left((1+2n)\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(-(1+2n)\frac{\pi}{2}\right)}{(1+2n)} + \frac{\operatorname{sen}\left((1-2n)\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(-(1-2n)\frac{\pi}{2}\right)}{(1-2n)}\right)\\ &= \frac{5}{\pi}\left(\frac{2(-1)^n}{(1+2n)} + \frac{2(-1)^n}{(1-2n)}\right) = \frac{20(-1)^n}{\pi(1-4n^2)}\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}b_n &= \frac{40}{\pi}\int_{-\pi/40}^{\pi/40} 5\cos(20t)\operatorname{sen}(40\,nt)dt\\ &= \frac{100}{\pi}\int_{-\pi/40}^{\pi/40}\left(\operatorname{sen}((2n+1)20t) + \operatorname{sen}((2n-1)20t)\right)dt\\ &= \frac{100}{\pi}\left(\left.\frac{-\cos((1+2n)20t)}{(1+2n)20}\right|_{-\pi/40}^{\pi/40} + \left.\frac{-\cos((1-2n)20t)}{(1-2n)20}\right|_{-\pi/40}^{\pi/40}\right) = 0\end{aligned}$$

Resumindo,

$$a_0 = \frac{10}{\pi};\ a_n = \frac{20(-1)^n}{\pi(1-4n^2)} \quad \text{e} \quad b_n = 0 \tag{15.2-7}$$

4º passo: Substituindo os coeficientes a_0, a_n e b_n da Eq. 15.2-3 por seus valores, dados pela Eq. 15.2-7, temos

$$v_o(t) = \frac{10}{\pi} + \frac{20}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}\cos(40\,nt) \tag{15.2-8}$$

A Eq. 15.2-8 supostamente representa a cossenoide retificada através de uma série de Fourier, mas a equação é tão complicada que não parece ter nenhuma relação com a função original. Como podemos ter certeza de que a Eq. 15.2-8 representa uma cossenoide retificada? A Figura 15.2-3 mostra um arquivo de entrada do MATLAB que pode ser usado para plotar a série de Fourier dada pela Eq. 15.2-8. A Figura 15.2-4 mostra o gráfico produzido pelo MATLAB. A forma de onda da Figura 15.2-4 é uma cossenoide retificada com a amplitude correta, 5 V, e o período correto, $\pi/20 \cong 0{,}16$ s. Isso mostra que a Eq. 15.2-8 representa realmente a forma de onda da Figura 15.2-2.

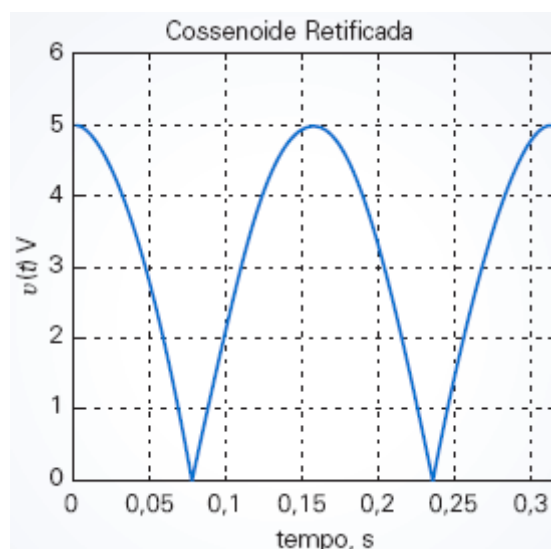
```
% Ex15_2_1.m - série de Fourier de uma cossenoide retificada
% -----------------------------------------------------
%        Descrever a forma de onda periódica, v(t)
% -----------------------------------------------------
T=pi/20;            % período
a0=10/pi;           % valor médio

% -----------------------------------------------------
%  Criar uma lista de instantes de tempo igualmente espaçados
% -----------------------------------------------------
w0=2*pi/T;          % frequência fundamental, em rad/s
tf=2*T;             % tempo final
dt=tf/200;          % incremento de tempo
t=0:dt:tf;          % tempo, em s

% -----------------------------------------------------
%  Calcular v(t) usando a série de Fourier
% -----------------------------------------------------
v = a0*ones(size(t));  % inicializar v(t) como um vetor
for n=1:100
   an = 20*((-1)^n)/(pi*(1-4*n^2));
   bn = 0;
   v = v + an*cos(n*w0*t) + bn*sin(n*w0*t);
end

% -----------------------------------------------------
%                     Plotar v(t)
% -----------------------------------------------------
plot(t, v)
axis([0 tf 0 6])
grid
xlabel('tempo, s')
ylabel('v(t) V')
title('Cossenoide Retificada')
```

FIGURA 15.2-3 Arquivo de entrada do MATLAB para plotar a série de Fourier da Eq. 15.2-8.

FIGURA 15.2-4 Gráfico produzido pelo arquivo de entrada do MATLAB da Figura 15.2-3.

Vamos agora obter outra representação da série de Fourier. Outra forma de escrever a série de Fourier da Eq. 15.2-3 é a seguinte:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\,\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\,\omega_0 t) \qquad (15.2\text{-}9)$$

Usando uma identidade trigonométrica, o enésimo termo da série pode ser escrito como uma soma de cossenoides:

$$a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t = a_n \cos n\omega_0 t + b_n \cos(n\omega_0 t - 90^\circ) \qquad (15.2\text{-}10)$$

Usando fasores, podemos representar o lado direito da Eq. 15.2-10 no domínio da frequência. Convertendo da forma retangular para a forma polar, obtemos

$$a_n \angle 0 + b_n \angle -90^\circ = a_n - jb_n = c_n \angle \theta_n$$

em que

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \text{e} \quad \theta_n = \begin{cases} -\tan^{-1}\left(\dfrac{b_n}{a_n}\right) & \text{para} \quad a_n > 0 \\ 180^\circ - \tan^{-1}\left(\dfrac{b_n}{a_n}\right) & \text{para} \quad a_n < 0 \end{cases} \qquad (15.2\text{-}11)$$

e

$$a_n = c_n \cos \theta_n \quad \text{e} \quad b_n = -c_n \operatorname{sen} \theta_n$$

De volta ao domínio do tempo, a cossenoide correspondente é

$$c_n \cos(n\,\omega_0 t + \theta_n)$$

Definindo c_0 como

$$c_0 = a_0 = \text{ valor médio de } f(t) \qquad (15.2\text{-}12)$$

a série de Fourier pode ser representada como

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) \qquad (15.2\text{-}13)$$

Para distinguir as duas formas da série de Fourier, chamamos a série dada pela Eq. 15.2-3 de série de Fourier seno-cosseno e a série dada pela Eq. 15.2-13 de série de Fourier amplitude-fase.

Em geral, é mais fácil calcular os coeficientes a_n e b_n do que calcular os coeficientes c_n e θ_n, especialmente quando a função $f(t)$ é simétrica, como vamos ver na Seção 15.3. Por outro lado, a série de Fourier baseada nos coeficientes c_n é mais conveniente para calcular a resposta estacionária de um circuito linear a uma entrada periódica.

EXEMPLO 15.2-2 Série de Fourier de uma Forma de Onda Pulsada

Determine a série de Fourier da forma de onda pulsada da Figura 15.2-5.

Solução

1º passo: De acordo com a Figura 15.2-5, o período de $v_o(t)$ é

$$T = \frac{\pi}{10}\ \text{s}$$

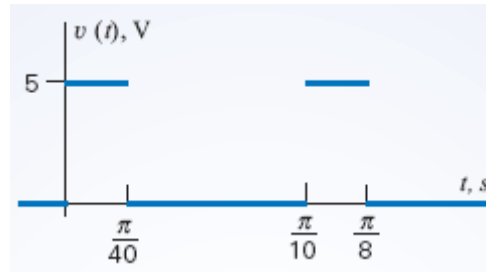



FIGURA 15.2-5 Forma de onda pulsada.

A frequência fundamental é

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 20\ \text{rad/s}$$

2º passo: No período de 0 a $\pi/10$, a forma de onda da Figura 15.2-5 é dada por

$$v(t) = \begin{cases} 5 & \text{para} \quad 0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{40} \\ 0 & \text{para} \quad \dfrac{\pi}{40} \leq t \leq \dfrac{\pi}{10} \end{cases}$$

3º passo: Vamos agora calcular os coeficientes de Fourier a_0, a_n e b_n. O coeficiente a_0 é o valor médio de $v(t)$:

$$a_0 = \frac{\text{área sob a curva para um período}}{\text{um período, } T} = \frac{5\left(\dfrac{\pi}{40}\right) + 0\left(\dfrac{3\pi}{40}\right)}{\dfrac{\pi}{10}} = 1{,}25\ \text{V}$$

e

$$a_n = \frac{20}{\pi}\int_0^{\pi/40} 5\cos(n\,\omega_0 t)dt + \frac{20}{\pi}\int_{\pi/40}^{\pi/10} 0\cos(n\,\omega_0 t)dt = \frac{20}{\pi}\int_0^{\pi/40} 5\cos(20nt)dt$$
$$= \frac{20(5)}{\pi}\left(\left.\frac{\text{sen}\,(20nt)}{20n}\right|_0^{\pi/40}\right) = \frac{5}{n\pi}\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Analogamente,

$$b_n = \frac{20}{\pi}\int_0^{\pi/40} 5\,\text{sen}\,(n\,\omega_0 t)dt = \frac{20}{\pi}\int_0^{\pi/40} 5\,\text{sen}\,(20nt)dt = \frac{20(5)}{\pi}\left(\left.\frac{-\cos(20nt)}{20n}\right|_0^{\pi/40}\right) = \frac{5}{n\pi}\left(1 - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)$$

Resumindo,

$$a_0 = 1{,}25,\ a_n = \frac{5}{n\pi}\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \quad \text{e} \quad b_n = \frac{5}{n\pi}\left(1 - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) \qquad (15.2\text{-}14)$$

4º passo: Substituindo os coeficientes a_0, a_n e b_n da Eq. 15.2-3 por seus valores, dados pela Eq. 15.2-14, temos:

$$v_o(t) = 1{,}25 + \frac{5}{n\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos(20\,nt) + \left(1 - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)\text{sen}(20nt)\right) \qquad (15.2\text{-}15)$$

A Figura 15.2-6 mostra um arquivo de entrada do MATLAB que pode ser usado para plotar a série de Fourier dada pela Eq. 15.2-15. A Figura 15.2-7 mostra o gráfico produzido pelo MATLAB. A forma de onda da Figura 15.2-7 é realmente uma forma de onda pulsada com a amplitude correta, 5 V, e o período correto, $\pi/10 \cong 0{,}32$ s.

```
% Ex15_2_2.m - série de Fourier de uma onda pulsada
% -----------------------------------------------------------
%       Descrever a forma de onda periódica, v(t)
% -----------------------------------------------------------
T=pi/10;            % período
a0=1.25;           % valor médio

% -----------------------------------------------------------
%  Criar uma lista de instantes de tempo igualmente espaçados
% -----------------------------------------------------------
w0=2*pi/T;          % frequência fundamental, em rad/s
tf=2.5*T;           % tempo final
dt=tf/200;          % incremento de tempo
t=0:dt:tf;          % tempo, em s

% -----------------------------------------------------------
%  calcular v(t) usando a série de Fourier
% -----------------------------------------------------------
v = a0*ones(size(t));  % inicializar v(t) como um vetor
for n=1:500
   an = (5/n/pi)*sin(n*pi/2);
   bn = (5/n/pi)*(1-cos(n*pi/2));
   cn = abs(an - j*bn);
   thetan = angle(an - j*bn);
   v = v + cn*cos(n*w0*t + thetan);
end

% -----------------------------------------------------------
%                         Plotar v(t)
% -----------------------------------------------------------
plot(t, v)
axis([0 tf 0 6])
grid
xlabel('tempo, s')
ylabel('v(t) V')
title('Onda Pulsada')
```

FIGURA 15.2-6 Arquivo de entrada do MATLAB para plotar a série de Fourier da Eq. 15.2-15.

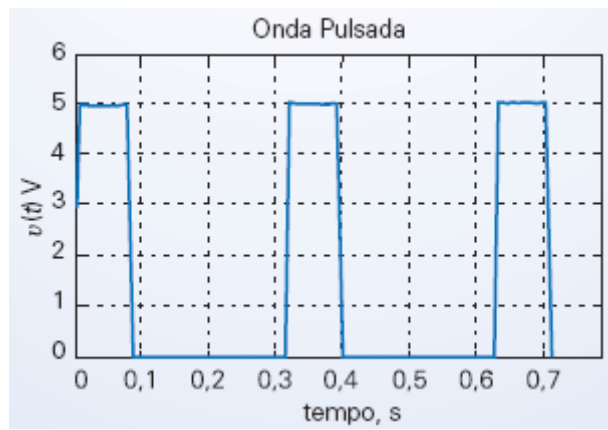



FIGURA 15.2-7 Gráfico produzido pelo arquivo de entrada do MATLAB da Figura 15.2-6.

EXERCÍCIO 15.2-1 Suponha que $f_1(t)$ e $f_2(t)$ sejam funções periódicas com o mesmo período T. Nesse caso, $f_1(t)$ e $f_2(t)$ podem ser representadas pelas séries de Fourier

$$f_1(t) = a_{10} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{1n} \cos (n\omega_0 t) + b_{1n} \operatorname{sen} (n\omega_0 t))$$

e

$$f_2(t) = a_{20} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n} \cos (n\omega_0 t) + b_{2n} \operatorname{sen} (n\omega_0 t))$$

Determine a série de Fourier da função

$$f(t) = k_1 f_1 (t) + k_2 f_2 (t)$$

Resposta: $f(t) = (k_1 a_{10} + k_2 a_{20}) + \sum_{n=1}^{\infty} ((k_1 a_{1n} + k_2 a_{2n}) \cos (n\omega_0 t) + (k_1 a_{1n} + k_2 a_{2n}) \operatorname{sen} (n\omega_0 t))$

EXERCÍCIO 15.2-2 Determine a série de Fourier da função $f(t) = K$, em que K é uma constante.

Resposta: $a_0 = K$ e $a_n = b_n = 0$ para $n \geq 1$

EXERCÍCIO 15.2-3 Determine a série de Fourier da função $f(t) = A \cos \omega_0 t$.

Resposta: $a_0 = 0$, $a_1 = A$ e $a_n = 0$ para $n > 1$ e $b_n = 0$

15.3 *Simetria da Função* f(t)

Quatro tipos de simetria podem ser facilmente identificados e usados para simplificar o cálculo dos coeficientes de Fourier:

1. Simetria das funções pares.
2. Simetria das funções ímpares.
3. Simetria de meia-onda.
4. Simetria de um quarto de onda.

Uma função é *par* se $f(t) = f(-t)$ e ímpar se $f(t) = -f(-t)$. A função da Figura 15.2-2 é uma função par. No caso das funções pares, $b_n = 0$ para qualquer valor de n e

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\, dt$$

No caso das funções ímpares, $a_n = 0$ para qualquer valor de n e

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\,\text{sen}\, n\omega_0 t\, dt$$

Um exemplo de função ímpar é a função sen $\omega_0 t$. Outra função ímpar aparece na Figura 15.3-1.

Uma função $f(t)$ apresenta *simetria de meia-onda* se

$$f(t) = -f\left(t - \frac{T}{2}\right) \tag{15.3-1}$$

Nas formas de onda com simetria de meia-onda, a segunda metade de cada período é igual à primeira metade de cabeça para baixo. A função da Figura 15.3-2 apresenta simetria de meia-onda. Se uma função apresenta simetria de meia-onda, a_n e b_n são nulos para valores pares de n. O termo a_0 também é nulo, já que o valor médio da função para um período é zero.

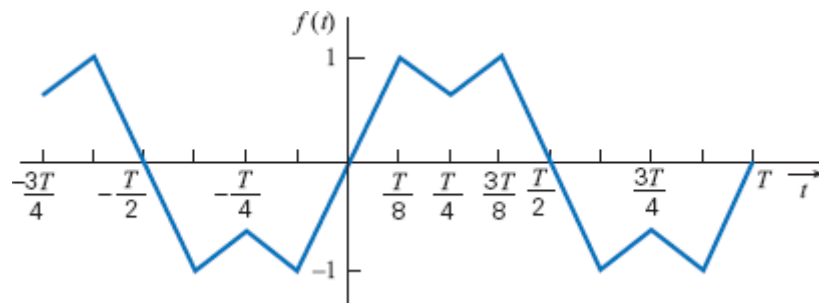



FIGURA 15.3-1 Função ímpar com simetria de um quarto de onda.

***Simetria de um quarto de onda* é o termo usado para descrever uma função que possui simetria de meia-onda e, além disso, é simétrica em relação ao ponto central do semiciclo positivo e do semiciclo negativo. A Figura 15.3-1 mostra um exemplo de função ímpar com simetria de um quarto de onda. Se uma função é ímpar e possui simetria de um quarto de onda, $a_0 = 0$, $a_n = 0$ para qualquer valor de n e $b_n = 0$ para n par. Para n ímpar, b_n é dado por**

$$b_n = \frac{8}{T}\int_0^{T/4} f(t)\,\text{sen}\, n\omega_0 t\, dt$$

Se uma função é par e tem simetria de um quarto de onda, $a_0 = 0$, $b_n = 0$ para qualquer valor de n e $a_n = 0$ para n par. Para n ímpar, a_n é dado por

$$a_n = \frac{8}{T}\int_0^{T/4} f(t)\cos n\omega_0 t\, dt$$

A Tabela 15.3-1 mostra o efeito de vários tipos de simetria da forma de onda sobre os coeficientes de Fourier. Muitas vezes, o cálculo da série de Fourier pode ser simplificado por uma escolha adequada da origem ($t = 0$), que, na maioria dos casos, pode ser arbitrada pelo analista com total liberdade.

Tabela 15.3-1 Simetria da Forma de Onda e a Série de Fourier	
SIMETRIA	COEFICIENTES DE FOURIER
1. Função ímpar $f(t) = -f(-t)$	$a_n = 0$ p.q.v. de n $b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\ \text{sen}\ n\omega_0 t\ dt$
2. Função par $f(t) = f(-t)$	$b_n = 0$ p.q.v. de n $a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\ dt$
3. Simetria de meia-onda $f(t) = -f\left(t - \frac{T}{2}\right)$	$a_0 = 0$ $a_n = 0$ para n par $b_n = 0$ para n par $a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\ dt$ para n ímpar $b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\ \text{sen}\ n\omega_0 t\ dt$ para n ímpar
4. Simetria de quarto de onda. (Simetria de meia-onda e simetria em relação aos pontos médios dos semiciclos positivos e negativos)	A. Função ímpar: $a_0 = 0$; $a_n = 0$ p.q.v. de n $b_n = 0$ para n par $b_n = \frac{8}{T}\int_0^{T/4} f(t)\ \text{sen}\ n\omega_0 t\ dt$ para n ímpar B. Função par: $a_0 = 0$; $b_n = 0$ p.q.v. de n $a_n = 0$ para n par $a_n = \frac{8}{T}\int_0^{T/4} f(t)\cos n\omega_0 t\ dt$ para n ímpar

EXEMPLO 15.3-1 Simetria da Forma de Onda e a Série de Fourier

Determine a série de Fourier da forma de onda triangular $f(t)$ da Figura 15.3-2.

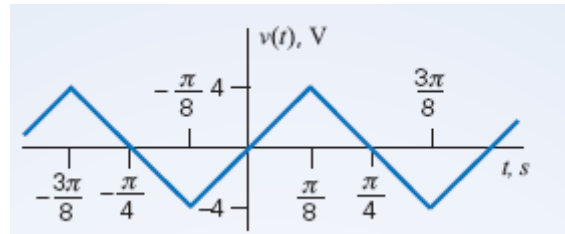



FIGURA 15.3-2 Função de onda do Exemplo 15.3-1.

Solução

De acordo com a Figura 15.3-2, o período da função $v(t)$ é

$$T = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}\ \text{s}$$

A frequência fundamental é

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 4\ \text{rad/s}$$

De acordo com a Tabela 15.3-1, como a função de onda da Figura 15.3-2 é ímpar e tem simetria de quarto de onda, $a_0 = 0$, $a_n = 0$ para qualquer valor de n e $b_n = 0$ para n par. Para n ímpar, os valores de b_n são dados por

$$v(t)=\begin{cases}-\dfrac{32}{\pi}t-8 & \text{para } -\dfrac{3\pi}{8}\le t\le\dfrac{\pi}{8}\\ \dfrac{32}{\pi}t & \text{para } -\dfrac{\pi}{8}\le t\le\dfrac{\pi}{8}\\ -\dfrac{32}{\pi}t+8 & \text{para } \dfrac{\pi}{8}\le t\le\dfrac{3\pi}{8}\\ \dfrac{32}{\pi}t-16 & \text{para } \dfrac{3\pi}{8}\le t\le\dfrac{5\pi}{8}\end{cases}$$

$$v(t)=\frac{32}{\pi}t \quad \text{para} \quad -\frac{\pi}{8}\le t\le\frac{\pi}{8}$$

$$a_0 = \text{ valor médio de } v(t)=0$$

$$b_n=\frac{4}{T}\int_0^{T/2} v(t)\text{ sen } n\omega_0 t\, dt=\frac{8}{\pi}\int_0^{\pi/4} v(t)\text{ sen } 4nt dt$$

$$=\frac{8}{\pi}\left[\int_0^{\pi/8}\left(\frac{32}{\pi}t\right)\text{ sen } 4nt\, dt+\int_{\pi/8}^{\pi/4}\left(-\frac{32}{\pi}t+8\right)\text{ sen } 4nt\, dt\right]$$

$$b_n=\frac{8}{T}\int_0^{T/4} v(t)\text{ sen } n\omega_0 t\, dt=\frac{512}{\pi^2}\int_0^{\pi/8} t\text{ sen } 4\, nt\, dt = \frac{512}{\pi^2}\left[\frac{\text{sen } 4nt-4nt\cos 4nt}{16n^2}\right]_0^{\pi/8}$$

$$=\frac{32}{\pi^2 n^2}\left(\text{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right)-0-n\frac{\pi}{2}\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)+0\right)$$

Como $\cos\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ para n ímpar, temos:

$$b_n=\frac{32}{\pi^2 n^2}\text{ sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{para } n \text{ ímpar}$$

Resumindo,

$$a_0=0,\ a_n=0 \text{ p.q.v. de } n \quad \text{e} \quad b_n=\begin{cases}\dfrac{32}{\pi^2 n^2}\text{ sen}\left(n\dfrac{\pi}{2}\right) & \text{para } n \text{ ímpar}\\ 0 & \text{para } n \text{ par}\end{cases}$$

A série de Fourier é, portanto,

$$v(t)=\frac{32}{\pi^2}\sum_{\text{ímpar } n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\text{ sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\text{ sen}(4nt) \qquad (15.3\text{-}2)$$

Observe a notação usada na Eq. 15.3-2 para indicar que o somatório inclui apenas os termos correspondentes a valores ímpares de n.

A Figura 15.3-3 mostra um arquivo de entrada do MATLAB que pode ser usado para plotar a série de Fourier dada pela Eq. 15.3-2. O gráfico correspondente aparece na Figura 15.2-3. A forma de onda da Figura 15.2-3 é uma forma de onda triangular com a amplitude correta, 8 V, e o período correto, $\pi/2 \cong 1{,}6$ s. Isso mostra que a Eq. 15.3-2 representa realmente a forma de onda da Figura 15.2-3.

```
% Ex15_3_1.m - série de Fourier de uma onda triangular
% ----------------------------------------------------------------
%        Descrever a forma de onda periódica v(t)
% ----------------------------------------------------------------
T=pi/2;            % período
a0=0;            % valor médio

% ----------------------------------------------------------------
%  Criar uma lista de instantes de tempo igualmente espaçados
% ----------------------------------------------------------------
w0=2*pi/T;         % frequência fundamental, em rad/s
tf=1.5*T;          % tempo final
dt=tf/500;         % incremento de tempo
t=0:dt:tf;         % tempo, em s

% ----------------------------------------------------------------
%  Calcular v(t) usando a série de Fourier
% ----------------------------------------------------------------
v = a0*ones(size(t));  % inicializar v(t) como um vetor
for n=1:2:200
   an = 0;
   bn = (32/n/n/pi/pi)*sin(n*pi/2);
   v = v + bn*sin(n*w0*t);
end

% ----------------------------------------------------------------
%                        Plotar v(t)
% ----------------------------------------------------------------
plot(t, v)
axis([0 tf -5 5])
grid
xlabel('tempo, s')
ylabel('v(t) V')
title('Onda Triangular')
```

FIGURA 15.3-3 Arquivo de entrada do MATLAB para plotar a série de Fourier da Eq. 15.3-2.

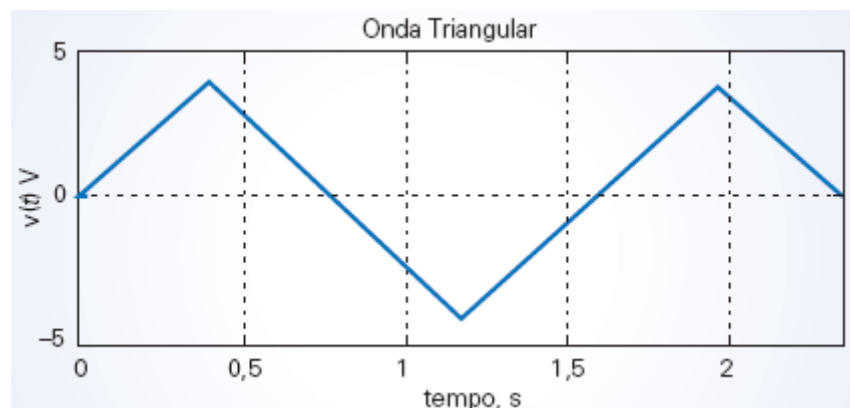



FIGURA 15.3-4 Gráfico produzido pelo arquivo de entrada do MATLAB da Figura 15.3-3.

EXERCÍCIO 15.3-1 Determine a série de Fourier da forma de onda $f(t)$ da Figura E 15.3-1.

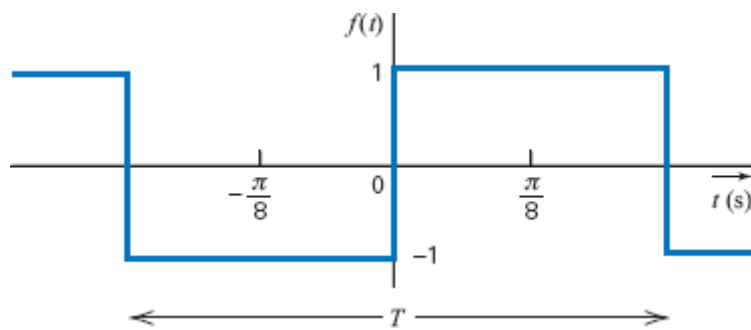



FIGURA E 15.3-1

Resposta: $f(t) = \dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\dfrac{1}{n}\,\text{sen}\, n\omega_0 t$ e n ímpar, $\omega_0 = 4$ rad/s

EXERCÍCIO 15.3-2 Determine a série de Fourier da forma de onda $f(t)$ da Figura E 15.3-2.

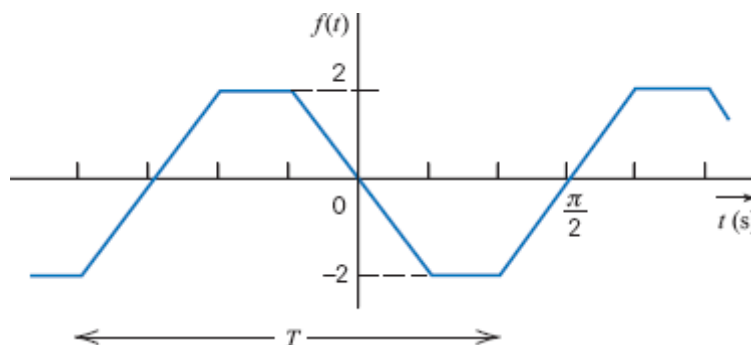



FIGURA E 15.3-2

Resposta: $f(t) = \dfrac{-24}{\pi^2}\sum_{n=1}^{N}\dfrac{1}{n^2}\,\text{sen}(n\pi/3)\,\text{sen}\, n\omega_0 t$ e n ímpar, $\omega_0 = 2$ rad/s

EXERCÍCIO 15.3-3 Determine se a série de Fourier do sinal periódico da Figura E 15.3-3 contém (a) termos em seno e cosseno e (b) harmônicos pares. (c) Calcule o termo constante.

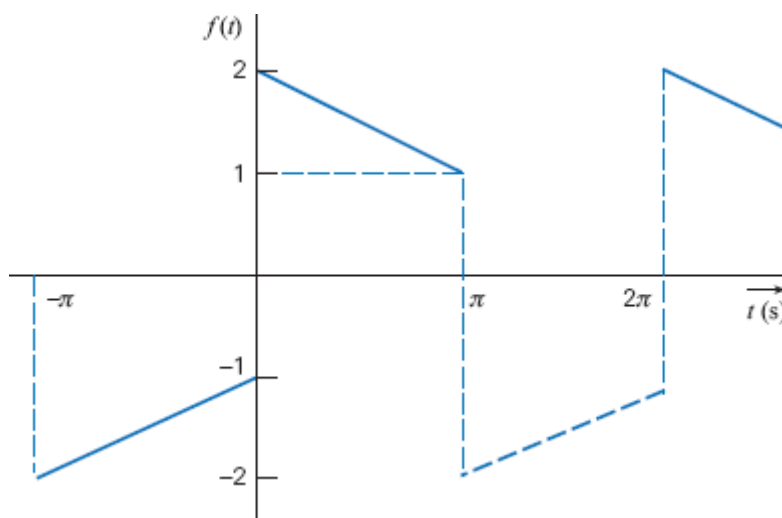



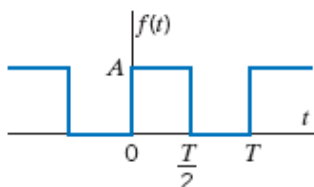
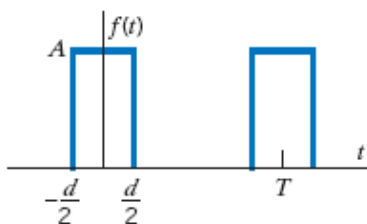
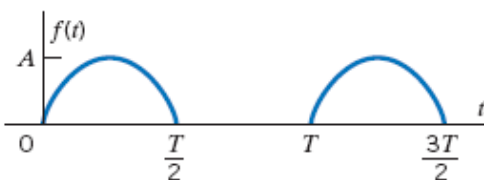
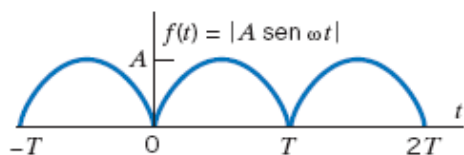
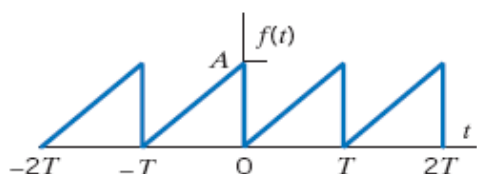
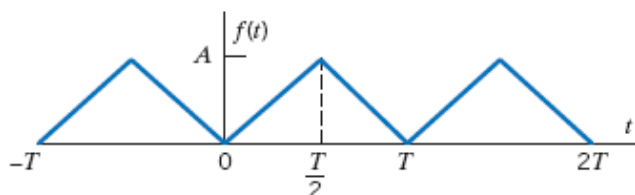
FIGURA E 15.3-3

Respostas: **(a)** Sim, a série contém termos em seno e cosseno. **(b)** Não, a série não contém harmônicos pares. **(c)** $a_0 = 0$.

15.4 *Séries de Fourier de Algumas Formas de Onda*

A Tabela 15.4-1 mostra as séries de Fourier de algumas formas de onda muito usadas na prática. Essas formas de onda dependem de pelo menos dois parâmetros: a amplitude A e o período T.

Tabela 15.4-1 Séries de Fourier de Algumas Formas de Onda

FUNÇÃO	SÉRIE DE FOURIER
	Onda quadrada: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ $f(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\text{sen}((2n-1)\omega_0 t)}{2n-1}$
	Onda pulsada: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ $f(t) = \frac{Ad}{T} + \frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\text{sen}\left(\frac{n\pi d}{T}\right)}{n}\cos(n\omega_0 t)$
	Senoide retificada em meia-onda: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ $f(t) = \frac{A}{\pi} + \frac{A}{2}\,\text{sen}\,\omega_0 t - \frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n\,\omega_0 t)}{4n^2-1}$
	Senoide retificada em onda completa: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ $f(t) = \frac{2A}{\pi} - \frac{4A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\,\omega_0 t)}{4n^2-1}$
	Onda dente de serra: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ $f(t) = \frac{A}{2} - \frac{A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\text{sen}(n\,\omega_0 t)}{n}$ Onda triangular: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ $f(t) = \frac{A}{2} - \frac{4A}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((2n-1)\omega_0 t)}{(2n-1)^2}$

A Figura 15.4-1 mostra uma forma de onda de tensão semelhante à primeira forma de onda da Tabela 15.4-1. Para obter a série de Fourier da forma de onda de tensão, temos que fazer alguns ajustes:

1. Fazemos o parâmetro A igual à amplitude da forma de onda de tensão.
2. Somamos uma constante à série de Fourier da forma de onda de tensão para ajustar o valor médio.
3. Fazemos o valor de T igual ao período da forma de onda de tensão.
4. Substituímos t por $t - t_0$, já que a forma de onda de tensão está atrasada de t_0 em relação à forma de onda da Tabela 15.4-1. Depois de algumas manipulações algébricas, o retardo pode ser representado por um deslocamento de fase da série de Fourier.

Exemplo 15.4-1 Série de Fourier de uma Onda Quadrada

Determine a série de Fourier da forma de onda de tensão da Figura 15.4-1.

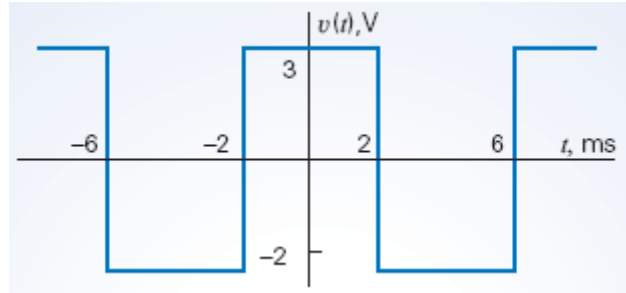



FIGURA 15.4-1 Forma de onda do Exemplo 15.4-1.

Solução

A forma de onda de tensão é semelhante à onda quadrada da Tabela 15.4-1. A série de Fourier da onda quadrada é

$$f(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\text{sen}((2n-1)\omega_0 t)}{2n-1}$$

1º passo: A amplitude da forma de onda de tensão é 3 – (–2) = 5 V. Fazendo $A = 5$, a série de Fourier se torna

$$2{,}5 + \frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\text{sen}\ ((2n-1)\omega_0 t)}{2n-1}$$

2º passo: O valor médio da série de Fourier é 2,5, o valor do termo constante. O valor médio da forma de onda de tensão é [3 + (–2)]/2 = 0,5 V. Devemos mudar o termo constante da série de Fourier de 2,5 para 0,5 para ajustá-lo ao valor médio. Para isso, temos que subtrair 2 da série de Fourier, deslocando de 2 V para baixo a forma de onda:

$$0{,}5 + \frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\text{sen}((2n-1)\omega_0 t)}{2n-1}$$

3º passo: O período da forma de onda de tensão é $T = 6 - (-2) = 8$ ms. A frequência fundamental correspondente é

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{0{,}008} = 250\,\pi\ \text{rad/s}$$

Fazendo $\omega_0 = 250\pi$ rad/s, a série de Fourier se torna

$$0{,}5 + \frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\text{sen}((2n-1)250\,\pi t)}{2n-1}$$

4º passo: Um dos pulsos positivos da onda quadrada da Tabela 15.4-1 começa no instante $t = 0$. O pulso correspondente da forma de onda da tensão começa no instante $t = -2$ ms. Isso significa que a forma de onda de tensão está adiantada de 2 ms ou, o que significa a mesma coisa, que está atrasada de –2 ms. Assim, substituímos t por $t - (-0{,}002) = t + 0{,}002$ na série de Fourier. Como

$$\text{sen}\ ((2n-1)250\,\pi(t+0{,}002)) = \text{sen}\left((2n-1)\left(250\,\pi t + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \text{sen}\ ((2n-1)(250\,\pi t + 90^\circ))$$

substituindo t por $t + 0{,}002$, a série de Fourier se torna

$$v(t) = 0{,}5 + \frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\text{sen}\,((2n-1)(250\pi t + 90°))}{2n-1}$$

15.5 Forma Exponencial da Série de Fourier

Usando a identidade de Euler, podemos escrever a série de Fourier como um somatório de exponenciais. O ponto de partida é a série de Fourier amplitude-fase, dada pela Eq. 15.2-13:

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) \tag{15.5-1}$$

De acordo com a identidade de Euler,

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\,\text{sen}\,\theta \tag{15.5-2}$$

A partir da Eq. 15.5-2, é fácil demonstrar que

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{j\theta} + e^{-j\theta}\right) \tag{15.5-3}$$

Aplicando a Eq. 15.5-3 ao enésimo termo da série de Fourier amplitude-fase, obtemos

$$c_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) = c_n\left(\frac{e^{j(n\omega_0 t + \theta_n)} + e^{-j(n\omega_0 t + \theta_n)}}{2}\right) = \frac{c_n}{2}\left(e^{j(n\omega_0 t + \theta_n)} + e^{-j(n\omega_0 t + \theta_n)}\right) \tag{15.5-4}$$

Substituindo a Eq. 15.5-4 na Eq. 15.5-1, temos

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{2}\left(e^{j(n\omega_0 t + \theta_n)} + e^{-j(n\omega_0 t + \theta_n)}\right) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{c_n}{2}e^{j\theta_n}\right)e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{c_n}{2}e^{-j\theta_n}\right)e^{-jn\omega_0 t} \tag{15.5-5}$$

Definindo

$$C_0 = c_0, \quad \mathbf{C}_n = \frac{c_n}{2}e^{j\theta_n} \quad \text{e} \quad \mathbf{C}_{-n} = \frac{c_n}{2}e^{-j\theta_n} \tag{15.5-6}$$

a função $f(t)$ pode ser expressa na forma

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{C}_{-n}e^{-jn\omega_0 t} \tag{15.5-7}$$

Usando a convenção

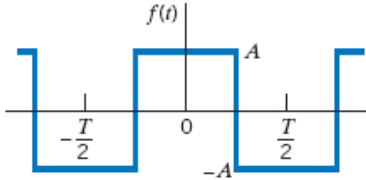
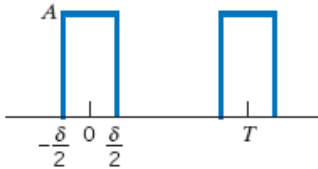
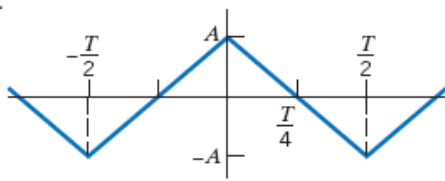
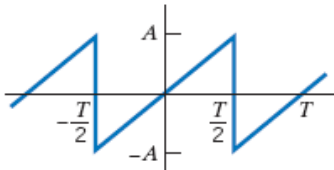
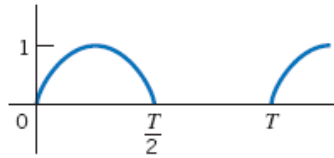
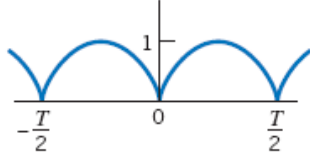
$$C_0 = C_0 e^{j0} = \mathrm{C}_0$$

podemos escrever a Eq. 15.5-7 na forma

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{C}_n e^{jn\omega_0 t} \tag{15.5-8}$$

A Eq. 15.5-8 representa $f(t)$ como uma **série Fourier exponencial**. Os coeficientes complexos $\mathbf{C}_n$ da série de Fourier exponencial podem ser calculados a partir de $f(t)$ usando a seguinte equação:

$$\mathbf{C}_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt \qquad (15.5\text{-}9)$$

Observando a Eq. 15.5-6, vemos $\mathbf{C}_{-n}$ é o complexo conjugado de $\mathbf{C}_n$, ou seja, . De acordo com as Eqs. 15.5-6 e 15.2-11, os coeficientes da série de Fourier exponencial podem ser obtidos a partir dos coeficientes da série de Fourier seno-cosseno usando as relações

$$\mathbf{C}_n = \frac{c_n e^{j\theta_n}}{2} = \frac{a_n - jb_n}{2} \quad \text{e} \quad \mathbf{C}_{-n} = \frac{c_n e^{-j\theta_n}}{2} = \frac{a_n + jb_n}{2} \qquad (15.5\text{-}10)$$

Da mesma forma, os coeficientes da série de Fourier seno-cosseno podem ser obtidos a partir da série de Fourier exponencial usando as relações

$$a_n = \mathbf{C}_n + \mathbf{C}_{-n} \quad \text{e} \quad b_n = j(\mathbf{C}_n - \mathbf{C}_{-n}) \qquad (15.5\text{-}11)$$

A Tabela 15.5-1 mostra os coeficientes da série de Fourier exponencial para algumas formas de onda. No caso de funções pares, $b_n(t) = 0$ e, portanto, $\mathbf{C}_{-n} = \mathbf{C}_n$; no caso de funções ímpares, $a_n(t) = 0$ e, portanto, $\mathbf{C}_{-n} = -\mathbf{C}_n$.

Tabela 15.5-1 **Coeficientes da Série de Fourier Exponencial de Algumas Funções**

FORMA DE ONDA	NOME E EQUAÇÃO DA ONDA	SIMETRIA	C_n
1.	**Onda quadrada** $f(t) = \begin{cases} A, & \frac{-T}{4} < t < \frac{T}{4} \\ -A, & \frac{T}{4} < t < \frac{3T}{4} \end{cases}$	Par	$= A\frac{\text{sen}\, n\pi/2}{n\pi/2}$, n ímpar $= 0$, $n = 0$ e n par
2.	**Pulsos retangulares** $f(t) = A, \quad \frac{-\delta}{2} < t < \frac{\delta}{2}$	Par	$= A\frac{\delta}{T}\frac{\text{sen}\,(n\pi\delta/T)}{(n\pi\delta/T)}$
3.	**Onda triangular**	Par	$= A\frac{\text{sen}^2\,(n\pi/2)}{(n\pi/2)^2}, n \neq 0$ $= 0$, $n = 0$
4.	**Onda dente de serra** $f(t) = 2At/T \quad \frac{-T}{2} < t < \frac{T}{2}$	Ímpar	$= Aj(-1)^n/n\pi$, $n \neq 0$ $= 0$, $n = 0$
5.	**Senoide retificada em meia-onda** $f(t) = \begin{cases} \text{sen}\,\omega_0 t, & 0 \leq t \leq T/2 \\ 0, & -T/2 \leq t \leq 0 \end{cases}$	Nenhuma	$= 1/\pi(1-n^2)$, n par $= -j/4$, $n = \pm 1$ $= 0$, p.q.o.v.
6.	**Senoide retificada em onda completa** $f(t) = \lvert\text{sen}\,\omega_0 t\rvert$	Par	$= 2/\pi(1-n^2)$, n par $= 0$, p.q.o.v.

EXEMPLO 15.5-1 Série de Fourier Exponencial

Determine a série de Fourier exponencial da forma de onda da Figura 15.5-1.

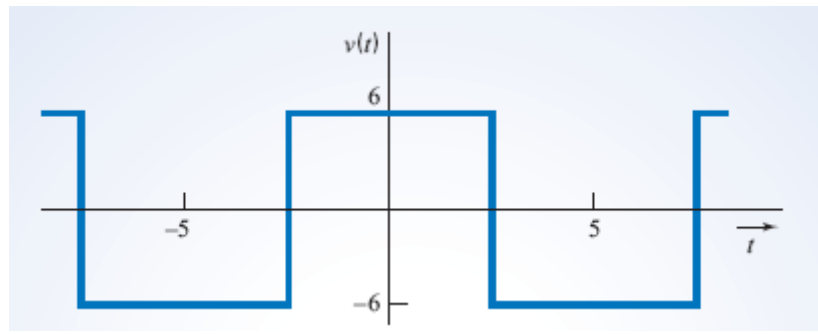



FIGURA 15.5-1 Forma de onda do Exemplo 15.5-1.

Solução

Como o valor médio de $v(t)$ é zero, $\mathbf{C}_0 = 0$. Usando a Eq. 15.5-9 com $t_0 = -T/2$, temos

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} v(t)e^{-jn\omega_0 t}dt &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{-T/4} -Ae^{-jn\omega_0 t}dt + \frac{1}{T}\int_{-T/4}^{T/4} Ae^{-jn\omega_0 t}dt + \frac{1}{T}\int_{-T/4}^{T/2} -Ae^{-jn\omega_0 t} \\
&= \frac{A}{jn\omega_0 T}\left(e^{-jn\omega_0 t}\Big|_{-T/2}^{-T/4} - e^{-jn\omega_0 t}\Big|_{-T/4}^{T/4} + e^{-jn\omega_0 t}\Big|_{T/4}^{T/2}\right) \\
&= \frac{A}{jn\omega_0 T}\left(2e^{jn\pi/2} - 2e^{-jn\pi/2} + e^{-jn\pi} - e^{jn\pi}\right) \\
&= \frac{A}{2\pi n}\left(4\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 2\,\text{sen}(n\pi)\right) = \begin{cases} 0 & \text{para } n \text{ par} \\ \dfrac{2A}{n\pi}\,\text{sen}\left(n\dfrac{\pi}{2}\right) & \text{para } n \text{ ímpar} \end{cases}
\end{aligned}$$

Note que, como $v(t)$ é uma função par, devemos ter $\mathbf{C}_{-n} = \mathbf{C}_n$. Em particular,

$$\mathbf{C}_{-1} = \mathbf{C}_1 = \frac{A\,\text{sen}\,\pi/2}{\pi/2} = \frac{2A}{\pi}; \quad \mathbf{C}_{-2} = \mathbf{C}_2 = A\frac{\text{sen}\,\pi}{\pi} = 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{C}_{-3} = \mathbf{C}_3 = \frac{A\,\text{sen}(3\,\pi/2)}{3\pi/2} = \frac{-2A}{3\pi}$$

A Figura 15.5-2 mostra um arquivo de entrada do MATLAB que pode ser usado para plotar essa série de Fourier exponencial. O gráfico produzido pelo programa aparece na Figura 15.5-3. A forma de onda da Figura 15.5-3 é uma onda quadrada com a amplitude correta e o período correto.

```
% Ex15_5_1.m - Série de Fourier exponencial de uma onda quadrada
% ----------------------------------------------------------------
%        Descrever a forma de onda periódica v(t)
% ----------------------------------------------------------------
A=6;
T=10;            % período
c0=0;      % valor médio

% ----------------------------------------------------------------
%  Criar uma lista de instantes de tempo igualmente espaçados
% ----------------------------------------------------------------
w0=2*pi/T;          % frequência fundamental, em rad/s
t0=-T;              % tempo inicial
tf=1.5*T;           % tempo final
dt=tf/500;          % incremento de tempo
t=-T:dt:tf;         % tempo, em s

% ----------------------------------------------------------------
%  Calcular v(t) usando a série de Fourier
% ----------------------------------------------------------------
v = c0*ones(size(t));  % inicializar v(t) como um vetor
for n=1:2:200
   Cn = (2*A/pi/n)*sin(n*pi/2);
   v = v + Cn*exp(j*n*w0*t) + Cn'*exp(-j*n*w0*t);
end

% ----------------------------------------------------------------
%                          Plotar v(t)
% ----------------------------------------------------------------
plot(t, v)
axis([t0 tf -(A+1) A+1])
grid
xlabel('tempo, s')
ylabel('v(t) V')
title('Onda Quadrada')
```

FIGURA 15.5-2 Arquivo de entrada do MATLAB para plotar a série de Fourier exponencial do Exemplo 15.1-1.

FIGURA 15.5-3 Gráfico produzido pelo arquivo de entrada do MATLAB da Figura 15.5-2.

```
function [C0, Cn] = SFE(N, T)
%SFE Série de Fourier Exponencial
% fornece coeficientes da série de Fourier exponencial
% descrita pela função do MATLAB
% minha_funcao_periodica.m
%
% N = número de frequências harmônicas
% T = período da função periódica
%
% C0=valor médio
% Cn(1)=C1, Cn(2)=C2, ..., Cn(N)=CN

% --------------------------------------------------------------
%  Criar uma lista de instantes de tempo igualmente espaçados
% --------------------------------------------------------------
n=2*N;
t=linspace(0,T,n+1);
t(end)=[];
% --------------------------------------------------------------
%  Obter valores de f(t) nesses instantes de tempo
% --------------------------------------------------------------
f=minha_funcao_periodica(t,T);
% --------------------------------------------------------------
%  Obter o coeficiente de Fourier e atualizar as variáveis
% --------------------------------------------------------------
Cn=fft(f);
Cn=[conj(Cn(N+1)) Cn(N+2:end) Cn(1:N+1)];
Cn=Cn/n;
C0=Cn(N+1);
Cn=[Cn(N+2:end)];
```

FIGURA 15.5-4 Função do MATLAB usada para calcular os coeficientes de uma série de Fourier exponencial.

O programa MATLAB possui uma função chamada FFT (Fast Fourier Transform, ou seja, Transformada Rápida de Fourier) que pode ser usada para calcular os coeficientes de uma série de Fourier exponencial. A Figura 15.5-4 mostra uma função do MATLAB chamada SFE (Série de Fourier Exponencial) que usa a função FFT para calcular os coeficientes da série de Fourier exponencial de uma função periódica. (A função SFE segue de perto a discussão da série de Fourier apresentada no Capítulo 22 de Hanselman e Littlefield, 2005.) Note que a SFE não inclui uma descrição da função periódica; em vez disso, chama uma função do MATLAB chamada minha_funcao_periodica, que contém a descrição da função periódica $f(t)$. Por esse motivo, a função SFE pode ser usada para calcular os coeficientes da série de Fourier exponencial de qualquer função periódica que possa ser descrita pela função minha_funcao_periodica.

Na discussão precedente, a palavra *função* foi usada com dois significados diferentes. Em primeiro lugar, temos as funções matemáticas, como $f(t)$, uma função do tempo t. Em segundo lugar, temos as funções do MATLAB, que são conjuntos de instruções de um programa de computador. Embora sejam de natureza diferente, existe uma relação entre os dois tipos de funções. No caso que estamos analisando, a função do MATLAB minha_funcao_periodica é usada para implementar a função matemática $f(t)$, calculando o valor de f que corresponde a um valor particular de t.

Os exemplos a seguir ilustram o uso da função SFE do MATLAB para determinar a série de Fourier exponencial de uma função periódica.

EXEMPLO 15.5-2 Cálculo de uma Série de Fourier Exponencial Usando o MATLAB

Determine a série de Fourier exponencial da função $f(t)$ da Figura 15.5-1 usando o programa MATLAB.

Solução

Para poder usar a função SFE, escrevemos a função do MATLAB minha_funcao_periodica, mostrada na Figura 15.5-5, que descreve a função $f(t)$ da Figura 15.5-1. Os parâmetros da função minha_funcao_periodica são t, uma lista de n instantes de tempo t_k distribuídos uniformemente ao longo de um período da função $f(t)$, e T, o período da função $f(t)$; a saída é f, uma lista de n valores de $f(t_k)$. O "loop for" da Figura 15.5-5 faz com que o valor de $f(t_k)$ seja calculado para os n valores de t presentes na lista de entrada.

```
function f = minha_funcao_periodica(t, T)
% onda quadrada de amplitude A e período T

A=6;
for k=1:length(t)
    if (t(k)<T/4 | t(k)>3*T/4) f(k)=A;
    elseif (t(k)>T/4 & t(k)<3*T/4) f(k)=-A;
    else f(k)= 0;
    end
end
```

FIGURA 15.5-5 A função minha_funcao_periodica do Exemplo 15.5-2.

Os valores de $f(t)$ nos instantes $T/4$ e $3T/4$ não são óbvios porque a função $f(t)$ é descontínua nesses instantes. Em geral, quando $f(t)$ é descontínua no instante τ, consideramos $f(\tau)$ como a média dos limites de $f(t)$ pela esquerda e pela direita. No caso que estamos analisando,

$$f(\tau) = \frac{\lim\limits_{t\to\tau^+} f(t) + \lim\limits_{t\to\tau^-} f(t)}{2} = \frac{A - A}{2} = 0 \quad \text{para} \quad \tau = \frac{T}{4} \text{ ou } \frac{3T}{4}$$

Assim, de acordo com a Figura 15.5-1,

$$f(t) = \begin{cases} A & \text{para } t < T/4 \text{ ou } t > 3T/4 \\ -A & \text{para } t > T/4 \text{ e } t < 3T/4 \\ 0 & \text{p.q.o.v.} \end{cases}$$

Esse é o conjunto de equações implementado pela função minha_funcao_periodica da Figura 15.5-5.

A Figura 15.5-6 mostra um arquivo de entrada do MATLAB que pode ser usado para calcular e plotar a série de Fourier exponencial da função $f(t)$ da Figura 15.5-1. Colocando SFE.m, minha_funcao_periodica.m e EXEMPLO.m no diretório de trabalho do MATLAB e executando EXEMPLO.m, obtemos o gráfico da Figura 15.5-3, que reproduz fielmente o gráfico da Figura 15.5-1.

```
% EXEMPLO.m
% ------------------------------------------------------------
%  Criar uma lista de instantes de tempo igualmente espaçados
% ------------------------------------------------------------
T=10;                % período
w0=2*pi/T;           % frequência fundamental rad/s
t0=-T;               % tempo inicial
tf=1.5*T;            % tempo final
dt=tf/512;           % incremento de tempo
t=-T:dt:tf;          % tempo em s
% ------------------------------------------------------------
%  Usar a SFE para calcular os coeficientes de Fourier
% ------------------------------------------------------------
N=256; %Número de frequências harmônicas
[C0, Cn] = SFE(N,T);
% ------------------------------------------------------------
%  Calcular os valores da função
% ------------------------------------------------------------
v = C0*ones(size(t));  % inicializar v(t) como um vetor
for n=1:N
   v = v + Cn(n)*exp(j*n*w0*t) + Cn(n)'*exp(-j*n*w0*t);
end
% ------------------------------------------------------------
%                       Plotar a função
% ------------------------------------------------------------
plot(t, v)
axis([t0 tf -8 8])
grid
xlabel('tempo, s')
ylabel('v(t) V')
title('Onda Quadrada')
```

FIGURA 15.5-6 Arquivo de entrada do MATLAB usado para calcular e plotar a série de Fourier exponencial do Exemplo 15.5-2.

EXEMPLO 15.5-3 Cálculo de uma Série de Fourier Exponencial Usando o MATLAB

Determine a série de Fourier exponencial da senoide retificada em meia-onda da Figura 15.5-7 usando o programa MATLAB.

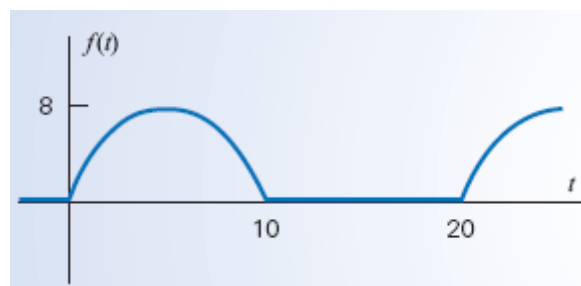



FIGURA 15.5-7 Forma de onda do Exemplo 15.5-3.

Solução

Para resolver o problema, basta reescrever a função minha_funcao_periodica da forma mostrada na Figura 15.5-8, mudar o valor do período *T* e o título do gráfico no arquivo de entrada EXEMPLO.m e executar EXEMPLO.m; o resultado é o gráfico da Figura 15.5-9.

```
function f = minha_funcao_periodica(t, T)
% seno retificado em meia-onda de amplitude A
% e período T

w=2*pi/T;
A=8;
for k=1:length(t)
    if (t(k)<T/2) f(k)=A*sin(w*t(k));
    else  f(k)=0;
    end
end
```

FIGURA 15.5-8 Função minha_funcao_periodica do Exemplo 15.5-3.

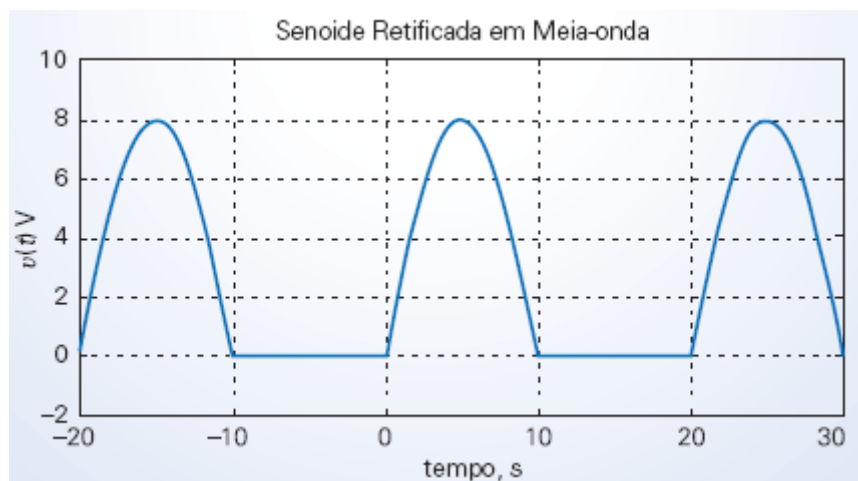



FIGURA 15.5-9 Gráfico produzido pelo programa MATLAB do Exemplo 15.5-3.

EXERCÍCIO 15.5-1 Determine os coeficientes da série exponencial de Fourier da função da Figura E 15.5-1.

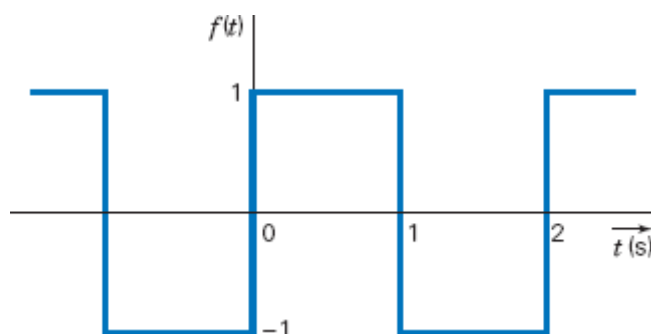



FIGURA E 15.5-1

Resposta: $\mathbf{C}_n = 0$ para n par e para n par e $\mathbf{C}_n = \dfrac{2}{jn\pi}$ para n ímpar

EXERCÍCIO 15.5-2 Determine os coeficientes da série exponencial de Fourier da função da Figura E 15.5-2.

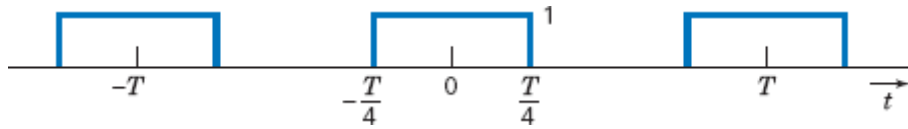



FIGURA E 15.5-2

15.6 *O Espectro de Fourier*

O gráfico dos coeficientes da série exponencial de Fourier em função da frequência é chamado de *espectro de Fourier*. Como $\mathbf{C}_n$ pode ser complexo, temos

$$\mathbf{C}_n = |\mathbf{C}_n| \angle \theta_n \tag{15.6-1}$$

e plotamos $|\mathbf{C}_n|$ e $\angle \theta_n$ como *espectro de amplitude* e *espectro de fase*, respectivamente. O espectro de Fourier existe apenas nos harmônicos da frequência fundamental e por isso é chamado de espectro discreto ou espectro de linhas. O espectro de amplitude é representado como uma série de segmentos de reta verticais, igualmente espaçados, cuja altura é proporcional ao módulo do coeficiente correspondente na série de Fourier; o espectro de fase, como uma série de segmentos de reta verticais igualmente espaçados cuja altura é proporcional à fase do coeficiente correspondente na série de Fourier. A palavra *espectro* foi introduzida na física por Newton, em 1664, para descrever a decomposição da luz em várias cores (frequências) ao atravessar um prisma.

O **espectro de Fourier** é uma representação gráfica da amplitude e da fase dos coeficientes da série exponencial de Fourier.

EXEMPLO 15.6-1 Espectro de Fourier

Determine o espectro de Fourier da forma de onda pulsada $v(t)$ da Figura 15.6-1.

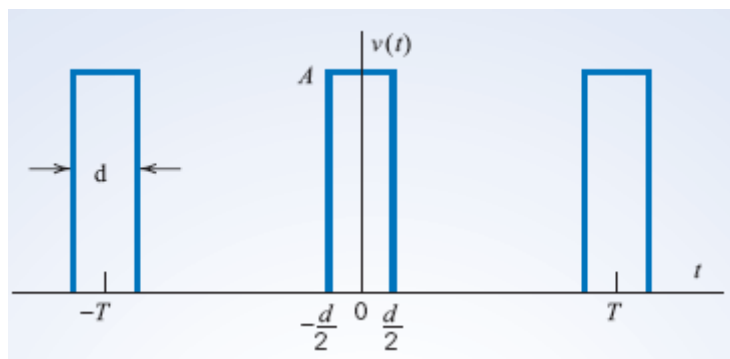



FIGURA 15.6-1 Forma de onda do Exemplo 15.6-1.

Solução

Os coeficientes de Fourier são

$$\mathbf{C}_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} v(t)e^{-jn\omega_0 t}dt \tag{15.6-2}$$

Para $n \neq 0$, temos

$$\mathbf{C}_n = \frac{A}{T}\int_{-d/2}^{d/2} e^{-jn\omega_0 t}dt = \frac{-A}{jn\omega_0 T}\left(e^{-jn\omega_0 d/2} - e^{jn\omega_0 d/2}\right)$$
$$= \frac{2A}{n\omega_0 T}\operatorname{sen}\left(\frac{n\omega_0 d}{2}\right) = \frac{A\delta}{T}\operatorname{sen}\left(\frac{n\omega_0 d/2}{n\omega_0 d/2}\right) = \frac{Ad}{T}\frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

em que $x = (n\omega_0 d/2)$. Para $n = 0$, temos

$$C_0 = \frac{1}{T}\int_{-d/2}^{d/2} A\,dt = \frac{Ad}{T}$$

Como, usando a regra de L'Hôpital, é possível mostrar que $\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ para $x = 0$, podemos escrever

$$\mathbf{C}_n = \frac{Ad}{T}\frac{\operatorname{sen}(n\omega_0 d/2)}{n\omega_0 d/2} \quad \text{p.q.v. de } n \qquad (15.6\text{-}3)$$

O espectro de amplitude é representado graficamente como uma série de segmentos de reta verticais, igualmente espaçados, cuja altura é proporcional ao módulo dos coeficientes $\mathbf{C}_n$:

$$|\mathbf{C}_n| = \left|\frac{Ad}{T}\frac{\operatorname{sen}(n\omega_0 d/2)}{n\omega_0 d/2}\right|$$

A Figura 15.6-2*a* mostra um gráfico de $|\mathbf{C}_n|$ em função de $\omega = n\omega_0$ para $-15 \le n \le 15$. O gráfico mostra também, em azul, o gráfico da função $\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right|$.

Note que a função se anula nos pontos em que x é um múltiplo inteiro de π, ou seja,

$$\frac{\operatorname{sen}(n\pi)}{n\pi} = 0 \quad \text{para} \quad n = 1;\ 2;\ 3;\ldots$$

O espectro de fase, um gráfico de $\theta_n = \angle \mathbf{C}_n$, é mostrado na Figura 15.6-2*b*. O espectro de fase é representado graficamente como uma série de segmentos de reta verticais, igualmente espaçados, cuja altura é proporcional ao ângulo de fase θ_n dos coeficientes $\mathbf{C}_n$. No caso geral, os coeficientes $\mathbf{C}_n$ são números complexos, mas no caso que estamos analisando, como mostra a Eq. 15.6-3, os coeficientes $\mathbf{C}_n$ são números reais. Em consequência, $\theta_n = 0$ para $\mathbf{C}_n$ positivo e $\theta_n = \pi$ radianos para $\mathbf{C}_n$ negativo.

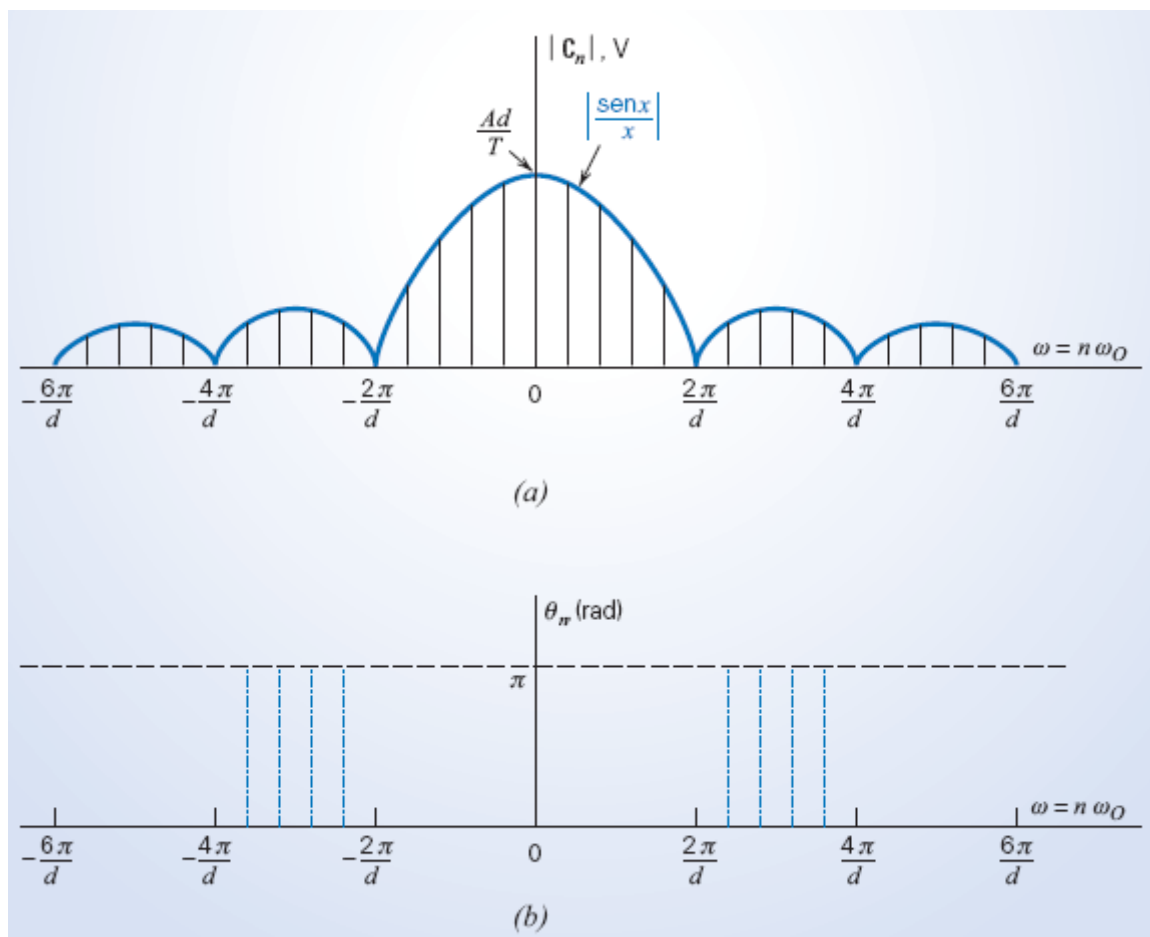



FIGURA 15.6-2 Espectro de Fourier (a) de amplitude e (b) de fase da forma de onda do Exemplo 15.6-1.

```
% Espectro.m
T=20;      % período
N=64;      % número de frequências harmônicas
% -------------------------------------------------------------
%  Criar uma lista de instantes de tempo igualmente espaçados
% -------------------------------------------------------------
n=2*N;
t=linspace(0,T,n+1);
t(end)=[];
% -------------------------------------------------------------
%  Obter valores de f(t) nesses instantes de tempo
% -------------------------------------------------------------
f=minha_funcao_periodica(t,T);
% -------------------------------------------------------------
%  Obter o coef de Fourier e atualizar variáveis
% -------------------------------------------------------------
Cn=fft(f);
Cn=[conj(Cn(N+1)) Cn(N+2:end) Cn(1:N+1)];
Cn=Cn/n;

% -------------------------------------------------------------
%             Plotar o espectro de Fourier
% -------------------------------------------------------------
stem(-N:N,abs(Cn))
xlabel('n')
ylabel('|Cn|')
title('Espectro de Amplitude de uma Onda Pulsada')
axis tight
```

FIGURA 15.6-3 Programa do MATLAB para plotar um espectro de Fourier de amplitude.

A Figura 15.6-3 mostra uma função do MATLAB que usa a FFT para plotar o espectro de Fourier de amplitude de uma função periódica (Hanselman e Littlefield, 2005).

EXEMPLO 15.6-2 Uso do MATLAB para Plotar o Espectro de Fourier

Use o MATLAB para plotar o espectro de Fourier de amplitude da forma de onda pulsada $v(t)$ da Figura 15.6-1 para $A = 8$ V, $T = 20$ s e $d = T/10$.

Solução

Podemos usar a função do MATLAB da Figura 15.6-3 para plotar qualquer espectro, depois de fazer o seguinte:

1. **Especificar os valores de T e N na segunda e terceira linha, respectivamente.** T é o período em segundos e N é o número de harmônicos a serem plotados no gráfico. Neste exemplo, não é necessário mudar os valores de T e N.
2. **Criar uma função do MATLAB chamada minha_funcao_periodica que descreva a forma de onda periódica cujo espectro será plotado.** A Figura 15.6-4 mostra a função do MATLAB que descreve a forma de onda da Figura 15.6-1.
3. **Mudar, se necessário, o comando de plotagem.** O comando

```
stem(-N:N,abs(Cn))
```

```
function f = minha_funcao_periodica(t, T)
d=T/10;
A=8;
for k=1:length(t)
    if (t(k)<d/2 | t(k)>T-d/2) f(k)=A;
    elseif (t(k)>d/2 & t(k)<T-d/2)  f(k)=0;
    else f(k)= A/2;
    end
end
```

FIGURA 15.6-4 Função minha_funcao_periodica do Exemplo 15.6-2.

do arquivo de entrada Espectro.m é usado para plotar o espectro de Fourier de amplitude. Para plotar o espectro de Fourier de fase, basta mudar abs(Cn) para angle(Cn). O título e os dísticos dos eixos devem ser alterados de acordo com o gráfico a ser plotado. Neste exemplo, não é necessário fazer nenhuma mudança.

A Figura 15.6-5 mostra o espectro de Fourier de amplitude plotado pelo MATLAB.

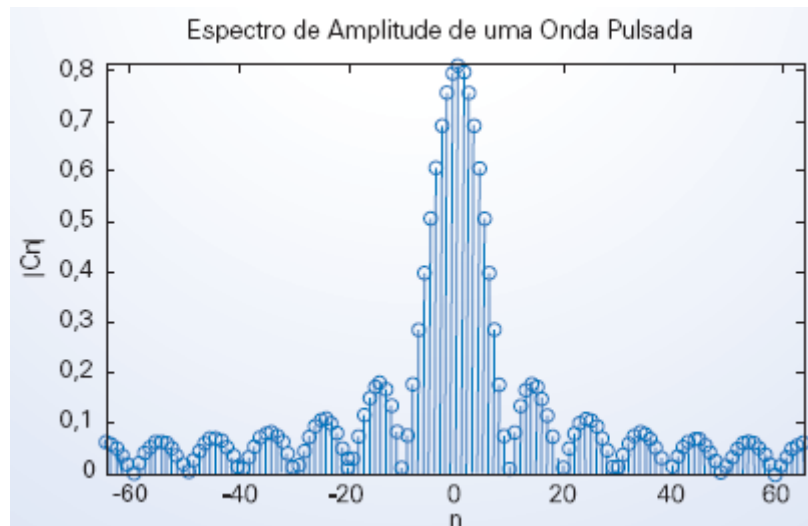



FIGURA 15.6-5 Gráfico produzido pelo programa MATLAB no Exemplo 15.6-2.

15.7 *Circuitos e a Série de Fourier*

Muitas vezes se deseja determinar a resposta de um circuito a um sinal de entrada periódico, $v_s(t)$. Para isso, podemos representar $v_s(t)$ por uma série de Fourier e determinar a resposta do circuito à frequência fundamental e a um número suficiente de harmônicos superiores. Supondo que o circuito seja linear e que, portanto, o princípio de superposição seja válido, podemos considerar que a resposta total seja a soma das respostas ao termo constante, à frequência fundamental e aos harmônicos superiores.

EXEMPLO 15.7-1 Resposta a uma Entrada Periódica no Regime Estacionário

Determine a saída $v_o(t)$ do circuito *RC* da Figura 15.7-1*b* no regime estacionário. A entrada $v_s(t)$ é a onda quadrada da Figura 15.7-1*a*.

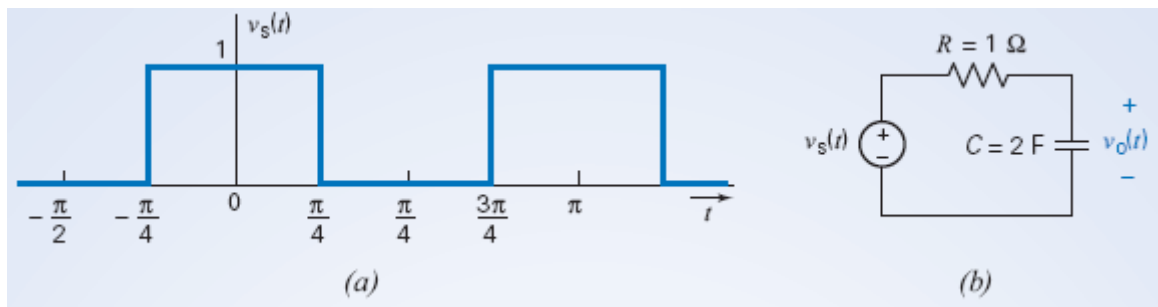



FIGURA 15.7-1 (*a*) Tensão de entrada e (*b*) circuito do Exemplo 15.7-1.

Solução

Usando a Tabela 15.4-1 e procedendo como no Exemplo 15.4-1, representamos $v_s(t)$ pela série de Fourier

$$v_s(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\text{sen}\,((2n-1)(2t+90°))}{2n-1}$$

Neste exemplo, vamos representar a tensão de entrada pelos primeiro quatro termos da série de Fourier, ou seja, vamos usar a aproximação

$$v_s(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos 2t - \frac{2}{3\pi}\cos 6t + \frac{2}{5\pi}\cos 10t$$

e determinar a resposta $v_o(t)$ usando o princípio de superposição. Em problemas como este, é interessante usar a notação $v_{sn}(t)$ para designar o termo de $v_s(t)$ correspondente ao valor de n na série de Fourier. Neste exemplo, $v_s(t)$ tem quatro termos, que correspondem a $n = 0$, 1, 3 e 5. Assim,

$$v_s(t) = v_{s0}(t) + v_{s1}(t) + v_{s3}(t) + v_{s5}(t)$$

em que

$$v_{s0}(t) = \frac{1}{2}; v_{s1}(t) = \frac{2}{\pi}\cos 2t,$$

$$v_{s3}(t) = -\frac{2}{3\pi}\cos 6t \quad \text{e} \quad v_{s5}(t) = \frac{2}{5\pi}\cos 10t$$

A Figura 15.7-2 mostra a forma como o princípio de superposição é usado neste exemplo. Em primeiro lugar, como a associação em série de fontes de tensão com tensões $v_{s0}(t)$, $v_{s1}(t)$, $v_{s2}(t)$, $v_{s3}(t)$ e $v_{s5}(t)$ é equivalente a uma única fonte de tensão com tensão $v_s(t) = v_{s0}(t) + v_{s1}(t) + v_{s2}(t) + v_{s3}(t) + v_{s5}(t)$, o circuito da Figura 15.7-2*b* é equivalente ao circuito da Figura 15.7-2*a*.

Em seguida, o princípio de superposição é usado para dividir o problema em quatro problemas mais simples, como mostra a Figura 15.7-2*c*. Cada circuito da Figura 15.7-2*c* é usado para calcular a resposta a uma das fontes de tensão da Figura 15.7-2*b* no regime estacionário. (Para calcular a resposta a uma das fontes de tensão, fazemos a tensão das outras fontes igual a zero, ou seja, substituímos as outras fontes por curtos-circuitos.) Assim, por exemplo, a tensão $v_{o3}(t)$ é a resposta à fonte $v_{s3}(t)$ agindo isoladamente. De acordo com o princípio de superposição, a resposta a todas as fontes de tensão agindo simultaneamente é a soma das respostas às quatro fontes agindo separadamente, ou seja,

$$v_o(t) = v_{o0}(t) + v_{o1}(t) + v_{o3}(t) + v_{o5}(t)$$

A vantagem de dividir o problema em quatro problemas mais simples é que a entrada de cada um dos quatro circuitos da Figura 15.7-2*c* é uma senoide. Assim, o problema de determinar a resposta estacionária a uma entrada periódica se reduz ao problema mais simples de determinar a resposta estacionária a uma entrada senoidal. A resposta de um circuito linear a uma entrada senoidal no regime estacionário pode ser encontrada usando fasores. Na Figura 15.7-2*d*, os quatro circuitos da Figura 15.7-2*c* foram desenhados usando fasores e impedâncias. A impedância do capacitor é

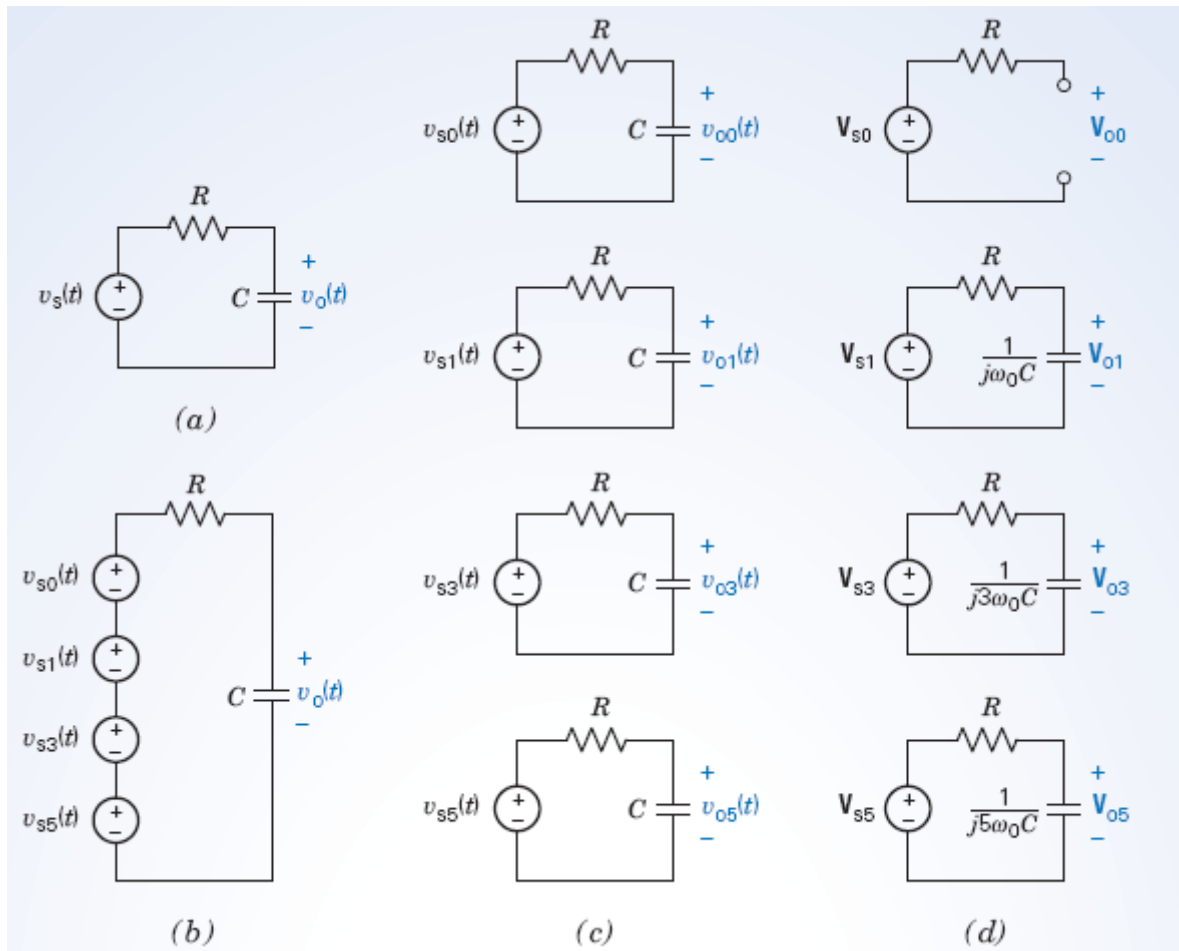



FIGURA 15.7-2 (*a*) Circuito *RC* excitado por uma tensão periódica $v_s(t)$. (*b*) Circuito equivalente. Cada fonte de tensão é um termo da série de Fourier de $v_s(t)$. (*c*) Uso do princípio de superposição. Todas as entradas são senoides. (*d*) Uso de fasores para determinar a resposta estacionária dos quatro circuitos.

$$\mathbf{Z}_c = \frac{1}{jn\omega_0 C} \quad \text{para } n = 0, 1, 3, 5$$

Como cada um dos quatro circuitos corresponde a um valor diferente de n, a impedância do capacitor é diferente em cada circuito. (Como a frequência da senoide de entrada é $n\omega_0$, cada circuito funciona com uma frequência diferente.) Observe que para $n = 0$, $Z_c = \infty$ e o capacitor se comporta como um circuito aberto. Os quatro circuitos da Figura 15.7-2*d* são muito parecidos. Em todos, o princípio da divisão de tensão pode ser usado para escrever

$$\mathbf{V}_{on} = \frac{1/(jn\omega_0 C)}{R + 1/(jn\omega_0 C)} \mathbf{V}_{sn} \quad \text{para } n = 0, 1, 3, 5$$

em que $\mathbf{V}_{sn}$ é o fasor correspondente a $v_{sn}(t)$ e $\mathbf{V}_{on}$ é o fasor correspondente a $v_{on}(t)$. Assim,

$$\mathbf{V}_{on} = \frac{\mathbf{V}_{sn}}{1 + jn\omega_0 CR} \quad \text{para } n = 0, 1, 3, 5$$

Neste exemplo, $\omega_0 CR = 4$ e, portanto,

$$\mathbf{V}_{on} = \frac{\mathbf{V}_{sn}}{1 + j4n} \quad \text{para } n = 0, 1, 3, 5$$

A resposta no domínio do tempo é dada por

$$v_{on}(t) = |\mathbf{V}_{on}| \cos(n\omega_0 t + \angle \mathbf{V}_{on})$$
$$= \frac{|\mathbf{V}_{sn}|}{\sqrt{1 + 16n^2}} \cos(n\omega_0 t + \angle \mathbf{V}_{sn} - \tan^{-1} 4n)$$

Neste exemplo,

$$|\mathbf{V}_{s0}| = \frac{1}{2}$$
$$|\mathbf{V}_{sn}| = \frac{2}{n\pi} \quad \text{para } n = 1, 3, 5$$
$$\angle \mathbf{V}_{sn} = 0 \quad \text{para } n = 0, 1, 5 \quad \text{e} \quad \angle \mathbf{V}_{sn} = 180^\circ \quad \text{para } n = 3$$

o que nos dá

$$v_{o0}(t) = \frac{1}{2}$$

$$v_{on}(t) = \frac{2}{n\pi\sqrt{1 + 16n^2}} \cos(n2t + \angle \mathbf{V}_{sn} - \tan^{-1} 4n) \quad \text{para } n = 1, 3, 5$$

e, portanto,

$$v_{o0}(t) = \frac{1}{2}$$
$$v_{o1}(t) = 0{,}154 \cos(2t - 76^\circ)$$
$$v_{o3}(t) = 0{,}018 \cos(6t + 95^\circ)$$
$$v_{o5}(t) = 0{,}006 \cos(10t - 87^\circ)$$

Finalmente, a resposta do circuito original, $v_o(t)$, é obtida somando as respostas parciais:

$$v_o(t) = \frac{1}{2} + 0{,}154 \cos(2t - 76^\circ) + 0{,}018 \cos(6t + 95^\circ) + 0{,}006 \cos(10t - 87^\circ)$$

É importante notar que o princípio de superposição pode ser aplicado às funções do tempo, $v_{o0}(t)$, $v_{o1}(t)$, $v_{o3}(t)$ e $v_{o5}(t)$, que, quando somadas, fornecem a tensão de saída total $v_o(t)$, mas não aos fasores $\mathbf{V}_{o0}$, $\mathbf{V}_{o1}$, $\mathbf{V}_{o3}$ e $\mathbf{V}_{o5}$, já que cada um corresponde a uma frequência diferente. A soma dos fasores não tem nenhum significado físico.

EXERCÍCIO 15.7-1 Determine a resposta do circuito da Figura 15.7-2 para $R = 10$ kΩ e $C = 0{,}4$ mF, supondo que v_s é a onda triangular do Exemplo 15.3-1 (Figura 15.3-2). Inclua todos os termos cuja amplitude seja igual ou maior que 2% do termo fundamental.

Resposta: $v_o(t) \approx 0{,}20$ sen $(4t - 86^\circ) - 0{,}008$ sen $(12t - 89^\circ)$ V

15.8 *Uso do PSpice para Determinar a Série de Fourier*

O programa de simulação de circuitos PSpice (Perry, 1998) permite calcular a série de Fourier de qualquer tensão ou corrente periódica em um circuito simulado. Para obter uma série de Fourier usando o PSpice, precisamos fazer o seguinte:

1º passo: Representar o circuito e o sinal de entrada no espaço de trabalho OrCAD Capture do PSpice.

2º passo:	Especificar uma simulação no domínio do tempo com uma duração suficiente para incluir um período completo no regime estacionário.
3º passo:	Especificar que os coeficientes da série de Fourier devem ser calculados e mostrados no arquivo de saída do PSpice.
4º passo:	Simular o circuito.
5º passo:	Interpretar a saída do PSpice.

O processo é ilustrado no exemplo a seguir.

EXEMPLO 15.8-1 Determinação de uma Série de Fourier Usando o PSpice

Considere o circuito da Figura 15.8-1*a*. A entrada do circuito é a tensão $v_i(t)$ da fonte de tensão; a saída é a tensão $v_o(t)$ do resistor de 10 kΩ. A entrada $v_i(t)$ é a tensão periódica da Figura 15.8-1*b*. A saída $v_o(t)$ também é uma tensão periódica. Use o programa PSpice para representar $v_i(t)$ e $v_o(t)$ por séries de Fourier.

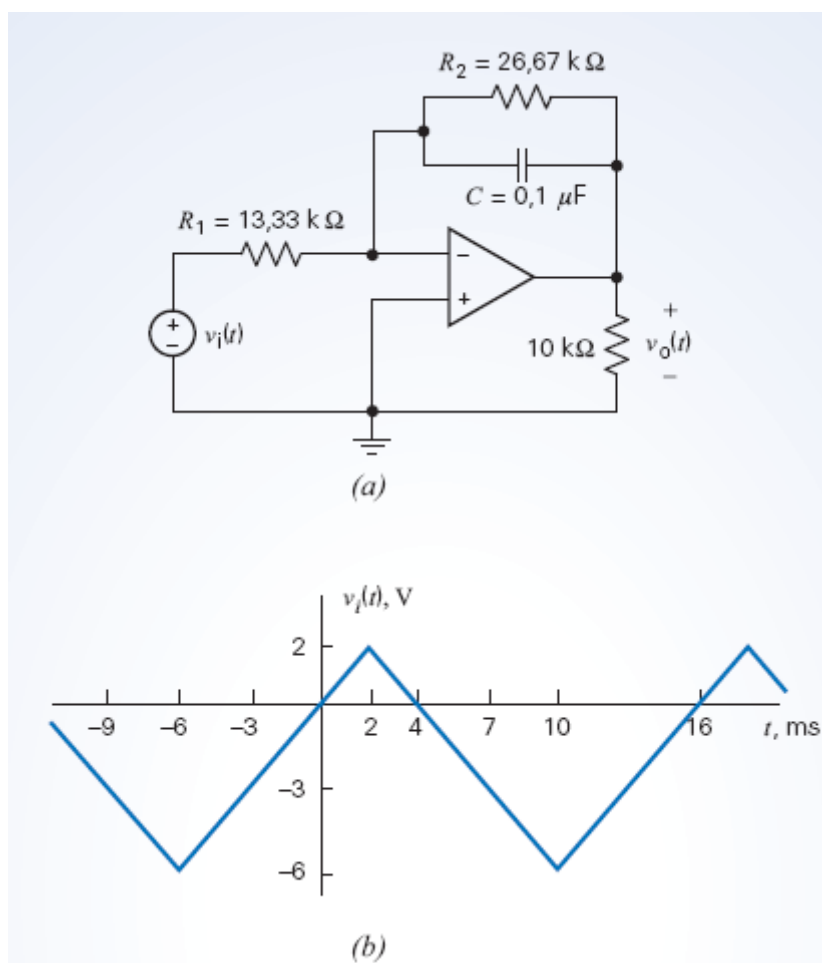



FIGURA 15.8-1 (*a*) Circuito e (*b*) tensão de entrada periódica do Exemplo 15.8-1.

Solução

1º passo: Representar o circuito e a entrada no espaço de trabalho OrCAD Capture do PSpice.

Abra um novo projeto no PSpice. Coloque os componentes no espaço de trabalho OrCAD Capture, ajuste os valores da resistência dos resistores e da capacitância do capacitor e estabeleça as ligações corretas entre os componentes (Svoboda, 2007). O circuito completo aparece na Figura 15.8-2. A fonte de tensão da Figura 15.8-1*a* corresponde a um módulo do PSpice chamado VPULSE. A Figura 15.8-3 mostra o símbolo desse módulo, juntamente com a forma de onda que o módulo produz. Os parâmetros do módulo VPULSE são *v*1, *v*2, *td*, *tr*, *tf*, *pw* e *per*. O significado desses parâmetros está indicado na Figura 15.8-3*b*. Para produzir uma forma de onda triangular, é preciso escolher um valor muito pequeno para *pw*, de modo a tornar o intervalo de tempo que a tensão permanece igual a *v*2 praticamente nulo, e escolher um valor para *pw* igual à soma de *tr* e *tf*, de modo a anular o intervalo de tempo que a tensão permanece igual a *v*1. Um conjunto apropriado de parâmetros para simular a tensão de entrada, $v_i(t)$, é o seguinte:

$$v1 = 2\ \text{V},\ v2 = -6\ \text{V},\ td = 2\ \text{ms},\ tr = 8\ \text{ms},\ tf = 8\ \text{ms},\ pw = 1\ \text{ns e } per = 16\ \text{ms}$$

(Como o PSpice não aceita o valor $pw = 0$, escolhemos para pw um valor muito menor que tr e tf.)

2º passo: Especificar uma simulação no domínio do tempo por um tempo suficientemente longo para que dure pelo menos um período depois de atingido o regime estacionário.

Selecione PSpice\New Simulation Profile no menu principal do programa OrCAD Capture, escolha um nome para a simulação e selecione Time Domain (Transient) na lista Analysis type da caixa de diálogo Simulation Settings da Figura 15.8-4. Digite 64 ms na caixa de entrada Run to time para executar a simulação durante quatro períodos completos da forma de onda de entrada.

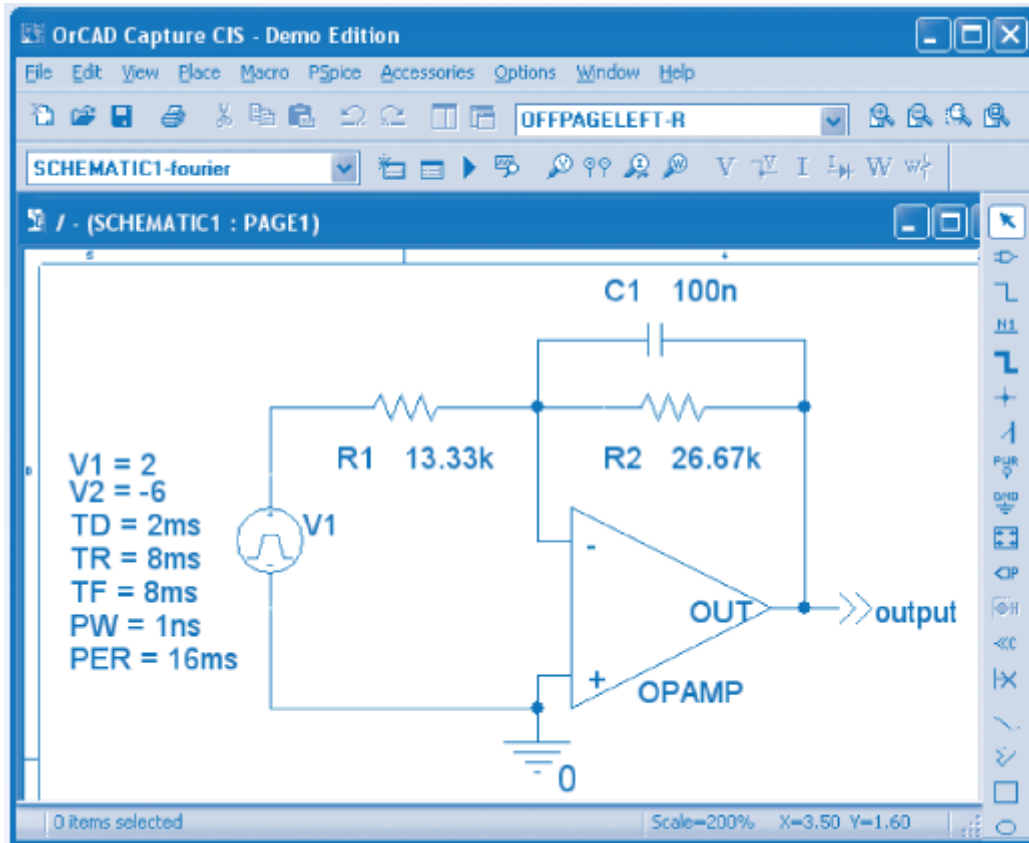



FIGURA 15.8-2 Diagrama do circuito no espaço de trabalho OrCAD Capture do PSpice.

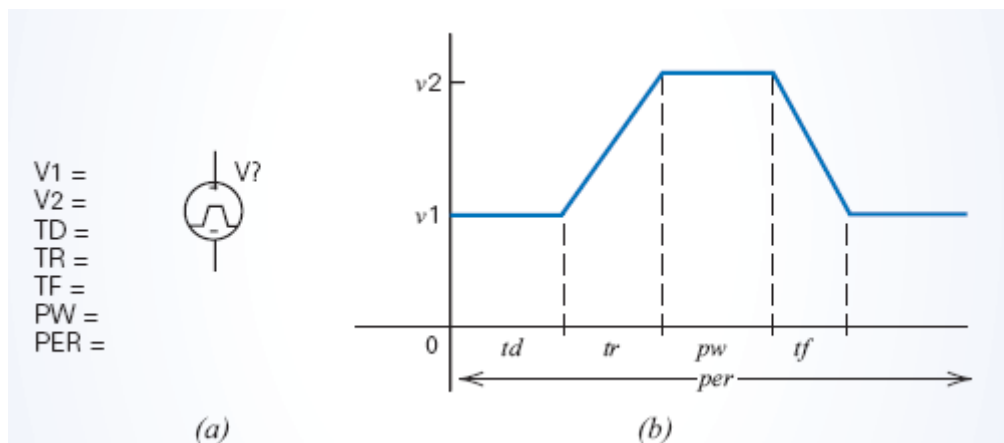



FIGURA 15.8-3 Símbolo (*a*) e forma de onda de tensão (*b*) do módulo VPULSE.

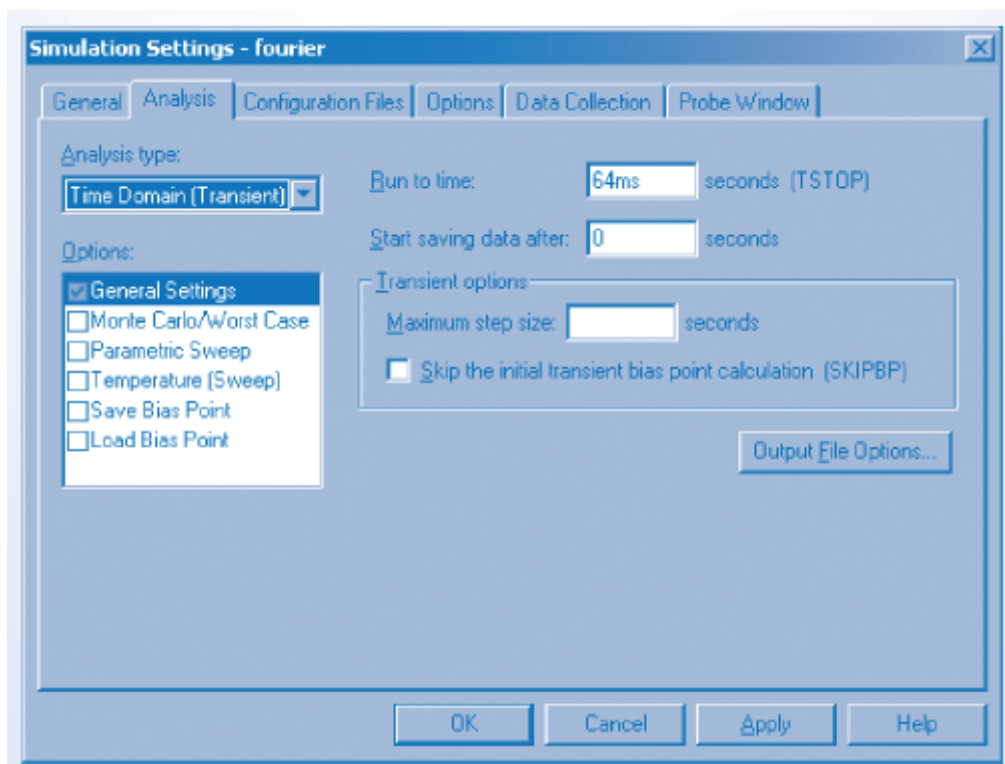



FIGURA 15.8-4 Caixa de diálogo Simulation Settings.

3º passo: Especificar que os coeficientes da série de Fourier devem ser calculados e mostrados no arquivo de saída do PSpice.

Clique no botão Output File Options para abrir a caixa de diálogo Transient Output File Options da Figura 15.8-5. Marque com o mouse o quadrado Perform Fourier Analysis. O PSpice representa as séries de Fourier em termos de senos em vez de cossenos, ou seja, na forma

$$v(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{N} c_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t + \theta n) \qquad (15.8\text{-}1)$$

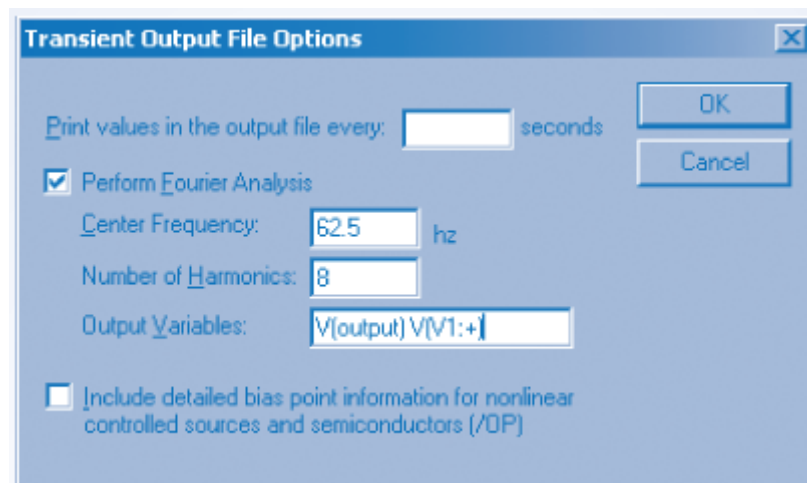



FIGURA 15.8-5 Caixa de diálogo Transient Output File Options.

FOURIER COMPONENTS OF TRANSIENT RESPONSE V(N00230)

DC COMPONENT = -2.000199E+00

HARMONIC NO	FREQUENCY (HZ)	FOURIER COMPONENT	NORMALIZED COMPONENT	PHASE (DEG)	NORMALIZED PHASE (DEG)
1	6.250E+01	3.242E+00	1.000E+00	4.500E+01	0.000E+00
2	1.250E+02	3.968E-04	1.224E-04	-1.772E+02	-2.672E+02
3	1.875E+02	3.602E-01	1.111E-01	-4.500E+01	-1.800E+02
4	2.500E+02	3.996E-04	1.232E-04	9.549E+01	-8.451E+01
5	3.125E+02	1.297E-01	3.999E-02	-1.350E+02	-3.600E+02
6	3.750E+02	4.038E-04	1.245E-04	8.141E+00	-2.619E+02
7	4.375E+02	6.613E-02	2.040E-02	1.350E+02	-1.800E+02
8	5.000E+02	4.106E-04	1.267E-04	-7.917E+01	-4.392E+02

TOTAL HARMONIC DISTORTION = 1.198281E+01 PERCENT

FIGURA 15.8-6 Coeficientes da série de Fourier de $v_i(t)$.

Entre com a frequência fundamental, $f_0 = 1/per = 62.5$ na caixa de entrada Center Frequency* e com o número de harmônicos a serem calculados, 8, na caixa de entrada Number of Harmonics. Entre na caixa de entrada Output Variables com o nome das tensões ou correntes cujas séries de Fourier se deseja calcular. No caso, esses nomes são V(output), o nome da tensão de saída, e V(V1:+), o nome da tensão de entrada. Clique em OK para fechar a caixa de diálogo Transient Output File Options e clique novamente em OK para fechar a caixa de diálogo Simulation Settings e voltar ao espaço de trabalho OrCAD Capture.

4º passo: Simular o circuito.

Selecione PSpice\Run no menu principal do OrCad Capture para executar a simulação.

5º passo: Interpretar o arquivo de saída do PSpice.

Depois de executar a simulação, o PSpice abre automaticamente uma janela Schematics. Selecione View/Output File no menu da janela Schematics. Role o arquivo de saída até encontrar os coeficientes de Fourier na tensão de entrada, mostrados na Figura 15.8-6. (O PSpice mudou o nome da tensão de entrada. Usamos o nome V(V1:+) na caixa de entrada Output Variables na caixa de diálogo Transient Output File Options da Figura 15.8-5, mas o PSpice usou o nome V(NN00230) no arquivo de saída da Figura 15.8-6.) A tabela da Figura 15.8-6 tem seis colunas e oito linhas. As oito linhas correspondem aos oito coeficientes, $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_8$ da série de Fourier da tensão de entrada. (Os coeficientes são oito porque entramos com 8 na caixa de entrada Number of Harmonics da caixa de diálogo Transient Output File Options da Figura 15.8-5.) A primeira coluna mostra o número de ordem dos harmônicos, de 1 a 8. A segunda coluna mostra a frequência dos harmônicos em hertz. A terceira mostra os coeficientes $c_1, c_2, \ldots, c_8$ da série de Fourier. A quarta coluna mostra os coeficientes normalizados $c_1/c_1 = 1, c_2/c_1, c_3/c_1, \ldots c_8/c_1$. A quinta coluna mostra os ângulos de fase $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_8$. A sexta linha mostra os ângulos de fase normalizados, $\theta_1 - \theta_1 = 0, \theta_2 - \theta_1, \theta_3 - \theta_1, \ldots, \theta_8 - \theta_1$.

Esperamos que os coeficientes pares, $c_2, c_4, c_6, \ldots, c_8$ sejam nulos. Como, na Figura 15.8-6, os coeficientes pares são muito menores que os coeficientes ímpares, vamos considerá-los exatamente iguais a zero. O coeficiente c_0 é a componente contínua da série de Fourier e aparece acima da tabela na Figura 15.8-6. Finalmente, como o PSpice representa a série de Fourier em termos de senos e não de cossenos, os coeficientes da Figura 15.8-6 indicam que a função $v_i(t)$ é representada pela série de Fourier

$$v_i(t) = -2{,}000199 + 3{,}242 \text{ sen } (393t + 45°) + 0{,}3602 \text{ sen } (1178t - 45°) + 0{,}1297 \text{ sen } (1963t - 135°) + 0{,}06613 \text{ sen } (2749t + 135°) + \ldots$$

FOURIER COMPONENTS OF TRANSIENT RESPONSE V(OUTPUT)

DC COMPONENT = 4.001551E+00

HARMONIC NO	FREQUENCY (HZ)	FOURIER COMPONENT	NORMALIZED COMPONENT	PHASE (DEG)	NORMALIZED PHASE (DEG)
1	6.250E+01	4.444E+00	1.000E+00	1.784E+02	0.000E+00
2	1.250E+02	1.259E-02	2.833E-03	8.754E+01	-2.693E+02
3	1.875E+02	2.112E-01	4.753E-02	6.594E+01	-4.693E+02
4	2.500E+02	4.739E-03	1.066E-03	-1.220E+02	-8.357E+02
5	3.125E+02	4.794E-02	1.079E-02	-2.179E+01	-9.139E+02
6	3.750E+02	9.015E-03	2.029E-03	8.777E+01	-9.828E+02
7	4.375E+02	2.040E-02	4.590E-03	-1.370E+02	-1.386E+03
8	5.000E+02	3.212E-03	7.229E-04	1.815E+01	-1.409E+03

TOTAL HARMONIC DISTORTION = 4.909457E+00 PERCENT

FIGURA 15.8-7 Coeficientes da série de Fourier de $v_o(t)$.

Para escrever a mesma série em termos de cossenos, basta subtrair 90° de todos os ângulos de fase. O resultado é o seguinte:

$$v_i(t) = -2{,}000199 + 3{,}242 \text{ sen } (393t + 45°) + 0{,}3602 \cos (1178t - 135°) + 0{,}1297 \cos (1963t - 225°) + 0{,}06613 \cos (2749t + 45°) + \ldots \quad (15.8\text{-}2)$$

Role o arquivo de saída até encontrar os coeficientes de Fourier na tensão de saída, mostrados na Figura 15.8-7. De acordo com os dados da Figura 15.8-7, a série de Fourier de $v_o(t)$ é

$$v_o(t) = 4{,}001551 + 4{,}444 \cos (393t + 88{,}4°) + 0{,}2112 \cos (1178t - 24{,}06°) + 0{,}04794 \cos (1963t - 118{,}8°) + 0{,}02040 \cos (2749t - 227°) + \ldots \quad (15.8\text{-}3)$$

15.9 *A Transformada de Fourier*

A transformada de Fourier está relacionada de perto à série de Fourier e à transformada de Laplace. Como vimos, toda forma de onda periódica $f(t)$ possui uma série de Fourier. Quando aumentamos o período T, a frequência fundamental ω_0 diminui, já que

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

A diferença entre as frequências de dois harmônicos consecutivos é $\Delta\omega = (n+1)\omega_0 - n\omega_0 = \omega_0 = 2\pi/T$. Assim, quando T tende a infinito, $\Delta\omega$ tende a $d\omega$, um incremento infinitesimal. Além disso, o número de frequências em um dado intervalo é inversamente proporcional a $\Delta\omega$. No limite, portanto, $n\omega_0$ tende para a variável contínua ω.

Considere a série de Fourier exponencial

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \qquad (15.9\text{-}1)$$

e

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt \qquad (15.9\text{-}2)$$

Multiplicando a Eq. 15.9-2 por T e fazendo T tender a infinito, temos

$$C_n T = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt \qquad (15.9\text{-}3)$$

O produto C_nT pode ser definido como uma nova função da frequência $F(j\omega)$ dada por

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt \qquad (15.9\text{-}4)$$

e chamada de *transformada de Fourier* de $f(t)$. Para determinar a transformada inversa, fazemos $C_nT = F(j\omega)$ na Eq. 15.9-1, o que nos dá

$$f(t) = \lim_{T\to\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_nTe^{jn\omega_0 t}\frac{1}{T} = \lim_{T\to\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{jn\omega_0 t}\frac{\omega_0}{2\pi}$$

já que $1/T = \omega_0/2\pi$. Quando $T \to \infty$, o somatório se torna uma integral e o incremento $\Delta\omega = \omega_0$ se torna $d\omega$. Assim, temos

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega \qquad (15.9\text{-}5)$$

A Eq. 15.9-5 é chamada de *transformada inversa de Fourier*. Esse par de equações (Eqs. 15.9-4 e15.9-5), conhecido como par de transformadas de Fourier, permite realizar a transformação de Fourier para o domínio da frequência e a transformação inversa para o domínio do tempo.

Uma função $f(t)$ possui uma transformada de Fourier se

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt < \infty$$

e se o número de descontinuidades de $f(t)$ é finito. Na prática, todos os pulsos de duração finita em que estamos interessados possuem uma transformada de Fourier.

A Tabela 15.9-1 mostra as principais propriedades do par de transformadas de Fourier.

Tabela 15.9-1 O Par de Transformadas de Fourier

EQUAÇÃO	NOME	PROCESSO
$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-j\omega t}\,dt$	Transformada	Conversão do domínio do tempo para o domínio da frequência Conversão de $f(t)$ para $F(j\omega)$
$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$	Transformada inversa	Conversão do domínio da frequência para o domínio do tempo Conversão de $F(j\omega)$ para $f(t)$

EXEMPLO 15.9-1 Transformada de Fourier de um Pulso

Determine a transformada de Fourier do pulso isolado da Figura 15.9-1.

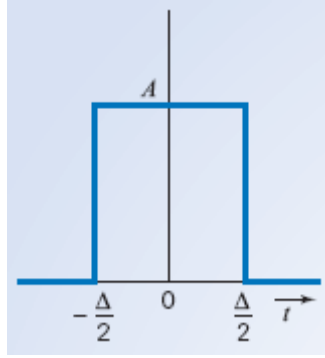



FIGURA 15.9-1 Forma de onda do Exemplo 15.9-1.

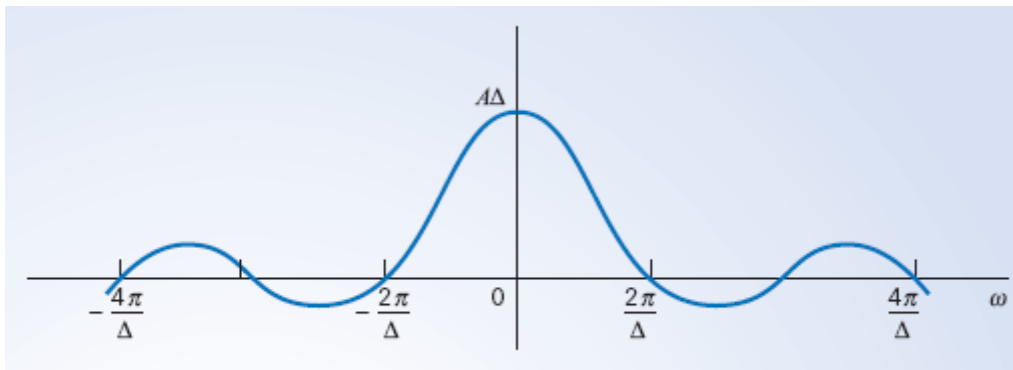



FIGURA 15.9-2 Transformada de Fourier do pulso retangular da Figura 15.9-1 em função de ω.

Solução

Usando a definição da transformada de Fourier, temos

$$
\begin{aligned}
F(j\omega) &= \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} A e^{-j\omega t}\, dt = \frac{A}{-j\omega} e^{-j\omega t}\Big|_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \\
&= \frac{A}{-j\omega}\left(e^{-j\omega\Delta/2} - e^{j\omega\Delta/2}\right) = A\Delta \frac{\operatorname{sen}(\omega\Delta/2)}{\omega\Delta/2}
\end{aligned}
\qquad (15.9\text{-}6)
$$

Assim, a transformada de Fourier é da forma $(\operatorname{sen} x)/x$, em que $x = \omega\Delta/2$. Observe que $(\operatorname{sen} x)/x = 0$ para $x = \omega\Delta/2 = n\pi$ ou $\omega = 2n\pi/\Delta$, como mostra a Figura 15.9-2. Vamos representar a função $(\operatorname{sen} x)/x$ pelo símbolo $Sa(x)$.

Considere uma versão do pulso retangular da Figura 15.9-1 na qual $A = 1/\Delta$ e a largura do pulso tende a zero, $\Delta \longrightarrow 0$, enquanto a área do retângulo permanece igual a 1. Nesse caso, temos um *impulso unitário* $\delta(t - t_0)$ e

$$
\int_a^b \delta(t - t_0)\, dt = \begin{cases} 1 & a \le t_0 \le b \\ 0 & \text{p.q.o.v.} \end{cases} \qquad (15.9\text{-}7)
$$

A transformada de Fourier de um impulso unitário que ocorre no instante t_0 é dada por

$$
F(j\omega) = \int_{t_0-}^{t_0+} \delta(t - t_0) e^{-j\omega t}\, dt = e^{-j\omega t_0} \qquad (15.9\text{-}8)
$$

Para $t_0 = 0$, temos o caso especial

$$F(j\omega) = 1 \qquad (15.9\text{-}9)$$

Assim, a transformada de Fourier de um impulso unitário situado na origem não depende da frequência e é igual a 1.

EXERCÍCIO 15.9-1 Determine a transformada de Fourier da função $f(t) = e^{-at}\, u(t)$, em que $u(t)$ é a função degrau unitário.

Resposta: $F(j\omega) = \dfrac{1}{a + j\omega}$

15.10 *Propriedades da Transformada de Fourier*

Podemos descobrir algumas propriedades da transformada de Fourier escrevendo separadamente a parte real e a parte imaginária de $F(j\omega)$,

$$F(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega)0$$

A transformada também pode ser escrita na forma polar

$$F(j\omega) = |F(\omega)|\, e^{ju}$$

em que $\theta = \tan^{-1}(Y/X)$. Observe que a notação $F(j\omega)$ e a notação $F(\omega)$ são equivalentes; daqui em diante, usaremos a notação $F(\omega)$. Além disso,

$$F(-\omega) = F^*(\omega)$$

em que $F^*(\omega)$ é o complexo conjugado de $F(\omega)$.

Quando conhecemos a transformada de Fourier de $f(t)$, podemos escrever

$$\mathscr{F}[f(t)] = F(\omega)$$

em que o símbolo $\mathscr{F}$ significa tomar a transformada de Fourier. A notação usada para representar a transformada inversa de Fourier é a seguinte:

$$\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)] = f(t)$$

Repetindo a equação da transformada, temos (Tabela 15.9-1)

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\, dt \qquad (15.10\text{-}1)$$

Nesse caso, se $\mathscr{F}[af_1(t)] = aF_1(\omega)$ e $\mathscr{F}[bf_2(t)] = bF_2(\omega)$, temos

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[af_1 + bf_2] &= \int_{-\infty}^{\infty} [af_1 + bf_2]e^{-j\omega t}\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} af_1 e^{-j\omega t}\, dt + \int_{-\infty}^{\infty} bf_2 e^{-j\omega t}\, dt \\ &= aF_1(\omega) + bF_2(\omega)\end{aligned}$$

Essa propriedade é chamada de *linearidade*.

Vamos agora usar a definição da transformada de Fourier, Eq. 15.10-1**, em alguns exemplos, para descobrir outras propriedades.**

EXEMPLO 15.10-1 Transformada de Fourier de uma Função Deslocada no Tempo

Determine a transformada de Fourier da função deslocada no tempo $f(t - t_0)$.

Solução

$$\mathscr{F}[f(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0)e^{-j\omega t}\,dt$$

Fazendo $x = t - t_0$, temos

$$\mathscr{F}[f(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega(x+t_0)}\,dx = e^{-j\omega t_0}F(\omega)$$

em que $F(\omega) = \mathscr{F}[f(t)]$.

Essa e outras propriedades das transformadas de Fourier aparecem na Tabela 15.10-1. Podemos usar essas propriedades para obter outros pares de transformadas de Fourier.

Tabela 15.10-1 Algumas Propriedades da Transformada de Fourier

NOME DA PROPRIEDADE	FUNÇÃO DO TEMPO	TRANSFORMADA DE FOURIER
1. Definição	$f(t)$	$F(\omega)$
2. Multiplicação por uma constante	$Af(t)$	$AF(\omega)$
3. Linearidade	$af_1 + bf_2$	$aF_1(\omega) + bF_2(\omega)$
4. Deslocamento no tempo	$f(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}F(\omega)$
5. Mudança da escala de tempo	$f(at), a > 0$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
6. Modulação	$e^{j\omega_0 t}f(t)$	$F(\omega - \omega_0)$
7. Derivação	$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$(j\omega)^n F(\omega)$
8. Convolução	$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(t-x)dx$	$F_1(\omega)F_2(\omega)$
9. Multiplicação pelo tempo	$t^n f(t)$	$(j)^n \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$
10. Inversão do tempo	$f(-t)$	$F(-\omega)$
11. Integração	$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,d\tau$	$\frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$

Com a ajuda das propriedades e da equação de definição da transformada de Fourier, podemos obter muitos pares de transformadas e construir uma tabela com esses pares. Já demonstramos as três primeiras linhas da Tabela 15.10-2 e podemos demonstrar as outras linhas usando as propriedades da Tabela 15.10-1 e/ou a definição da transformada.

EXEMPLO 15.10-2 Transformada de Fourier

Determine a transformada de Fourier da função $f(t) = Ae^{-a|t|}$, cujo gráfico aparece na Figura 15.10-1.

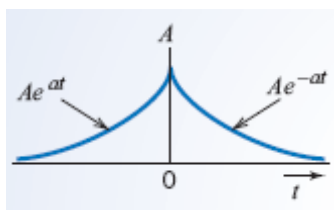



FIGURA 15.10-1 Forma de onda do Exemplo 15.10-2.

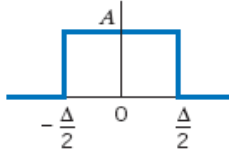
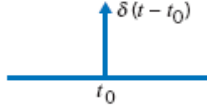
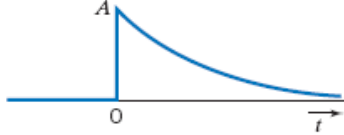
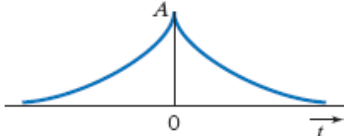
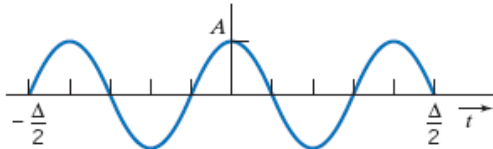
Solução

Vamos dividir a função em duas partes simétricas e usar a propriedade da linearidade. Temos:

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) = Ae^{-at}u(t) + Ae^{at}u(-t)$$

De acordo com a linha 3 da Tabela 15.10-2,

$$F_1(\omega) = \frac{A}{a + j\omega}$$

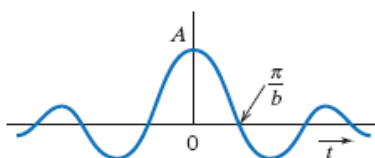
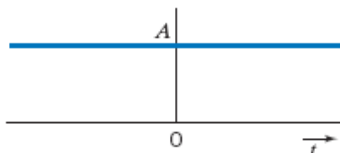
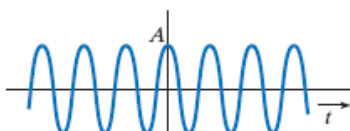
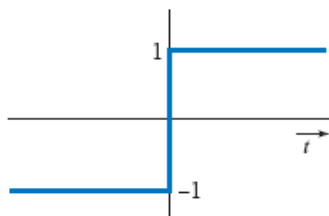
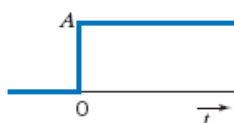
De acordo com a propriedade 10 da Tabela 15.10-1,

$$F_2(\omega) = F_1(-\omega) = \frac{A}{a - j\omega}$$

Usando a propriedade da linearidade, obtemos

$$F(\omega) = F_1(\omega) + F_2(\omega) = \frac{A}{a + j\omega} + \frac{A}{a - j\omega} = \frac{2Aa}{a^2 + \omega^2} \qquad (15.10\text{-}2)$$

O resultado é a linha 4 da Tabela 15.10-2. Observe que $F(\omega)$ é uma função par.

Tabela 15.10-2 Pares de Transformadas de Fourier

$f(t)$	FORMA DE ONDA	$F(\omega)$
1. Pulso $f_1(t) = Au\left(t + \frac{\Delta}{2}\right) - Au\left(t - \frac{\Delta}{2}\right)$		$A\Delta Sa\left(\frac{\omega\Delta}{2}\right)$
2. Impulso $\delta(t - t_0)$		$e^{-j\omega t_0}$
3. Exponencial decrescente $Ae^{-at}u(t)$		$\frac{A}{a + j\omega}$
4. Exponencial decrescente simétrica $Ae^{-a\|t\|}$		$\frac{2aA}{a^2 + \omega^2}$
5. Salva senoidal (cossenoide chaveada) $Af_1(t)\cos\omega_0 t$		$\frac{A\Delta}{2}[Sa(\omega - \omega_0) + Sa(\omega + \omega_0)]$
6. Pulso triangular		$A\Delta Sa^2\left(\frac{\omega\Delta}{\ }\right.$

7. $A\,Sa(bt) = A\dfrac{\operatorname{sen} bt}{bt}$		$\begin{cases} \dfrac{A\pi}{b} & \lvert\omega\rvert < b \\ 0 & \lvert\omega\rvert > b \end{cases}$
8. Constante dc $f(t) = A$		$2\pi A\,\delta(\omega)$
9. Cossenoide $A \cos \omega_0 t$		$\pi A[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$
10. Signum $f(t) = \begin{cases} +1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$		$\dfrac{2}{j\omega}$
11. Degrau $Au(t)$		$A\left[\pi\delta(\omega) + \dfrac{1}{j\omega}\right]$

Nota: $Sa(x) = (\operatorname{sen} x)/x$.

EXEMPLO 15.10-3 Transformada de Fourier

Determine a transformada de Fourier da função cosseno truncado $f(t) = f_1(t) \cos \omega_0 t$, em que $f_1(t)$ é o pulso retangular da Figura 15.9-1.

Solução

A transformada de Fourier do pulso retangular está na linha 1 da Tabela 15.10-2:

$$F_1(\omega) = A\Delta\,(\operatorname{sen} x) / x$$

em que $x = \omega\Delta/2$. A função cosseno pode ser escrita na forma

$$\cos \omega_0 t = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right)$$

o que nos dá

$$f(t) = \frac{1}{2} f_1(t) e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} f_1(t) e^{-j\omega_0 t}$$

Usando a propriedade da modulação (linha 6) da Tabela 15.10-1, temos

$$F(\omega) = \frac{1}{2}F_1(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}F_1(\omega + \omega_0)$$

Assim, substituindo $F_1(\omega)$ por seu valor, dado pela Eq. 15.9-6, temos

$$F(\omega) = \frac{A\Delta}{2}\frac{\text{sen}[(\omega - \omega_0)\Delta/2]}{(\omega - \omega_0)\Delta/2} + \frac{A\Delta}{2}\frac{\text{sen}[(\omega + \omega_0)\Delta/2]}{(\omega + \omega_0)\Delta/2}$$

ou, usando a notação $Sa(x) = (\text{sen}\, x)/x$,

$$F(\omega) = \frac{A\Delta}{2}Sa\left[(\omega - \omega_0)\frac{\Delta}{2}\right] + \frac{A\Delta}{2}Sa\left[(\omega + \omega_0)\frac{\Delta}{2}\right]$$

EXERCÍCIO 15.10-1 Determine a transformada de Fourier de $f(at)$ para $a > 0$ sabendo que $\mathscr{F}[f(t)] = F(\omega)$.

Resposta: $\mathscr{F}[f(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$

EXERCÍCIO 15.10-2 Mostre que a transformada de Fourier de uma forma de onda constante $f(t) = A$ para $-\infty \le t \le \infty$ é $F(\omega) = 2\pi A\delta(\omega)$ calculando a transformada inversa de $F(\omega)$.

15.11 *O Espectro de um Sinal*

O *espectro* de um sinal $f(t)$, também conhecido como *densidade espectral*, é a transformada de Fourier $F(\omega)$ do sinal. Podemos plotar $F(\omega)$ em função de ω para representar graficamente o espectro. No caso do pulso retangular da Figura 15.9-1, por exemplo, mostramos que

$$F(\omega) = A\Delta Sa(\omega\,\Delta / 2)$$

que está plotada na Figura 15.9-2. O espectro de um pulso retangular é uma função real.

De acordo com a linha 2 da Tabela 15.10-2, a transformada de Fourier de um impulso $\delta(t)$ é

$$F(\omega) = 1$$

Assim, o espectro de um impulso contém todas as frequências, como se pode ver na Figura 15.11-1.

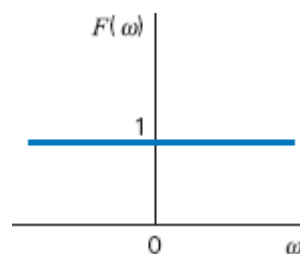



FIGURA 15.11-1 Espectro de um impulso $f(t) = \delta(t)$.

A transformada de Fourier de um sinal constante de amplitude A é

$$F(\omega) = 2\pi A\delta(\omega)$$

e está plotada na Figura 15.11-2. A integral do impulso $\delta(\omega)$ é igual a 1. O símbolo do impulso é uma seta vertical.

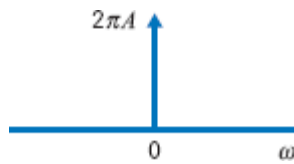



FIGURA 15.11-2 Espectro de um sinal constante de amplitude A. O símbolo do impulso é uma seta vertical.

Vamos agora examinar uma função cuja transformada de Fourier é uma função complexa. Se $f(t) = Ae^{-at} u(t)$,

$$F(\omega) = \frac{A}{a + j\omega}$$

Para plotar o espectro, calculamos o módulo e a fase de $F(\omega)$:

$$|F(\omega)| = \frac{A}{(a^2 + \omega^2)^{1/2}}$$

e

$$\varphi(\omega) = -\tan^{-1} \omega/a$$

O espectro de Fourier da função aparece na Figura 15.11-3.

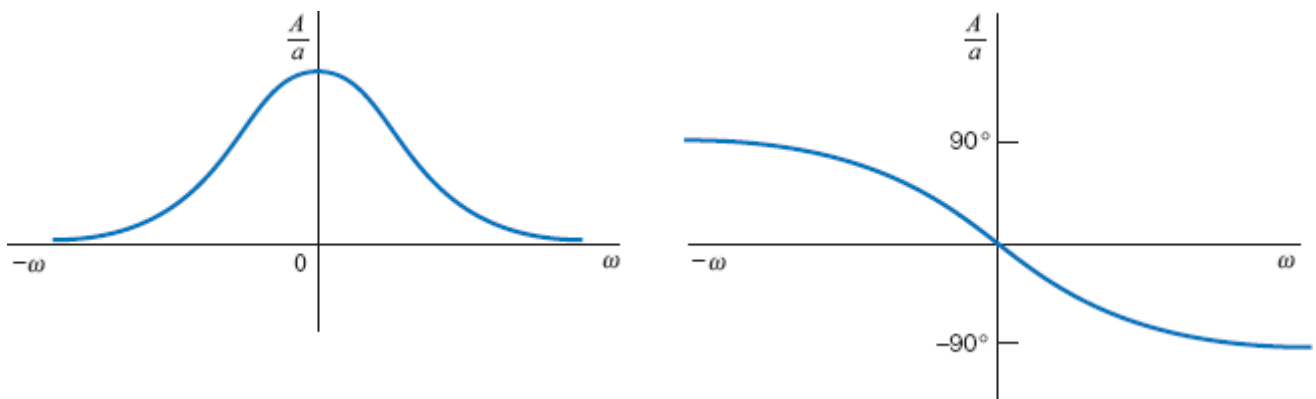



FIGURA 15.11-3 Espectro de Fourier da função $f(t) = Ae^{-at} u(t)$.

O **espectro de Fourier** de um sinal é um gráfico da amplitude e da fase da transformada de Fourier do sinal.

EXERCÍCIO 15.11-1 Calcule a transformada de Fourier e plote o espectro de Fourier da função $f(t)$ da Figura E 15.11-1, em que $f(t) = A \cos \omega_0 t$ para qualquer valor de t.

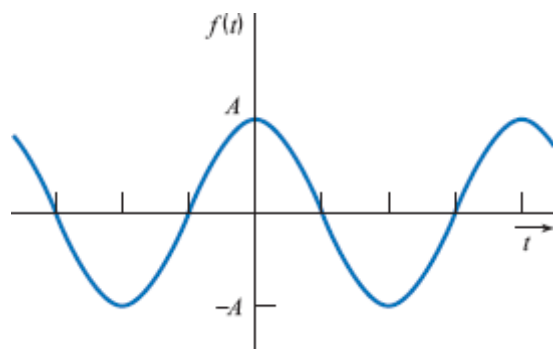



FIGURA E 15.11-1

Resposta: $F(\omega) = \pi A\delta(\omega + \omega_0) + \pi A\delta(\omega - \omega_0)$

15.12 *Convolução e Resposta de um Circuito*

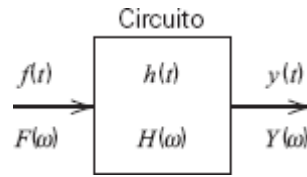



FIGURA 15.12-1 Um circuito linear.

A resposta $y(t)$ de um circuito a uma entrada $f(t)$ pode ser calculada a partir da resposta do circuito a um impulso, $h(t)$, usando a integral de convolução. No caso do circuito da Figura 15.12-1, a integral de convolução é

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(t-x)\,dx$$

Usando a transformada de Fourier da integral de convolução, temos

$$[y(t)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(t-x)\,dx\,e^{-j\omega t}\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)\,e^{-j\omega t}\,dt\,dx$$

Fazendo $u = t - x$, obtemos

$$\mathscr{F}[y(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-j\omega(u+x)}\,du\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(x)e^{-j\omega x}\,dx \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-j\omega u}\,du$$

ou

$$Y(\omega) = H(\omega)F(\omega) \qquad (15.12\text{-}1)$$

Assim, a convolução no domínio do tempo corresponde à multiplicação no domínio da frequência. Quando a entrada é um impulso, $f(t) = \delta(t)$, $F(\omega) = 1$ e a resposta é a função de transferência do circuito:

$$Y(\omega) = H(\omega)$$

Quando a entrada de um circuito linear é um sinal senoidal, o produto da transformada do sinal de entrada pela resposta a um impulso é a transformada da resposta do circuito no regime estacionário.

EXEMPLO 15.12-1 Análise de um Circuito Usando a Transformada de Fourier

Determine a resposta $v_o(t)$ do circuito *RL* da Figura 15.12-2 para $v(t) = 4e^{-2t}u(t)$ V. A condição inicial é zero.

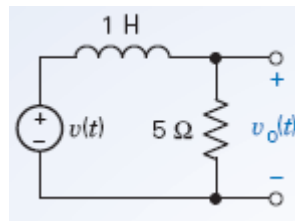



FIGURA 15.12-2 Circuito do Exemplo 15.12-1.

Solução

Como $v(t) = 4e^{-2t}\,u(t)$, $V(\omega)$ é dada por

$$V(\omega) = \frac{4}{2 + j\omega}$$

O circuito é representado por $H(\omega)$; usando o método da divisão de tensão,

$$H(\omega) = \frac{R}{R + j\omega L} = \frac{5}{5 + j\omega}$$

Assim,

$$V_o(\omega) = H(\omega)V(\omega) = \frac{20}{(5 + j\omega)(2 + j\omega)}$$

Expandindo o lado direito da equação em frações parciais, temos[1]

$$V_o(\omega) = \frac{-20/3}{5 + j\omega} + \frac{20/3}{2 + j\omega}$$

Tomando a transformada inversa de cada termo (linha 3 da Tabela 15.10-2), obtemos

$$v_o(t) = \frac{20}{3}\left(e^{-2t} - e^{-5t}\right)u(t)\,\mathrm{V}$$

As respostas no domínio do tempo obtidas desta forma são as respostas de circuitos inicialmente relaxados (nenhuma energia armazenada).

EXEMPLO 15.12-2 Análise de um Circuito Usando a Transformada de Fourier

Determine e plote o espectro de Fourier da resposta $V_o(\omega)$ do circuito da Figura 15.12-3 para $v = 10e^{-2t}\,u(t)$ V.

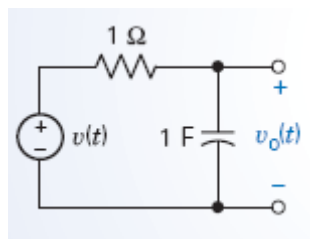



FIGURA 15.12-3 Circuito do Exemplo 15.12-2.

Solução

A transformada de Fourier do sinal de entrada é

$$V(\omega) = \frac{10}{2 + j\omega} = \frac{10}{(4 + \omega^2)^{1/2}} \angle -\tan^{-1} \omega/2$$

A função de transferência do circuito é

$$H(j\omega) = \frac{1/(j\omega C)}{R + 1/(j\omega C)} = \frac{1}{1 + j\omega} = \frac{1}{(1 + \omega^2)^{1/2}} \angle -\tan^{-1} \omega$$

Assim, a saída é

$$V_o(\omega) = H(\omega)V(\omega) = \frac{10}{(2 + j\omega)(1 + j\omega)}$$

o que nos dá

$$|V_o| = \frac{10}{[(4 + \omega^2)(1 + \omega^2)]^{1/2}}$$

e

$$\varphi(\omega) = V_0(\omega) = -\tan^{-1} \frac{\omega}{2} - \tan^{-1} \omega$$

A Tabela 15.12-1 mostra os valores do módulo e da fase de $V_o(\omega)$ para alguns valores positivos de ω. Para valores negativos de ω, $|V_o(-\omega)| = |V_o(\omega)|$ e

$$\varphi(-\omega) = -\varphi(\omega)$$

A Figura 15.12-4 mostra o espectro de Fourier de $V_o(\omega)$.

Tabela 15.12-1 Espectro de Fourier do Exemplo 15.12-2

ω	0	1	2	3	4	∞
$\|V_0\|$	5	3,16	1,58	0,88	0,36	0
$\varphi(\omega)$	0°	–71,6°	–108,4°	–127,9°	–146,9°	–180°

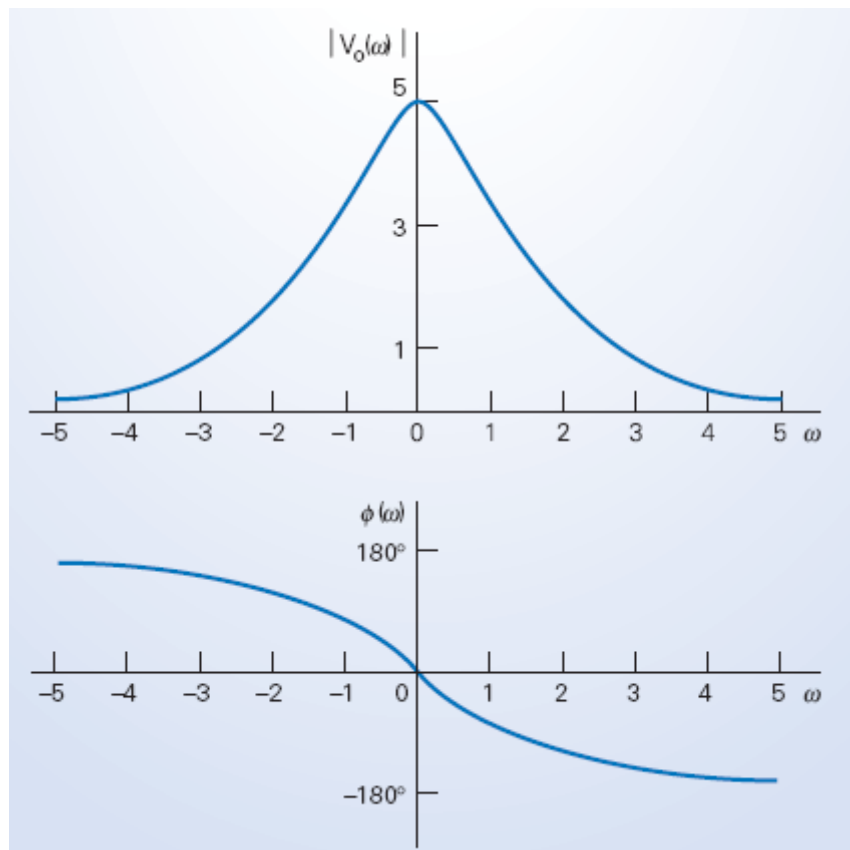



FIGURA 15.12-4 Espectro de Fourier da tensão de saída do Exemplo 15.12-2.

EXERCÍCIO 15.12-1 Um filtro de banda de passagem ideal deixa passar sem atenuação todas as frequências entre 24 rad/s e 48 rad/s e rejeita totalmente as frequências que estão fora desse intervalo.

(a) Plote $|V_o|^2$ em função da frequência para esse filtro se o sinal de entrada é

$$v(t) = 120e^{-24t}u(t) \text{ V}$$

(b) Que porcentagem da energia do sinal de entrada está disponível no sinal $V_o(\omega)$?

Resposta: **(b)** 20,5%.

15.13 *A Transformada de Fourier e a Transformada de Laplace*

A tabela de transformadas de Laplace, Tabela 14.2-1, apresentada no Capítulo 14, pode ser usada para obter a transformada de Fourier de uma função $f(t)$. Naturalmente, a transformada de Fourier existe formalmente apenas quando a integral de Fourier, Eq. 15.9-4, converge. Para que a integral de Fourier convirja é preciso que todos os polos de $F(s)$ estejam no semiplano esquerdo do plano s, excluindo a origem e o eixo imaginário.

Se $f(t) = 0$ para $t \leq 0$ e $\int_0^{\infty} f(t)\, dt$ converge, podemos obter a transformada de Fourier a partir da transformada de Laplace de $f(t)$ substituindo s por $j\omega$, ou seja,

$$F(\omega) = F(s)\big|_{s=j\omega} \tag{15.13-1}$$

em que

$$F(s) = \mathscr{L}[f(t)]$$

Assim, por exemplo, se (linha 3 da Tabela 15.10-2)

$$f(t) = Ae^{-at}u(t)$$

de acordo com a Tabela 14.2-1,

$$F(s) = \frac{A}{s + a}$$

Assim, fazendo $s = j\omega$, obtemos a transformada de Fourier

$$F(\omega) = \frac{A}{a + j\omega}$$

Se $f(t)$ é uma função real com valores diferentes de zero apenas para tempos negativos, podemos refletir $f(t)$ para tempos positivos, determinar a transformada de Laplace e obter $F(\omega)$ fazendo $s = -j\omega$: Assim, se $f(t) = 0$ para $t \geq 0$ e $\int_0^{\infty} f(t)\, dt$ converge, temos

$$F(\omega) = \mathscr{L}[f(-t)]\big|_{s=-j\omega} \qquad (15.13\text{-}2)$$

Considere, por exemplo, a função exponencial

$$f(t) = 0 \quad t \geq 0$$
$$= e^{at} \quad t < 0$$

Substituindo t por $-t$, temos

$$f(-t) = e^{-at} \quad t > 0$$

e, portanto,

$$F(s) = \frac{1}{s + a}$$

Fazendo $s = -j\omega$, obtemos

$$F(\omega) = \frac{1}{a - j\omega}$$

Tabela 15.13-1 **Obtenção da Transformada de Fourier Usando a Transformada de Laplace**

CASO	MÉTODO
	Passos
A. $f(t) \neq 0$ apenas para $t > 0$	**1.** $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$
	2. $F(\omega) = F(s)\big|_{s=j\omega}$
	Passos
B. $f(t) \neq 0$ apenas para $t < 0$	**1.** $F(s) = \mathcal{L}[f(-t)]$
	2. $F(\omega) = F(s)\big|_{s=j\omega}$
	Passos
	1. $f(t) = f^+(t) + f^-(t)$
C. $f(t) \neq 0$ p.q.v. de t	**2.** $F^+(s) = \mathcal{L}[f^+(t)]$
	$F^-(s) = \mathcal{L}[f^-(-t)]$
	3. $F(\omega) = F^+(s)\big|_{s=j\omega} + F^-(s)\big|_{s=j\omega}$

Nota: os polos de $F(s)$ devem estar no semiplano esquerdo do plano s.

Funções que são diferentes de zero tanto para tempos positivos como para tempos negativos podem ser divididas em duas partes, uma para tempos positivos e outra para tempos negativos. Em seguida, usamos as Eqs. 15.13-1 e 15.13-2 para obter a transformada de Fourier de cada parte. A transformada de Fourier de $f(t)$ é a soma das transformadas de Fourier das duas partes.

Considere, por exemplo, a seguinte função:

$$f(t) = Ae^{-a|t|}$$

que está na linha 4 da Tabela 15.10-2. A parte positiva da função será chamada de $f^+(t)$ e a parte negativa de $f^-(t)$. Temos

$$f(t) = f^+(t) + f^-(t)$$

e

$$F(\omega) = \mathscr{L}[f^+(t)]_{s=j\omega} + \mathscr{L}[f^-(-t)]_{s=-j\omega}$$

Nesse caso,

$$f^+(t) = Ae^{-at} \qquad t > 0$$

e

$$f^-(t) = Ae^{at} \qquad t < 0$$

Observe que $f^-(-t) = Ae^{-at}$. Assim,

$$F^+(s) = \frac{A}{s+a} \qquad \text{e} \qquad F^-(s) = \frac{A}{s+a}$$

A função total $F(\omega)$ é, portanto,

$$F(\omega) = F^+(s)_{s=j\omega} + F^-(s)_{s=-j\omega} = \frac{A}{a+j\omega} + \frac{A}{a-j\omega} = \frac{2aA}{\omega^2+a^2}$$

O uso da transformada de Laplace para determinar a transformada de Fourier está descrito na Tabela 15.13-1. Lembre-se de que o método não pode ser aplicado a funções como sen ωt, cos ωt e $u(t)$, cujas transformadas de Laplace possuem polos na origem ou no eixo imaginário.

EXERCÍCIO 15.13-1 Determine a transformada de Fourier da função

$$\begin{aligned} f(t) &= te^{-at} \quad t \geq 0 \\ &= te^{at} \quad t \leq 0 \end{aligned}$$

Resposta: $\dfrac{-j4a\omega}{(a^2+\omega^2)^2}$

15.14 *Como Podemos Testar . . . ?*

Os engenheiros são frequentemente encarregados de verificar se a solução de um problema está correta. As soluções de problemas de projeto, por exemplo, devem ser verificadas para confirmar que todas as especificações estão sendo atendidas. Além disso, os resultados obtidos com o auxílio de computadores devem ser revistos para evitar possíveis erros na digitação dos dados e as afirmações dos vendedores a respeito dos seus produtos devem ser confirmadas.

Os estudantes de engenharia muitas vezes também precisam verificar se os resultados que obtiveram estão corretos. Às vezes falta muito pouco tempo para terminar um exame e é importante poder identificar rapidamente as questões que precisam ser refeitas.

O exemplo a seguir ilustra algumas técnicas que podem ser usadas para verificar se as soluções de problemas do tipo discutido neste capítulo estão corretas.

EXEMPLO 15.14-1 Como Podemos Testar uma Série de Fourier?

A Figura 15.14-1 mostra a curva característica de um circuito resistivo com saturação. Suponha que a entrada do circuito seja

$$v_{in}(t) = A \text{ sen } \omega t$$

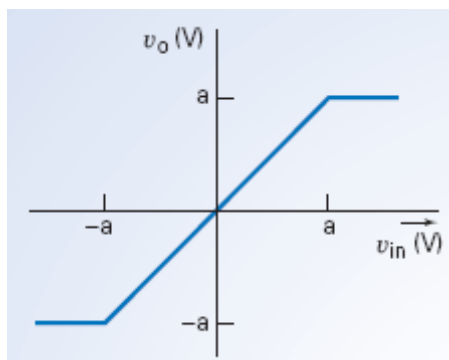



FIGURA 15.14-1 Curva característica do Exemplo 15.14-1.

em que $A > a$. Explique **como podemos testar** se a saída do circuito é uma função periódica que pode ser representada pela série de Fourier

$$v_o(t) = b_1 \text{ sen } \omega t + \sum_{\substack{n=3 \\ \text{ímpar}}}^{N} b_n \text{ sen } n\omega t \qquad (15.14\text{-}1)$$

em que (Graham, 1971)

$$B = \text{sen}^{-1}\left(\frac{a}{A}\right)$$

$$b_1 = \frac{2}{\pi}A\left[B + \frac{a}{A}\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}\right]$$

e

$$b_n = \frac{4A}{\pi(1-n^2)}\left[\frac{a}{A}\frac{\cos(nB)}{n} - \sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}\text{ sen}(nB)\right]$$

Solução

A tensão de saída $v_o(t)$ é uma senoide truncada. Precisamos verificar se a Eq. 15.14-1 representa realmente uma senoide truncada. Uma forma direta, mas trabalhosa, é plotar $v_o(t)$ em função de t diretamente partir da Eq. 15.14-1. Muitos programas de computador, como planilhas eletrônicas e pacotes de ferramentas matemáticas, podem ser usados para facilitar a tarefa. O Mathcad é um desses programas. Na Figura 15.4-2, o Mathcad foi usado para plotar $v_o(t)$ em função de t. O gráfico mostra que a série de Fourier da Eq. 15.14-1 representa realmente uma senoide truncada.

Plotar um sinal periódico a partir dos coeficientes da série de Fourier.
Definir n, o índice do somatório:

$$N := 25 \qquad n := 3, 5, \ldots, N$$

Definir alguns parâmetros para facilitar a dos parâmetros da série de Fourier:

$$A := 12.5 \qquad a := 12 \qquad B := \operatorname{asin}\left(\frac{a}{A}\right)$$

Entrar com a frequência fundamental:

$$\omega := 2 \cdot \pi \cdot 1000$$

Definir um incremento de tempo. Definir um índice para varrer dois períodos do sinal periódico:

$$T := \frac{2 \cdot \pi}{\omega} \quad dt := \frac{T}{200} \quad i := 1, 2, \ldots, 400 \quad t_i := dt \cdot i$$

Entrar com as fórmulas dos coeficientes da série de Fourier:

$$b_1 := \frac{2}{\pi} \cdot A \left[B + \frac{a}{A} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} \right]$$

$$b_n := \frac{4 \cdot A}{\pi \cdot (1 - n^2)} \cdot \left[\frac{a}{A} \cdot \frac{\cos(n \cdot B)}{n} - \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} \cdot \sin(n \cdot B) \right]$$

Calcular a série de Fourier:

$$v(i) := b_1 \cdot \sin(\omega \cdot t_i) + \sum_{n=3}^{N} b_n \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t_i)$$

Plotar o sinal periódico:

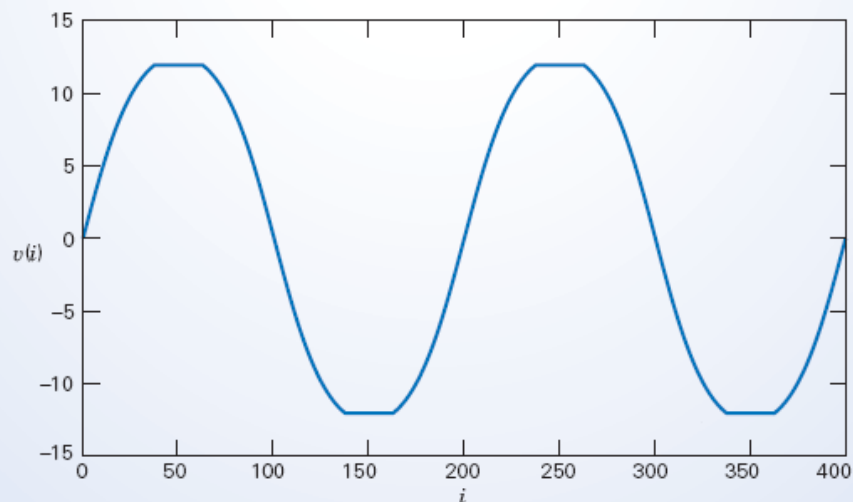



FIGURA 15.14-2 Uso do programa Mathcad para verificar se a série de Fourier de uma senoide truncada está correta.

15.15 EXEMPLO DE PROJETO Fonte de Alimentação de CC

Uma fonte de alimentação de laboratório utiliza um circuito não linear chamado retificador para converter uma tensão senoidal em uma tensão contínua. A entrada senoidal

$$v_{ca}(t) = A \operatorname{sen} \omega_0 t$$

é obtida em uma tomada de parede. Neste exemplo, $A = 160$ V e $\omega_0 = 377$ rad/s ($f_0 = 60$ Hz). A Figura 15.15-1 mostra o diagrama de blocos da fonte de alimentação. A saída do retificador é o valor absoluto da entrada, ou seja,

$$v_s(t) = |A \text{ sen } \omega_0 t|$$

O objetivo do retificador é converter um sinal cujo valor médio é zero em um sinal cujo valor médio é diferente de zero. O valor médio de $v_s(t)$ é usado para produzir a tensão de saída da fonte de alimentação.

A saída do retificador não é uma senoide, mas um sinal periódico com uma frequência fundamental igual a $2\omega_0$. Sinais periódicos podem ser representados por séries de Fourier. A série de Fourier de $v_s(t)$ contém uma componente constante e componentes senoidais. Como estamos projetando uma fonte de alimentação de corrente contínua, as componentes senoidais que estão presentes na série de Fourier de $v_s(t)$ são indesejáveis. A soma desses termos indesejáveis recebe o nome de *ondulação*.

A função do filtro que aparece na Figura 15.5-1 é deixar passar a componente constante e atenuar as componentes senoidais. A saída do filtro, $v_o(t)$, é um sinal periódico, que também pode ser representado por uma série de Fourier. Nosso objetivo é projetar um filtro simples tal que o termo constante de $v_o(t)$ seja pelo menos 90 V e a amplitude da ondulação seja no máximo 5% do valor da componente constante.

Descreva a Situação e as Hipóteses

1. De acordo com a Tabela 15.4-1, a série de Fourier de $v_s(t)$ é

$$v_s(t) = \frac{320}{\pi} - \sum_{n=1}^{N} \frac{640}{\pi(4n^2 - 1)} \cos(2 \cdot n \cdot 377 \cdot t)$$

Vamos chamar de $v_{sn}(t)$ o termo de $v(t)$ correspondente a n, em que n é um número inteiro. Usando essa notação, podemos escrever a série de Fourier de $v_s(t)$ na forma

$$v_s(t) = v_{s0} + \sum_{n=1}^{N} v_{sn}(t)$$

2. A Figura 15.15-2 mostra um filtro simples. A resistência R_s representa a resistência de saída do retificador. Estamos supondo que a resistência de entrada do regulador é tão grande que pode ser ignorada. (A resistência de entrada do regulador está em paralelo com R e é provavelmente muito maior que R. Nesse caso, a resistência equivalente da associação em paralelo de R com a resistência de entrada do regulador é aproximadamente igual a R.)

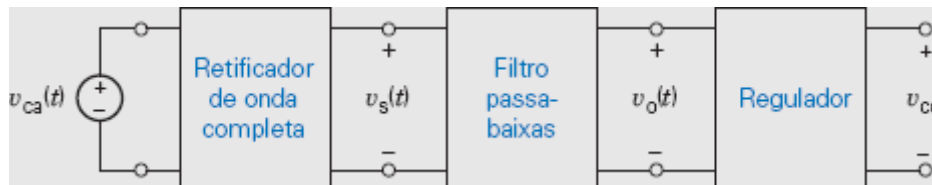



FIGURA 15.15-1 Diagrama de blocos de uma fonte de alimentação.

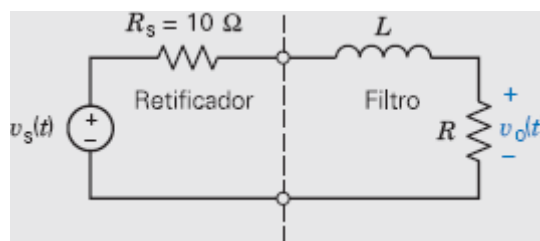



FIGURA 15.15-2 Filtro passa-baixas *RL* ligado ao retificador.

3. A saída do filtro $v_o(t)$ também é um sinal periódico e pode ser representada pela série de Fourier

$$v_o(t) = v_{o0} + \sum_{n=1}^{N} v_{on}(t)$$

4. A especificação relativa à ondulação é a seguinte:

amplitude da ondulação $\leq 0{,}05 \times$ componente constante

o que significa que

$$\left(\sum_{n=1}^{N} v_{on}(t) \right)_{\max} \leq 0{,}05 \cdot v_{o0} \qquad (15.15\text{-}1)$$

A maior parte da ondulação de $v_o(t)$ se deve a $v_{o1}(t)$, a componente que corresponde ao primeiro harmônico da série de Fourier. Para facilitar os cálculos, substituímos a Eq. 15.15-1 pela condição mais simples

$$v_{o1}(t) \leq 0{,}04 \cdot v_{o0}$$

Isso significa que a amplitude $v_{o1}(t)$ deve ser no máximo 4% da componente constante (v_{o0} é a componente constante do sinal de saída do filtro).

Estabeleça a Meta

Especificar valores de R e L tais que

$$v_{o0} \geq 90$$

e

$$v_{o1}(t) \leq 0{,}04 \cdot v_{o0}$$

Formule um Plano

Usar o princípio de superposição para calcular a série de Fourier do sinal de saída do filtro. Em primeiro lugar, a especificação

$$v_{o0} \geq 90 \text{ V}$$

pode ser usada para determinar o valor de R. Em seguida, a especificação

$$|v_{o1}(t)| \leq 0{,}04 \cdot v_{o0}$$

pode ser usada para calcular L.

Execute o Plano

Em primeiro lugar, vamos calcular a resposta ao termo constante de $v_s(t)$. Quando a entrada do filtro é constante e o circuito está no regime estacionário, o indutor se comporta como um curto-circuito. Usando o método da divisão de tensão, temos:

$$v_{o0} = \frac{R}{R + R_s} v_{s0} = \frac{R}{R + 10} \cdot \frac{320}{\pi}$$

A especificação de que $v_{o0} \geq 90$ V significa que

$$90 \leq \frac{R}{R + 10} \cdot \frac{320}{\pi}$$

ou

$$R \geq 75{,}9$$

Vamos escolher

$$R = 80\ \Omega$$

Para $R = 80\ \Omega$,

$$v_{o0} \geq 90{,}54 \text{ V}$$

Vamos agora determinar a resposta estacionária a um termo senoidal $v_{sn}(t)$. Fasores e impedâncias podem ser usados para obter a resposta. Usando o método da divisão de tensão, temos

$$\mathbf{V}_{on} = \frac{R}{R + R_s + j2n\omega_0 L}\mathbf{V}_{sn}$$

Estamos particularmente interessados em $\mathbf{V}_{o1}$:

$$\mathbf{V}_{o1} = \frac{R}{R + R_s + j2\omega_0 L}\mathbf{V}_{s1} = \frac{80}{90 + j754L} \cdot \frac{640}{\pi \cdot 3}$$

A amplitude de $v_{o1}(t)$ é igual ao módulo do fasor $\mathbf{V}_{o1}$. De acordo com a especificação da amplitude de v_{o1},

$$\frac{80}{\sqrt{90^2 + 754^2L^2}} \cdot \frac{640}{\pi \cdot 3} \leq 0{,}04\, v_{o1}$$
$$\leq 0{,}04 \cdot 90{,}54$$

ou seja,

$$L \geq 1{,}986 \text{ H}$$

Assim,

$$L = 2 \text{ H}$$

e o projeto está completo.

Verifique se a Solução Proposta Está Correta

A Figura 15.15-3*a* mostra, no mesmo gráfico, $v_s(t)$ e $v_o(t)$, as tensões de entrada e de saída do filtro da Figura 15.15-2. A Figura 15.15-3*b* é um gráfico ampliado da tensão de saída. De acordo com o gráfico, o valor médio da tensão de saída é maior que 90 V e a ondulação é menor que ± 4 V. Assim, as especificações foram satisfeitas.

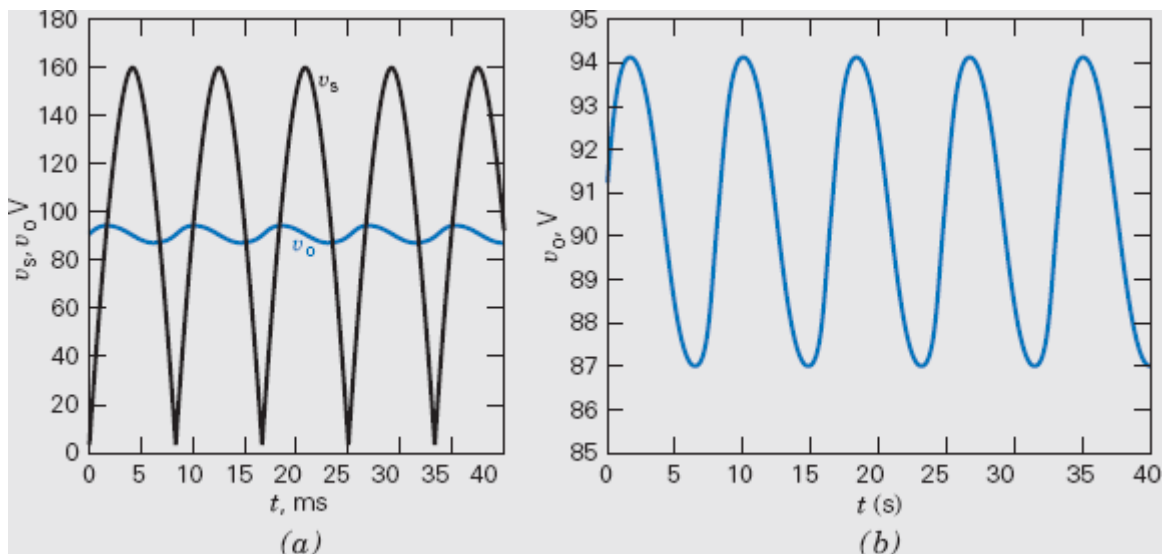



FIGURA 15.15-3 (*a*) Simulação do circuito da Figura 15.15-2 usando o programa Mathcad. (*b*) Gráfico ampliado da tensão de saída.

15.16 RESUMO

- As formas de onda periódicas estão presentes em muitos circuitos elétricos. A Figura 15.16-1 mostra a forma de onda da corrente em alguns equipamentos de uso comum. Enquanto, como se pode ver na Figura 15.16-1*a*, a corrente nos motores tem a mesma forma de onda senoidal que a tensão da rede elétrica, a forma de onda é bem diferente em fontes de alimentação e reostatos eletrônicos, como mostram as Figuras 15.16-1*b* e 15.16-1*c*. Os engenheiros elétricos sempre se interessaram pelas ferramentas matemáticas usadas para analisar fenômenos periódicos.

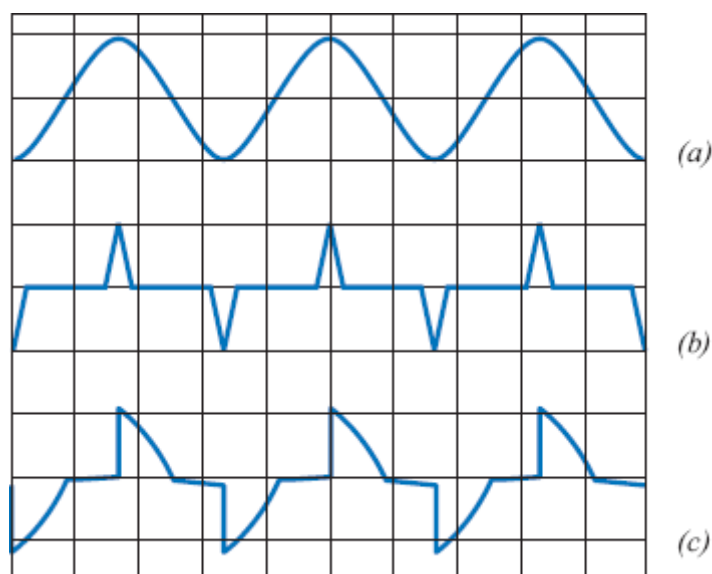



FIGURA 15.16-1 Forma de onda da corrente (*a*) em um motor, (*b*) em uma fonte de alimentação chaveada e (*c*) em um reostato eletrônico. *Fonte:* Lamarre, 1991.

- O brilhante matemático e engenheiro Jean-Baptiste-Joseph Fourier afirmou em 1807 que qualquer forma de onda periódica podia ser representada por uma série formada apenas por senos e cossenos cujas frequências (as chamadas frequências harmônicas) são múltiplos inteiros de uma frequência conhecida como frequência fundamental.
- A forma trigonométrica da série de Fourier é

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos n\omega_0 t + \sum_{n=1}^{N} b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t$$

  Os coeficientes da série trigonométrica de Fourier são dados por

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{T+t_0} f(t)\,dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{T+t_0} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt \quad n > 0$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{T+t_0} f(t)\operatorname{sen} n\omega_0 t\,dt \quad n > 0$$

- A série trigonométrica de Fourier também pode ser escrita na forma

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{N} c_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

  em que $c_0 = a_0$ é o valor médio de $f(t)$ e

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \text{e} \quad \theta_n = \begin{cases} -\tan^{-1}\left(\dfrac{b_n}{a_n}\right) & \text{para } a_n > 0 \\ 180° - \tan^{-1}\left(\dfrac{b_n}{a_n}\right) & \text{para } a_n < 0 \end{cases}$$

- Os coeficientes da série de Fourier de alguns sinais periódicos aparecem na Tabela 15.4-1.
- A simetria pode facilitar o cálculo dos coeficientes de Fourier.
- A forma exponencial da série de Fourier é

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \mathbf{C}_n e^{jn\omega_0 t}$$

em que $\mathbf{C}_n$ são coeficientes complexos definidos por

$$\mathbf{C}_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt$$

- Os espectros de linhas, que consistem em gráficos da amplitude e da fase dos coeficientes complexos da série de Fourier em função da frequência, podem ser úteis para representar as frequências que compõem uma forma de onda.
- Para determinar a resposta de um circuito excitado por um sinal de entrada periódico $v_s(t)$, representamos $v_s(t)$ por uma série de Fourier e determinamos a resposta do circuito à frequência fundamental e a vários harmônicos. Supondo que o circuito é linear e que o princípio de superposição se aplica, podemos dizer que a resposta total é a soma das respostas ao termo constante, ao termo fundamental e aos termos harmônicos.
- A transformada de Fourier permite representar uma forma de onda aperiódica no domínio da frequência.
- A integral de convolução permite determinar a resposta $y(t)$ de um circuito a uma entrada arbitrária $f(t)$ a partir da resposta do circuito a um impulso, $h(t)$.
- A tabela de transformadas de Laplace, Tabela 14.2-1, apresentada no Capítulo 14, pode ser usada para obter a transformada de Fourier de uma função $f(t)$.

PROBLEMAS

Seção 15.2 A Série de Fourier

P 15.2-1 Determine a série de Fourier de uma função periódica $f(t)$ que é igual a t^2 no período de $t = 0$ a $t = 2$.

P 15.2-2 O primeiro ciclo completo de uma forma de onda periódica em "escada" é dado por

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 0{,}25 \\ 2 & 0{,}25 < t < 0{,}5 \\ 0 & 0{,}5 < t < 1 \end{cases}$$

Determine a série de Fourier da função.

P 15.2-3 Determine a série de Fourier da função dente de serra da Figura P 15.2-3.

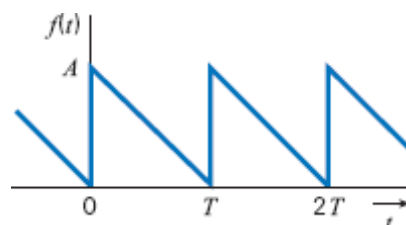



Figura P 15.2-3 Função dente de serra.

P 15.2-4 Determine a série de Fourier da função periódica $f(t)$ que é igual a t no período de $t = 0$ a $t = 2$ s.

Seção 15.3 Simetria da Função *f* (*t*)

P 15.3-1 Determine a série de Fourier da forma de onda de tensão da Figura P 15.3-1.

Resposta: $v_d(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{n\pi} \text{ sen } \left(n\frac{\pi}{2}t\right)$

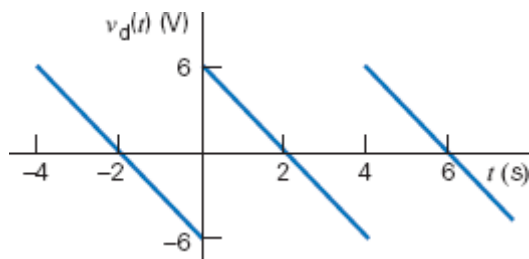



Figura P 15.3-1

P 15.3-2 Determine a série de Fourier da forma de onda de tensão da Figura P 15.3-2.

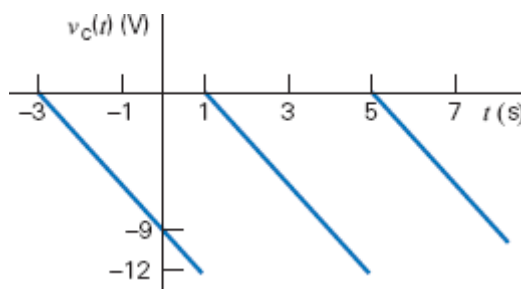



Figura P 15.3-2

Sugestão: $v_c(t) = v_d(t - 1) - 6$, em que $v_d(t)$ é a tensão do Problema P 15.3-1.

Resposta: $v_c(t) = -6 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{n\pi} \text{ sen } \left(n\frac{\pi}{2}t - n\frac{\pi}{2}\right)$

P 15.3-3 Determine a série de Fourier da forma de onda de tensão da Figura P 15.3-3.

Resposta:
$$v_a(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{18}{n^2\pi^2} \left(1 - \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right) \cos\left(n\frac{1000\pi}{3}t\right)$$

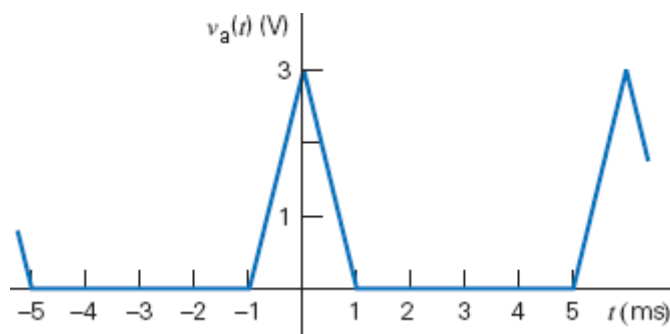



Figura P 15.3-3

P 15.3-4 Determine a série de Fourier da forma de onda de tensão da Figura P 15.3-4.

Sugestão: $v_b(t) = v_a(t - 0{,}002) - 1$, em que $v_a(t)$ é a tensão do Problema P 15.3-3.

Resposta:

$$v_b(t) = -\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{18}{n^2\pi^2}\left(1 - \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)$$

$$\cos\left(n\frac{1000\pi}{3}t - n\frac{2\pi}{3}\right)$$

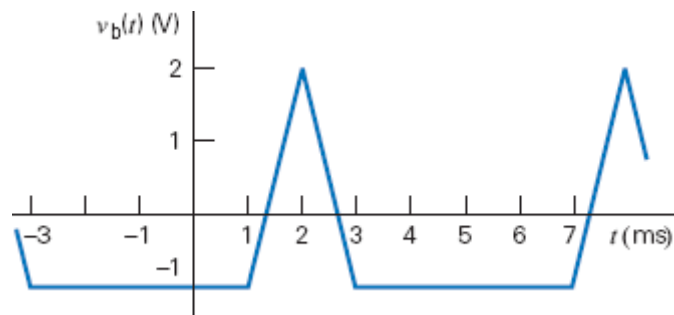



Figura P 15.3-4

P 15.3-5 Determine a série de Fourier da onda dente de serra da Figura P 15.3-5.

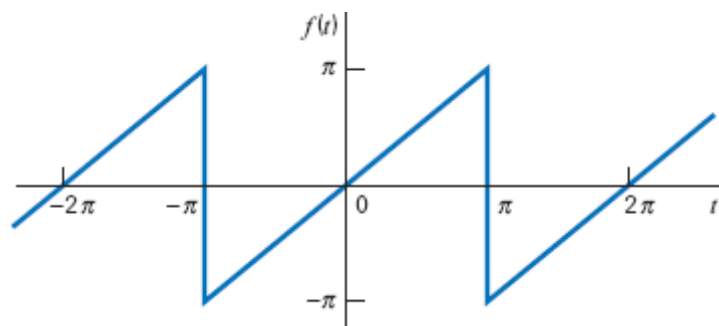



Figura P 15.3-5 Onda dente de serra

P 15.3-6 Determine a série de Fourier da forma de onda da Figura P 15.3-6. Calcule o valor de a_0, a_1, a_2 e a_3.

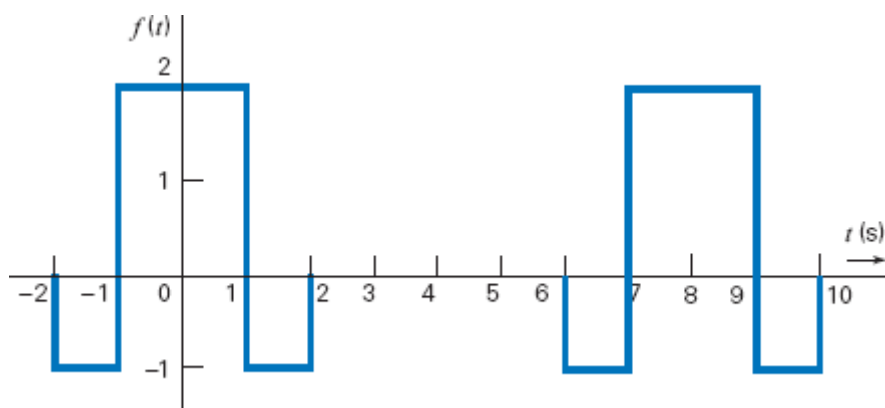



Figura P 15.3-6

P 15.3-7 Determine a série de Fourier da função

$$f(t) = |A \cos \omega t|$$

P 15.3-8 Determine a série de Fourier da função da Figura P 15.3-8. A função é a parte positiva de uma função cosseno.

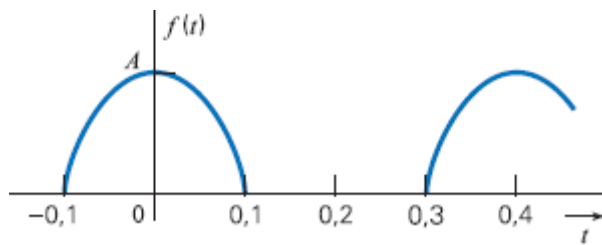



Figura P 15.3-8 Cossenoide retificada em meia-onda.

P 15.3-9 Determine a série de Fourier da função $f(t)$ da Figura P 15.3-9.

Resposta: $a_n = a_0 = 0$; $b_n = 0$ para n par; $b_n = 8/n^2\pi^2$ para $n = 1, 5, 9, \ldots$; $b_n = -8/n^2\pi^2$ para $n = 3, 7, 11\ldots$

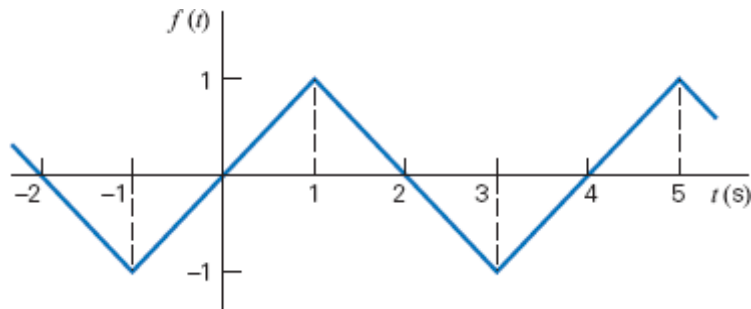



Figura P 15.3-9

P 15.3-10 Determine a série de Fourier do sinal periódico da Figura P 15.3-10.

Resposta:

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\text{sen } t + \frac{1}{3}\text{ sen } 3t + \frac{1}{5}\text{ sen } 5t + \ldots\right)$$

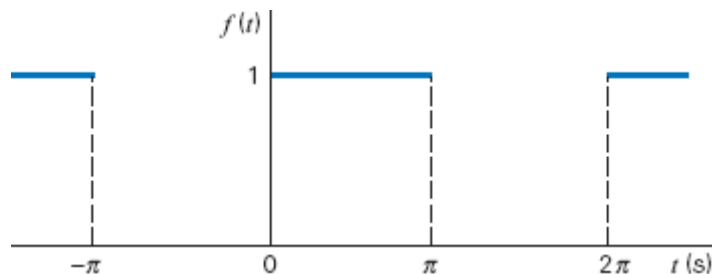



Figura P 15.3-10

Seção 15.5 Forma Exponencial da Série de Fourier

P 15.5-1 Determine a série de Fourier exponencial da função

$$f(t) = |A \text{ sen } (\pi t)|$$

cujo gráfico aparece na Figura P 15.5-1.

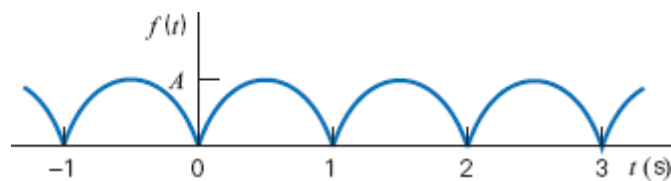



Figura P 15.5-1

P 15.5-2 Determine a série de Fourier exponencial da função $f(t)$ da Figura P 15.5-2.

Resposta: $f(t) = \frac{A}{2} + j\frac{A}{2\pi}\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{n=\infty} \frac{1}{n} e^{jn2\pi t/T}$

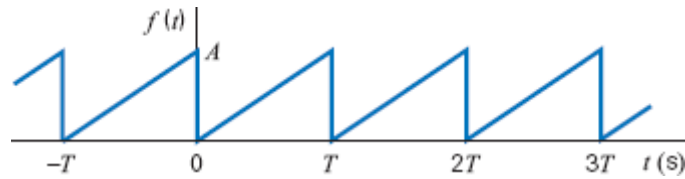



Figura P 15.5-2

P 15.5-3 Determine a série de Fourier exponencial da função $f(t)$ da Figura P 15.5-3.

Resposta: $\mathbf{C}_n = \left(\frac{Ad}{T}\right)\frac{\text{sen}\left(\frac{n\pi d}{T}\right)}{\frac{n\pi d}{T}}$

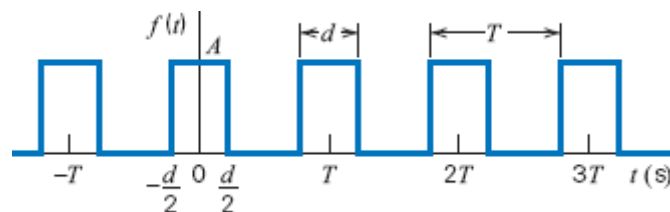



Figura P 15.5-3

P 15.5-4 Considere duas funções periódicas, $\hat{f}(t)$ e $f(t)$, que têm o mesmo período e estão relacionadas pela equação

$$\hat{f}(t) = af(t - t_d) + b$$

em que a, b e t_d são constantes reais. Sejam $\hat{C}_n$ os coeficientes da série exponencial de Fourier de $\hat{f}(t)$ e sejam C_n os coeficientes da série exponencial de Fourier de $f(t)$. Determine a relação entre $\hat{C}_n$ e C_n.

Resposta: $\hat{C}_0 = aC_0 + b$ e $\hat{C}_n = ae^{-jn\omega_0 t_d}C_n \quad n \neq 0$

P 15.5-5 Determine a série de Fourier exponencial da função de onda da Figura P 15.3-6.

P 15.5-6 Determine a série de Fourier exponencial da função de onda da Figura P 15.5-6.

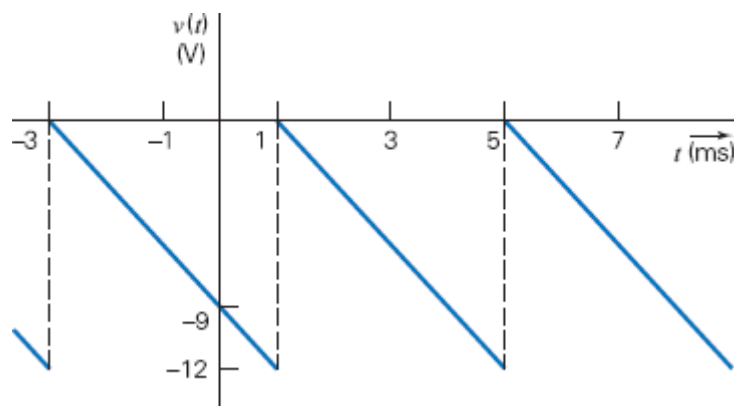



Figura P 15.5-6

P 15.5-7 Uma função de onda é formada por exponenciais crescentes e decrescentes com uma constante de tempo de 0,2 s e uma duração de 1 s, como mostra a Figura P 15.5-7. Determine a série de Fourier exponencial da função.

Resposta: $C_n = \dfrac{5}{(j\pi n)(5 + j\pi n)}$, $n = 1, 3, 5$

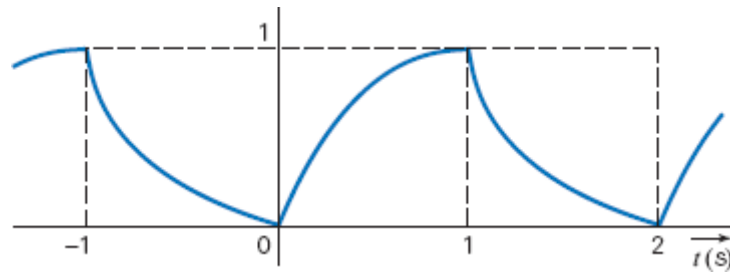



Figura P 15.5-7

Seção 15.6 O Espectro de Fourier

P 15.6-1 Determine a série de Fourier da forma de onda dente de serra da Figura P 15.6-1. Plote o espectro de Fourier de módulo e fase para os quatro primeiros termos da série.

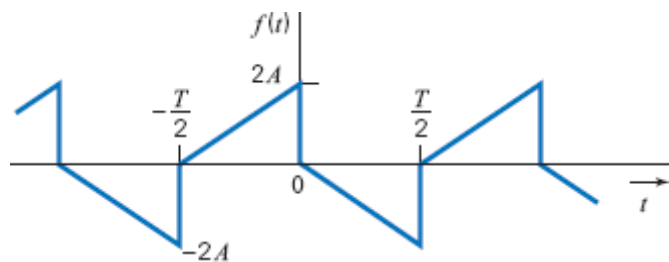



Figura P 15.6-1

P 15.6-2 A forma de onda da corrente de um reostato eletrônico, mostrada na Figura 15.16-1*c*, aparece novamente na Figura P 15.6-2. A forma de onda é uma parte da função A sen $\omega_0 t$. Determine a série de Fourier dessa forma de onda e plote o espectro de linhas de $|C_n|$ para os primeiros 10 termos.

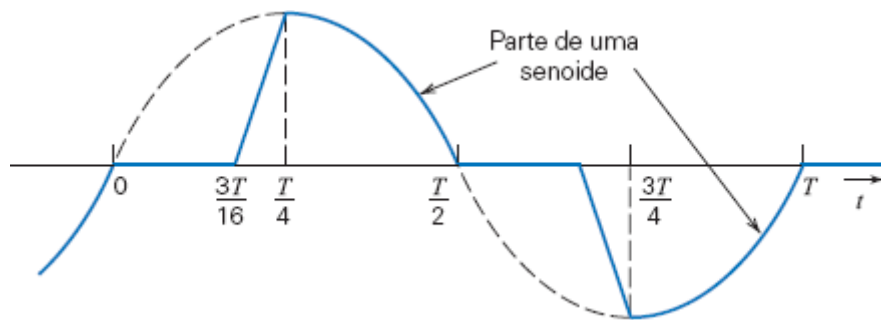



Figura P 15.6-2 Forma de onda da corrente de um reostato eletrônico.

P 15.6-3 A entrada de um filtro passa-baixas é

$$v_i(t) = 10 \cos t + 10 \cos 10t + 10 \cos 100t \text{ V}$$

A saída do filtro é a tensão $v_o(t)$. A função de transferência do filtro é

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_i(\omega)} = \frac{2}{\left(1 + j\dfrac{\omega}{5}\right)^2}$$

Plote o espectro de Fourier da entrada e da saída do filtro.

P 15.6-4 Plote o espectro de Fourier de módulo e fase da forma de onda da Figura P 15.6-4.

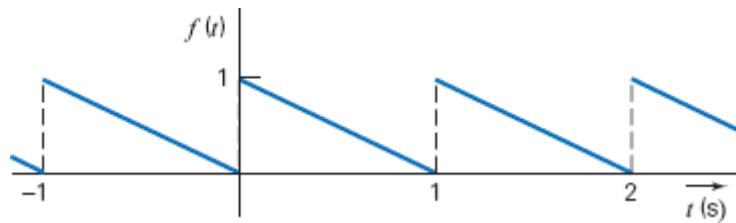



Figura P 15.6-4

Seção 15.7 Circuitos e a Série de Fourier

P 15.7-1 Determine a resposta $v_o(t)$ do circuito da Figura P 15.7-1 no regime estacionário. A entrada do circuito é a tensão $v_c(t)$ da Figura P 15.3-2.

Resposta:

$$v_o(t) = -6 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{240}{n\pi\sqrt{400 + n^2\pi^2}} \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{2}t - \left(n\frac{\pi}{2} + \tan^{-1}\left(\frac{n\pi}{20}\right)\right)\right)$$

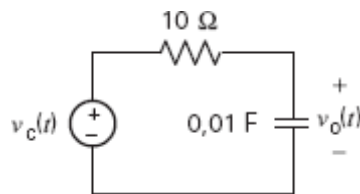



Figura P 15.7-1

P 15.7-2 Determine a resposta $v_o(t)$ do circuito da Figura P 15.7-2 no regime estacionário. A entrada do circuito é a tensão $v_b(t)$ da Figura P 15.3-4.

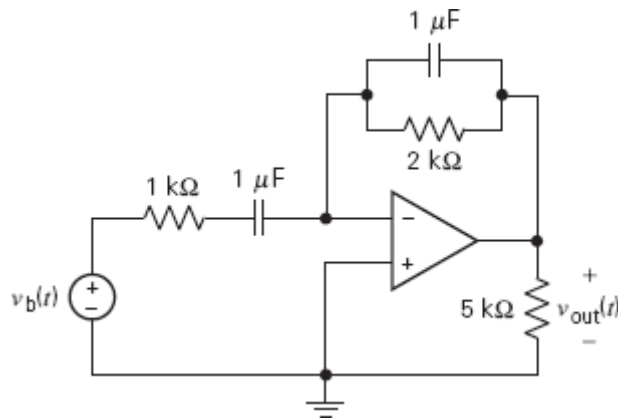



Figura P 15.7-2

P 15.7-3 A entrada do circuito da Figura P 15.7-3 é a tensão da fonte de tensão,

$$v_{in}(t) = 2 + 4\cos(100t) + 5\cos(400t + 45°)\text{ V}$$

e a saída é a tensão no resistor de 5 kΩ,

$$v_{out}(t) = -5 + 7{,}071\cos(100t + 135°) + c_4\cos(400t + \theta_4)\text{ V}$$

Determine o valor da resistência R, da capacitância C, do coeficiente c_4 e do ângulo de fase θ_4.

Resposta: $R = 25$ kΩ, $C = 0{,}4$ μF, $c_4 = 3{,}032$ V e $\theta_4 = 149°$

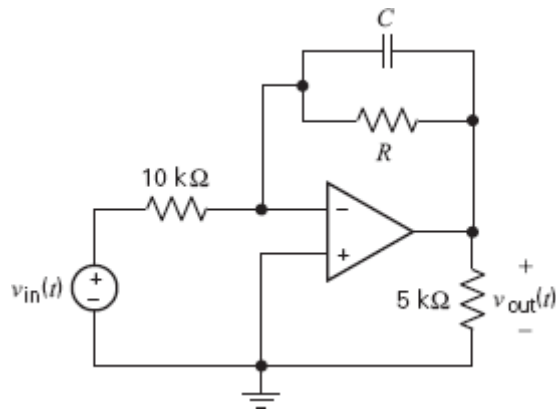



Figura P 15.7-3

P 15.7-4 A entrada de um circuito é a tensão

$$v_i\,(t) = 2 + 4\cos(25t) + 5\cos(100t + 45°)\text{ V}$$

e a saída é a tensão

$$v_o\,(t) = 5 + 7{,}071\cos(25t - 45°) + c_4\cos(\omega_4 t + \theta_4)\text{ V}$$

A função de transferência do circuito é

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_i(\omega)} = \frac{H_o}{1 + j\dfrac{\omega}{p}}$$

Determine o valor do ganho de CC H_o, do polo p, do coeficiente c_4 e do ângulo de fase θ_4.

Resposta: H_o = 2,5 V/V, p = 25 rad/s, c_4 = 3,032 V e θ_4 = –31°.

P 15.7-5 A entrada do circuito da Figura P 15.7-5 é a tensão da fonte de tensão,

$$v_i\,(t) = 6 + 4\cos(1000t) + 5\cos(3000t + 45°)\text{ V}$$

e a saída é a tensão no resistor de 500 Ω,

$$v_o\,(t) = 3{,}75 + 2{,}34\cos(1000t - 20{,}5°) + c_3\cos(3000t + \theta_3)\text{ V}$$

Determine o valor da resistência R, da capacitância C, do coeficiente c_3 e do ângulo de fase θ_3.

Resposta: R_1 = 300 Ω, C = 2 μF, c_3 = 2,076 V e θ_3 = –3,4°.

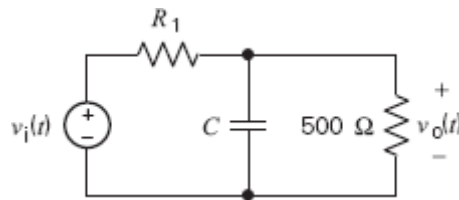



Figura P 15.7-5

P 15.7-6 Determine a resposta $v_o(t)$ do circuito da Figura P 15.7-6 no regime estacionário se a tensão de entrada $v(t)$ é a que aparece na Figura P 15.5-6.

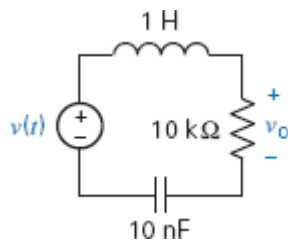



Figura P 15.7-6 Circuito RLC.

P 15.7-7 Determine o valor da tensão $v_o(t)$ no instante t = 4 ms se $v_{in}(t)$ é a tensão da Figura P 15.7-7*a* e o circuito é o da Figura P 15.7-7*b*.

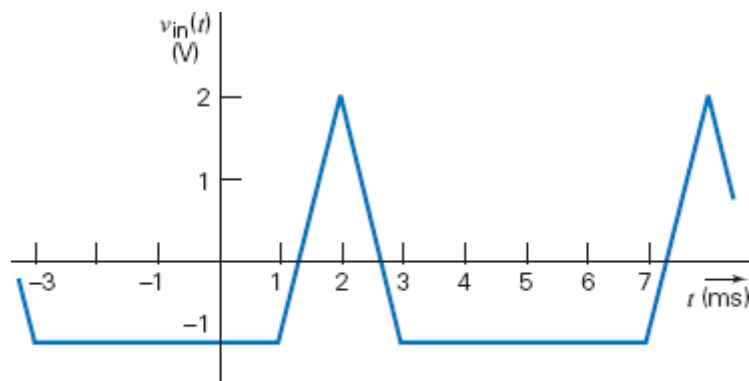
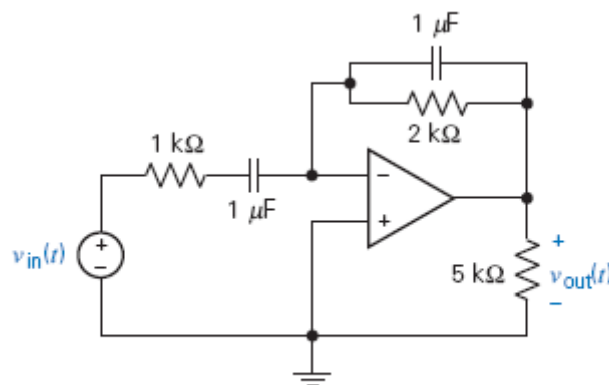



Figura P 15.7-7

Seção 15.9 A Transformada de Fourier

P 15.9-1 Determine a transformada de Fourier da função

$$f(t) = -u(-t) + u(t)$$

que está representada graficamente na Figura P 15.9-1. Essa função é chamada de *signum*.

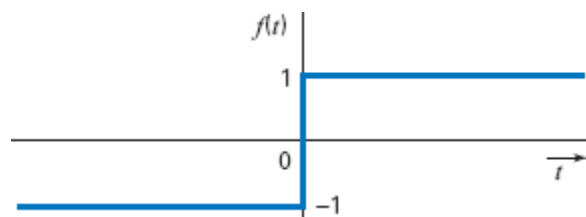



Figura P 15.9-1

P 15.9-2 Determine a transformada de Fourier da função $f(t) = Ae^{-at}\, u(t)$ para $a > 0$.

Resposta: $F(\omega) = \dfrac{A}{a + j\omega}$

P 15.9-3 Determine a transformada de Fourier da forma de onda da Figura P 15.9-3.

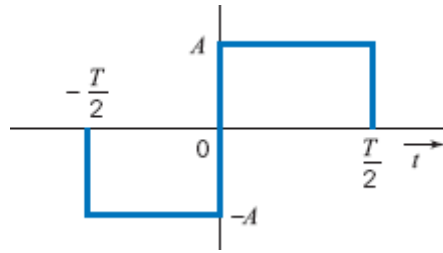



Figura P 15.9-3

P 15.9-4 Determine a transformada de Fourier da função $f(t) = 10 \cos 50t$.

Resposta: $F(\omega) = 10\pi\delta(\omega - 50) + 10\pi\delta(\omega + 50)$

P 15.9-5 Determine a transformada de Fourier do pulso da Figura P 15.9-5.

Resposta: $F(j\omega) = \frac{2}{\omega}(\text{sen}\,\omega - \text{sen}\,2\omega) + \frac{j2}{\omega}(\cos\omega - \cos 2\omega)$

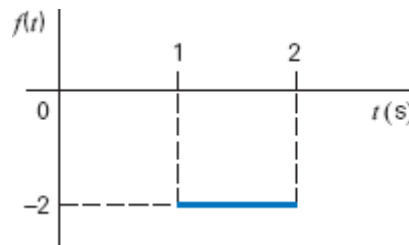



Figura P 15.9-5

P 15.9-6 Determine a transformada de Fourier da função $f(t)$ cujo valor é At/B para $0 \le t \le B$ e 0 para qualquer outro valor de t.

Resposta: $F(j\omega) = \dfrac{A}{B}\left[\dfrac{-B}{j\omega}e^{-j\omega B} + \dfrac{1}{\omega^2}e^{-j\omega B} - \dfrac{1}{\omega^2}\right]$

P 15.9-7 Determine a transformada de Fourier da forma de onda da Figura P 15.9-7.

Resposta: $F(j\omega) = \dfrac{2}{\omega}(\text{sen}\,2\omega - \text{sen}\,\omega)$

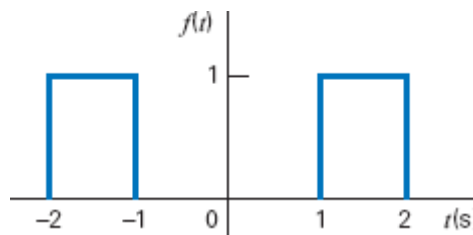



Figura P 15.9-7

Seção 15.12 Convolução e Resposta de um Circuito

P 15.12-1 Determine a corrente $i(t)$ no circuito da Figura P 15.12-1 se $i_s(t)$ é uma função signum dada por

$$i_s(t) = \begin{cases} +\ 40\text{ A} & t > 0 \\ -40\text{ A} & t < 0 \end{cases}$$

Plote $i(t)$.

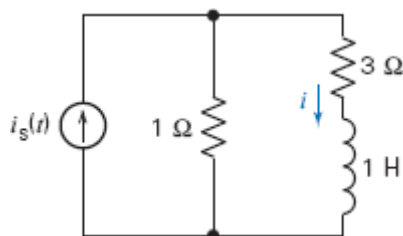



Figura P 15.12-1

P 15.12-2 Repita o Problema 15.12-1 para $i_s = 100 \cos 3t$ A.

P 15.12-3 A fonte de tensão da Figura P 15.12-3 é $v(t) = 10 \cos 2t$ para qualquer valor de t. Calcule $i(t)$ usando a transformada de Fourier.

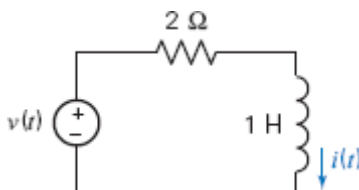



Figura P 15.12-3

P 15.12-4 Use a transformada de Fourier para determinar a tensão de saída $v_o(t)$ no circuito da Figura P 15.12-4 para $v(t) = e^t u(-t) + u(t)$ V.

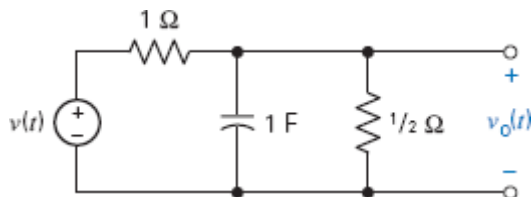



Figura P 15.12-4

P 15.12-5 A fonte de tensão do circuito da Figura P 15.12-5 é $v(t) = 15e^{-5t}$ V. Determine a resistência R para que a energia do sinal de saída seja dois terços da energia do sinal de entrada.

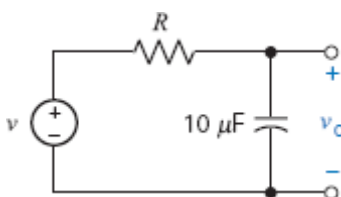



Figura P 15.12-5

P 15.12-6 O pulso da Figura P 15.12-6*a* é o sinal da fonte $v_s(t)$ do circuito da Figura P 15.12-6*b*. Determine a tensão de saída, $v_o(t)$, usando a transformada de Fourier.

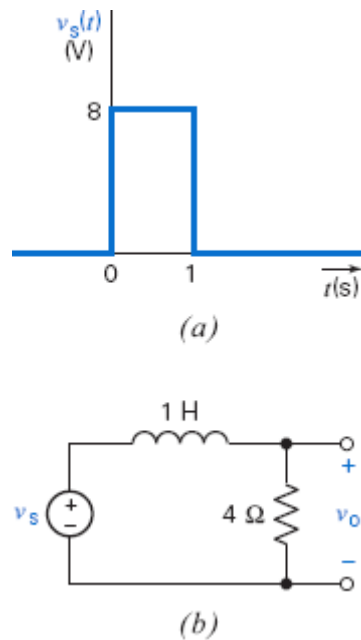



Figura P 15.12-6

Seção 15.14 Como Podemos Testar . . . ?

P 15.14-1 A série de Fourier da função $v_{in}(t)$ da Figura P 15.7-7 é dada como

$$v_{in}(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{18}{n^2\pi}\left(1 - \cos\frac{n\pi}{3}\right)\cos\left(n\frac{\pi}{3}t - n\frac{2\pi}{3}\right)\text{V}$$

Essa série de Fourier está correta?

Sugestão: Verifique o valor médio e a frequência fundamental.

Resposta: A série de Fourier apresentada não está correta.

P 15.14-2 A série de Fourier da função $v(t)$ da Figura P 15.14-2 é dada como

$$v(t) = 9 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{40}{n\pi}\left(\text{sen}\,\frac{n\pi}{5}\right)\cos\left(n\frac{\pi}{5}t - n\frac{\pi}{5}\right)\text{ V}$$

Esta série de Fourier está correta?

Sugestão: Verifique o valor médio e a frequência fundamental.

Resposta: A série de Fourier apresentada não está correta.

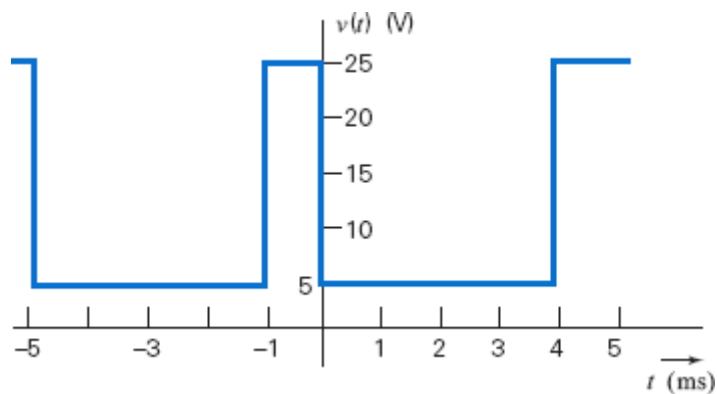



Figura P 15.14-2

P 15.14-3 A série de Fourier da função $v(t)$ da Figura PS 15-2, mais adiante, é dada como

$$v(t) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\pi}\cos(2n\pi t)\ \text{V}$$

Essa série de Fourier está correta?

Sugestão: Verifique o valor médio, a frequência fundamental e a simetria.

Resposta: A série de Fourier apresentada não está correta.

Problemas com o PSpice

PS 15-1 Use o programa PSpice para determinar os coeficientes de Fourier da função $v(t)$ da Figura PS 15-1.

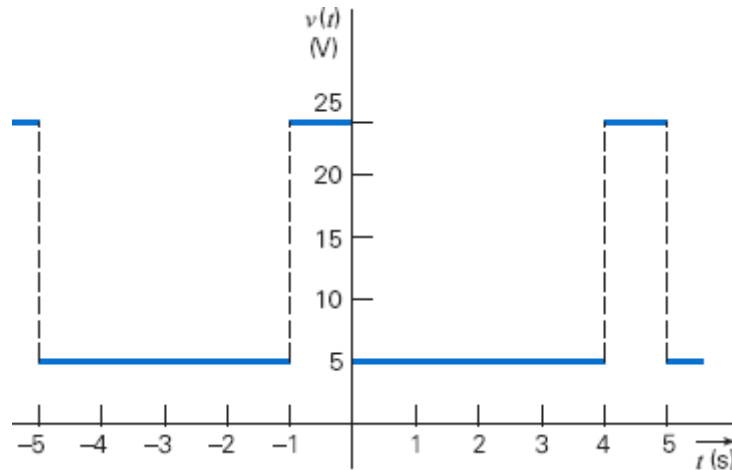



Figura PS 15-1

PS 15-2 Use o programa PSpice para determinar os coeficientes de Fourier da função $v(t)$ da Figura PS 15-2.

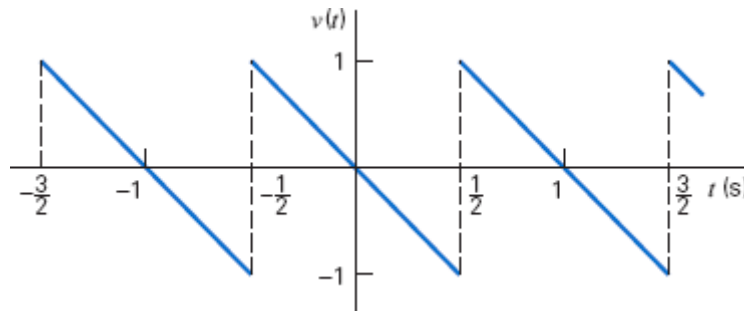



Figura PS 15-2

Problemas de Projeto

PP 15-1 A forma de onda periódica da Figura PP 15-1*a* é o sinal de entrada do circuito da Figura PP 15-1*b*. Escolha o valor da capacitância C para que o valor absoluto do terceiro harmônico de $v_2(t)$ seja menor que 1,4 V e maior que 1,3 V. Escreva a equação que descreve o terceiro harmônico de $v_2(t)$ para o valor escolhido de C.

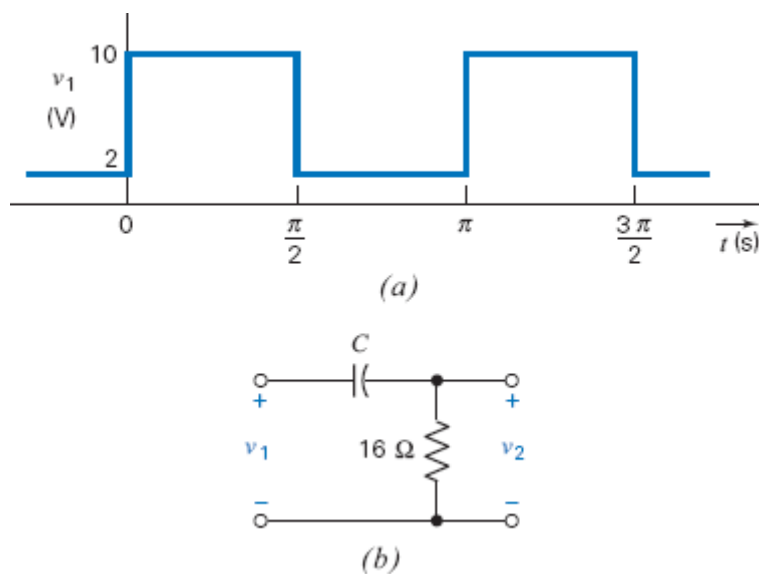



Figura PP 15-1

PP 15-2 Uma fonte de alimentação de CC de laboratório utiliza um circuito não linear para converter a tensão senoidal obtida em uma tomada de parede em tensão contínua. A tensão da tomada é A sen $2\pi f_0 t$, em que $A = 160$ V e $f_0 = 60$ Hz. A tensão retificada é, portanto, $v_s = |A \text{ sen } 2\pi f_0 t|$. Determine o valor da indutância L no circuito de filtro da Figura PP 15-2 para que a amplitude de nenhum harmônico da tensão de saída (ondulação) seja maior que 4% da componente constante.

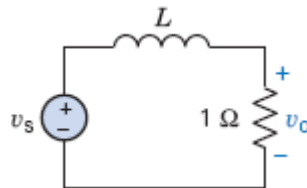



Figura PP 15-2 Circuito *RL*.

PP 15-3 A Figura PP 15-3 mostra um filtro passa-baixas. A entrada, v_s, é uma senoide retificada em meia-onda com $\omega_0 = 800\pi$ (linha 5 da Tabela 15.4-1). Escolha o valor de L e C para que o valor de pico do primeiro harmônico seja 1/20 da componente constante da tensão de saída, v_o.

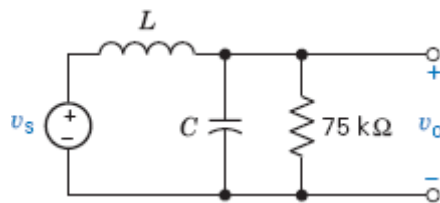



Figura PP 15-3 Circuito *RLC*.

* A rigor, a frequência ω_0 deveria ser chamada de frequência angular fundamental, mas, neste livro, a palavra “angular” foi omitida pelo autor, o que não prejudica a compreensão do texto. (N.T.)

* No PSpice, como na maioria dos programas desenvolvidos em países de língua inglesa, deve ser usado um ponto em vez de vírgula para separar a parte inteira da parte decimal. (N.T.)

1. Para uma discussão das expansões em frações parciais, veja a Seção 14.4 do Capítulo 14.

CAPÍTULO 16 Filtros Elétricos

NESTE CAPÍTULO

16.1 *Introdução*

Os circuitos lineares podem ser representados por funções de transferência. Em um capítulo anterior, aprendemos a analisar um circuito para determinar sua função de transferência. Neste capítulo, vamos aprender a projetar um circuito para que apresente uma função de transferência específica. Não existe uma solução única para esse problema de projeto; vários circuitos podem ser representados pela mesma função de transferência. Uma estratégia muito usada consiste em projetar o circuito como uma associação em cascata de filtros de segunda ordem. Essa é a estratégia que será adotada neste capítulo.

O problema de projetar circuitos que possuam uma função de transferência especificada de antemão é chamado de projeto de filtros. Neste capítulo, vamos definir os termos usados no projeto de filtros, descrever os filtros de segunda ordem que serão usados como elementos e, finamente, mostrar como os filtros de segunda ordem podem ser ligados para produzir um circuito com a função de transferência desejada.

16.2 *O Filtro Elétrico*

O conceito de filtro é muito antigo na história da humanidade. Filtros de papel, por exemplo, eram usados para remover sujeira da água e do vinho. Materiais porosos, como o papel, funcionam muito bem como filtros mecânicos. Os filtros mecânicos são empregados até hoje para remover substâncias indesejáveis, como partículas em suspensão em líquidos. Analogamente, filtros elétricos podem ser usados para eliminar componentes indesejáveis, como ruídos em sinais elétricos.

Os filtros elétricos foram inventados em 1915, de forma independente, por George Campbell nos Estados Unidos e K. W. Wagner na Alemanha. Com a crescente popularidade do rádio no período de 1910 a 1920, surgiu a necessidade de reduzir os efeitos dos ruídos de estática nos receptores. Quando as transmissões regulares de rádio começaram, na década de 1920, Campbell e outros desenvolveram os filtros *RLC*, que utilizam indutores, capacitores e resistores. Esses filtros são chamados *filtros passivos* porque contêm apenas

componentes passivos. A teoria necessária para projetar filtros passivos foi desenvolvida na década de 1930 por S. Darlington, S. Butterworth e E. A. Guillemin. O filtro passa-baixas de Butterworth foi proposto na revista *Wireless Engineering* em 1930 (Butterworth, 1930).

Quando um filtro inclui elementos ativos, como amplificadores operacionais, é chamado de *filtro ativo*. Como os indutores são relativamente grandes e pesados, os filtros ativos normalmente não utilizam indutores, sendo constituídos, por exemplo, por amplificadores operacionais, resistores e capacitores. Os primeiros filtros ativos *RC* foram desenvolvidos durante a Segunda Guerra Mundial e estão documentados em um artigo clássico de R. P. Sallen e E. L. Key (Sallen e Key, 1955).

16.3 *Filtros*

Vamos começar pelo **filtro ideal**. Suponha, por conveniência, que tanto a entrada como a saída do filtro sejam tensões. Um filtro ideal separa a tensão de entrada em duas partes. Uma parte é transferida, sem alterações, para a saída; a outra é eliminada. Em outras palavras, a saída de um filtro ideal é uma cópia exata de uma parte da entrada do filtro.

Esse é o uso comum da palavra filtro. Esperamos, por exemplo, que o filtro de óleo de um automóvel receba uma mistura de óleo e sujeira e a separe em duas partes: óleo e sujeira. Idealmente, o filtro de óleo deixa passar para a saída uma parte da entrada, o óleo, sem que sofra alterações. A outra parte da entrada, a sujeira, é bloqueada; o papel do filtro de óleo é impedir que a sujeira chegue à saída.

Para compreender como funciona um filtro elétrico, considere uma tensão de entrada da forma

$$v_\mathrm{i}(t) = \cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t + \cos \omega_3 t$$

A função $v_\mathrm{i}(t)$ é a soma de três senoides de frequências diferentes. (Tensões periódicas não senoidais são representadas dessa forma quando se usa uma série de Fourier.) Um filtro elétrico separa a entrada em duas partes, usando a frequência como critério de separação. Existem várias formas de separar uma entrada em duas partes e, consequentemente, vários tipos de filtro. A Tabela 16.3-1 mostra os tipos mais comuns. Considere o filtro passa-baixas, que aparece na primeira linha da tabela. A função de transferência de um filtro passa-baixas ideal é

$$\mathbf{H}(\omega) = \begin{cases} 1\,\underline{/0^\circ} & \omega < \omega_c \\ 0 & \omega > \omega_c \end{cases} \qquad (16.3\text{-}1)$$

em que a frequência ω_c é chamada de **frequência de corte**. A frequência de corte separa a faixa de frequências $\omega < \omega_\mathrm{c}$, chamada no caso de **banda passante**, da faixa de frequências $\omega > \omega_\mathrm{c}$, que recebe o nome de **banda de rejeição**. Os componentes da entrada cuja frequência está no interior da banda passante experimentam ganho unitário e deslocamento de fase zero e, portanto, chegam à saída do filtro sem sofrer alterações. Os componentes da entrada cuja frequência está no interior da banda de rejeição experimentam ganho zero, e, portanto, são eliminados ou rejeitados. Um filtro ideal separa a entrada em duas partes: os componentes cujas frequências estão na banda passante e os componentes cujas frequências estão na banda de rejeição. A saída do filtro contém apenas as componentes cujas frequências estão na banda passante.

Tabela 16.3-1 Filtros Ideais

Tabela 16.3-2 Denominadores de Filtros Passa-Baixas de Butterworth com uma Frequência de Corte$_c$ = 1 rad/s

ORDEM	DENOMINADOR, $D(s)$
1	$s+1$
2	$s^2+1{,}414s+1$
3	$(s+1)(s^2+s+1)$
4	$(s^2+0{,}765s+1)(s^2+1{,}848s+1)$
5	$(s+1)(s^2+0{,}618s+1)(s^2+1{,}618s+1)$
6	$(s^2+0{,}518s+1)(s^2+1{,}414s+1)(s^2+1{,}932s+1)$
7	$(s+1)(s^2+0{,}445s+1)(s^2+1{,}247s+1)(s^2+1{,}802s+1)$
8	$(s^2+0{,}390s+1)(s^2+1{,}111s+1)(s^2+1{,}663s+1)(s^2+1{,}962s+1)$
9	$(s+1)(s^2+0{,}347s+1)(s^2+s+1)(s^2+1{,}532s+1)(s2+1{,}879s+1)$
10	$(s^2+0{,}313s+1)(s2+0{,}908s+1)(s2+1{,}414s+1)(s^2+1{,}782s+1)(s^2+1{,}975s+1)$

Infelizmente, não existem filtros ideais. (Esse fato pode ser demonstrado usando a transformada inversa de Laplace da função de transferência para calcular a resposta do filtro ideal a um impulso. Os cálculos

mostram que a resposta teria que começar antes do impulso, ou seja, que a saída teria que ocorrer antes da entrada. Como isso não é possível, não existem filtros ideais.) Os filtros elétricos são circuitos que se comportam aproximadamente como filtros ideais. Os filtros separam a entrada em duas partes, as componentes cujas frequências estão na banda passante e as componentes cujas frequências estão na banda de rejeição. As componentes cujas frequências estão na banda passante experimentam um ganho de aproximadamente 1 e um deslocamento de fase de aproximadamente 0. Essas componentes são transferidas para a saída, mas sofrem pequenas alterações. As componentes cujas frequências estão na banda de rejeição experimentam um ganho que, embora pequeno, não é exatamente 0. Por essa razão, um resíduo dessas componentes aparece no sinal de saída do filtro.

Os filtros de Butterworth têm uma resposta de frequência que se aproxima da resposta de frequência de um filtro ideal. As funções de transferência dos filtros passa-baixas de Butterworth são dadas por

$$H_L(s) = \frac{\pm 1}{D(s)} \tag{16.3-2}$$

onde o polinômio $D(s)$ depende da frequência de corte e da ordem do filtro. Esses polinômios, conhecidos como polinômios de Butterworth, aparecem na Tabela 16.3-2 para ω_c = 1 rad/s. Existe um compromisso envolvendo a ordem do filtro. Quanto maior a ordem, mais a resposta de frequência do filtro se aproxima da resposta de frequência de um filtro ideal; isso é bom. Quanto maior a ordem do filtro, mais complicado se torna o circuito do filtro; isso não é bom.

EXEMPLO 16.3-1 Ordem do Filtro

Estamos interessados em projetar um filtro passa-baixas que se aproxime de um filtro passa-baixas ideal com ω_c = 1 rad/s. Compare o filtro passa-baixas de Butterworth de quarta ordem com o filtro passa-baixas de Butterworth de oitava ordem.

Solução

De acordo com a quarta linha da Tabela 16.3-2, a função de transferência do filtro de Butterworth de quarta ordem é

$$H_4(s) = \frac{1}{(s^2 + 0{,}765s + 1)(s^2 + 1{,}848s + 1)} = \frac{1}{(s^2 + 0{,}765s + 1)} \times \frac{1}{(s^2 + 1{,}848s + 1)}$$

De acordo com a oitava linha da Tabela 16.3-2, a função de transferência do filtro de Butterworth de oitava ordem é

$$H_8(s) = \frac{1}{(s^2 + 0{,}390s + 1)(s^2 + 1{,}111s + 1)(s^2 + 1{,}663s + 1)(s^2 + 1{,}962s + 1)}$$
$$= \frac{1}{(s^2 + 0{,}390s + 1)} \times \frac{1}{(s^2 + 1{,}111s + 1)} \times \frac{1}{(s^2 + 1{,}663s + 1)} \times \frac{1}{(s^2 + 1{,}962s + 1)}$$

A Figura 16.3-1 mostra a resposta de frequência dos dois filtros. Os dois filtros têm ganho unitário para $\omega \ll 1$ e ganho zero para $\omega \gg 1$. Assim, ambos se aproximam de um filtro passa-baixas ideal com ω_c = 1 rad/s. O filtro de oitava ordem realiza a transição da banda passante para a banda de rejeição de modo mais abrupto e por isso constitui uma aproximação melhor do filtro passa-baixas ideal.

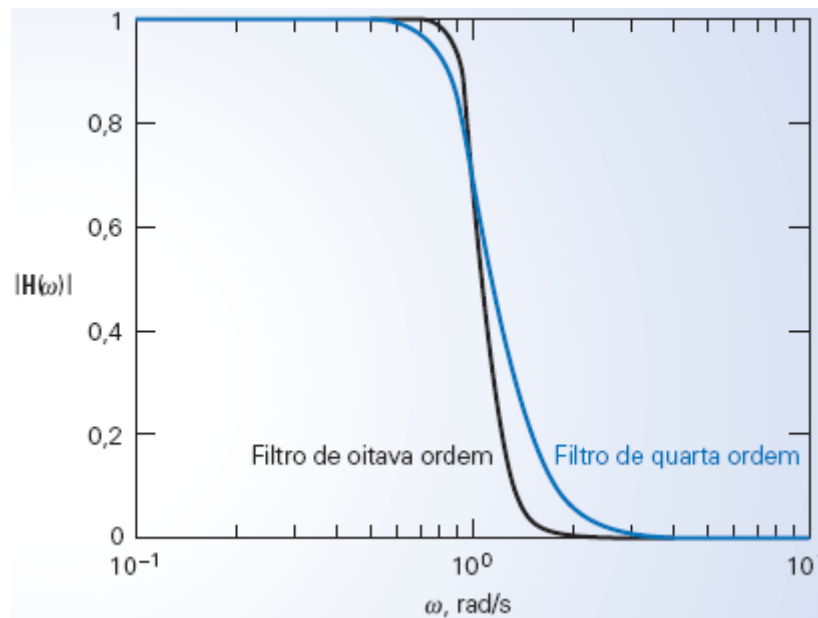



FIGURA 16.3-1 Comparação das respostas de frequência de filtros passa-baixas de Butterworth de quarta ordem e de oitava ordem com $\omega_c = 1$ rad/s.

A função de transferência do filtro de quarta ordem é expressa como o produto de duas funções de transferência de segunda ordem, enquanto a função de transferência do filtro de oitava ordem é expressa como o produto de quatro funções de transferência de segunda ordem. Cada uma dessas funções de transferência de segunda ordem deve ser implementada por um circuito de segunda ordem. Como todos esses circuitos de segunda ordem são muito parecidos, é razoável esperar que o circuito de oitava ordem seja aproximadamente duas vezes maior que o circuito de quarta ordem. Isso significa um número de componentes duas vezes maior, um consumo de energia duas vezes maior, um custo de montagem duas vezes maior, um espaço duas vezes maior e assim por diante.

O filtro de oitava ordem funciona melhor, mas é mais caro. Em algumas aplicações, o melhor desempenho do filtro de oitava ordem justifica o custo adicional, mas isso nem sempre acontece.

EXEMPLO 16.3-2 Mudança de Escala de Frequência

Determine a função de transferência de um filtro passa-baixas de Butterworth de terceira ordem com uma frequência de corte de 500 rad/s.

Solução

De acordo com a Equação 16.3-2 e a Tabela 16.3-2, a função de transferência de um filtro passa-baixas de Butterworth de terceira ordem com uma frequência de corte de 1 rad/s é

$$H_n(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+s+1)}$$

Uma técnica conhecida como **mudança de escala de frequência** pode ser usada para mudar a frequência de corte para $\omega_c = 500$ rad/s. Para isso, basta substituir s por s/ω_c na função de transferência. O resultado é o seguinte:

$$H(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_c}+1\right)\left(\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^2+\frac{s}{\omega_c}+1\right)}$$

Para $\omega_c = 500$ rad/s, temos

$$H(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{500}+1\right)\left(\left(\frac{s}{500}\right)^2+\frac{s}{500}+1\right)}$$
$$= \frac{500^3}{(s+500)(s^2+500s+500^2)}$$
$$= \frac{125.000.000}{(s+500)(s^2+500s+250.000)}$$

$H(s)$ é a função de transferência de um filtro passa-baixas de Butterworth com uma frequência de corte de 500 rad/s.

EXERCÍCIO 16.3-1 Determine a função de transferência de um filtro passa-baixas de Butterworth de primeira ordem com uma frequência de corte de 1250 rad/s.

Resposta: $H(s) = \dfrac{1}{\dfrac{s}{1250}+1} = \dfrac{1250}{s+1250}$

16.4 Filtros de Segunda Ordem

Os filtros de segunda ordem são importantes por duas razões. Em primeiro lugar, constituem uma aproximação barata dos filtros ideais. Em segundo lugar, são usados como elementos básicos para montar filtros mais sofisticados, que reproduzem com maior fidelidade o comportamento dos filtros ideais.

A resposta de frequência de um filtro de segunda ordem depende de três parâmetros: o ganho k, a frequência de canto ω_0 e o fator de qualidade Q. No projeto do filtro, os valores dos componentes do circuito são escolhidos para que o circuito apresente os valores desejados de k, ω_0 e Q.

A função de transferência de um filtro passa-baixas de segunda ordem é da forma

$$H_B(s) = \frac{k{\omega_0}^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + {\omega_0}^2} \tag{16.4-1}$$

Se o circuito é estável, isto é, se $\omega_0 > 0$ e $Q > 0$, podemos obter a função de transferência no regime estacionário fazendo $s = j\omega$ na Eq. 16.4-1, o que nos dá

$$\mathbf{H}_B(\omega) = \frac{k{\omega_0}^2}{-\omega^2 + j\frac{\omega_0}{Q}\omega + {\omega_0}^2}$$

O ganho do filtro é dado por

$$|\mathbf{H}_B(\omega)| = \frac{k{\omega_0}^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\left(\frac{\omega_0}{Q}\omega\right)^2}} \cong \begin{cases} k & \omega \ll \omega_0 \\ 0 & \omega \gg \omega_0 \end{cases}$$

Se $k = 1$, a resposta de frequência se aproxima da resposta de frequência de um filtro passa-baixas ideal com uma frequência de corte $\omega_c = \omega_0$. Se $k \neq 1$, o filtro passa-baixas se aproxima de um filtro passa-baixas ideal combinado com um amplificador de ganho k. O fator de qualidade Q controla a forma da resposta de frequência na transição da banda passante para a banda de rejeição. A Figura 16.4-1 mostra a resposta de

frequência de um filtro passa-baixas de segunda ordem (com $k = 1$ e $\omega_c = \omega_0 = 1$) para vários valores de Q. Para o filtro de Butterworth de segunda ordem, $Q = 0{,}707$.

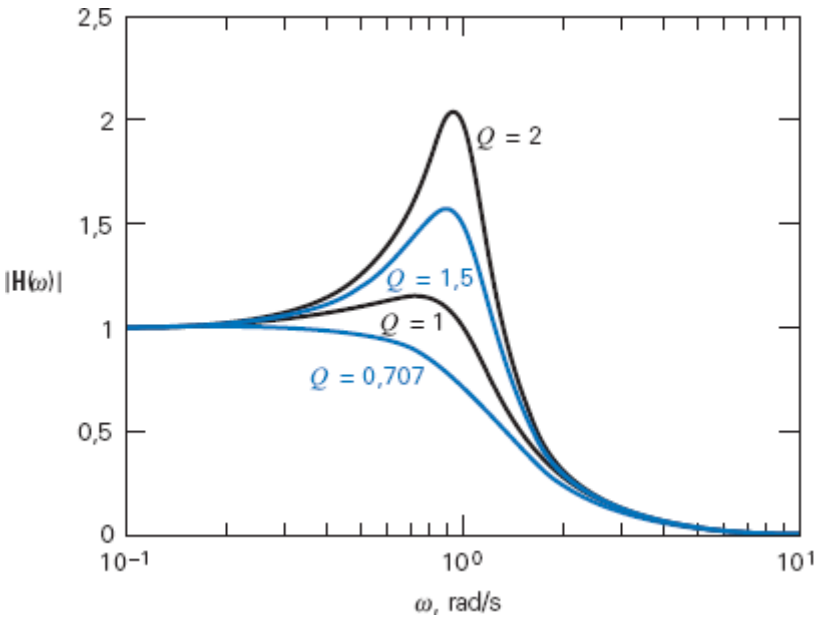



FIGURA 16.4-1 Respostas de frequência de filtros passa-baixas de segunda ordem com quatro valores diferentes de Q ($\omega_c = 1$ rad/s).

Tabela 16.4-1 Filtros *RLC* de Segunda Ordem

TIPO DE FILTRO	CIRCUITO	FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA	EQUAÇÕES DE PROJETO
Passa-baixas		$H(s) = \dfrac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$, $k = 1$
Passa-altas		$H(s) = \dfrac{s^2}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$, $k = 1$
De banda passante		$H(s) = \dfrac{\frac{R}{L}s}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$, $k = 1$
Notch		$H(s) = \dfrac{s^2 + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$, $k = 1$

A Tabela 16.4-1 mostra alguns circuitos *RLC* que podem ser usados como filtros de segunda ordem. Considere o filtro passa-baixas que aparece na primeira linha da tabela. A função de transferência do circuito é

$$H(s) = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \qquad (16.4\text{-}2)$$

A relação entre os parâmetros R, L e C do circuito e os parâmetros k, ω_0 e Q do filtro pode ser obtida comparando a Eq. 16.4-2 com a Eq. 16.4-1. Em primeiro lugar, comparamos os termos independentes de s dos dois denominadores para constatar que a frequência de corte do filtro é dada por

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Em seguida, comparamos os coeficientes de s nos denominadores e concluímos que

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}$$

Substituindo ω_0 por seu valor em termos de L e C e explicitando Q, obtemos

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Finalmente, comparando os numeradores, obtemos

$$k{\omega_0}^2 = \frac{1}{LC}$$

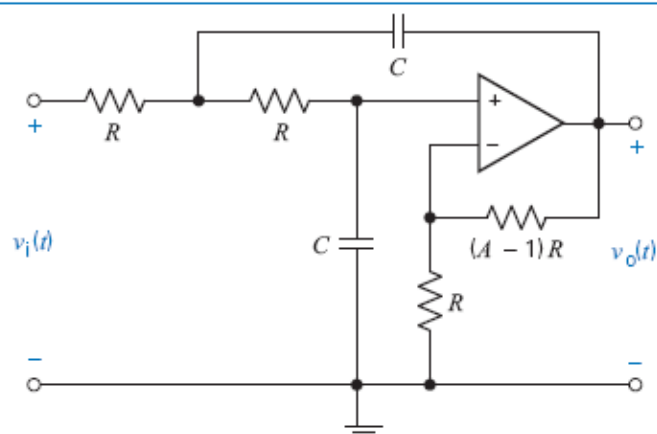
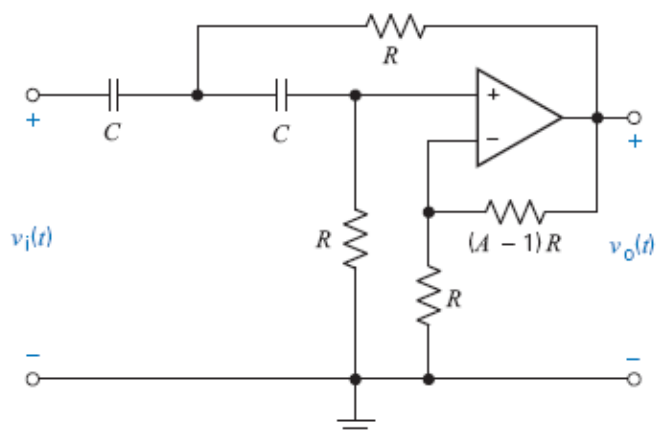
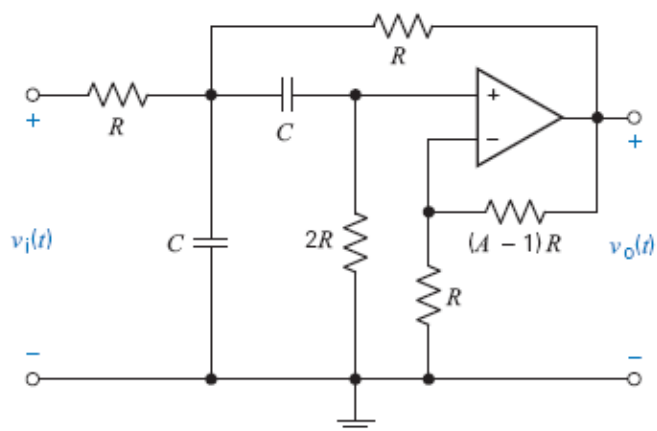
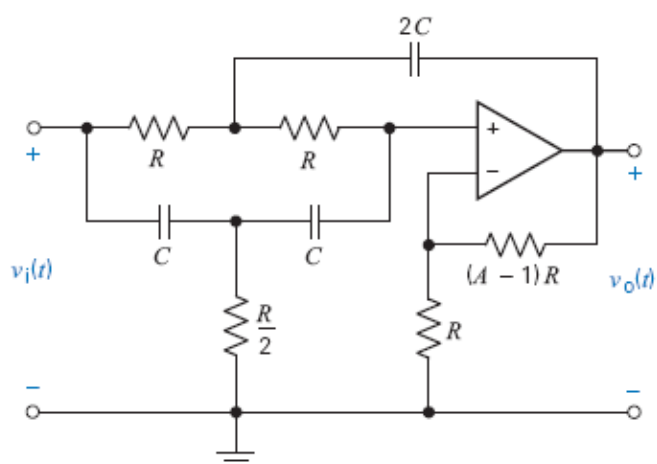
o que significa que o ganho de CC é

$$k = 1$$

Observe que ω_0 e Q são determinados pelos valores de R, L e C, mas k é sempre 1.

Muitos circuitos diferentes podem ser usados para construir filtros de segunda ordem. Um dos mais comuns é o chamado filtro de Sallen-Key. As informações necessárias para construir um filtro de Sallen-Key estão na Tabela 16.4-2.

Tabela 16.4-2 Filtros de Sallen-Key

TIPO DE FILTRO	CIRCUITO	EQUAÇÕES DE PROJETO
Passa-baixas		$\omega_0 = \frac{1}{RC}$ $Q = \frac{1}{3-A}$ $k = A$
Passa-altas		$\omega_0 = \frac{1}{RC}$ $Q = \frac{1}{3-A}$ $k = A$
De banda passante		$\omega_0 = \frac{1}{RC}$ $Q = \frac{1}{3-A}$ $k = AQ$
Notch		$\omega_0 = \frac{1}{RC}$ $Q = \frac{1}{4-2A}$ $k = A$

EXEMPLO 16.4-1 Filtro Passa-baixas RLC

Projete um filtro passa-baixas de Butterworth de segunda ordem com uma frequência de corte de 1000 Hz.

Solução

Nos filtros de Butterworth de segunda ordem, $Q = 1/\sqrt{2} = 0{,}707$. A frequência de canto é igual à frequência de corte, ou seja,

$$\omega_0 = \omega_c = 2\pi \cdot 1000 = 6283 \text{ rad/s}$$

O circuito *RLC* que aparece na primeira linha da Tabela 16.4-1 pode ser usado para projetar o filtro pedido. As equações necessárias para determinar os valores dos componentes são as seguintes:

$$\frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0 = 6283 \text{ rad/s}$$

e

$$\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

A terceira propriedade dos filtros de Butterworth é que $k = 1$. Essa última condição não afeta os valores de R, L e C. Como temos duas equações com três incógnitas, a solução não é única. Uma forma de prosseguir é escolher um valor conveniente para um dos elementos do circuito, como $C = 0{,}1\ \mu\text{F}$, e calcular o valor dos outros componentes do circuito,

$$L = 1/(\omega 0^2 C) = 0{,}253 \text{ H}$$

e

$$R = \sqrt{\frac{2L}{C}} = 2251\ \Omega$$

Se a solução for satisfatória, o projeto do filtro estará completo. Por outro lado, se a indutância for grande demais,$L = 1000$ H, digamos, ou se a resistência for muito pequena, como $R = 0{,}03\ \Omega$, será difícil conseguir os componentes para montar o filtro. Nesse caso, é melhor escolher outro valor para C e tornar a calcular os valores de L e R. No caso que estamos analisando, os valores dos três componentes são satisfatórios e podemos apresentar como solução o circuito da primeira linha da Tabela 16.4-1 com $C = 0{,}1\ \mu\text{F}$, $L = 0{,}253$ H e $R = 2251\ \Omega$.

EXEMPLO 16.4-2 Filtro de Banda Passante de Sallen-Key

Projete um filtro de banda passante de Sallen-Key de segunda ordem com uma frequência central de 500 Hz e uma banda passante de 100 Hz.

Solução

A função de transferência do filtro de banda passante de segunda ordem é

$$H(s) = \frac{k\dfrac{\omega_0}{Q}s}{s^2 + \dfrac{\omega_0}{Q}s + {\omega_0}^2}$$

Fazendo $s = j\omega$, obtemos

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{jk\dfrac{\omega_0}{Q}\omega}{{\omega_0}^2 - \omega^2 + j\dfrac{\omega_0}{Q}\omega}$$

Dividindo o numerador o denominador por $j\dfrac{\omega_0}{Q}\omega$, temos:

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{k}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

Encontramos funções semelhantes no Capítulo 13, quando estudamos os circuitos ressonantes. O ganho, $|\mathbf{H}(\omega)|$, é máximo na frequência de canto, ω_0. No caso desta função de transferência, ω_0 também é chamada de frequência central e de frequência de ressonância. O ganho para a frequência central é

$$|\mathbf{H}(\omega_0)| = k$$

Duas frequências, ω_1 e ω_2, são definidas pela seguinte propriedade:

$$|\mathbf{H}(\omega_1)| = |\mathbf{H}(\omega_2)| = \frac{k}{\sqrt{2}}$$

Essas frequências são chamadas de *frequências de meia potência* ou *frequências de 3 dB*. As frequências de meia potência são dadas por

$$\omega_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{2Q}\right)^2 + {\omega_0}^2} \quad \text{e} \quad \omega_2 = \frac{\omega_0}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{2Q}\right)^2 + {\omega_0}^2}$$

A banda passante do filtro é calculada a partir das frequências de meia potência:

$$BP = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}$$

O filtro Sallen-Key de banda passante aparece na terceira linha da Tabela 16.4-2. As especificações exigem que

$$\omega_0 = 2\pi \cdot 500 = 3142 \text{ rad/s}$$

e

$$Q = \frac{\omega_0}{BW} = 5$$

De acordo com a Tabela 16.4-2, as equações que relacionam os parâmetros do filtro de Sallen-Key de banda passante aos valores dos componentes do circuito são

$$\frac{1}{RC} = \omega_0 = 3142$$

e

$$A = 3 - \frac{1}{Q} = 2{,}8$$

Vamos escolher $C = 0{,}1\ \mu$F. Nesse caso,

$$R = \frac{1}{C\omega_0} = 3183\ \Omega$$

Como $k = AQ$, o ganho deste filtro de banda passante na frequência central é 14. Além disso, uma das resistências é dada por

$$(A - 1)R = 5729\ \Omega$$

A Figura 16.4-2 mostra o filtro completo.

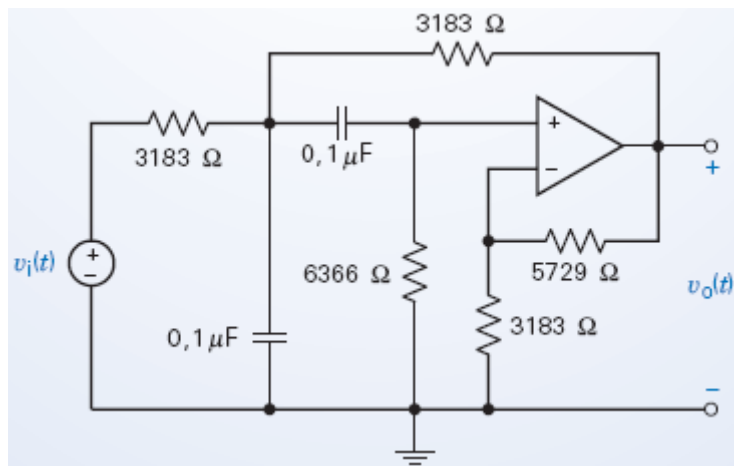



FIGURA 16.4-2 Filtro de banda passante de Sallen-Key.

EXEMPLO 16.4-3 Filtro Notch* de Sallen-Key

Projete um filtro notch de Sallen-Key de segunda ordem com uma frequência central de 1000 rad/s e uma banda de rejeição de 100 rad/s.[1]

Solução

A função de transferência de um filtro notch de segunda ordem é

$$H(s) = \frac{k(s^2 + \omega_0^2)}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$$

Observe que as funções de transferência dos filtros de segunda ordem de banda passante e notch estão relacionadas através da equação

$$\frac{k(s^2 + \omega_0^2)}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2} = k - \frac{k\frac{\omega_0}{Q}s}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$$

Fazendo $s = j\omega$, obtemos

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{k(\omega_0^2 - \omega^2)}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega_0}{Q}\omega}$$

Para $\omega \ll \omega_0$ e $\omega \gg \omega_0$, o ganho é $|\mathbf{H}(\omega)| = k$. Para $\omega = \omega_0$, o ganho é zero. As frequências de meia potência, ω_1 e ω_2, são definidas pela seguinte propriedade:

$$|\mathbf{H}(\omega_1)| = |\mathbf{H}(\omega_2)| = \frac{k}{\sqrt{2}}$$

A banda de rejeição do filtro é dada por

$$BP = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}$$

O filtro notch de Sallen-Key aparece na quarta linha da Tabela 16.4-2. As especificações exigem que $\omega_0 = 1000$ rad/s e

$$Q = \frac{\omega_0}{BP} = 10$$

De acordo com a Tabela 16.4-2, as equações que relacionam os parâmetros do filtro notch de Sallen-Key aos valores dos componentes do circuito são

$$\frac{1}{RC} = \omega_0 = 1000$$

e

$$A = 2 - \frac{1}{2Q} = 1{,}95$$

Vamos escolher $C = 0{,}1\ \mu$F. Nesse caso,

$$R = \frac{1}{C\omega_0} = 10\ \text{k}\Omega$$

A Figura 16.4-3 mostra o filtro completo.

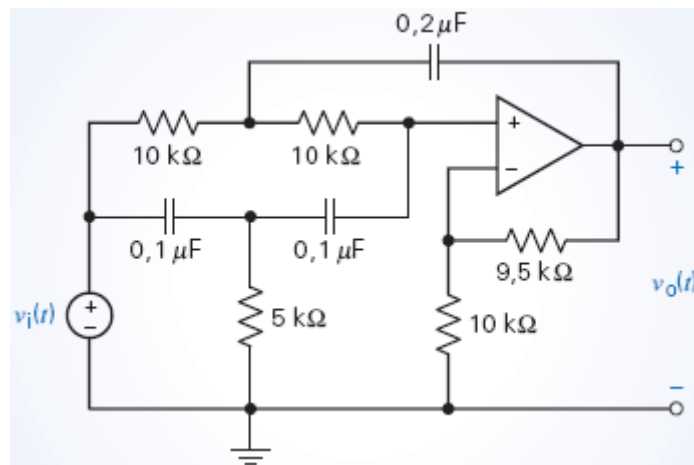



FIGURA 16.4-3 Filtro notch de Sallen-Key.

EXEMPLO 16.4-4 Filtro de Tow-Thomas

A Figura 16.4-4 mostra outro circuito que pode ser usado para construir um filtro de segunda ordem. Esse circuito, conhecido como *filtro de Tow-Thomas*, pode ser usado como filtro passa-baixas ou como filtro de banda passante. Se a saída é a tensão $v_1(t)$, a função de transferência é

$$H_B(s) = \frac{-\dfrac{1}{R_k R C^2}}{s^2 + \dfrac{1}{R_Q C}s + \dfrac{1}{R^2 C^2}} \tag{16.4-3}$$

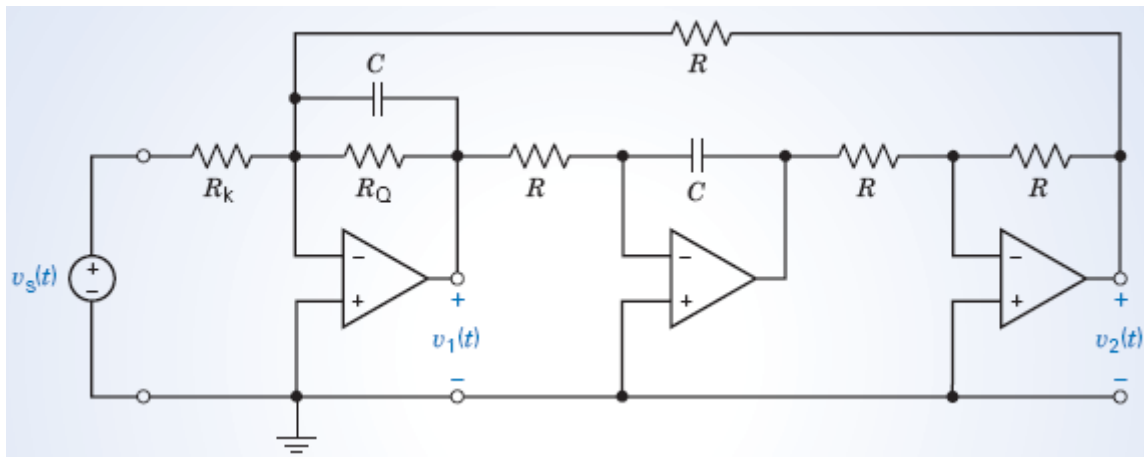



FIGURA 16.4-4 Filtro de Tow-Thomas.

e o filtro é um filtro passa-baixas. Se a saída é a tensão $v_2(t)$, a função de transferência é

$$H_P(s) = \frac{-\dfrac{1}{R_k C}s}{s^2 + \dfrac{1}{R_Q C}s + \dfrac{1}{R^2C^2}} \tag{16.4-4}$$

e o filtro de Tow-Thomas se comporta como um filtro de banda passante. Projete um filtro passa-baixas de Butterworth/Tow-Thomas com um ganho de CC igual a 5 e uma frequência de corte de 1250 Hz.

Solução

Como o filtro de Tow-Thomas será usado como filtro passa-baixas, a função de transferência é dada pela Eq. 16.4-3. Os valores dos componentes são obtidos comparando a função de transferência com a forma padrão da função de transferência de um filtro passa-baixas de segunda ordem, dada pela Eq. 16.4-1. Em primeiro lugar, comparamos os termos constantes (ou seja, os coeficientes de s^0) no denominador das duas funções para obter

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} \tag{16.4-5}$$

Em seguida, comparamos os coeficientes de s^1 nos denominadores das duas funções para obter

$$Q = \frac{R_Q}{R} \tag{16.4-6}$$

Finalmente, comparamos os numeradores para obter

$$k = \frac{R}{R_k} \tag{16.4-7}$$

Para projetar o filtro de Tow-Thomas, temos que especificar os valores de R, C, R_Q e R_k. Como existem quatro incógnitas e apenas três equações, começamos por escolher um valor conveniente para uma das incógnitas, em geral a capacitância. Vamos escolher $C = 0{,}01\ \mu$F. Nesse caso,

$$R = \frac{1}{\omega_0 C} = \frac{1}{2\pi\ (1250)(0{,}01)\left(10^{-6}\right)} = 12.732\ \Omega$$

Em um filtro de Butterworth de segunda ordem, $Q = 0{,}707$ e, portanto,

$$R_Q = QR = (0{,}707)(12.732) = 9003\ \Omega$$

Finalmente,

$$R_k = \frac{R}{k} = 2546\ \Omega$$

e o projeto está completo.

EXEMPLO 16.4-5 Filtro Passa-Altas de Tow-Thomas

Use o circuito de Tow-Thomas para projetar um filtro passa-altas de Butterworth com um ganho de alta frequência de 5 e uma frequência de corte de 1250 Hz.

Solução

O circuito de Tow-Thomas não se comporta como um filtro passa-altas, mas pode se os comportar como um filtro passa-baixas e como um filtro de banda passante. Acontece que a função de transferência do filtro passa-altas está relacionada com as funções de transferência dos filtros de banda passante e passa-baixas pela equação

$$H_A(s) = \frac{ks^2}{s^2 + \frac{1}{R_Q C}s + \frac{1}{R^2C^2}} = k + \frac{-\frac{1}{R_k C}s}{s^2 + \frac{1}{R_Q C}s + \frac{1}{R^2C^2}} + \frac{-\frac{1}{R_k R C^2}}{s^2 + \frac{1}{R_Q C}s + \frac{1}{R^2C^2}}$$
$$= k + H_P(s) + H_B(s) \quad (16.4\text{-}8)$$

De acordo com a Eq. 16.4-8, um filtro passa-altas pode ser construído usando as saídas passa-baixas e de banda passante do filtro de Tow-Thomas e um circuito amplificador-somador, contanto que os filtros passa-baixas e de banda passante tenham os mesmos valores de k, Q e ω_0 que o filtro passa-altas. Assim, queremos que o filtro de Tow-Thomas tenha $k = 5$, $Q = 0{,}707$ e $\omega_0 = 2\pi \times 1250 = 7854$ rad/s. Este filtro foi projetado no Exemplo 16.4-4. O filtro passa-altas é obtido acrescentando um amplificador-somador, como mostra a Figura 16.4-5.

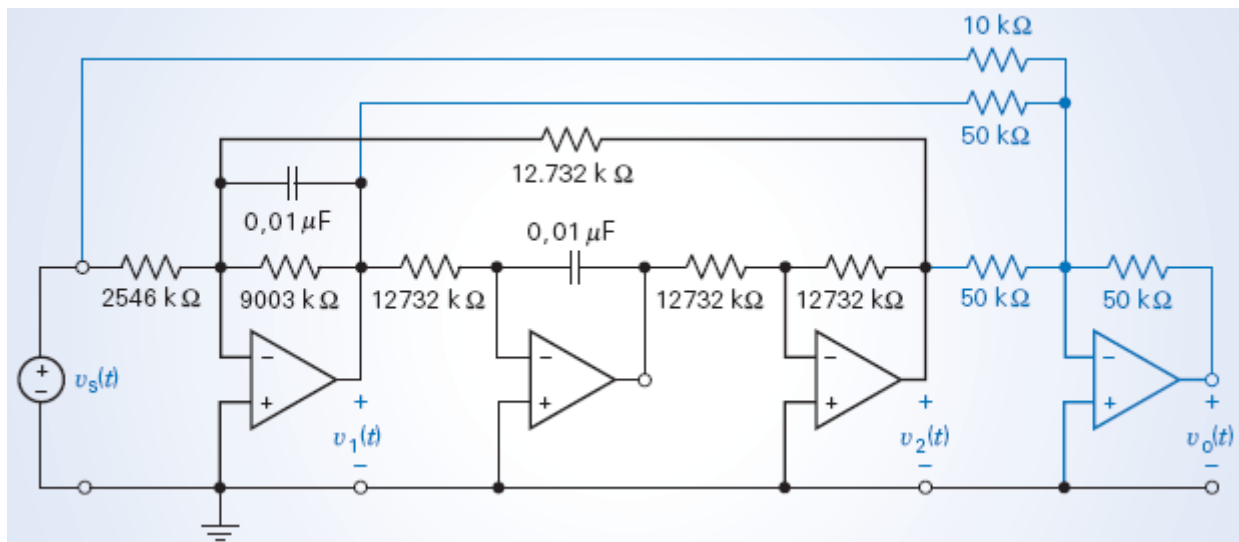



FIGURA 16.4-5 Filtro passa-altas de Tow-Thomas.

16.5 *Filtros de Ordem Superior*

Nesta seção, vamos voltar nossa atenção para filtros de ordem maior que 2. Esses filtros são chamados de **filtros de ordem superior**. Uma estratégia muito usada para projetar filtros de ordem superior consiste em ligar filtros de segunda ordem em cascata. A ligação em cascata está ilustrada na Figura 16.5-1. Na figura, as funções de transferência $H_1(s)$, $H_2(s)$, . . ., $H_n(s)$ representam filtros de segunda ordem que são ligados para formar um filtro de

ordem superior. Chamamos os filtros de segunda ordem de "estágios de filtragem" para distingui-los do filtro de ordem superior. (Quando a ordem do filtro de ordem superior é ímpar, um dos estágios tem que ser um filtro de primeira ordem. Mesmo assim, dizemos que os filtros de ordem superior são construídos a partir de filtros de segunda ordem.)

A ligação em cascata é caracterizada pelo fato de que a saída de um estágio de filtragem é usada como entrada do estágio seguinte. Infelizmente, às vezes o comportamento de um estágio muda quando a saída é ligada à entrada de outro estágio. Quando isso acontece, dizemos que o segundo estágio está carregando o primeiro. Na maioria dos casos, esse efeito é indesejável e deve ser evitado. A Figura 16.5-2 mostra um modelo de um estágio de filtragem que é apropriado para a investigação do efeito de carregamento. O modelo inclui as impedâncias de entrada e de saída e a função de transferência do estágio de filtragem.

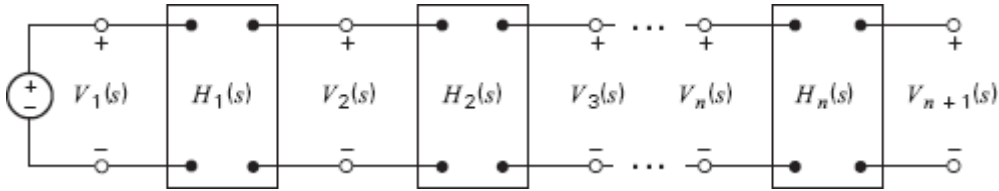



FIGURA 16.5-1 Ligação em cascata de *n* estágios de filtragem.

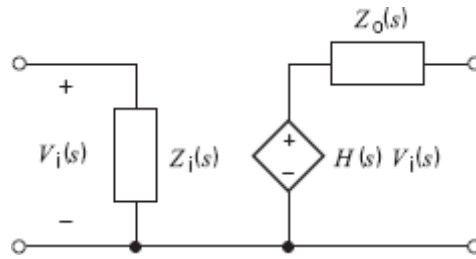



FIGURA 16.5-2 Modelo de um estágio de filtragem.

A Figura 16.5-3 mostra um filtro de ordem superior formado pela ligação em cascata de dois estágios de filtragem. Vamos calcular a função de transferência do filtro. Começando pela saída do filtro, observe que não há corrente na impedância de saída do segundo estágio, $Z_{o2}(s)$. Em consequência, não há tensão em $Z_{o2}(s)$ e, portanto,

$$V_3(s) = H_2(s)V_2(s) \tag{16.5-1}$$

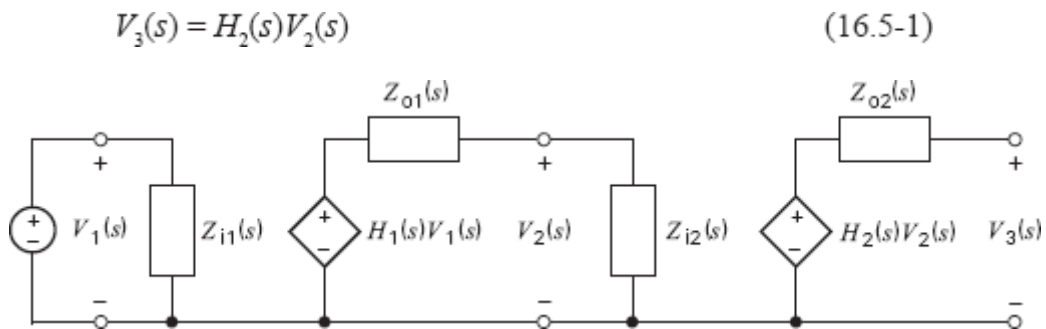



FIGURA 16.5-3 Ligação em cascata de dois estágios de filtragem.

Em seguida, usamos o método da divisão de tensão para calcular $V_2(s)$:

$$V_2(s) = \frac{Z_{i2}}{Z_{o1} + Z_{i2}} H_1(s)V_1(s) \tag{16.5-2}$$

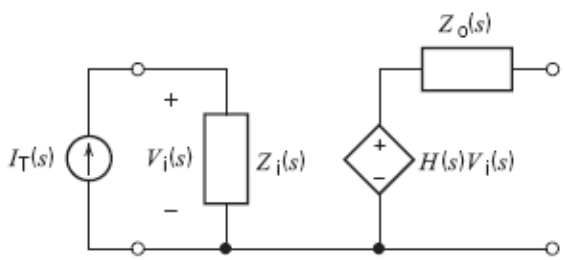
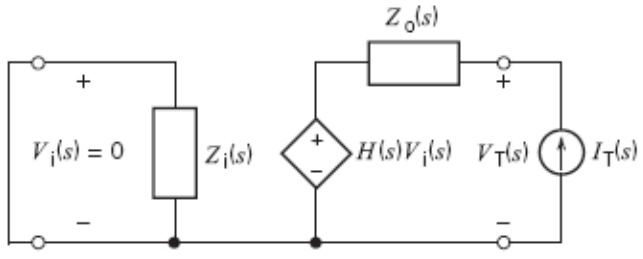
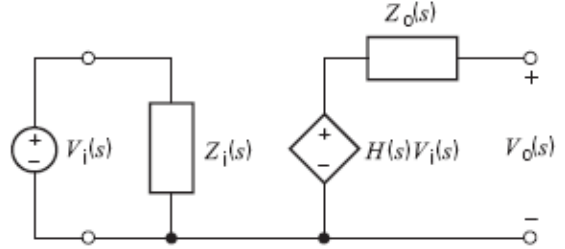
A ligação do segundo estágio do filtro ao primeiro estágio mudou a saída do primeiro estágio. Sem o segundo estágio, não haveria corrente em $Z_{o1}(s)$. Em consequência, não haveria tensão em $Z_{o1}(s)$ e a saída do primeiro estágio seria $V_2(s) = H_1(s)V_1(s)$. Em situações como essa, dizemos que o segundo estágio carregou o primeiro estágio. Esse efeito pode ser eliminado tornando infinita a impedância do segundo estágio, ou seja, fazendo $Z_{1s}(s) = \infty$, ou tornando nula a impedância de saída do primeiro estágio, ou seja, fazendo $Z_{o1}(s) = 0$.

Combinando as Eqs. 16.5-1 e 16.5-2, obtemos

$$V_3(s) = H_2(s)\frac{Z_{i2}}{Z_{o1} + Z_{i2}}H_1(s)V_1(s)$$

Finalmente, a função de transferência do filtro de ordem superior é

$$H(s) = \frac{V_3(s)}{V_1(s)} = H_2(s)\frac{Z_{i2}}{Z_{o1} + Z_{i2}}H_1(s) \qquad (16.5\text{-}3)$$

A Eq. 16.5-3 se reduz a

$$H(s) = H_2(s)H_1(s) \qquad (16.5\text{-}4)$$

se a impedância de entrada do segundo estágio é infinita [$Z_{i2}(s) = \infty$] ou se a impedância de entrada do primeiro estágio é nula [$Z_{01}(s) = 0$]. Em outras palavras, a Eq. 16.5-4 pode ser usada se o segundo estágio não carrega o primeiro, mas a Eq. 16.5-3 deve ser usada se o segundo estágio carrega o primeiro. Vamos provar que a impedância de saída dos filtros de Sallen-Key é zero. Isso significa que podemos usar estágios de filtragem de Sallen-Key para projetar filtros de ordem superior que não estão sujeitos ao efeito de carregamento. Por outro lado, os filtros baseados no circuito *RLC* série da Tabela 16.4-1 não possuem impedância de saída nula nem impedância de entrada infinita. Assim, quando esses estágios de filtragem são ligados em cascata, a função de transferência do filtro de ordem superior não é igual ao produto das funções de transferência dos estágios de filtragem.

Vamos agora calcular a impedância de saída de um filtro de banda passante de Sallen-Key. A Tabela 16.5-1 mostra como calcular os parâmetros de um estágio de filtragem. A segunda linha da tabela indica que para calcular a impedância de saída, um curto-circuito deve ser ligado à entrada do filtro e uma fonte de corrente deve ser ligada à saída do filtro. A tensão entre os terminais da fonte de corrente é calculada e a razão entre essa tensão e a corrente da fonte de tensão é a impedância de saída. A Figura 16.5-4 mostra um filtro de Sallen-Key com um curto-circuito na entrada e uma fonte de corrente ligada à saída. O circuito pode ser analisado aplicando a LKC aos nós 1, 2 e T:

$$\frac{V_1}{R} + CsV_1 + \frac{V_1 - V_T}{R} + (V_1 - V_2)Cs = 0$$
$$-(V_1 - V_2)Cs + \frac{V_2}{2R} = 0$$
$$\frac{V_2}{R} + \frac{V_2 - V_T}{(A-1)R} = 0$$

Tabela 16.5-1 Medida dos Parâmetros de um Estágio de Filtragem

PARÂMETRO	DEFINIÇÃO	MEDIDAS
Impedância de entrada	$Z_i(s) = \dfrac{V_i(s)}{I_T(s)}$	$I_T(s)$, $V_i(s)$, $Z_i(s)$, $H(s)V_i(s)$, $Z_o(s)$
Impedância de saída	$Z_o(s) = \dfrac{V_T(s)}{I_T(s)}$	$V_i(s) = 0$, $Z_i(s)$, $H(s)V_i(s)$, $Z_o(s)$, $V_T(s)$, $I_T(s)$
Função de transferência	$H(s) = \dfrac{V_o(s)}{V_i(s)}$	$V_i(s)$, $Z_i(s)$, $H(s)V_i(s)$, $Z_o(s)$, $V_o(s)$

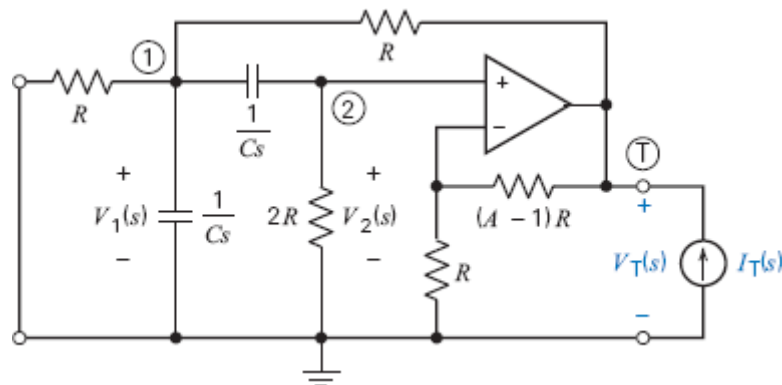
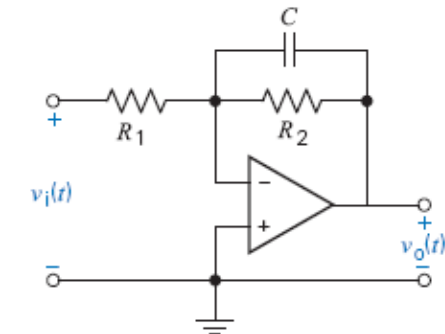
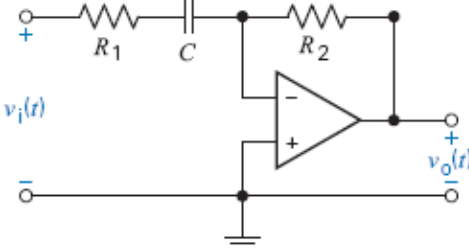



FIGURA 16.5-4 Cálculo da saída de um filtro de banda passante de Sallen-Key. Os círculos menores indicam alguns nós do circuito.

Resolvendo esse sistema de equações, obtemos

$$[(RCs)^2 + (3 - A)RCs + 1]\ V_T = 0$$

Como o fator entre parênteses não é zero, essa equação indica que $V_T = 0$. A impedância de saída do filtro de banda passante de Sallen-Key é, portanto,

$$Z_o = \frac{V_T}{I_T} = \frac{0}{I_T} = 0$$

É fácil mostrar que a impedância de saída dos outros filtros de Sallen-Key da Tabela 16.4-2 também é zero.

Os filtros de ordem superior podem, portanto, ser projetados como um conjunto de filtros de segunda ordem ligados em cascata. Os projetistas preferem usar estágios de filtragem com uma impedância igual a zero, como os filtros de Sallen-Key, para que o efeito de carregamento não aconteça e a função de

transferência do filtro de ordem superior seja o produto das funções de transferência dos estágios de filtragem.

Tabela 16.5-2 Estágios de Filtragem de Primeira Ordem

TIPO DE FILTRO	CIRCUITO	EQUAÇÃO DE PROJETO
Passa-baixas	C, R_1, R_2, $v_i(t)$, $v_o(t)$	$H(s) = \frac{-k}{s+p}$ em que $p = \frac{1}{R_2 C}$ e $k = \frac{1}{R_1 C}$
Passa-altas	R_1, C, R_2, $v_i(t)$, $v_o(t)$	$H(s) = \frac{-ks}{s+p}$ em que $p = \frac{1}{R_1 C}$ e $k = \frac{R_2}{R_1}$

EXEMPLO 16.5-1 Ligação em Cascata de Estágios de Filtragem

Projete um filtro passa-baixas de Butterworth de terceira ordem com uma frequência de corte $\omega_c = 500$ rad/s e um ganho de CC igual a 1.

Solução

De acordo com a Equação 16.3-2 e com a Tabela 16.3-2, a função de transferência de um filtro passa-baixas de Butterworth de terceira ordem com uma frequência de corte $\omega_c = 1$ rad/s é

$$H_n(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+s+1)}$$

O primeiro passo consiste em mudar a frequência de corte para 500 rad/s através de uma mudança de escala de frequência. A nova função de transferência é

$$H(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{500}+1\right)\left(\left(\frac{s}{500}\right)^2 + \frac{s}{500} + 1\right)} = \frac{500^3}{(s+500)\left(s^2+500s+500^2\right)}$$

Essa função de transferência pode ser escrita do seguinte modo:

$$H(s) = \frac{-250.000}{s^2+500s+250.000} \cdot \frac{-500}{s+500} = H_1(s) \cdot H_2(s) \qquad (16.5\text{-}5)$$

É possível projetar um filtro passa-baixas de Sallen-Key com a função de transferência passa-baixas de segunda ordem $H_1(s)$. A Tabela 16.5-2 mostra dois estágios de filtragem de primeira ordem, um que funciona como filtro passa-baixas e outro que funciona como filtro passa-altas. O circuito da primeira linha da tabela pode ser projetado com a função de transferência $H_2(s)$. Como a impedância de saída dos filtros da Tabela 16.5-2 é zero, a ligação desses filtros em

cascata não carrega o circuito. Ligando em cascata o filtro de Sallen-Key com o filtro de primeira ordem, obtemos um filtro de terceira ordem cuja função de transferência é $H(s)$.

Para começar, vamos projetar o filtro de Sallen-Key com uma função de transferência

$$H_1(s) = \frac{-250.000}{s^2 + 500s + 250.000}$$

O valor dos parâmetros do filtro k, ω_0 e Q pode ser determinado comparando $H_1(s)$ com a forma padrão da função de transferência do filtro passa-baixas de segunda ordem (Eq. 16.4-1). O termo constante do denominador nos dá

$$\omega_0^2 = 250.000$$

O coeficiente de s no denominador no dá

$$\frac{\omega_0}{Q} = 500$$

Finalmente, o numerador nos dá

$$k \cdot \omega_0^2 = 250.000$$

Assim, $\omega_0 = 500$ rad/s, $Q = 1$ e $k = 1$. O filtro passa-baixas de Sallen-Key aparece na primeira linha da Tabela 16.4-2. Para projetar o filtro, é preciso especificar os valores de R, C e A. De acordo com as equações da primeira linha da tabela,

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} \qquad (16.5\text{-}6)$$

$$Q = \frac{1}{3 - A} \qquad (16.5\text{-}7)$$

$$k = A \qquad (16.5\text{-}8)$$

A Equação 16.5-7 nos dá

$$A = 3 - \frac{1}{Q} = 3 - \frac{1}{1} = 2$$

Por outro lado, a Eq. 16.5-8 nos dá

$$A = k = 1$$

Aparentemente, podemos escolher A para obter o valor correto de Q ou podemos escolher A para obter o valor correto de k, mas não podemos fazer as duas coisas ao mesmo tempo. Como o ganho de CC pode ser ajustado mais tarde, escolhemos $A = 2$ para fazer $Q = 1$ e deixamos $k = 2$. A Eq. 16.5-6 é satisfeita escolhendo $C = 0{,}1\ \mu$F e

$$R = \frac{1}{C\omega_0} = \frac{1}{(0{,}1 \times 10^{-6})(500)} = 20\ \text{k}\Omega$$

O estágio de filtragem de Sallen-Key que acabamos de projetas aparece na Figura 16.5-5*a*. A função de transferência desse estágio é

$$H_3(s) = \frac{-500.000}{s^2 + 500s + 250.000}$$

Usando o estágio de filtragem de Sallen-Key, conseguimos os valores desejados de ω_0 e de Q, mas não o de k. Para compensar, vamos ajustar o ganho de CC do filtro de primeira ordem. A função de transferência desejada para o filtro de terceira ordem pode ser expressa como

$$H(s) = \frac{-500.000}{s^2 + 500s + 250.000} \cdot H_4(s)$$

o que exige que

$$H_4(s) = \frac{-250}{s + 500}$$

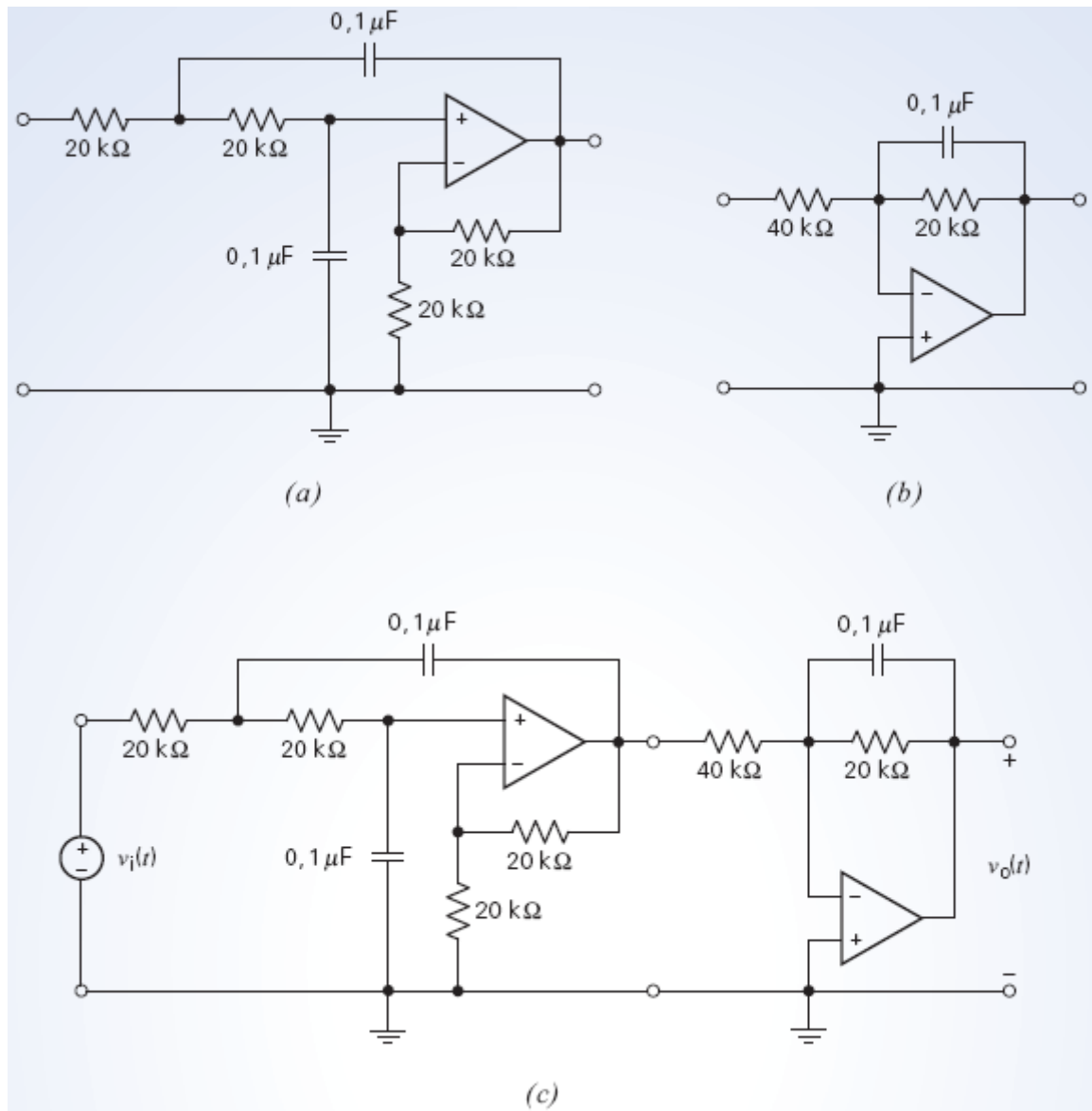



FIGURA 16.5-5 (*a*) Estágio de filtragem de Sallen-Key; (*b*) estágio de filtragem de primeira ordem; (*c*) filtro de Butterworth de terceira ordem.

De acordo com as equações da primeira linha da Tabela 16.5-2,

$$500 = \frac{1}{R_2 C}$$

e

$$250 = \frac{1}{R_1 C}$$

Vamos escolher $C = 0{,}1\ \mu F$. Nesse caso,

$$R_2 = \frac{1}{500 \cdot C} = \frac{1}{(500)\left(0{,}1 \times 10^{-6}\right)} = 20\,\text{k}\Omega$$

e

$$R_1 = \frac{1}{250 \cdot C} = \frac{1}{(250)\left(0{,}1 \times 10^{-6}\right)} = 40\,\text{k}\Omega$$

O filtro de primeira ordem aparece na Figura 16.5-5*b*. Ligando em cascata um filtro de Sallen-Key e um filtro de primeira ordem, obtemos o filtro de Butterworth de terceira ordem da Figura 16.5-5*c*.

16.6 *Simulação de Filtros Elétricos Usando o PSpice*

A simulação usando o programa PSpice é um modo conveniente de verificar se um circuito de filtro possui a função de transferência correta. A Figura 16.6-1 ilustra um método de testar o projeto de um filtro. O filtro que está sendo testado é um filtro de banda de rejeição (filtro *notch*) de quarta ordem formado por dois filtros de Sallen-Key e um amplificador inversor. O filtro foi projetado para ter a função de transferência

$$H(s) = \frac{4(s^2 + 62.500)^2}{(s^2 + 250s + 62.500)^2}$$

A fonte de tensão $v_1(t)$ é usada como entrada de dois circuitos diferentes. Um é o circuito do filtro formado pelos dois filtros de Sallen-Key e o amplificador inversor. A resposta desse circuito é a tensão de nó $v_{o1}(t)$. O outro "circuito" gera a função $H(s)$ diretamente usando um comando do PSpice. A resposta desse circuito é $v_{o2}(t)$. Uma única simulação do PSpice produz respostas de frequência correspondentes às funções de transferência dos dois circuitos, $V_{o1}/V_i(s)$ e $V_{o2}/V_i(s)$. Depois de concluída essa etapa, usamos Probe, o pós-processador gráfico que faz parte do PSpice, para plotar as duas respostas de frequência no mesmo gráfico. Se as respostas de frequência são iguais, temos certeza de que a função de transferência do circuito do filtro é realmente $H(s)$.

A Figura 16.6-2 mostra o arquivo de entrada do PSpice correspondente à Figura 16.6-1. Dois aspectos do arquivo precisam ser explicados. Em primeiro lugar, observe os parâmetros usados no subcircuito que representa o filtro de Sallen-Key. A linha

```
.subckt sk_n in out params: C=.1uF w0 = 1 krad/s Q = 0.707
```

assinala o começo de um subcircuito chamado `sk_n`. (O PSpice permite usar nomes, em vez de números, para designar os nós. Os nós "in" e "out" ligam o subcircuito ao resto do circuito). Três parâmetros são definidos: *C*, w0 e *Q*. Todos recebem valores iniciais, como exige o PSpice. Expressões envolvendo esses parâmetros substituem os valores de alguns componentes do subcircuito. Assim, por exemplo, a linha

```
R1 in 2 {1/C/w0}
```

indica que o resistor *R*1 está ligado entre os nós "in" e 2 e que a resistência de *R*1 é dada por 1/C/w0 ($1/\omega_0 C$). Os valores de parâmetros como *C* e w0 são atribuídos quando o subcircuito é usado. Considere a linha

```
XSK2 2 3 sk_n params : C =.1uf w0 = 250 Q = 1
```

que indica que o dispositivo XSK2 é um subcircuito `sk_n`. Esta linha fornece valores para *C*, w0 e *Q*. Esses valores são usados para calcular o valor da resistência *R*1 quando `sk_n` implementa XSK2. Valores diferentes de *C*, w0 e *Q* podem ser usados cada vez que o subcircuito `sk_n` é usado para implementar um dispositivo diferente. A Tabela 16.6-1 mostra os subcircuitos usados no PSpice para os quatro estágios de filtragem.

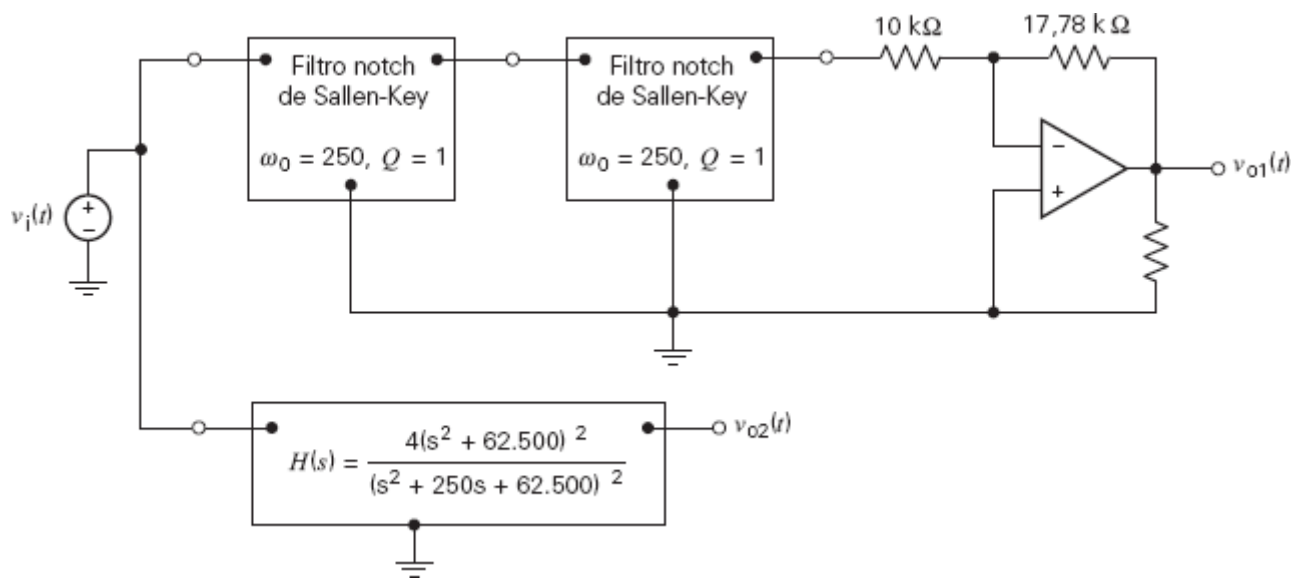



FIGURA 16.6-1 Verificação da função de transferência de um filtro notch de rejeição de quarta ordem usando o programa PSpice.

```
Teste de um filtro notch de quarta ordem

Vin   1   0 ac 1
XSK1 1   2 sk_n   params: C=.1uF w0=250 Q=1
XSK2 2   3 sk_n   params: C=.1uF w0=250 Q=1
R1    3   4 10k
R2    4   5 17.78k
XOA   4   0 5 op_amp
RL    5   0 10G
XLP   1   6 filtro_notch_de_quarta_ordem

.subckt sk_n in out params: C=.1uF w0=1krad/s  Q=0.707
R1   in    2 {1/C/w0}
R2   2     3 {1/C/w0}
C1   in    6 {C}
C2   6     3 {C}
C3   2     out {2*C}
R3   6     0 {1/2/C/w0}
XOA 5     3 out  op_amp
R4   5     0 10kOhm
R5   out 5 {(1-1/Q/2)*10kOhm}
.ends sk_n

.subckt op_amp inv non out
* an ideal op amp
E (out 0) (non inv)  1G
.ends op_amp

.subckt filtro_notch_de_quarta_ordem in out
R1   in   0 1G
R2   out 0 1G
E1   out 0 LAPLACE {V(in)} = {(4*(s*s+62500)*(s*s+62500)) /
+                     (s*s+250*s+62500) *(s*s+250*s+62500)}
.ends filtro_notch_de_quarta_ordem

.ac dec 100  1  1000
.probe  V(1)  V(5)  V(6)
.end
```

FIGURA 16.6-2 Arquivo de entrada do PSpice usado para testar o filtro notch de quarta ordem.

Tabela 16.6-1 Subcircuitos do PSpice para os Quatro Estágios de Filtragem

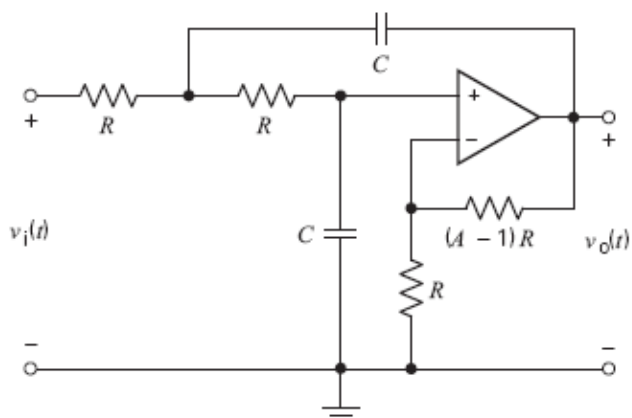
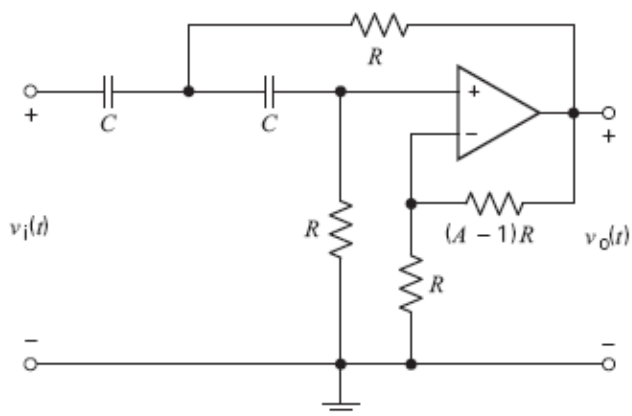
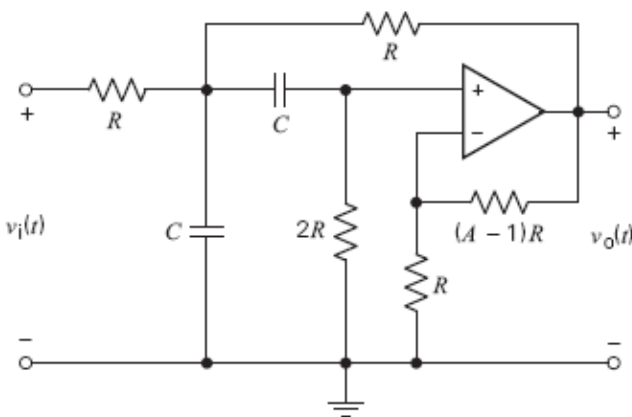
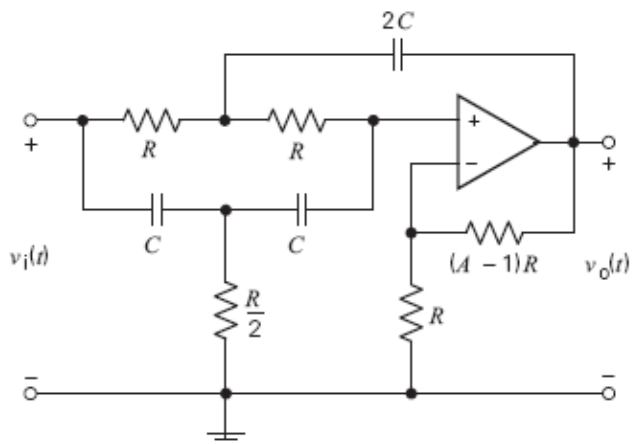
ESTÁGIO DE FILTRAGEM	SUBCIRCUITO DO PSPICE

```
.subckt sk_lp in out params: C = .1uF
w0 = 1krad/s Q = 0.707
R1    in    2    {1/C/w0}
R2    2     3    {1/C/w0}
C1    3     0    {C}
C2    2     out  {C}
XOA   5     3    out    op_amp
R3    5     0    10kOhm
R4    out   5    {(2 – 1/Q) *10kOhm}
.ends sk_lp
```

```
.subckt sk_hp in out params: C = .1uF
w0 = 1krad/s Q = 0.707
R1    3     0    {1/C/w0}
R2    2     out  {1/C/w0}
C1    in    2    {C}
C2    2     3    {C}
XOA   5     3    out    op_amp
R3    5     0    10kOhm
R4    out   5    {(2 – 1/Q) *10kOhm}
.ends sk_hp
```

```
.subckt sk_bp in out params: C = .1uF
w0 = 1krad/s Q = 0.707
R1    in    2    {1/C/w0}
R2    2     out  {1/C/w0}
C1    2     3    {C}
C2    2     0    {C}
R3    3     0    {2/C/w0}
XOA   5     3    out    op_amp
R4    5     0    10kOhm
R5    out   5    {(2 – 1/Q)*10kOhm}
.ends sk_bp
```

```
.subckt sk_n in out params: C = .1uF
w0 = 1krad/s Q = 0.707
R1    in    2    {1/C/w0}
R2    2     3    {1/C/w0}
C1    in    6    {C}
C2    6     3    {C}
C3    2     out  {2*C}
R3    6     0    {1/2/C/w0}
XOA   5     3    out    op_amp
R4    5     0    10kOhm
R5    out   5    {(1 – 1/Q/2)*10kOhm}
.ends sk_n
```

Tabela 16.6-2 Subcircuitos do PSpice para Funções de Transferência de Segunda Ordem

FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA	SUBCIRCUITO DO PSPICE

Passa-baixas

```
.subckt filtro_pb in out params: w0 = 1 krad/s Q = 0.707 k =
1
R1 in 0 1G
R2 out 0 1G
E out 0 LAPLACE {V(in)} = {(k*w0*w0)/(s*s + w0*s/Q + w0*w0)}
.ends filtro_pb
```

Passa-altas

```
.subckt filtro_pa in out params: w0 = 1 krad/s Q = 0.707 k =
1
R1 in 0 1G
R2 out 0 1G
E out 0 LAPLACE {V(in)} = {(k*s*s)/(s*s + w0*s/Q + w0*w0)}
.ends filtro pa
```

De banda passante

```
.subckt filtro_bp in out params: w0 = 1 krad/s Q = 0.707 k =
1
R1 in 0 1G
R2 out 0 1G
E out 0 LAPLACE {V(in)} = {(k*w0*s/Q)/(s*s + w0*s/Q +
w0*w0)}
.ends filtro bp
```

Notch

```
.subckt filtro_n in out params: w0 = 1 krad/s Q = 0.707 k =
1
R1 in 0 1G
R2 out 0 1G
E out 0 LAPLACE {V(in)} = {(k*(s*s + w0*w0)/(s*s + w0*s/Q +
w0*w0)}
.ends filtro_n
```

Considere a seguir o subcircuito

```
.filtro_notch_de_quarta_ordem in out
R1  in  0   1G
R2  out 0   1G
E1  out 0   LAPLACE {V(in)} = {4* (s*s + 62500)* (s*s + 62500)/
             + (s*s + 250*s + 62500) (s*s + 250*s + 62500)}
.ends filtro_notch_de_quarta_ordem
```

O comando LAPLACE indica que a tensão controlada da FTCT está relacionada à tensão de controle através de uma função de transferência. A tensão de controle da FTCT é a tensão que aparece no interior do primeiro par de chaves. A função de transferência é a que aparece no interior do segundo par de chaves. Como a função de transferência não coube na linha destinada à descrição da FTCT, foi usada uma linha de continuação, como indica o sinal + na primeira coluna. A Tabela 16.6-2 mostra os subcircuitos que descrevem as funções de transferência dos quatro tipos de filtros de segunda ordem.

A Figura 16.6-3 mostra as respostas de frequência obtidas usando o arquivo de entrada do PSpice da Figura 16.6-2. O fato de que as respostas de frequência são exatamente iguais mostra que a função de transferência do circuito é a desejada.

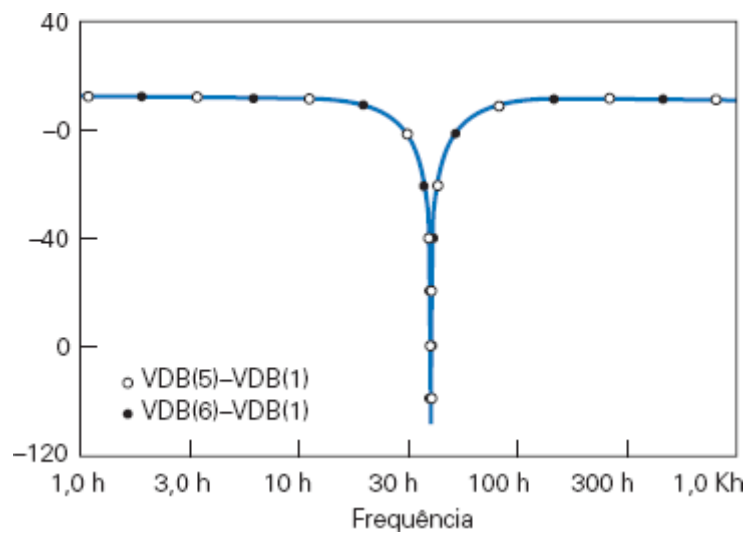



FIGURA 16.6-3 Gráficos de resposta de frequência usados para testar a função de transferência do filtro notch de quarta ordem.

16.7 *Como Podemos Testar . . . ?*

Os engenheiros são frequentemente encarregados de verificar se a solução de um problema está correta. As soluções de problemas de projeto, por exemplo, devem ser verificadas para confirmar que todas as especificações estão sendo atendidas. Além disso, os resultados obtidos com o auxílio de computadores devem ser revistos para evitar possíveis erros na digitação dos dados e as afirmações dos vendedores a respeito dos seus produtos devem ser confirmadas.

Os estudantes de engenharia muitas vezes também precisam verificar se os resultados que obtiveram estão corretos. Às vezes falta muito pouco tempo para terminar um exame e é importante poder identificar rapidamente as questões que precisam ser refeitas.

Os exemplos a seguir ilustram algumas técnicas que podem ser usadas para verificar se as soluções de problemas do tipo discutido neste capítulo estão corretas.

EXEMPLO 16.7-1 Como Podemos Testar a Resposta de Frequência de um Filtro?

A Figura 16.7-1 mostra a resposta de frequência de um filtro de banda passante fornecida pelo programa PSpice. O filtro pode ser descrito pela equação

$$\frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_{in}(\omega)} = \mathbf{H}(\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

em que $\mathbf{V}_{in}(\omega)$ e $\mathbf{V}_o(\omega)$ são a entrada e a saída do filtro. O filtro foi projetado de acordo com as seguintes especificações:

$$\omega_0 = 2\pi 1000 \text{ rad/s}, \quad Q = 10, \quad H_0 = 10$$

Como podemos verificar se as especificações foram satisfeitas?

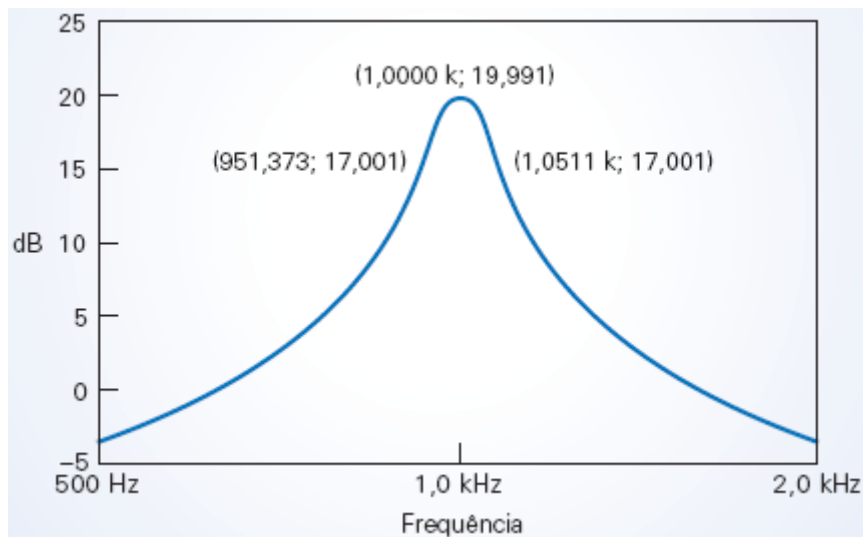



FIGURA 16.7-1 Resposta de frequência de um filtro de banda passante.

Solução

A reposta de frequência foi obtida analisando o circuito do filtro com o auxílio do programa PSpice. O eixo vertical da Figura 16.7-1 representa o módulo de **H**(ω) em decibéis e o eixo horizontal representa a frequência em hertz. Três pontos da curva de resposta de frequência foram assinalados e o valor do módulo e da frequência para cada um desses pontos foi indicado. Estamos interessados em usar essas informações para verificar se os valores de ω_0, Q e H_0 do filtro estão corretos.

Os três pontos assinalados na figura não foram escolhidos ao acaso. Um deles corresponde ao pico da resposta de frequência e mostra que o módulo de **H**(ω) passa por um máximo de aproximadamente 20 dB na frequência de 1000 Hz. Como esse pico está associado à frequência de ressonância, temos

$$\omega_0\ 2\pi 1000 \text{ rad/s}$$

Como o módulo de **H**(ω) na frequência de ressonância é H_0, temos

$$20 \log_{10} H_0 = 20$$

$$H_0 = 10$$

Nos outros dois pontos, o módulo de **H**(ω) está 3 dB abaixo do valor do pico; as frequências nesses pontos são951 Hz e 1051 Hz. A diferença entre as duas frequências é a banda passante, BP, da resposta de frequência. Finalmente, o valor de Q pode ser calculado a partir da frequência de ressonância ω_0 e da banda passante BP:

$$Q = \frac{\omega_0}{BP} = \frac{2\pi 1000}{2\pi(1051 - 951)} = 10$$

Neste exemplo, três pontos da resposta de frequência foram suficientes para mostrar que o filtro de banda passante estava de acordo com as especificações de frequência de ressonância, ganho e fator de qualidade.

EXEMPLO 16.7-2 Como Podemos Testar a Função de Transferência de um Filtro?

O ELab é um programa de análise de circuitos que pode ser usado para calcular a função de transferência de um filtro (Svoboda, 1997). A Figura 16.7-2 mostra o resultado do uso do ELab para analisar o filtro de banda passante de Sallen-Key da Figura 16.4-2. O filtro foi projetado no Exemplo 16.4-2 para ter $\omega_0 = 3142$ rad/s, $Q = 5$ e $k = 14$. **Como podemos verificar** se o filtro realmente possui os valores desejados de ω_0, Q e k?

Transfer	Function	Coefficients
s^	numerator	denominator
0	0	9.87e+06
1	8800	629
2	0	1

Transfer Function Menu
Transfer Function
Poles
Zeros
Frequency Response
exit to previous menu

Poles	
real	imaginary
-315	3130
-315	-3130

Zeros	
real	imaginary
0	0

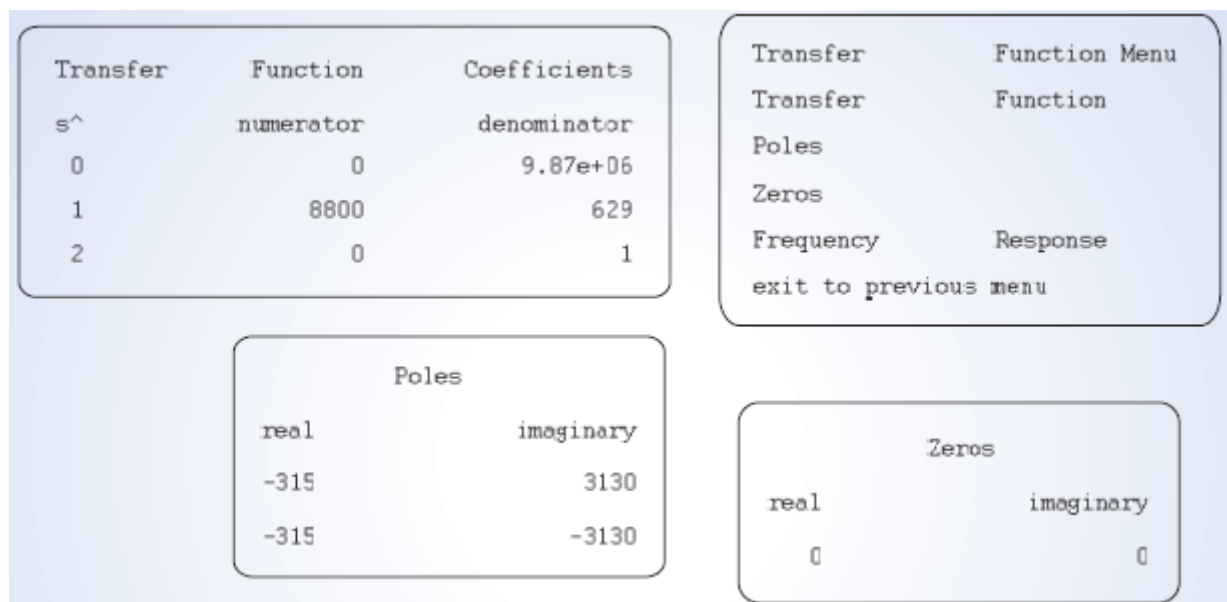



FIGURA 16.7-2 Uso do programa ELab para determinar a função de transferência de um filtro de banda passante.

Solução

Os coeficientes da função de transferência do filtro aparecem no canto superior esquerdo da Figura 16.7-2. Os coeficientes indicam que a função de transferência do filtro é

$$H(s) = \frac{8800s}{s^2 + 629s + 9{,}87 \times 10^6} \tag{16.7-1}$$

A forma geral da função de transferência de um filtro de banda passante de segunda ordem é

$$H(s) = \frac{k\dfrac{\omega_0}{Q}s}{s^2 + \dfrac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2} \tag{16.7-2}$$

Observe que o coeficiente de s^2 no polinômio do denominador é 1 nas duas funções de transferência. O valor de ω_0, Q e k pode ser determinado comparando os coeficientes das funções de transferência das Eqs. 16.7-1 e 16.7-2.

A raiz quadrada do termo constante do polinômio do denominador é igual a ω_0. Assim,

$$\omega_0 = \sqrt{9{,}87 \times 10^6} = 3142 \text{ rad/s}$$

O coeficiente de s no polinômio do denominador é igual a ω_0/Q. Assim,

$$Q = \frac{\omega_0}{629} = \frac{3142}{629} = 5$$

Finalmente, a razão entre o coeficiente de s no polinômio do numerador e o coeficiente de s no polinômio do denominador é igual a k. Assim,

$$k = \frac{8880}{629} = 14$$

Isso significa que o filtro de banda passante de Sallen-Key da Figura 16.4-2 realmente possui os valores desejados de ω_0, Q e k.

16.8 Exemplo de Projeto Filtro Antialiasing

O processamento digital de sinais (PDS) frequentemente envolve a coleta de amostras de um sinal analógico e a conversão dessas amostras em sinais digitais. Depois de processados, os sinais digitais são convertidos novamente em sinais analógicos. Infelizmente, um fenômeno chamado *aliasing* pode introduzir erros durante o processamento dos sinais digitais. O aliasing é uma possibilidade sempre que o sinal de entrada contém componentes cuja frequência é maior que metade da frequência de amostragem. O aliasing acontece quando essas componentes são erroneamente interpretadas como componentes de uma frequência menor. Os filtros *antialiasing* são usados para evitar que esses erros ocorram, eliminando as componentes da tensão de entrada com frequência maior que metade da frequência de amostragem.

Necessita-se de um filtro antialiasing para um sistema de PDS. O filtro deve ser um filtro passa-baixas de Butterworth de quarta ordem com uma frequência de corte de 500 Hz e um ganho de CC igual a 1. O filtro deve ser implementado usando um circuito *RC* com um amplificador operacional.

Descreva a Situação e as Hipóteses

O filtro antialiasing será projetado como um circuito em cascata formado por dois filtros passa-baixas de Sallen-Key e talvez um amplificador. O amplificador será incluído no projeto se for necessário ajustar o ganho de CC do filtro.

Os amplificadores operacionais dos filtros de Sallen-Key serão considerados ideais. As resistências deverão estar na faixa de 2 kΩ a 500 kΩ e as capacitâncias na faixa de 1 nF a 10 μF.

Estabeleça a Meta

A função de transferência de um filtro passa-baixas de Butterworth de quarta ordem com uma frequência de corte de 500 Hz e um ganho de CC igual a 1 pode ser obtida em duas etapas. Primeiro, de acordo com a Eq. 16.3-2 e a Tabela 16.3-2, a função de transferência de um filtro passa-baixas de Butterworth de quarta ordem é dada por

$$H_n(s) = \frac{1}{(s^2 + 0{,}765s + 1)(s^2 + 1{,}848s + 1)} \qquad (16.8\text{-}1)$$

$H_n(s)$ é a função de transferência de um filtro com uma frequência de corte de 1 rad/s, mas uma mudança de escala de frequência pode ser usada para ajustar a frequência de corte para 500 Hz = 3142 rad/s. Para isso, basta substituir s por $s/\omega_c = s/3142$ em $H_n(s)$, o que nos dá

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{\left(\left(\frac{s}{3142}\right)^2 + 0{,}765\left(\frac{s}{3142}\right) + 1\right)\left(\left(\frac{s}{3142}\right)^2 + 1{,}848\left(\frac{s}{3142}\right) + 1\right)} \\ &= \frac{3142^4}{\left(s^2 + 2403{,}6s + 3142^2\right)\left(s^2 + 5806{,}4s + 3142^2\right)} \end{aligned} \qquad (16.8\text{-}2)$$

O objetivo é projetar um circuito com a função de transferência da Eq. 16.8-2.

Formule um Plano

Vamos expressar $H(s)$ como o produto de duas funções de transferência de um filtro passa-baixas de segunda ordem. Para cada função, vamos fazer o seguinte:

1. Determinar o valor dos parâmetros do filtro, k, ω_0 e Q.
2. Projetar um filtro passa-baixas de Sallen-Key que possua os valores desejados de ω_0 e Q.

É provável que os filtros de Sallen-Key não possuam os valores desejados do ganho de CC, caso em que será necessário incluir no projeto um amplificador para ajustar o ganho de CC. O filtro antialiasing será formado, portanto, por dois filtros de Sallen-Key e um amplificador, todos ligados em cascata.

Execute o Plano

Considere o primeiro fator do denominador de $H(s)$. De acordo com o termo constante,

$$\omega_0^2 = 3142^2$$

Assim, $\omega_0 = 3142$ rad/s. De acordo com o coeficiente de s do denominador,

$$\frac{\omega_0}{Q} = 2403{,}6$$

e, portanto,

$$Q = \frac{3142}{2403{,}6} = 1{,}31$$

Vamos agora projetar um filtro passa-baixas de Sallen-Key com $\omega_0 = 3142$ rad/s e $Q = 1{,}31$. De acordo com as equações da primeira linha da Tabela 16.4-2, temos

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}$$

e

$$Q = \frac{1}{3 - A}$$

Vamos escolher $C = 0{,}1\ \mu$F. Nesse caso,

$$R = \frac{1}{\omega_0 C} = \frac{1}{3142 \cdot 10^{-7}} = 3183\ \Omega$$

e

$$A = 3 - \frac{1}{Q} = 3 - \frac{1}{1{,}31} = 2{,}24$$

Como o ganho de CC desse estágio é $k = A = 2{,}24$, a função de transferência é

$$H_1(s) = \frac{2{,}24 \cdot 3142^2}{s^2 + 2403{,}6s + 3142^2}$$

Considere agora o segundo fator do denominador de $H(s)$. Mais uma vez, o termo constante indica que $\omega_0 = 3142$ rad/s. De acordo com o coeficiente de s, temos

$$Q = \frac{3142}{5806{,}4} = 0{,}541$$

Assim, precisamos de um filtro passa-baixas de Sallen-Key com $\omega_0 = 3142$ rad/s e $Q = 0{,}541$. Escolhemos $C = 0{,}1\ \mu$F. Nesse caso,

$$R = \frac{1}{\omega_0 C} = \frac{1}{3142 \cdot 10^{-7}} = 3183\ \Omega$$

e

$$A = 3 - \frac{1}{Q} = 3 - \frac{1}{0{,}541} = 1{,}15$$

Como o ganho de CC desse estágio é $k = A = 1{,}15$, a função de transferência é

$$H_2(s) = \frac{1{,}15 \cdot 3142^2}{s^2 + 5806{,}4s + 3142^2}$$

O produto dos ganhos dos dois estágios é

$$H_1(s) \cdot H_2(s) = 2{,}576 \cdot H(s)$$

e, portanto,

$$H(s) = 0{,}388 \cdot H_1(s) \cdot H_2(s)$$

O terceiro estágio do filtro antialiasing é um amplificador inversor com um ganho de 0,388. O filtro completo aparece na Figura 16.8-1.

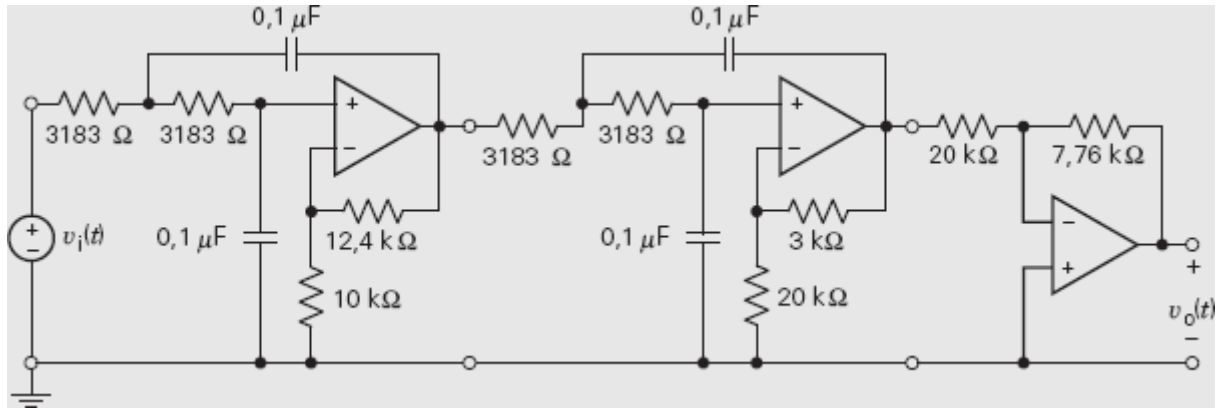



FIGURA 16.8-1 Filtro antialiasing.

Verifique se a Solução Proposta Está Correta

Na Seção 16.6 é descrito um método para verificar se um circuito possui a função de transferência desejada. O método consiste em usar o programa PSpice para plotar a resposta de frequência do circuito e a resposta de frequência da função de transferência. Se as duas respostas forem iguais, temos certeza de que o circuito foi projetado corretamente.

A Figura 16.8-2 mostra o arquivo de entrada do PSpice usado para plotar as respostas de frequência do circuito da Figura 16.8-1 e da função de transferência da Eq. 16.8-2. As duas respostas de frequência, que aparecem na Figura 16.8-3, estão tão próximas que parecem ser uma única função. Isto significa que a função de transferência do filtro é realmente a função de transferência desejada.

```
Verificação da função de transferência de um filtro passa-baixas
de quarta ordem

Vin  1 0 ac 1
XSK1 1 2 sk_1p params: C={C} w0={w0} Q=1.31
XSK2 2 3 sk_1p params: C={C} w0={w0} Q=0.541
Ri 3 4 20000
Rf 4 5 7760
XOA 4 0 5 op_amp
X1 1 6 H1
X2 6 7 H2

.subckt sk_1p in out params: C=.1uf w0=1krad/s Q=0.707
R1 in  2 {1/C/w0}
R2 2  3 {1/C/w0}
C1 3  0 {C}
C2 2  out  {C}
XOA  5 3  out op_amp
R3  5 0  10kOhm
R4  out  5 {(2-1/Q)*10kOhm}
.ends

.subckt op_amp inv non out
*amplificador operacional ideal
E (out 0) (non inv) 1G
.ends op_amp

.subckt H1 in out
R1 in  0 1G
R2 out 0  1G
E  out 0 LAPLACE {V(in)}={3142*3142/(s*s+2403.6*s+3142*3142)}
.ends H1

.subckt  H2 in out
R1  in 0 1G
R2  out  0 1G
E   out 0 LAPLACE {V(in)}={3142*3142/(s*s+5806.4*s+3142*3142)}
.ends H2

.ac dec 25 .01 5000
.probe  V(7) V(5)
.param: C=0.1uF  w0=3142  Q=2  k=2.5
.end
```

FIGURA 16.8-2 Arquivo de entrada do PSpice usado para verificar se a função de transferência do circuito da Figura 16.8-1 é a função de transferência desejada.

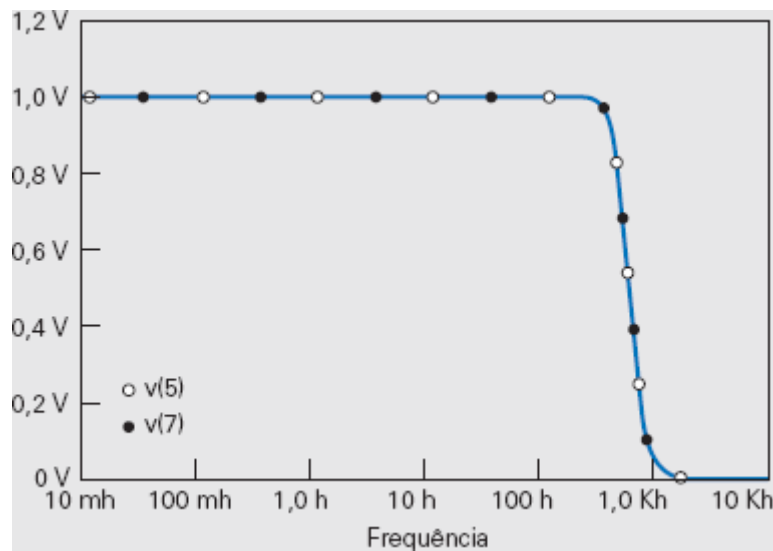



FIGURA 16.8-3 A resposta de frequência do circuito da Figura 16.8-1 e a resposta de frequência correspondente à função de transferência dada pela Eq. 16.8-2 são iguais.

16.9 RESUMO

- Um filtro ideal separa a entrada em duas partes. Uma parte é transferida para a saída sem sofrer nenhuma alteração; a outra é eliminada. Em outras palavras, a saída de um filtro ideal é uma cópia exata de parte do sinal de entrada.
- Existem várias formas de separar a entrada do filtro em duas partes e, portanto, existem vários tipos de filtros ideais. A Tabela 16.3-1 mostra os quatro tipos mais comuns.
- Infelizmente, não existem filtros ideais. Os filtros usados na prática são circuitos que se comportam aproximadamente como filtros ideais.
- Os **filtros de Butterworth** têm uma resposta de frequência que se aproxima da resposta de frequência de um filtro ideal.
- A resposta de frequência de filtros de segunda ordem é caracterizada por três parâmetros: o **ganho** k, a **frequência de canto** ω_0 e o **fator de qualidade** Q. Os circuitos dos filtros são projetados escolhendo o valor dos componentes para que o filtro apresente os valores desejados de k, ω_0 e Q.

  1. A Tabela 16.4-1 fornece as informações necessárias para projetar filtros *RLC* de segunda ordem.
  2. A Tabela 16.4-2 fornece as informações necessárias para projetar filtros de Sallen-Key.
- Os filtros de ordem superior são filtros de ordem maior que 2. Uma estratégia muito usada para projetar filtros de ordem superior consiste em ligar em cascata dois ou mais filtros de segunda ordem.
- Usando o programa PSpice, é possível verificar se a função de transferência do circuito de um filtro é a função de transferência desejada.
- Os subcircuitos do programa PSpice facilitam a simulação de filtros de ordem superior. A Tabela 16.6-1 mostra os subcircuitos do PSpice para os quatro filtros de Sallen-Key.

PROBLEMAS

Seção 16.3 Filtros

P 16.3-1 Determine a função de transferência de um filtro passa-baixas de Butterworth de terceira ordem com uma frequência de corte de 100 Hz.

Resposta: $H_B(s) = \dfrac{628^3}{(s+628)\left(s^2+628s+628^2\right)}$

P 16.3-2 Um ganho de CC pode ser acrescentado aos filtros passa-baixas de Butterworth definindo a função de transferência como

$$H_B(s) = \frac{\pm k}{D(s)}$$

em que $D(s)$ é um dos polinômios da Tabela 16.3-2 e k é o ganho de CC. O ganho de CC também é chamado de ganho na banda passante. Determine a função de transferência de um filtro passa-baixas de Butterworth de terceira ordem com uma frequência de corte de 100 rad/s e um ganho na banda passante igual a 5.

P 16.3-3 Os filtros passa-altas de Butterworth têm uma função de transferência da forma

$$H_A(s) = \frac{\pm k s^n}{D_n(s)}$$

em que n é a ordem do filtro, $D_n(s)$ é o polinômio de ordem n da Tabela 16.3-2 e k é o ganho na banda passante. Determine a função de transferência de um filtro passa-altas de Butterworth de terceira ordem com uma frequência de corte de 100 rad/s e um ganho na banda passante igual a 5.

Resposta: $H_A(s) = \dfrac{5 \cdot s^3}{(s+100)(s^2+100s+10000)}$

P 16.3-4 Os filtros passa-altas de Butterworth têm uma função de transferência da forma

$$H_A(s) = \frac{\pm k s^n}{D_n(s)}$$

em que n é a ordem do filtro, $D_n(s)$ é o polinômio de ordem n da Tabela 16.3-2 e k é o ganho na banda passante. Determine a função de transferência de um filtro passa-altas de Butterworth de quarta ordem com uma frequência de corte de 500 Hz e um ganho na banda passante igual a 5.

P 16.3-5 Um filtro de banda passante possui duas frequências de corte, ω_a e ω_b. Suponha que ω_b seja bem menor que $\omega_a, \omega_b < \omega_a/10$, digamos. Seja $H_B(s)$ a função de transferência de um filtro passa-baixas com uma frequência de corte igual a ω_a e $H_A(s)$ a função de transferência de um filtro passa-altas com uma frequência de corte igual a ω_b. A função de transferência de um filtro de banda passante pode ser obtida como o produto das funções de transferência dos filtros passa-baixas e passa-altas, $H_P(s) = H_B(s) \cdot H_A(s)$. A ordem do filtro de banda passante é igual à soma das ordens dos filtros passa-baixas e passa-altas. Em geral, as ordens do filtro passa-baixas e do filtro passa-altas são iguais, caso em que a ordem do filtro de banda passante é par. O ganho na banda passante do filtro de banda passante é o produto dos ganhos dos filtros passa-baixas e passa-altas. Determine a função de transferência de um filtro de banda passante de quarta ordem com frequências de corte de 100 rad/s e 2000 rad/s e um ganho de banda passante igual a 4.

Resposta:

$$H_P(s) = \frac{16.000.000 \cdot s^2}{(s^2 + 141{,}4s + 10.000)(s^2 + 2828s + 4.000.000)}$$

P 16.3-6 Em algumas aplicações, os filtros de banda passante são usados para deixar passar apenas os sinais com certa frequência ω_0. Para isso, as frequências de corte de um filtro de banda passante como o do problema anterior são escolhidas de modo a satisfazerem a relação $\sqrt{\omega_a \omega_b} = \omega_0$. A função de transferência do filtro é dada por

$$H_P(s) = k\left(\frac{\frac{\omega_0}{Q}s}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}\right)^m$$

A ordem de $H_P(s)$ é $2m$ e o ganho na banda passante é k. Funções de transferência desse tipo são facilmente implementadas pela associação em cascata de filtros iguais de segunda ordem. Q é o fator de qualidade de um dos estágios de segunda ordem. A frequência ω_0 é chamada de frequência central do filtro de banda passante. Determine a função de transferência de um filtro de banda passante de quarta ordem com uma frequência central de 250 rad/s, um ganho na banda passante igual a 4. Suponha que $Q = 1$.

Resposta: $H_P(s) = \dfrac{250.000s^2}{(s^2 + 250s + 62.500)^2}$

P 16.3-7 Um filtro notch tem duas frequências de corte, ω_a e ω_b. Suponha que ω_b seja bem menor que ω_b, $\omega_b < \omega_a/10$, digamos. Seja $H_B(s)$ a função de transferência de um filtro passa-baixas com uma frequência de corte igual a ω_b e $H_A(s)$ a função de transferência de um filtro passa-altas com uma frequência de corte igual a ω_a. A função de transferência de um filtro notch pode ser obtida como a soma das funções de transferência dos filtros passa-baixas e passa-altas, $H_N(s) = H_B(s) + H_A(s)$. A ordem do filtro de banda passante é igual à soma das ordens dos filtros passa-baixas e passa-altas. Em geral, as ordens do filtro passa-baixas e do filtro passa-altas são iguais, caso em que a ordem do filtro de banda passante é par. O ganho na banda passante do filtro passa-baixas e do filtro passa-altas são iguais entre si e iguais ao ganho na banda passante do filtro notch. Determine a função de transferência de um filtro notch de quarta ordem com frequências de corte de 100 rad/s e 2000 rad/s e um ganho na banda passante igual a 2.

Resposta:

$$H_{n.v.}(s) = \frac{2s^4 + 282{,}8s^3 + 40.000s^2 + 56.560.000s + 8 \cdot 10^{10}}{(s^2 + 141{,}4s + 10.000)(s^2 + 2828s + 4.000.000)}$$

P 16.3-8 Em algumas aplicações, os filtros notch são usados para rejeitar apenas os sinais com certa frequência ω_0. Para isso, as frequências de corte de um filtro notch como o do problema anterior são escolhidas de modo a satisfazerem a relação $\sqrt{\omega_a \omega_b} = \omega_0$. A função de transferência do filtro é dada por

$$H_{n.v.}(s) = k - H_P(s) = k - k\left(\frac{\dfrac{\omega_0}{Q}s}{s^2 + \dfrac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^{\,2}}\right)^m$$

A ordem de $H_N(s)$ é $2m$ e o ganho na banda passante é k. Funções de transferência desse tipo são facilmente implementadas pela associação em cascata de filtros idênticos de segunda ordem. Q é o fator de qualidade de um dos estágios de segunda ordem. A frequência ω_0 é chamada de frequência central do filtro notch. Determine a função de transferência de um filtro notch de quarta ordem com uma frequência central de 250 rad/s e um ganho na banda passante igual a 4. Suponha que $Q = 1$.

Resposta: $H_{n.v.}(s) = \dfrac{4(s^2 + 62.500)^2}{(s^2 + 250s + 62.500)^2}$

P 16.3-9 Funções de transferência da forma

$$H_B(s) = k\left(\frac{\omega_0^{\,2}}{s^2 + \dfrac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^{\,2}}\right)^m$$

são filtros do tipo passa-baixas (mas não são filtros de Butterworth.) A ordem desse filtro passa-baixas é $2m$ e o ganho na banda passante é k. Funções de transferência desse tipo são facilmente implementadas pela associação em cascata de filtros idênticos de segunda ordem. Q é o fator de qualidade de um dos estágios de segunda ordem. A frequência ω_0 é a frequência de corte, ω_c, do filtro passa-baixas. Determine a função de transferência de um filtro passa-baixas de quarta ordem com uma frequência de corte de 250 rad/s e um ganho de banda passante igual a 4. Suponha que $Q = 1$.

P 16.3-10 Funções de transferência da forma

$$H_A(s) = k\left(\frac{s^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0{}^2}\right)^m$$

são filtros do tipo passa-altas (mas não são filtros de Butterworth.) A ordem desse filtro passa-altas é $2m$ e o ganho de banda de passante é k. Funções de transferência desse tipo são facilmente implementadas pela associação em cascata de filtros idênticos de segunda ordem. Q é o fator de qualidade de um dos estágios de segunda ordem. A frequência ω_0 é a frequência de corte, ω_c, do filtro passa-altas. Determine a função de transferência de um filtro passa-altas de quarta ordem com uma frequência de corte de 250 rad/s e um ganho na banda passante igual a 4. Suponha que $Q = 1$.

Seção 16.4 Filtros de Segunda Ordem

P 16.4-1 O circuito da Figura P 16.4-1 é um filtro de banda passante de segunda ordem. Projete o filtro para que tenha $k = 1$, $\omega_0 = 1000$ rad/s e $Q = 1$.

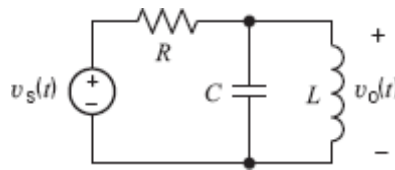



Figura P 16.4-1

P 16.4-2 O circuito da Figura P 16.4-2 é um filtro passa-baixas de segunda ordem. Projete este filtro para que tenha $k = 1$, $\omega_0 = 200$ rad/s e $Q = 0{,}707$.

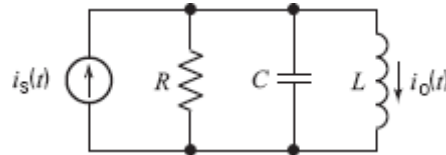



Figura P 16.4-2

P 16.4-3 O circuito da Figura P 16.4-3 é um filtro passa-baixas de segunda ordem do tipo conhecido como *multiple-loop feed-back filter* (MFF). Como a impedância de saída desse tipo de filtro é zero, ele pode ser usado como estágio de filtragem em um filtro em cascata sem ser carregado pelo estágio seguinte. A função de transferência do MFF passa-baixas é

$$H_B(s) = \frac{-\frac{1}{R_1R_3C_1C_2}}{s^2 + \left(\frac{1}{R_1C_1} + \frac{1}{R_2C_1} + \frac{1}{R_3C_1}\right)s + \frac{1}{R_2R_3C_1C_2}}$$

Projete o filtro para que tenha $\omega_0 = 2000$ rad/s e $Q = 8$. Qual é o valor do ganho de CC?

Sugestão: Faça $R_2 = R_3 = R$ e $C_1 = C_2 = C$. Escolha um valor conveniente para C e calcule R para obter $\omega_0 =$ 2000 rad/s. Calcule R_1 para obter $Q = 8$.

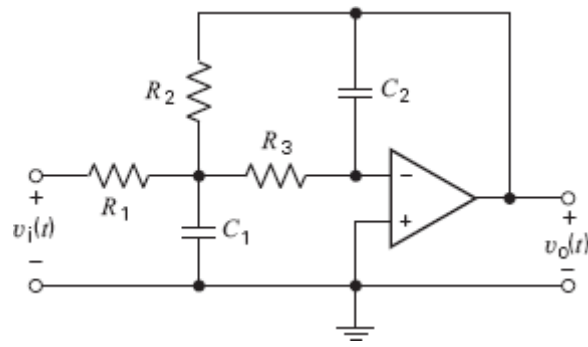



Figura P 16.4-3

P 16.4-4 O circuito da Figura P 16.4-4 é um filtro de banda passante de segunda ordem do tipo MFF (veja o problema anterior). A função de transferência do MFF de banda passante é

$$H_P(s) = \frac{-\dfrac{s}{R_1 C_2}}{s^2 + \left(\dfrac{1}{R_2 C_1} + \dfrac{1}{R_2 C_2}\right)s + \dfrac{R_1 + R_3}{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2}}$$

Para projetar o filtro, escolha um valor conveniente de C e use as equações

$$R_1 = \frac{Q}{k\omega_0 C}, \quad R_2 = \frac{2Q}{\omega_0 C} \quad \text{e} \quad R_3 = \frac{2Q}{\omega_0 C(2Q^2 - k)}$$

Projete o filtro para que $k = 5$, $\omega_0 = 2000$ rad/s e $Q = 8$.

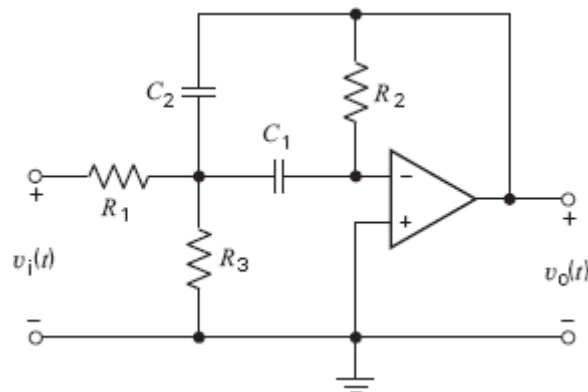



Figura P 16.4-4

P 16.4-5 O circuito da Figura P 16.4-5 é um filtro passa-baixas com uma função de transferência

$$H_B(s) = \frac{\dfrac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}{s^2 + \dfrac{1}{R_1 C_1} s + \dfrac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

Projete o filtro para que $k = 1$, $\omega_0 = 1000$ rad/s e $Q = 1$.

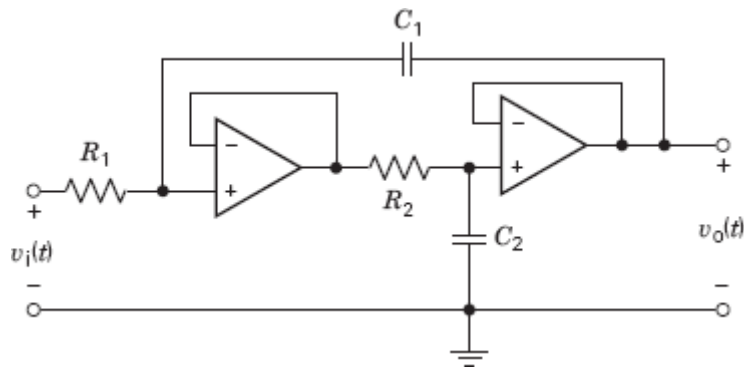



Figura P 16.4-5

P 16.4-6 A transformação *CR:RC* é usada para converter um filtro passa-baixas em passa-altas ou vice-versa. Nessa transformação, que se aplica a filtros *RC* com amplificadores operacionais, os capacitores são substituídos por resistores e os resistores são substituídos por capacitores. Aplique a transformação *CR:RC* ao filtro passa-baixas da Figura P 16.4-5 para obter o filtro passa-altas da Figura P 16.4-6. Projete o filtro passa-altas para que $k = 1$, $\omega_0 = 1000$ rad/s e $Q = 1$.

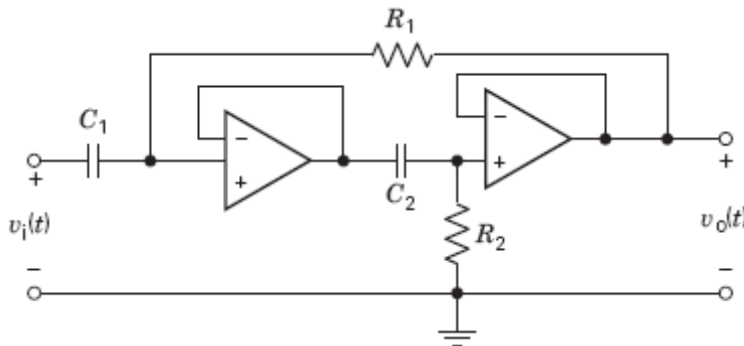



Figura P 16.4-6

P 16.4-7 Vimos que é possível mudar a escala de frequência de uma função de transferência substituindo s por s/k_f . Outra forma de mudar a escala de frequência de um circuito é dividir todas as capacitâncias e indutâncias pelo fator de escala k_f . O efeito é o mesmo: a resposta de frequência é deslocada para a direita. Em particular, as frequências de corte, de canto e de ressonância são multiplicadas por k_f . Suponha que estejamos interessados em mudar a frequência de corte de um circuito de filtro de ω_{antigo} para ω_{novo}. Para isso, calculamos o fator de escala

$$k_f = \frac{\omega_{novo}}{\omega_{antigo}}$$

e dividimos todas as capacitâncias e indutâncias do circuito por k_f . Use uma mudança de escala da frequência para mudar a frequência de corte do circuito da Figura P 16.4-7 para 250 rad/s.

Resposta: $k_f = 0{,}05$.

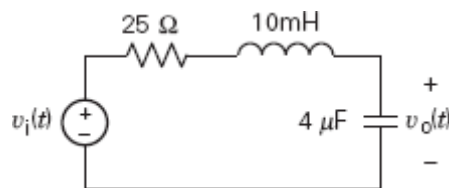



Figura P 16.4-7

P 16.4-8 A mudança de escala das impedâncias pode ser usada para ajustar as impedâncias de um circuito. Seja k_m o fator de escala das impedâncias. A mudança de escala das impedâncias é conseguida multiplicando

todas as impedâncias do circuito por k_m. Isso significa que as resistências e indutâncias são multiplicadas por k_m, mas as capacitâncias são divididas por k_m. Funções de transferência da forma $H(s) = V_o(s)/V_i(s)$ e $H(s) = I_o(s)/I_i(s)$ não são afetadas por uma mudança de escala das impedâncias. Funções de transferência da forma $H(s) = V_o(s)/I_i(s)$ são multiplicadas por k_m, enquanto funções de transferência da forma $H(s) = I_o(s)/V_i(s)$ são divididas por k_m. Use uma mudança de escala das impedâncias para mudar o valor das capacitâncias do filtro da Figura P 16.4-8 de tal forma que as duas capacitâncias estejam entre 0,01 μF e 1,0 μF. Calcule a função de transferência antes e depois da mudança de escala das impedâncias.

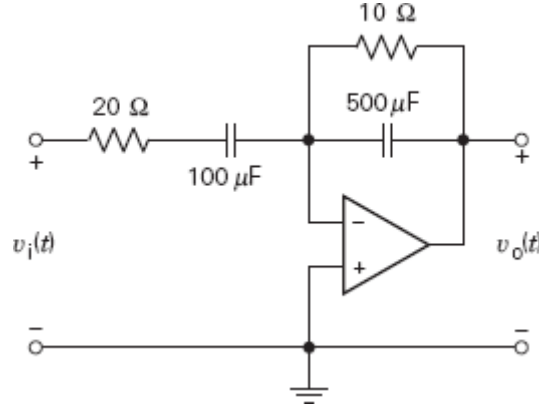



Figura P 16.4-8

P 16.4-9 Um amplificador de banda passante apresenta a resposta de frequência da Figura P 16.4-9 Determine a função de transferência $H(s)$.

Sugestão: $\omega_0 = 2\pi \times 10$ MHz, $k = 10$ dB, $BP = 0{,}2$ MHz, $Q = 50$

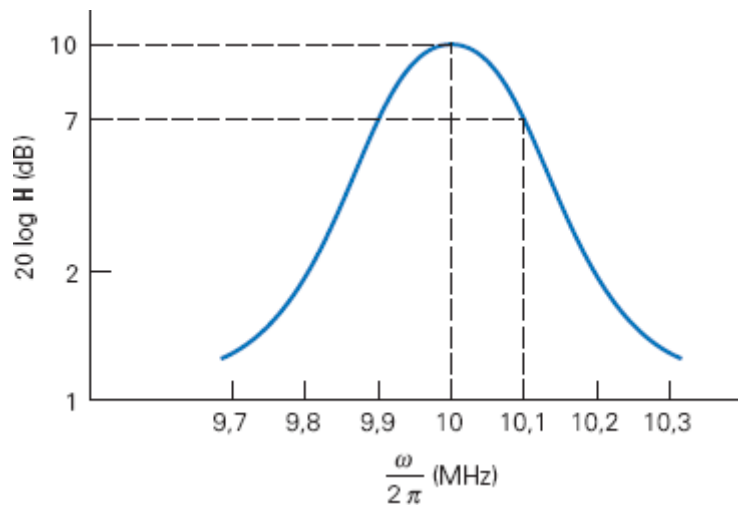



Figura P 16.4-9 Resposta de frequência de um amplificador de banda passante.

P 16.4-10 Um filtro de banda passante pode ser montado usando o circuito da Figura P 16.4-10. Determine (a) o módulo de $\mathbf{H} = \mathbf{V}_o/\mathbf{V}_s$, (b) as frequências de corte de baixa e alta frequência, ω_1 e ω_2, e (c) o ganho na banda passante para $\omega_1 \ll \omega \ll \omega_2$.

Resposta: **(a)** $H(s) = -\dfrac{R_2C_1s}{(1+R_2C_2s)(1+R_1C_1s)}$; **(b)** $\omega_1 = \dfrac{1}{R_1C_1}$ e $\omega_2 = \dfrac{1}{R_2C_2}$; **(c)** $-\dfrac{R_2}{R_1}$.

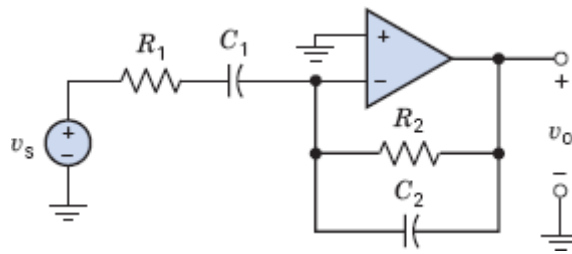



Figura P 16.4-10 Circuito de um filtro de banda passante.

P 16.4-11 A Figura P 16.4-11 mostra um filtro passa-baixas de ganho unitário que utiliza um amplificador operacional. Determine a função de transferência $\mathbf{H}(\omega) = \mathbf{V}_o/\mathbf{V}_s$.

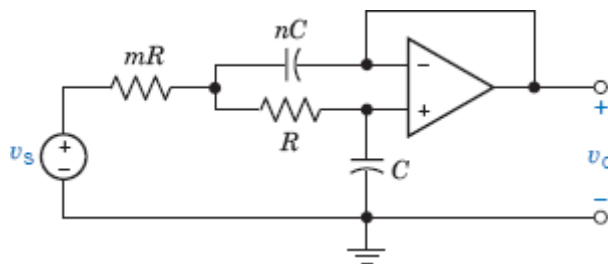



Figura P 16.4-11

P 16.4-12 Um sensor acústico produz uma saída senoidal com uma frequência de 5 kHz. O sinal do sensor foi contaminado por ruído. A Figura P 16.4-12 mostra um filtro de banda passante que foi projetado para separar o sinal do ruído. A tensão v_s representa o sinal ruidoso proveniente do sensor. A saída v_o deve ser um sinal menos ruidoso. Determine a frequência central e a banda passante deste filtro de banda passante.

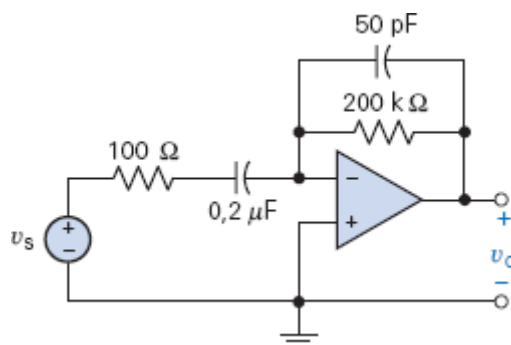



Figura P 16.4-12

Seção 16.5 Filtros de Ordem Superior

P 16.5-1 Projete o circuito de um filtro passa-baixas que tenha a função de transferência

$$H_B(s) = \frac{628^3}{(s + 628)(s^2 + 628s + 628^2)}$$

Resposta: veja a Figura PS 16-1.

P 16.5-2 Projete um filtro que tenha a função de transferência

$$H_A(s) = \frac{5 \cdot s^3}{(s + 100)(s^2 + 100s + 10.000)}$$

Resposta: veja a Figura PS 16-2.

P 16.5-3 Projete um filtro que tenha a função de transferência

$$H_P(s) = \frac{16.000.000 \cdot s^2}{(s^2 + 141{,}4s + 10.000)(s^2 + 2828s + 4.000.000)}$$

Resposta: veja a Figura PS 16-3.

P 16.5-4 Projete um filtro que tenha a função de transferência

$$H_P(s) = \frac{250.000s^2}{(s^2 + 250s + 62.500)^2}$$

Resposta: veja a Figura PS 16-4.

P 16.5-5 Projete um filtro que tenha a função de transferência

$$H_{n.v.}(s) = \frac{2s^2}{(s^2 + 2828s + 4.000.000)} + \frac{20.000}{(s^2 + 141{,}4s + 10.000)}$$

Resposta: veja a Figura PS 16-5.

P 16.5-6 Projete um circuito que tenha a função de transferência

$$H_{n.v.}(s) = \frac{4(s^2 + 62.500)^2}{(s^2 + 250s + 62.500)^2}$$

Resposta: veja a Figura SP 16-6.

P 16.5-7

(a) Escreva uma expressão para a função de transferência $H_a(s) = V_1/V_s$ do circuito da Figura P 16.5-7*a*.

(b) Escreva uma expressão para a função de transferência $H_b(s) = V_2/V_1$ do circuito da Figura P 16.5-7*b*.

(c) Os dois filtros dos itens anteriores são filtros de primeira ordem. O circuito da Figura P 16.5-7*c* é a ligação em cascata dos circuitos da Figura P 16.5-7*a* e da Figura P 16.5-7*b*. Escreva uma expressão para a função de transferência $H_C(s) = V_2/V_s$ do filtro de segunda ordem da Figura P 16.5-7*c*.

(d) Por que não temos $H_c(s) = H_a(s)H_b(s)$?

Sugestão: verifique se o segundo circuito carrega o primeiro.

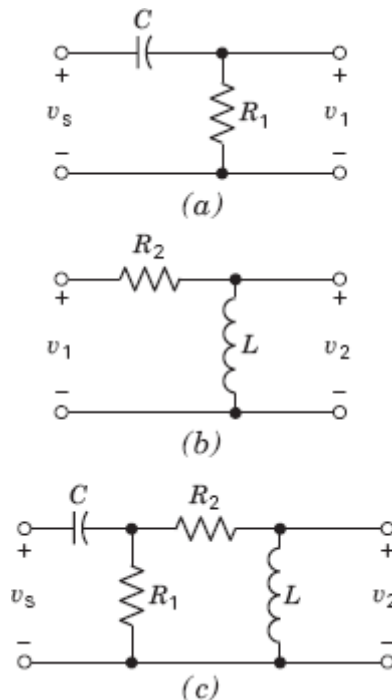



Figura P 16.5-7 (*a*) Circuito para $\mathbf{H}_a$. (*b*) Circuito para $\mathbf{H}_b$. (*c*) Circuito para $\mathbf{H}_c$.

P 16.5-8 Dois amplificadores são ligados em cascata, como na Figura P 16.5-8. A função de transferência dos dois amplificadores é da forma

$$H(s) = \frac{As}{(1 + s/\omega_B)(1 + s/\omega_A)}$$

Determine a função de transferência do filtro de quarta ordem resultante. (Suponha que o segundo estágio não carregue o primeiro.)

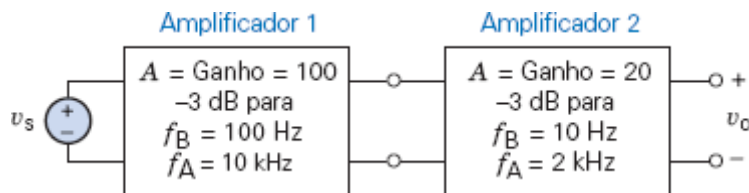



Figura P 16.5-8 Dois amplificadores ligados em cascata.

P 16.5-9 Um filtro de segunda ordem utiliza dois estágios iguais de primeira ordem, como mostra a Figura P 16.5-9. Cada estágio deve ter uma frequência de quebra ω_c = 1000 rad/s e um ganho na banda passante de 0 dB. (a) Determine os valores de R_1, R_2 e C. (b) Determine o ganho, em decibéis, do filtro de segunda ordem para ω = 10.000 rad/s.

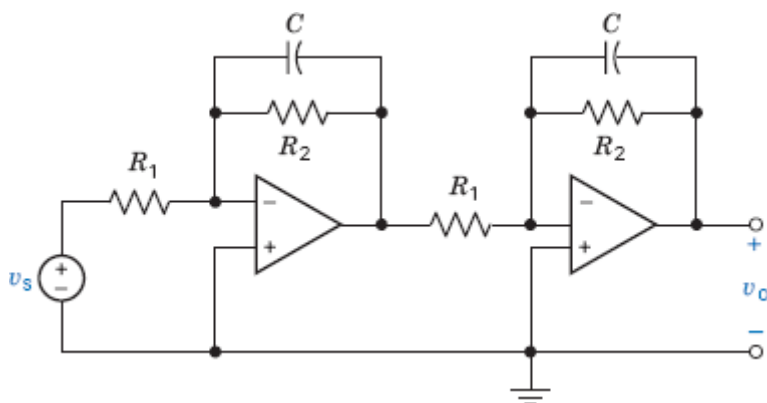



Figura P 16.5-9

Seção 16.7 Como Podemos Testar . . . ?

P 16.7-1 As especificações de um filtro de banda passante são ω_0 = 100 rad/s, Q = 5 e k = 3. A função de transferência de um filtro projetado para satisfazer essas especificações é

$$H(s) = \frac{75s}{s^2 + 25s + 10.000}$$

O filtro satisfaz as especificações?

P 16.7-2 As especificações de um filtro de banda passante são ω_0 = 100 rad/s, Q = 4 e k = 3. A função de transferência de um filtro projetado para satisfazer essas especificações é

$$H(s) = \frac{75s}{s^2 + 25s + 10.000}$$

O filtro satisfaz as especificações?

P 16.7-3 As especificações de um filtro passa-baixas são ω_0 = 20 rad/s, Q = 0,8 e k = 1,5. A função de transferência de um filtro projetado para satisfazer essas especificações é

$$H(s) = \frac{600}{s^2 + 25s + 400}$$

O filtro satisfaz as especificações?

P 16.7-4 As especificações de um filtro passa-baixas são $\omega_0 = 25$ rad/s, $Q = 0{,}4$ e $k = 1{,}2$. A função de transferência de um filtro projetado para satisfazer essas especificações é

$$H(s) = \frac{750}{s^2 + 62{,}5s + 625}$$

O filtro satisfaz as especificações?

P 16.7-5 As especificações de um filtro passa-altas são $\omega_0 = 12$ rad/s, $Q = 4$ e $k = 5$. A função de transferência de um filtro projetado para satisfazer essas especificações é

$$H(s) = \frac{5s^2}{s^2 + 30\,s + 144}$$

O filtro satisfaz as especificações?

Problemas com o PSpice

PS 16-1 O circuito do filtro da Figura PS 16-1 foi projetado para ter a função de transferência

$$H_B(s) = \frac{628^3}{(s + 628)\left(s^2 + 628s + 628^2\right)}$$

Use o programa PSpice para verificar se a função de transferência do filtro é a função de transferência desejada.

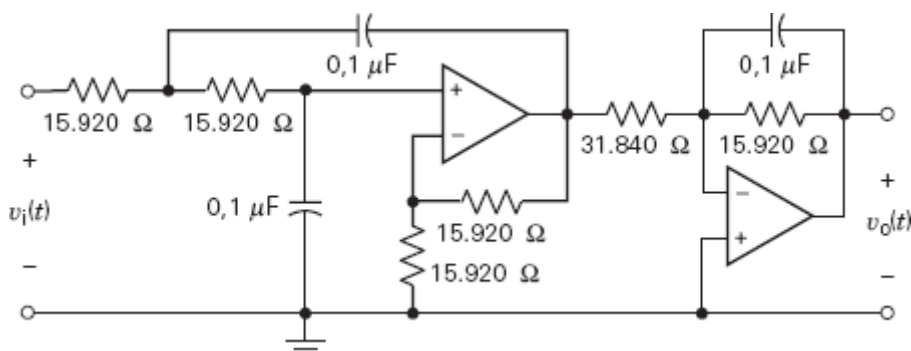



Figura PS 16-1

PS 16-2 O circuito do filtro da Figura PS 16-2 foi projetado para ter a função de transferência

$$H_A(s) = \frac{5 \cdot s^3}{(s + 100)(s^2 + 100s + 10.000)}$$

Use o programa PSpice para verificar se a função de transferência do filtro é a função de transferência desejada.

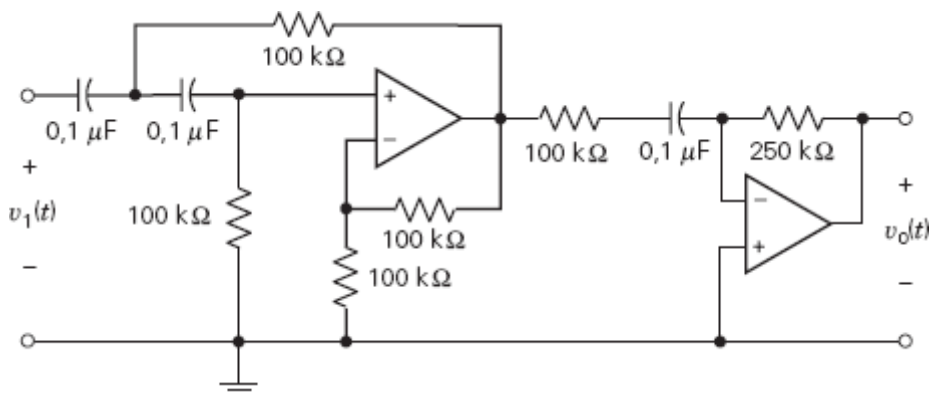



Figura PS 16-2

PS 16-3 O circuito do filtro da Figura PS 16-3 foi projetado para ter a função de transferência

$$H_P(s) = \frac{16.000.000 \cdot s^2}{(s^2 + 141{,}4s + 10.000)(s^2 + 2828s + 4.000.000)}$$

Use o programa PSpice para verificar se a função de transferência do filtro é a função de transferência desejada.

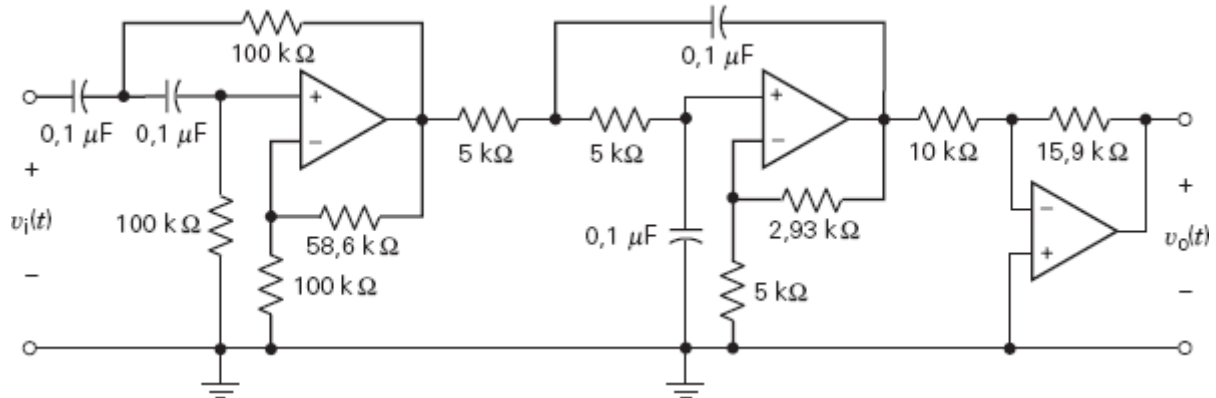



Figura PS 16-3

PS 16-4 O circuito do filtro da Figura PS 16-4 foi projetado para ter a função de transferência

$$H_P(s) = \frac{250.000s^2}{(s^2 + 250s + 62.500)^2}$$

Use o programa PSpice para verificar se a função de transferência do filtro é a função de transferência desejada.

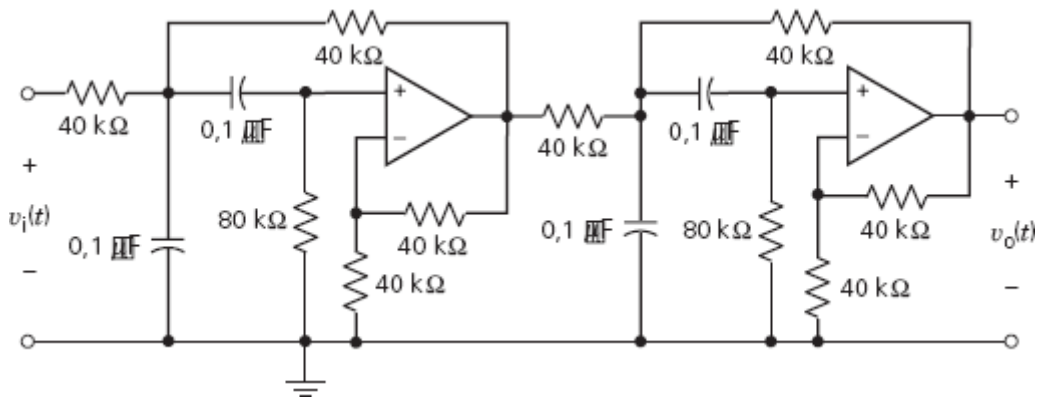



Figura PS 16-4

PS 16-5 O circuito do filtro da Figura PS 16-5 foi projetado para ter a função de transferência

$$H_{n.v.}(s) = \frac{2s^2}{(s^2 + 2828s + 4.000.000)} + \frac{20.000}{(s^2 + 141{,}4s + 10.000)}$$

Use o programa PSpice para verificar se a função de transferência do filtro é a função de transferência desejada.

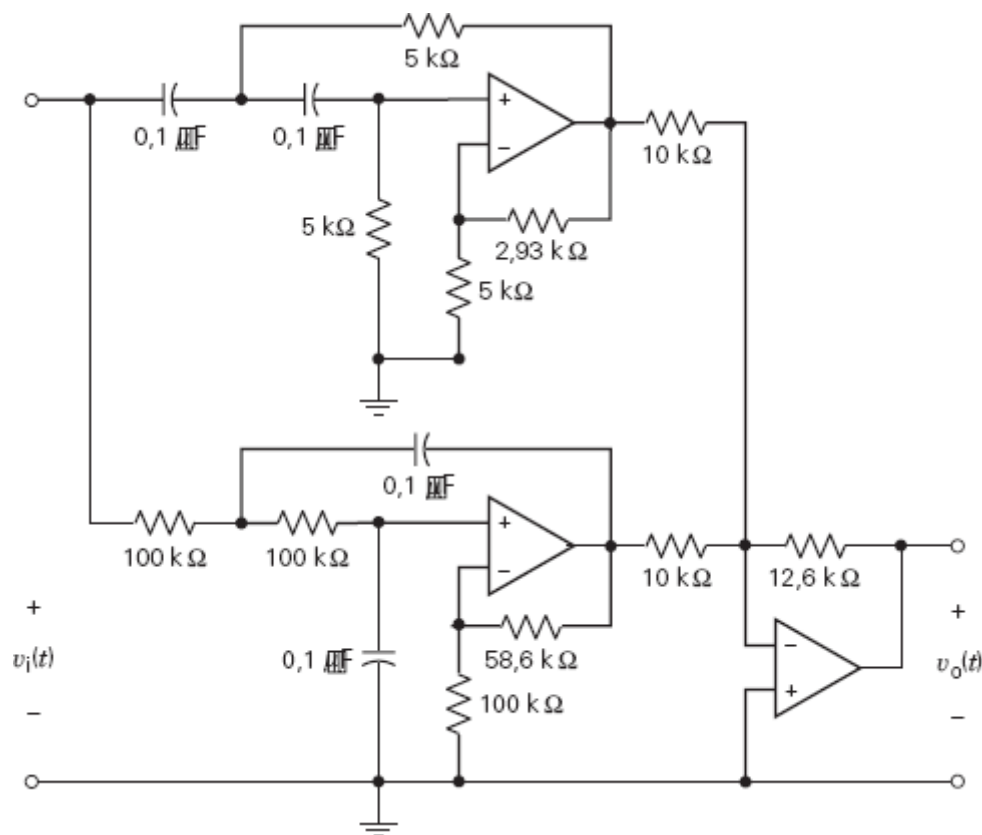



Figura PS 16-5

PS 16-6 O circuito do filtro da Figura PS 16-6 foi projetado para ter a função de transferência

$$H_N(s) = \frac{4(s^2 + 62.500)^2}{(s^2 + 250s + 62.500)^2}$$

Use o programa PSpice para verificar se a função de transferência do filtro é a função de transferência desejada.

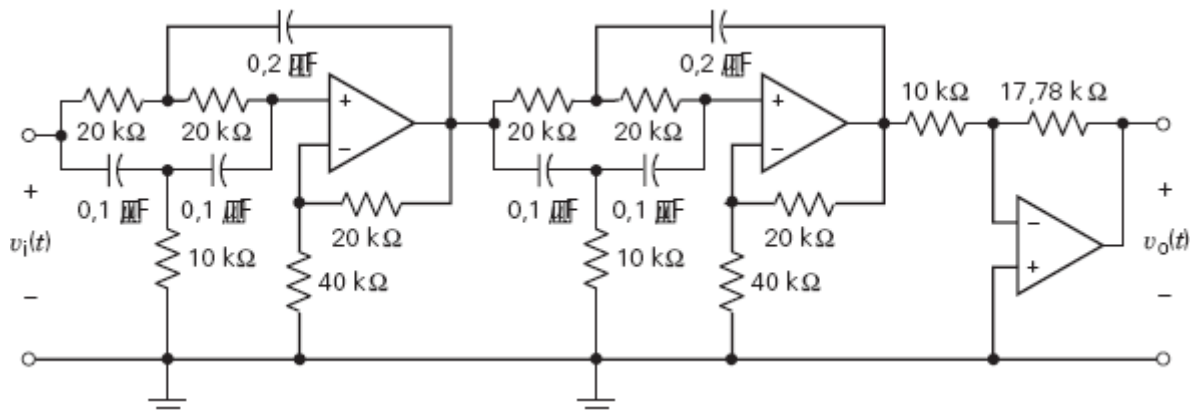



Figura PS 16-6

PS 16-7 A Figura PS 16-7 mostra um filtro notch. A saída de um filtro de dois estágios é v_1 e a saída de um filtro de três estágios é v_2. Plote os gráficos de Bode de $\mathbf{V}_1/\mathbf{V}_s$ e $\mathbf{V}_2/\mathbf{V}_s$ e compare os resultados para L = 10 mH e C = 1 μF.

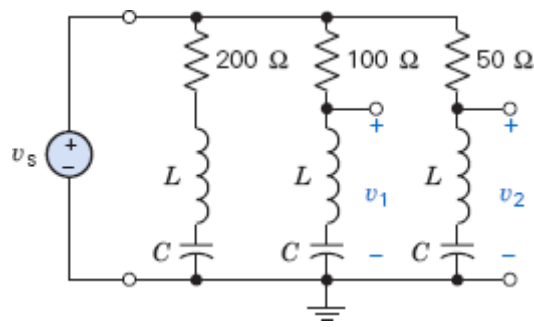



Figura PS 16-7

PS 16-8 Um sensor acústico opera no intervalo de 5 kHz a 25 kHz e é representado na Figura PS 16-8 por v_s. É especificado que o filtro de banda passante da figura deve deixar passar o sinal neste intervalo de frequências com um ganho que pode diferir no máximo de 3 dB do ganho na frequência central. Determine a banda passante e a frequência central do circuito supondo que os parâmetros do amplificador operacional sejam $R_i = 500$ kΩ, $R_o = 1$ kΩ e $A = 10^6$.

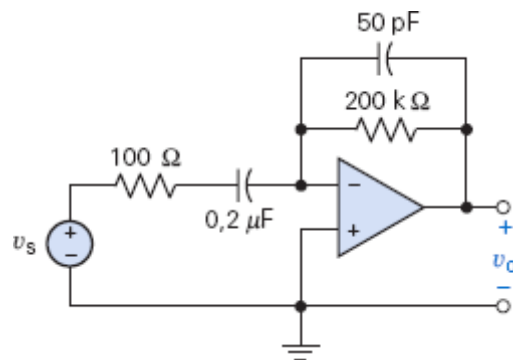
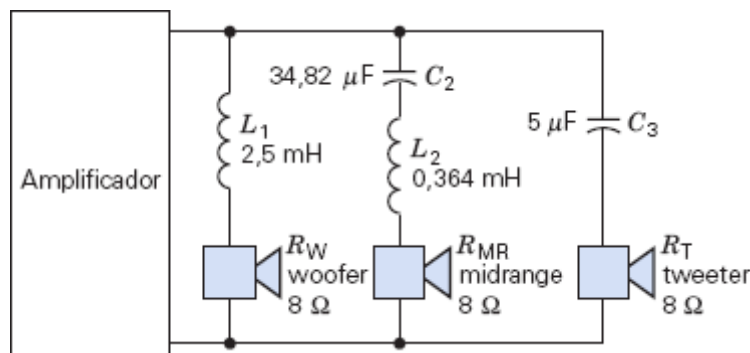



Figura PS 16-8

PS 16-9 Frequentemente, os sistemas de áudio contêm dois ou mais alto-falantes que se destinam a reproduzir partes diferentes do espectro de audiofrequência. Em um sistema de três alto-falantes, o primeiro, chamado *woofer*, reproduz as baixas frequências, o segundo, o *tweeter*, cuida das altas frequências e o terceiro, o *midrange*, reproduz as frequências intermediárias.

Um sistema de três filtros, conhecido como *crossover*, é usado para dividir o sinal de áudio nas três faixas de frequências apropriadas para alimentar os três alto-falantes. Muitos circuitos podem ser usados para esse fim. Um circuito simples, baseado em circuitos *RL* série, *RC* série e *RLC* série, aparece na Figura PS 16-9. Vamos supor que as impedâncias dos alto-falantes são puramente resistivas. As características dos filtros são as seguintes: (1) filtro do woofer, frequência de crossover em $X_{L1} = R_W$; (2) filtro do tweeter, frequência de crossover em $X_{C3} = R_T$; (3) filtro do midrange, com os componentes C_2, L_2 e R_{MR} formando um circuito ressonante série com frequências de corte superior e inferior f_a e f_b, respectivamente. A frequência de ressonância é $f_0 = \sqrt{f_a f_b}$.

Supondo que os três alto-falantes tenham uma resistência de 8 Ω, determine a resposta de frequência e a frequência de corte dos três filtros. Plote o gráfico de Bode dos três filtros. Determine a banda passante do filtro do alto-falante midrange.

Figura PS 16-9 Filtro triplo para um sistema de alto-falantes.

Problemas de Projeto

PP 16-1 Projete um filtro de banda passante com uma frequência central de 100 kHz e uma banda passante de 10 kHz usando o circuito da Figura PP 16-1. Suponha que C = 100 pF e calcule o valor de R e R_3. Use o programa PSpice para confirmar que o projeto satisfaz as especificações.

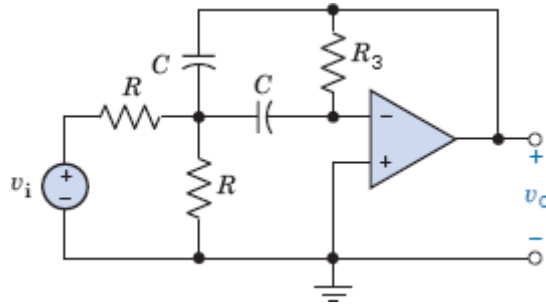



Figura PP 16-1

PP 16-2 Um transmissor de rádio necessita de um filtro de banda passante para eliminar ruídos de baixa frequência produzidos por automóveis. As medidas indicam que os ruídos do tráfego estão no intervalo 2 rad/s < ω < 12 rad/s. Um projetista propõe usar um filtro com uma função de transferência da forma

$$H(s) = \frac{(1 + s/\omega_1)^2(1 + s/\omega_3)}{(1 + s/\omega_2)^3}$$

em que $s = j\omega$.

Deseja-se que os sinais com ω > 100 rad/s passem com uma perda menor que 3 dB e que o ruído do tráfego seja reduzido de 46 dB ou mais. Escolha os valores de ω_1, ω_2 e ω_3 e plote o gráfico de Bode.

PP 16-3 Um transmissor de rádio necessita de um filtro de banda passante para eliminar ruídos de baixa frequência produzidos por automóveis. As medidas indicam que os ruídos do tráfego estão no intervalo 2 rad/s < ω < 12 rad/s. Um projetista propõe usar um filtro com uma função de transferência da forma

$$H(s) = \frac{(1 + s/\omega_1)^2(1 + s/\omega_3)^2}{(1 + s/\omega_2)^2(1 + s/\omega_4)^2}$$

em que $s = j\omega$.

Deseja-se que os sinais com ω > 130 rad/s passem com uma perda menor que 4 dB e que o ruído do tráfego seja reduzido de 35 dB ou mais. Escolha os valores de ω_1, ω_2, ω_3 e ω_4 e plote o gráfico de Bode.

CAPÍTULO 17 Circuitos de Duas Portas

NESTE CAPÍTULO

17.1 *Introdução*

Muitos circuitos elétricos dispõem de apenas duas *portas* de acesso, ou seja, de apenas dois lugares onde sinais podem ser introduzidos ou onde sinais podem ser extraídos. Um cabo coaxial ligando o Rio de Janeiro a São Paulo, por exemplo, dispõe de duas portas, uma em cada cidade. Como, neste capítulo, nosso objetivo é analisar os circuitos do ponto de vista dos terminais, sem levar em conta a estrutura interna, eles serão descritos por meio de relações entre as tensões e correntes das portas.

Existem várias razões para estudar os circuitos de duas portas e os parâmetros usados para descrevê-los. Quase todos os circuitos têm pelo menos duas portas. Podemos aplicar um sinal de entrada a uma porta e obter um sinal de saída na outra. Os parâmetros do circuito de duas portas descrevem totalmente o comportamento do circuito em termos da tensão e corrente em cada porta. Assim, o conhecimento dos parâmetros de um circuito de duas portas permite prever o funcionamento do circuito ao ser ligado a um sistema maior. Os circuitos de duas portas também são usados para modelar dispositivos elétricos e eletrônicos como transformadores, linhas de transmissão, transistores e amplificadores operacionais.

Um circuito de duas portas pode ser representado pelo diagrama da Figura 17.1-1. Um circuito com dois pares de terminais é chamado de *circuito de duas portas* se toda a corrente que entra por um terminal de um par sai pelo outro terminal do par. Isso acontece, por exemplo, se uma corrente I_1 entra pelo terminal a e sai pelo terminal b do par de terminais de entrada a-b. Vamos supor em nossa discussão que não existam fontes independentes nem condições iniciais diferentes de zero no interior do circuito de duas portas e que o circuito seja linear. Os circuitos de duas portas podem ser ou não puramente resistivos e em geral são descritos em termos da variável s ou da variável ω.

Um **circuito de duas portas** tem dois pontos de acesso, que consistem em pares de terminais. Toda a corrente que entra por um dos terminais de um par sai pelo outro terminal do mesmo par.

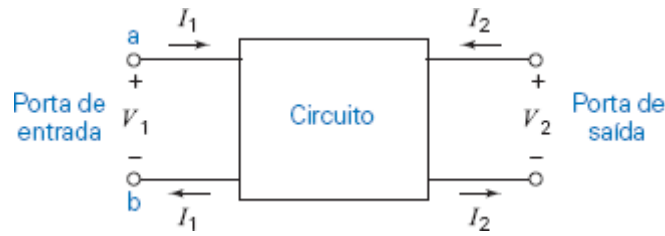



FIGURA 17.1-1 Circuito de duas portas.

17.2 A Transformação T-Π e os Circuitos de Duas Portas com Três Terminais

Dois circuitos que aparecem frequentemente na análise de circuitos são os circuitos T e os circuitos Π (Figura 17.2-1). Desenhados de outra forma, eles se tornam os circuitos Y e Δ da Figura 17.2-2.

Se um circuito possui simetria especular em relação a uma linha interna, ou seja, se é possível traçar uma linha que divida o circuito em duas partes simétricas, dizemos que o circuito é *simétrico*. O circuito T é simétrico se $Z_1 = Z_2$ e o circuito Π é simétrico se $Z_A = Z_B$. Além disso, se todas as impedâncias do circuito T ou do circuito Π são iguais, o circuito T ou Π é *totalmente simétrico*.

Observe que os circuitos da Figura 17.2-1 e da Figura 17.22 possuem duas portas e apenas três terminais. Isso acontece porque um dos terminais é comum a duas portas. Uma das portas, por exemplo, pode ser o par de terminais a-c e a outra o par de terminais b-c.

Podemos obter equações para transformar um circuito T em um circuito Π, ou um circuito Π em um circuito T, partindo do princípio de que, para serem equivalentes, os dois circuitos devem apresentar a mesma impedância entre os mesmos pares de terminais. Na porta 1 (terminais a-c) dos dois circuitos da Figura 17.2-2, por exemplo, devemos ter

$$Z_1 + Z_3 = \frac{Z_A(Z_B + Z_C)}{Z_A + Z_B + Z_C}$$

Para transformar um circuito Π em um circuito T, é preciso expressar as impedâncias Z_1, Z_2 e Z_3 em termos das impedâncias Z_A, Z_B e Z_C. Depois de algumas manipulações algébricas, concluímos que

$$Z_1 = \frac{Z_A Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C} \tag{17.2-1}$$

$$Z_2 = \frac{Z_B Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C} \tag{17.2-2}$$

$$Z_3 = \frac{Z_A Z_B}{Z_A + Z_B + Z_C} \tag{17.2-3}$$

As equações relativas à transformação inversa (de um circuito T para um circuito Π) são as seguintes:

$$Z_A = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_2} \tag{17.2-4}$$

$$Z_B = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_1} \tag{17.2-5}$$

$$Z_C = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_3} \tag{17.2-6}$$

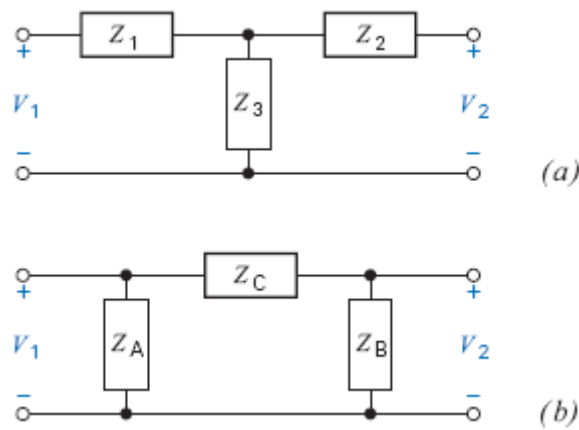



FIGURA 17.2-1 (*a*) Circuito T; (*b*) circuito Π.

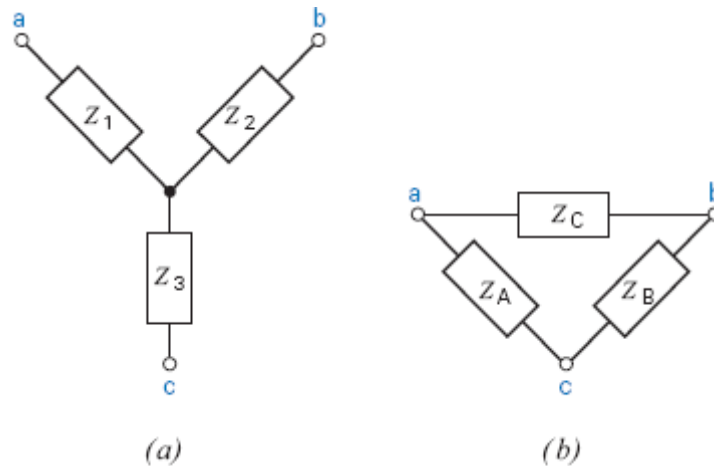



FIGURA 17.2-2 (*a*) Circuito Y; (*b*) circuito Δ.

Cada impedância do circuito T é o produto das impedâncias de dois ramos vizinhos do circuito Π dividido pela soma das impedâncias dos três ramos do circuito Π. Por outro lado, cada impedância do circuito Π é a soma de todos os produtos possíveis das impedâncias dos ramos do circuito T dividida por uma das impedâncias.

Quando um circuito T ou Π é totalmente simétrico, as equações de transformação se reduzem a

$$Z_T = \frac{Z_\Pi}{3} \qquad (17.2\text{-}7)$$

e

$$Z_\Pi = 3Z_T \qquad (17.2\text{-}8)$$

em que Z_T é a impedância de um dos ramos do circuito T e Z_Π é a impedância de um dos ramos do circuito Π.

EXEMPLO 17.2-1 Transformação T-Π

Determine o circuito Π equivalente ao circuito T da Figura 17.2-3*a*.

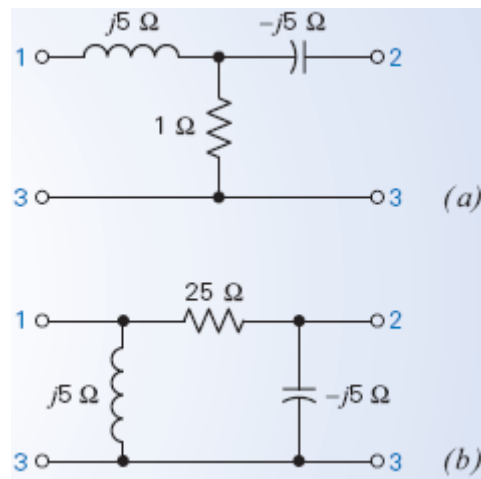



FIGURA 17.2-3 (*a*) Circuito T do Exemplo 17.2-1. (*b*) Circuito Π equivalente ao circuito T.

Solução

De acordo com a Eq. 17.2-4, a primeira impedância do circuito Π é

$$Z_A = \frac{Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1}{Z_2} = \frac{j5(-j5) + (-j5)1 + 1(j5)}{-j5} = j5\ \Omega$$

De acordo com a Eq. 17.2-5, a segunda impedância é

$$Z_B = -j5\ \Omega$$

De acordo com a Eq. 17.2-6, a terceira impedância é

$$Z_C = 25\ \Omega$$

O circuito Π equivalente aparece na Figura 17.2-3*b*.

EXEMPLO 17.2-2 Transformação Π-T

Determine o circuito T equivalente ao circuito Π da Figura 17.2-4 no domínio *s*, usando a transformada de Laplace. Em seguida, determine o valor dos componentes do circuito T para $s = j1$.

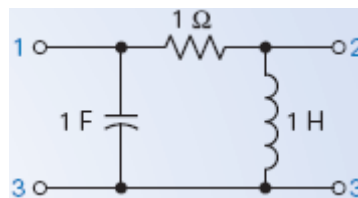



FIGURA 17.2-4 Circuito Π do Exemplo 17.2-2.

Solução

De acordo com a Eq. 17.2-1, temos

$$Z_1 = \frac{(1)(1/s)}{s + 1 + 1/s} = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

De acordo com a Eq. 17.2-2, temos

$$Z_2 = \frac{1(s)}{s + 1 + 1/s} = \frac{s^2}{s^2 + s + 1}$$

De acordo com a Eq. 17.2-3, temos

$$Z_3 = \frac{s(1/s)}{s + 1 + 1/s} = \frac{s}{s^2 + s + 1}$$

Para determinar os componentes do circuito *T* para $s = j1$, fazemos $s = j1$ e determinamos as impedâncias. Os resultados são os seguintes:

$$Z_1 = -j, Z_2 = j, Z_3 = 1$$

Assim, o circuito T equivalente para $s = j1$ é o que aparece na Figura 17.2-5.

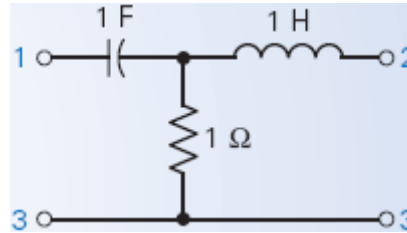



FIGURA 17.2-5 Circuito equivalente T ao circuito Π do Exemplo 17.2-2, para $s = j1$.

EXERCÍCIO 17.2-1 Determine o circuito T equivalente ao circuito Π da Figura E 17.2-1.

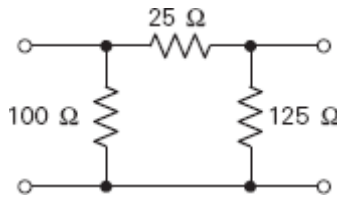



FIGURA E 17.2-1

Resposta: $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 12{,}5\ \Omega$ e $R_3 = 50\ \Omega$

17.3 *Equações de Circuitos de Duas Portas*

Considere o circuito de duas portas da Figura 17.1-1. Por convenção, supomos que as correntes I_1 e I_2 tenham os sentidos indicados na figura. As variáveis são V_1, V_2, I_1 e I_2. No interior do circuito de duas portas, duas variáveis são independentes e duas são dependentes. Existem seis escolhas possíveis para as duas variáveis independentes: V_1 e V_2, I_1 e I_2, V_1 e I_2, I_1 e V_2, V_1 e I_1 e V_2 e I_2. Vamos supor que todos os componentes do circuito sejam lineares.

As diferentes possibilidades para as variáveis independentes (variáveis de entrada) e para as variáveis dependentes (variáveis de saída) correspondentes aparecem na Tabela 17.3-1, em que os nomes dos parâmetros que relacionam as variáveis de saída às variáveis de entrada também estão indicados. No caso em que as variáveis de entrada do circuito da Figura 17.1-1 são I_1 e I_2 e as variáveis de saída são V_1 e V_2, as variáveis de saída estão relacionadas às variáveis de entrada através de equações algébricas que envolvem impedâncias:

$$V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \quad (17.3\text{-}1)$$

$$V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \quad (17.3\text{-}2)$$

Tabela 17.3-1 **Parâmetros dos Circuitos de Duas Portas**

VARIÁVEIS INDEPENDENTES (ENTRADAS)	VARIÁVEIS DEPENDENTES	PARÂMETROS
I_1, I_2	V_1, V_2	De impedância, Z
V_1, V_2	I_1, I_2	De admitância, Y
V_1, I_2	I_1, V_2	Híbridos inversos, g
I_1, V_2	V_1, I_2	Híbridos, h
V_2, I_2	V_1, I_1	De transmissão, T
V_1, I_1	V_2, I_2	De transmissão inversos, T'

Tabela 17.3-2 **Equações dos Seis Conjuntos de Parâmetros dos Circuitos de Duas Portas**

De impedância, Z	$\begin{cases} V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{cases}$
De admitância, Y	$\begin{cases} I_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 \\ I_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 \end{cases}$
Híbridos, h	$\begin{cases} V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2 \\ I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2 \end{cases}$
Híbridos inversos, g	$\begin{cases} I_1 = g_{11}V_1 + g_{12}I_2 \\ V_2 = g_{21}V_1 + g_{22}I_2 \end{cases}$
De transmissão, T	$\begin{cases} V_1 = AV_2 - BI_2 \\ I_1 = CV_2 - DI_2 \end{cases}$
De transmissão inversos, T'	$\begin{cases} V_2 = A'V_1 - B'I_1 \\ I_2 = C'V_1 - D'I_1 \end{cases}$

No caso em que as variáveis de entrada são V_1 e V_2 e as variáveis de saída são I_1 e I_2, as equações envolvem admitâncias:

$$I_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 \qquad (17.3\text{-}3)$$

$$I_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 \qquad (17.3\text{-}4)$$

Alguns autores preferem usar as letras minúsculas z e y para indicar os coeficientes das Eqs. 17.3-1 a 17.3-4. As equações para os seis conjuntos de parâmetros dos circuitos de duas portas aparecem na Tabela 17.3-2.

No caso em que todos os componentes são lineares e o circuito não contém fontes dependentes ou amplificadores operacionais, é possível provar, usando o teorema da reciprocidade, que $Z_{12} = Z_{21}$ e $Y_{21} = Y_{12}$. Um possível arranjo de um circuito passivo como circuito T aparece na Figura 17.3-1. Escrevendo duas equações de malha para o circuito da Figura 17.3-1, podemos facilmente obter as Eqs. 17.3-1 e17.3-2. Assim, o circuito da Figura 17.3-1 pode representar os parâmetros de impedância. Um possível arranjo para os parâmetros de admitância de um circuito Π aparece na Figura 17.3-2.

Examinando a Eq. 17.3-1, vemos que é possível obter o valor de Z_{11} a partir da relação

$$Z_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0}$$

A condição $I_2 = 0$ significa que os terminais de saída devem estar em circuito aberto. Por essa razão, os parâmetros Z são frequentemente chamados de *impedâncias de circuito aberto*.

Examinando a Eq. 17.3-2, vemos que é possível obter o valor de Y_{11} a partir da relação

$$Y_{11} = \left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{V_2=0}$$

A condição $V_2 = 0$ significa que os terminais de saída devem estar em curto-circuito. Por essa razão, os parâmetros Y são frequentemente chamados de *admitâncias de curto-circuito*.

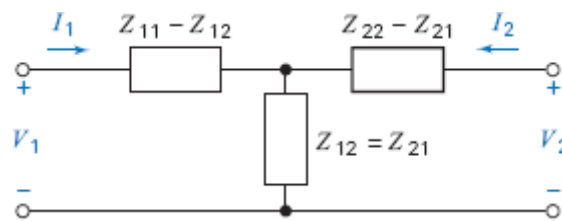



FIGURA 17.3-1 Circuito T, mostrando os parâmetros de impedância.

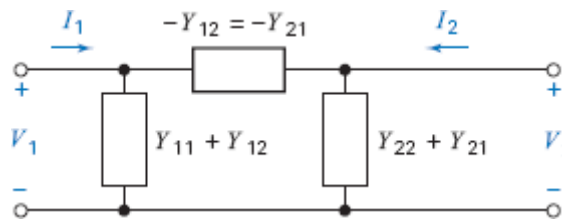



FIGURA 17.3-2 Circuito Π, mostrando os parâmetros de admitância.

EXEMPLO 17.3-1 Parâmetros de Admitância e Parâmetros de Impedância

Determine os parâmetros de admitância e de impedância do circuito T da Figura 17.3-3.

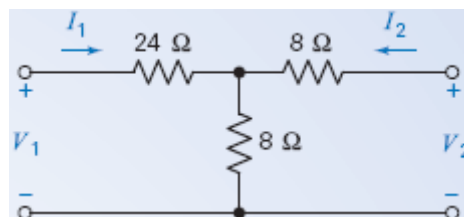



FIGURA 17.3-3 Circuito do Exemplo 17.3-1.

Solução

De acordo com a Eq. 17.3-3, o parâmetro Y_{11} é dado por

$$Y_{11} = \left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{V_2=0}$$

Com os terminais de saída em curto-circuito, os dois resistores de 8 Ω da Figura 17.3-3 ficam em paralelo e, portanto, $V_1 = 28I_1$. Assim, temos

$$Y_{11} = \frac{1}{28}\text{ S}$$

No caso de Y_{12}, temos

$$Y_{12} = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{V_1=0}$$

Com os terminais de entrada em curto-circuito, temos o circuito da Figura 17.3-4.

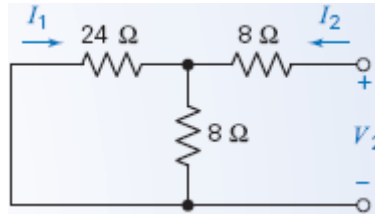



FIGURA 17.3-4 Circuito do Exemplo 17.3-1 com $V_1 = 0$.

Usando o método da divisão de corrente, obtemos

$$-I_1 = I_2\left(\frac{8}{8 + 24}\right)$$

e

$$I_2 = \frac{V_2}{8 + [8(24)/(8 + 24)]} = \frac{V_2}{14}$$

o que nos dá

$$Y_{12} = \frac{I_1}{V_2} = \frac{-(V_2/14)(1/4)}{V_2} = -\frac{1}{56}\text{ S}$$

e

$$Y_{21} = Y_{12} = -\frac{1}{56}\text{ S}$$

Finalmente, Y_{22} é dada por

$$Y_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{V_1=0}$$

em que

$$I_2 = \frac{V_2}{8 + [8(24)/(8 + 24)]} = \frac{V_2}{14}$$

Assim,

$$Y_{22} = \frac{1}{14}\text{ S}$$

Escrevendo essas equações em forma matricial, temos $\mathbf{I} = \mathbf{YV}$ ou

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{28} & -\frac{1}{56} \\ -\frac{1}{56} & \frac{1}{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Vamos agora calcular os parâmetros de impedância. Temos:

$$Z_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0}$$

Com $I_2 = 0$, temos o circuito da Figura 17.3-3. Assim,

$$Z_{11} = 24 + 8 = 32\ \Omega$$

É fácil mostrar que $Z_{22} = 16\ \Omega$ e $Z_{21} = Z_{12} = 8\ \Omega$. Escrevendo essas equações em forma matricial, temos $\mathbf{V} = \mathbf{ZI}$ ou

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 & 8 \\ 8 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

O método geral para determinar os parâmetros Z e os parâmetros Y aparece nas Tabelas 17.3-3 e 17.3-4, respectivamente.

Tabela 17.3-3 Método para Obter os Parâmetros *Z* de um Circuito

Passo IA	Para determinar Z_{11} e Z_{21}, ligue uma fonte de tensão V_1 aos terminais de entrada e deixe os terminais de saída em aberto ($I_2 = 0$).
Passo IB	Determine I_1 e V_2 e calcule $Z_{11} = V_1/I_1$ e $Z_{21} = V_2/I_1$.
Passo IIA	Para determinar Z22 e Z12, ligue uma fonte de tensão V_2 aos terminais de saída e deixe os terminais de entrada em aberto ($I_1 = 0$).
Passo IIB	Determine I_2 e V_1 e calcule $Z_{22} = V_2/I_2$ e $Z_{12} = V_1/I_2$.

Nota: $Z_{12} = Z_{21}$ apenas se não existirem fontes dependentes ou amplificadores operacionais no circuito.

Tabela 17.3-4 Método para Obter os Parâmetros *Y* de um Circuito

Passo IA	Para determinar Y_{11} e Y_{21}, ligue uma fonte de corrente I_1 aos terminais de entrada e curto-circuite os terminais de saída ($V_2 = 0$).
Passo IB	Determine V_1 e I_2 e calcule $Y_{11} = I_1/V_1$ e $Y_{21} = I_2/V_1$.
Passo IIA	Para determinar Y_{22} e Y_{12}, ligue uma fonte de corrente I_2 aos terminais de saída e curto-circuite os terminais de entrada ($V_1 = 0$).
Passo IIB	Determine I_1 e V_2 e calcule $Y_{22} = I_2/V_2$ e $Y_{12} = I_1/V_2$.

Nota: $Y_{12} = Y_{21}$ apenas se não existirem fontes dependentes ou amplificadores operacionais no circuito de duas portas.

EXERCÍCIO 17.3-1 Determine os parâmetros Z e Y do circuito da Figura E 17.3-1.

Resposta: $\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 18 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \frac{1}{14} & -\frac{1}{21} \\ -\frac{1}{21} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$

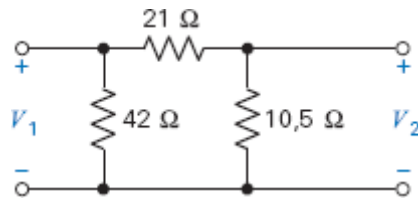



FIGURA E 17.3-1

17.4 *Parâmetros Z e Y de um Circuito com Fontes Dependentes*

Mesmo que o circuito possua uma fonte dependente, não é difícil usar os métodos da Tabela 17.3-3 e da Tabela 17.3-4 para determinar os parâmetros Z e Y. Entretanto, é preciso não esquecer que, nos circuitos em que existe uma fonte dependente, $Z_{21} \neq Z_{12}$ e $Y_{12} \neq Y_{21}$.

EXEMPLO 17.4-1 Parâmetros de Impedância

Determine os parâmetros Z do circuito da Figura 17.4-1 para $m = 2/3$.

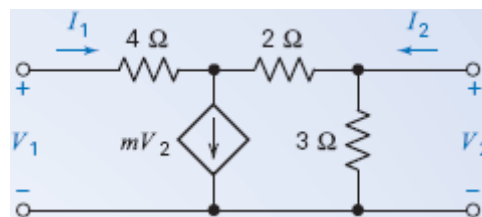



FIGURA 17.4-1 Circuito do Exemplo 17.4-1.

Solução

Vamos determinar os parâmetros Z usando o método da Tabela 17.3-3. Para começar, ligamos uma fonte de tensão V_1 aos terminais de entrada e deixamos os terminais de saída em aberto, como mostra a Figura 17.4-2*a*.

Aplicando a LKC ao nó a, temos

$$I_1 - mV_2 - I = 0 \qquad (17.4\text{-}1)$$

Aplicando a LKT à malha externa, temos

$$V_1 = 4I_1 + 5I \qquad (17.4\text{-}2)$$

Além disso, $V_2 = 3I$ e, portanto, $I = V_2/3$. Fazendo $I = V_2/3$ na Eq. 17.4-1, obtemos:

$$I_1 = mV_2 + \frac{V_2}{3} = (m + 1/3)V_2 \qquad (17.4\text{-}3)$$

e, portanto,

$$Z_{21} = \frac{V_2}{I_1} = 1\ \Omega$$

Fazendo $I = V_2/3$ na Eq. 17.4-2, obtemos

$$V_1 = 4I_1 + \frac{5V_2}{3} = 4I_1 + \frac{5}{3}I_1 \tag{17.4-4}$$

e, portanto,

$$Z_{11} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{17}{3}\ \Omega$$

Para obter Z_{22} e Z_{12}, ligamos uma fonte de tensão V_2 aos terminais de saída e deixamos os terminais de entrada em aberto, como mostra a Figura 17.4-2*b*. Podemos escrever duas equações de malha, usando os sentidos das correntes indicados na figura:

$$V_1 + 5I_4 - 3I_2 = 0 \tag{17.4-5}$$

e

$$V_2 + 3I_4 - 3I_2 = 0 \tag{17.4-6}$$

Além disso, $I_4 = mV_2$. Substituindo na Eq. 17.4-6, obtemos

$$V_2 + 3mV_2 - 3I_2 = 0$$

ou

$$V_2 = \frac{3}{3}I_2$$

e, portanto,

$$Z_{22} = \frac{V_2}{I_2} = 1\ \Omega$$

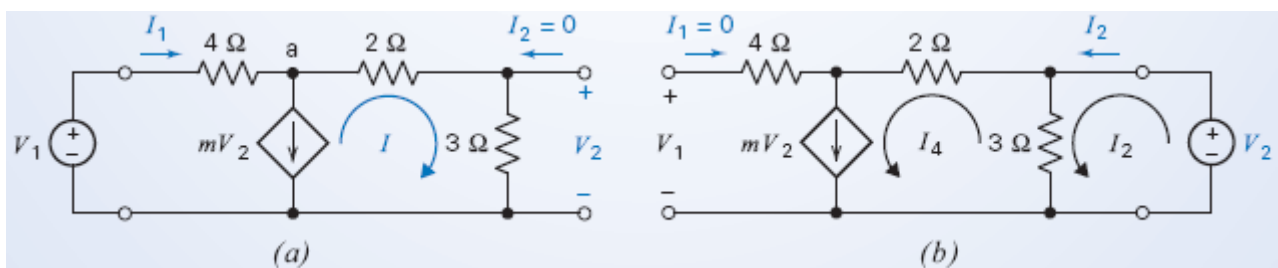



FIGURA 17.4-2 Circuito para determinar (*a*) Z_{11} e Z_{21} e (*b*) Z_{22} e Z_{12}.

Fazendo $I_4 = mV_2$ na Eq. 17.4-5, obtemos

$$V_1 + 5mV_2 = 3I_2$$

ou

$$V_1 + 5mI_2 = 3I_2$$

e, portanto,

$$Z_{12} = \frac{V_1}{I_2} = (3 - 5m) = -\frac{1}{3}\ \Omega$$

Assim, resumindo, temos

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \frac{17}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Observe que $Z_{21} \neq Z_{12}$, já que existe uma fonte dependente no circuito.

EXERCÍCIO 17.4-1 Determine os parâmetros Y do circuito da Figura 17.4-1.

Resposta: $Y = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{18} \\ -\frac{1}{6} & \frac{17}{18} \end{bmatrix}$

17.5 *Parâmetros Híbridos e de Transmissão*

Os parâmetros híbridos dos circuitos de duas portas são definidos tomando V_1 e I_2 como variáveis de saída, o que nos permite escrever

$$V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2 \qquad (17.5\text{-}1)$$

$$I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2 \qquad (17.5\text{-}2)$$

ou, em forma matricial,

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \mathbf{H} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \qquad (17.5\text{-}3)$$

Esses parâmetros são muito usados nos modelos de circuitos com transistores. Um desses modelos aparece na Figura 17.5-1.

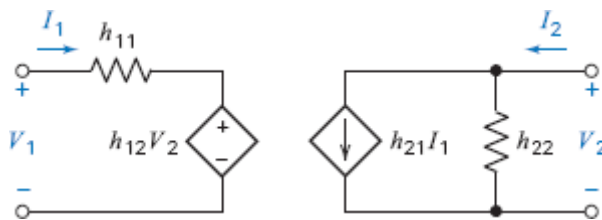



FIGURA 17.5-1 Modelo de parâmetros híbridos (parâmetros h) de um circuito de duas portas.

As equações dos parâmetros híbridos inversos são

$$I_1 = g_{11}V_1 + g_{12}I_2 \qquad (17.5\text{-}4)$$

$$V_2 = g_{21}V_1 + g_{22}I_2 \qquad (17.5\text{-}5)$$

ou, em forma matricial,

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \mathbf{G} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \tag{17.5-6}$$

A Figura 17.5-2 mostra a aplicação dos parâmetros híbridos inversos a um circuito de duas portas.

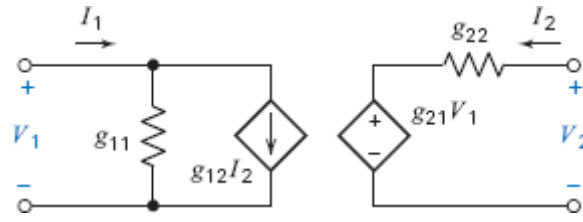



FIGURA 17.5-2 Modelo de parâmetros híbridos inversos (parâmetros g) de um circuito de duas portas.

Os parâmetros híbridos recebem esse nome porque um dos parâmetros é uma impedância e outro é uma admitância; o mesmo acontece no caso dos parâmetros híbridos inversos. Os parâmetros h_{11}, h_{12}, h_{21} e h_{22} representam, respectivamente, a impedância de entrada com a saída em curto-circuito, o ganho de tensão inverso em circuito aberto, o ganho de corrente direto em curto-circuito e a admitância de saída com a entrada em circuito aberto. Os parâmetros g_{11}, g_{12}, g_{21} e g_{22} representam, respectivamente, a admitância de entrada com a saída em circuito aberto, o ganho de corrente inverso em curto-circuito, o ganho de tensão direto em circuito aberto e a impedância de saída com a entrada em curto-circuito.

Os parâmetros de transmissão são dados por

$$V_1 = AV_2 - BI_2 \tag{17.5-7}$$

$$I_1 = CV_2 - DI_2 \tag{17.5-8}$$

ou, em forma matricial,

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \tag{17.5-9}$$

Os parâmetros de transmissão são usados para descrever a transmissão de sinais em cabos, fibras ópticas e linhas de transmissão. Os parâmetros de transmissão A, B, C e D representam, respectivamente, o ganho de tensão inverso em circuito aberto, o negativo da impedância de transferência em curto-circuito, a admitância de transferência em circuito aberto e o negativo do ganho de corrente inverso em curto-circuito. Os parâmetros de transmissão também são chamados de parâmetros *ABCD*. Estamos interessados principalmente nos parâmetros híbridos e de transmissão, já que são muito usados na prática.

EXEMPLO 17.5-1 Parâmetros Híbridos e Parâmetros de Transmissão

(a) Expresse os parâmetros h do circuito T da Figura 17.5-3 em termos de R_1,R_2 e R_3.

(b) Calcule os valores dos parâmetros para $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 4\ \Omega$ e $R_3 = 6\ \Omega$.

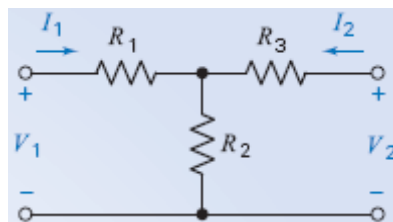



FIGURA 17.5-3 Circuito T do Exemplo 17.5-1.

Solução

(a) Em primeiro lugar, calculamos h_{11} e h_{21} curto-circuitando os terminais de saída e ligando uma fonte de corrente I_1 aos terminais de entrada, como mostra a Figura 17.54*a*. Temos:

$$h_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{V_2=0} = R_1 + \frac{R_2R_3}{R_2 + R_3}$$

Usando o método da divisão de corrente, obtemos

$$I_2 = \frac{-R_2}{R_2 + R_3}I_1$$

o que nos dá

$$h_{21} = \left.\frac{I_2}{I_1}\right|_{V_2=0} = \frac{-R_2}{R_2 + R_3}$$

O passo seguinte é desenhar o circuito com $I_1 = 0$ e ligar uma fonte de tensão V_2 aos terminais de saída, como mostra a Figura 17.5-4*b*. Podemos determinar h_{12} usando o método da divisão de corrente:

$$h_{12} = \left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{I_1=0} = \frac{R_2}{R_2 + R_3}$$

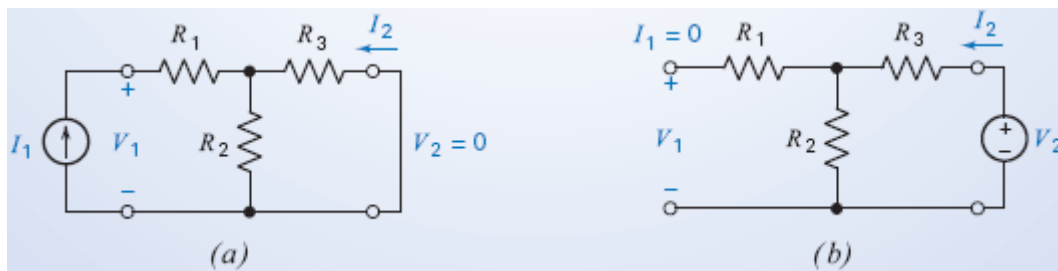



FIGURA 17.5-4 Circuitos para determinar (*a*) h_{11} e h_{21}; (b) h_{22} e h_{12}.

Finalmente, determinamos h_{22} no circuito da Figura 17.5-4*b*:

$$h_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{I_1=0} = \frac{1}{R_2 + R_3}$$

Nos circuitos passivos (ou seja, que não possuem amplificadores operacionais ou fontes dependentes), $h_{12} = -h_{21}$.

(b) Para $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 4\ \Omega$ e $R_3 = 6\ \Omega$, temos

$$h_{11} = R_1 + \frac{R_2R_3}{R_2 + R_3} = 3{,}4\ \Omega$$

$$h_{21} = \frac{-R_2}{R_2 + R_3} = -0{,}4$$

$$h_{12} = \frac{R_2}{R_2 + R_3} = 0{,}4$$

$$h_{22} = \frac{1}{R_2 + R_3} = 0{,}1\ \mathrm{S}$$

EXERCÍCIO 17.5-1 Determine os parâmetros híbridos do circuito da Figura E 17.5-1.

Resposta: $h_{11} = 0{,}9\ \Omega$, $h_{12} = 0{,}1$, $h_{21} = 4{,}4$ e $h_{22} = 0{,}6$ S.

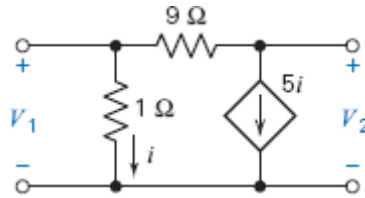



FIGURA E 17.5-1

17.6 Relações entre os Parâmetros dos Circuitos de Duas Portas

Se todos os parâmetros de um circuito de duas portas existem, é possível relacionar um conjunto de parâmetros a outro, já que as variáveis V_1, I_1, V_2 e I_2 são as mesmas. Em primeiro lugar, considere a relação entre os parâmetros Z e os parâmetros Y. A equação matricial para os parâmetros Z é $\mathbf{V} = \mathbf{ZI}$ ou

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \mathbf{Z} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \qquad (17.6\text{-}1)$$

A equação para os parâmetros Y é $\mathbf{I} = \mathbf{YV}$ ou

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \mathbf{Y} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \qquad (17.6\text{-}2)$$

Substituindo **I** por seu valor, dado pela Eq. 17.6-2, na Eq. 17.6-1, temos

$$\mathbf{V} = \mathbf{ZYV}$$

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Y}^{-1} \qquad (17.6\text{-}3)$$

Assim, podemos obter a matriz **Z** invertendo a matriz **Y**. Naturalmente, também podemos obter a matriz **Y** invertendo a matriz **Z**. É possível que um circuito de duas portas possua uma matriz **Y** e não possua uma matriz **Z** ou vice-versa. Em outras palavras, a matriz $\mathbf{Z}^{-1}$ ou $\mathbf{Y}^{-1}$ pode não existir em alguns circuitos.

Se conhecemos a matriz Y, podemos obter a matriz Z calculando o determinante de Y, ΔY, e a matriz adjunta de Y, dada por

$$\text{adj } \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_{22} & -Y_{12} \\ -Y_{21} & Y_{11} \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Y}^{-1} = \frac{\text{adj } \mathbf{Y}}{\Delta Y} \qquad (17.6\text{-}4)$$

em que $\Delta Y = Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}$.

As relações de conversão entre os parâmetros *Z*, *Y*, *h*, *g* e *T* dos circuitos de duas portas aparecem na Tabela 17.6-1.

Tabela 17.6-1 Relações entre os Parâmetros dos Circuitos de Duas Portas

	Z	Y	h	g	T
Z	$\begin{matrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{Y_{22}}{\Delta Y} & \frac{-Y_{12}}{\Delta Y} \\ \frac{-Y_{21}}{\Delta Y} & \frac{Y_{11}}{\Delta Y} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta h}{h_{22}} & \frac{h_{12}}{h_{22}} \\ \frac{-h_{21}}{h_{22}} & \frac{1}{h_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{g_{11}} & \frac{-g_{12}}{g_{11}} \\ \frac{g_{21}}{g_{11}} & \frac{\Delta g}{g_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{A}{C} & \frac{\Delta T}{C} \\ \frac{1}{C} & \frac{D}{C} \end{matrix}$
Y	$\begin{matrix} \frac{Z_{22}}{\Delta Z} & \frac{-Z_{12}}{\Delta Z} \\ \frac{-Z_{21}}{\Delta Z} & \frac{Z_{11}}{\Delta Z} \end{matrix}$	$\begin{matrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{h_{11}} & \frac{-h_{12}}{h_{11}} \\ \frac{h_{21}}{h_{11}} & \frac{\Delta h}{h_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta g}{g_{22}} & \frac{g_{12}}{g_{22}} \\ \frac{-g_{21}}{g_{22}} & \frac{1}{g_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{D}{B} & \frac{-\Delta T}{B} \\ \frac{-1}{B} & \frac{A}{B} \end{matrix}$
h	$\begin{matrix} \frac{\Delta Z}{Z_{22}} & \frac{Z_{12}}{Z_{22}} \\ \frac{-Z_{21}}{Z_{22}} & \frac{1}{Z_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{Y_{11}} & \frac{-Y_{12}}{Y_{11}} \\ \frac{Y_{21}}{Y_{11}} & \frac{\Delta Y}{Y_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{g_{22}}{\Delta g} & \frac{g_{12}}{\Delta g} \\ \frac{-g_{21}}{\Delta g} & \frac{g_{11}}{\Delta g} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{B}{D} & \frac{\Delta T}{D} \\ \frac{-1}{D} & \frac{C}{D} \end{matrix}$
g	$\begin{matrix} \frac{1}{Z_{11}} & \frac{-Z_{12}}{Z_{11}} \\ \frac{Z_{21}}{Z_{11}} & \frac{\Delta Z}{Z_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta Y}{Y_{22}} & \frac{Y_{12}}{Y_{22}} \\ \frac{-Y_{21}}{Y_{22}} & \frac{1}{Y_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{h_{22}}{\Delta h} & \frac{-h_{12}}{\Delta h} \\ \frac{-h_{21}}{\Delta h} & \frac{h_{11}}{\Delta h} \end{matrix}$	$\begin{matrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{C}{A} & \frac{-\Delta T}{A} \\ \frac{1}{A} & \frac{B}{A} \end{matrix}$
T	$\begin{matrix} \frac{Z_{11}}{Z_{21}} & \frac{\Delta Z}{Z_{21}} \\ \frac{1}{Z_{21}} & \frac{Z_{22}}{Z_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{-Y_{22}}{Y_{21}} & \frac{-1}{Y_{21}} \\ \frac{-\Delta Y}{Y_{21}} & \frac{-Y_{11}}{Y_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{-\Delta h}{h_{21}} & \frac{-h_{11}}{h_{21}} \\ \frac{-h_{22}}{h_{21}} & \frac{-1}{h_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{g_{21}} & \frac{g_{22}}{g_{21}} \\ \frac{g_{11}}{g_{21}} & \frac{\Delta g}{g_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix}$

$\Delta Z = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}$; $\Delta Y = Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}$; $\Delta g = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}$; $\Delta h = h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}$; $\Delta T = AD - BC$

EXEMPLO 17.6-1 Conversão de Parâmetros

Determine os parâmetros Y e h, sabendo que

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 18 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Solução

O determinante dos parâmetros Z é

$$\Delta Z = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21} = 18(9) - 6(6) = 126$$

De acordo com a Tabela 17.6-1, temos

$$Y_{11} = \frac{Z_{22}}{\Delta Z} = \frac{9}{126} = \frac{1}{14}\,\text{S}$$
$$Y_{12} = Y_{21} = \frac{-Z_{12}}{\Delta Z} = \frac{-1}{21}\,\text{S}$$
$$Y_{22} = \frac{Z_{11}}{\Delta Z} = \frac{18}{126} = \frac{1}{7}\,\text{S}$$

$$h_{11} = \frac{\Delta Z}{Z_{22}} = \frac{126}{9} = 14\ \Omega$$
$$h_{12} = \frac{Z_{12}}{Z_{22}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$
$$h_{21} = \frac{-Z_{21}}{Z_{22}} = \frac{-6}{9} = \frac{-2}{3}$$
$$h_{22} = \frac{1}{Z_{22}} = \frac{1}{9}\text{S}$$

EXERCÍCIO 17.6-1 Determine os parâmetros Z, sabendo que os parâmetros Y são

$$Y = \begin{bmatrix} \frac{2}{15} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-1}{10} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

em que os valores estão em siemens.

Resposta: $Z_{11} = 12\ \Omega$, $Z_{12} = 6\ \Omega$, $Z_{21} = 3\ \Omega$ e $Z_{22} = 4\ \Omega$

EXERCÍCIO 17.6-2 Determine os parâmetros T a partir dos parâmetros Y do Exercício 17.6-1.

Respostas: $A = 4$, $B = 10\ \Omega$, $C = 1/3$ S e $D = 4/3$

17.7 *Interligação de Circuitos de Duas Portas*

Muitos circuitos são formados pela ligação de vários circuitos de duas portas em paralelo, em série ou em cascata. Quando dois circuitos duas portas são ligados em *paralelo*, como na Figura 17.7-1, as tensões de entrada V_1 dos dois circuitos são iguais.

As tensões de saída V_2 dos dois circuitos também são iguais. A equação matricial que define o circuito N_a é

$$\mathbf{I}_a = \mathbf{Y}_a\mathbf{V}_a \tag{17.7-1}$$

e a equação matricial que define o circuito N_b é

$$\mathbf{I}_b = \mathbf{Y}_b\mathbf{V}_b \tag{17.7-2}$$

Além disso, a corrente total **I** é dada por

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_a + \mathbf{I}_b$$

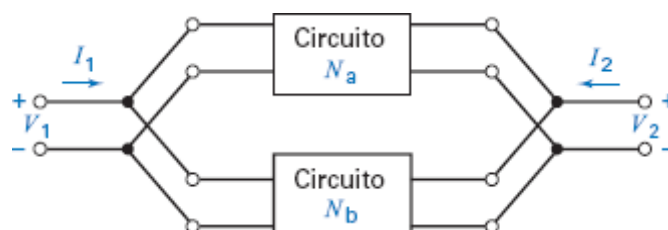



FIGURA 17.7-1 Ligação em paralelo de dois circuitos de duas portas.

Como $\mathbf{V}_a = \mathbf{V}_b = \mathbf{V}$,

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y}_a\mathbf{V} + \mathbf{Y}_b\mathbf{V} = (\mathbf{Y}_a + \mathbf{Y}_b)\mathbf{Y} = \mathbf{YV}$$

Isso significa que os parâmetros *Y* do circuito formado por dois circuitos de duas portas em paralelo são dados pela equação matricial

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_a + \mathbf{Y}_b \tag{17.7-3}$$

Assim, por exemplo,

$$Y_{11} = Y_{11a} + Y_{11b}$$

De acordo com a Eq. 17.7-3, para determinar os parâmetros *Y* do circuito total, basta somar os parâmetros *Y* dos dois circuitos. No caso geral, a matriz dos parâmetros *Y* de uma associação de circuitos de duas portas em paralelo é a soma das matrizes dos parâmetros *Y* dos circuitos que estão ligados em paralelo.

A Figura 17.7-2 mostra dois circuitos de duas portas ligados em série. Vamos usar os parâmetros *Z* para descrever os circuitos de duas portas e o circuito total. Os dois circuitos são descritos pelas equações matriciais

$$\mathbf{V}_a = \mathbf{Z}_a\mathbf{I}_a \tag{17.7-4}$$

e

$$\mathbf{V}_b = \mathbf{Z}_b\mathbf{I}_b \tag{17.7-5}$$

As correntes nos terminais são

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_a = \mathbf{I}_b$$

Como $\mathbf{V} = \mathbf{V}_a + \mathbf{V}_b$, temos

$$\begin{aligned}\mathbf{V} &= \mathbf{Z}_a\mathbf{I}_a + \mathbf{Z}_b\mathbf{I}_b \\ &= (\mathbf{Z}_a + \mathbf{Z}_b)\mathbf{I} = \mathbf{ZI}\end{aligned}$$

ou

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_a + \mathbf{Z}_b \tag{17.7-6}$$

Assim, os parâmetros *Z* do circuito total são iguais à soma dos parâmetros *Z* dos dois circuitos.

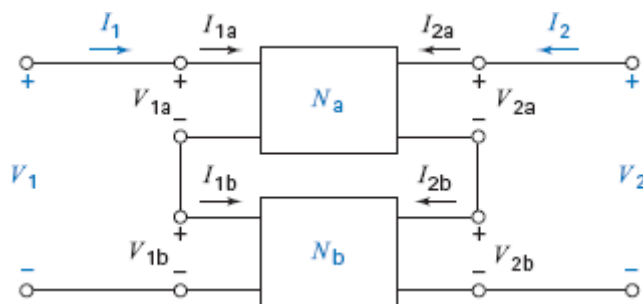



FIGURA 17.7-2 Ligação em série de dois circuitos de duas portas.

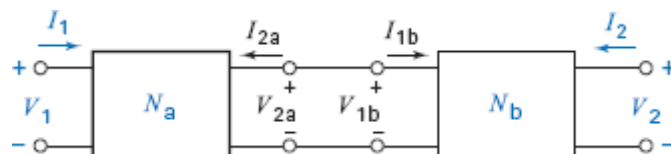



FIGURA 17.7-3 Ligação em cascata de dois circuitos de duas portas.

Quando a saída de um circuito é ligada à entrada de outro, como na Figura 17.7-3, dizemos que os circuitos estão ligados em *cascata*. Como as variáveis de saída do primeiro circuito são as variáveis de entrada do segundo, são usados os parâmetros de transmissão. O primeiro circuito de duas portas, N_a, é representado pela equação matricial

$$\begin{bmatrix} V_{1a} \\ I_{1a} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_a \begin{bmatrix} V_{2a} \\ -I_{2a} \end{bmatrix}$$

No caso de N_b, temos

$$\begin{bmatrix} V_{1b} \\ I_{1b} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_b \begin{bmatrix} V_{2b} \\ -I_{2b} \end{bmatrix}$$

Além disso, na entrada e na saída temos

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{1a} \\ I_{1a} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} V_{2b} \\ -I_{2b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

Na ligação intermediária, temos

$$\begin{bmatrix} V_{2a} \\ -I_{2a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{1b} \\ I_{1b} \end{bmatrix}$$

Nesse caso,

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_a\mathbf{T}_b \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_a\mathbf{T}_b \tag{17.7-7}$$

Assim, os parâmetros de transmissão do circuito total podem ser obtidos por multiplicação matricial, respeitada a ordem na qual os circuitos estão ligados.

Todos os cálculos desta seção foram feitos com a suposição de que a interligação não altera o fato de os subcircuitos serem de duas portas.

EXEMPLO 17.7-1 Ligação em Paralelo e em Cascata de Circuitos de Duas Portas

No circuito T da Figura 17.7-4, (a) determine os parâmetros *Z*, *Y* e *T* e (b) determine os parâmetros do circuito obtido ligando dois circuitos de duas portas iguais ao da Figura 17.7-4 em paralelo e em cascata.

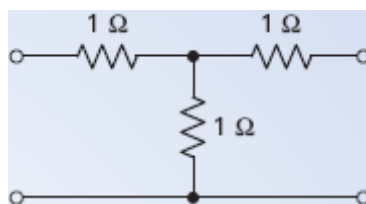



FIGURA 17.7-4 Circuito T do Exemplo 17.7-1.

Solução

Em primeiro lugar, determinamos os parâmetros Z do circuito T. Examinando o circuito, constatamos que

$$Z_{12} = Z_{21} = 1\ \Omega$$
$$Z_{22} = Z_{11} = 2\ \Omega$$

Usando os fatores de conversão da Tabela 17.6-1, obtemos

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Para dois circuitos iguais ligados em paralelo, a matriz **Y** total é

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_a + \mathbf{Y}_b$$

Como $\mathbf{Y}_a = \mathbf{Y}_b$, temos

$$\mathbf{Y} = 2\mathbf{Y}_a = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

Finalmente, para dois circuitos iguais ligados em cascata, a matriz total **T** é dada por

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_a\mathbf{T}_b = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

EXERCÍCIO 17.7-1 Determine os parâmetros de transmissão do circuito formado pela ligação em cascata de dois circuitos de duas portas como o da Figura E 17.7-1.

Respostas: $A = 3$, $B = 21\ \Omega$, $C = 1/6$ S e $D = 3/2$.

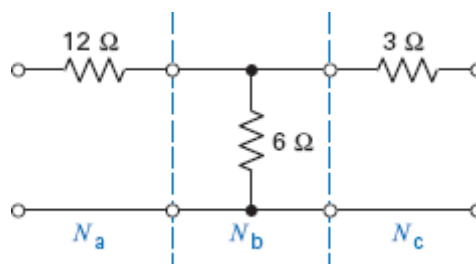



FIGURA E 17.7-1

17.8 *Como Podemos Testar . . . ?*

Os engenheiros são frequentemente encarregados de verificar se a solução de um problema está correta. As soluções de problemas de projeto, por exemplo, devem ser verificadas para confirmar que todas as especificações estão sendo atendidas. Além disso, os resultados obtidos com o auxílio de computadores devem ser revistos para evitar possíveis erros na digitação dos dados e as afirmações dos vendedores a respeito dos seus produtos devem ser confirmadas.

Os estudantes de engenharia muitas vezes também precisam verificar se os resultados que obtiveram estão corretos. Às vezes falta muito pouco tempo para terminar um exame e é importante poder identificar rapidamente as questões que precisam ser refeitas.

O exemplo a seguir ilustra algumas técnicas que podem ser usadas para verificar se as soluções de problemas do tipo discutido neste capítulo estão corretas.

EXEMPLO 17.8-1 Como Podemos Testar Circuitos de Duas Portas?

O circuito da Figura 17.8-1*a* foi projetado para ter uma função de transferência dada por

$$\frac{V_o(s)}{V_{in}(s)} = \frac{2s - 10}{s^2 + 27s + 2}$$

Como podemos testar se o circuito satisfaz essa especificação?

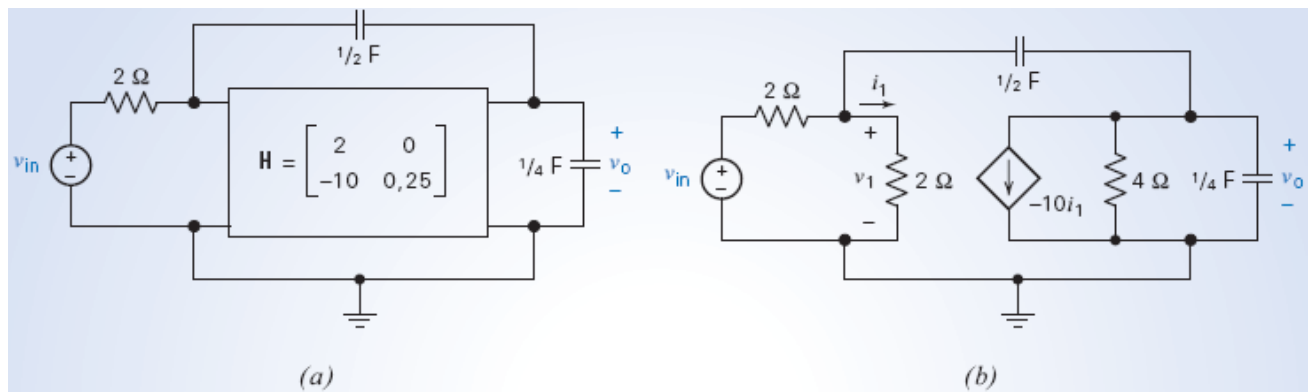



FIGURA 17.8-1 (*a*) Circuito que inclui um circuito de duas portas. (*b*) Uso do modelo de parâmetros híbridos para representar o circuito de duas portas.

Solução

Como mostra a Figura 17.8-1*b*, o modelo da Figura 17.5-1 pode ser usado para representar o circuito da Figura 17.8-1*a* a partir dos parâmetros *h*. O circuito pode ser descrito pelas equações de nó

$$\begin{bmatrix} \left(1+\frac{s}{2}\right) & -\frac{s}{2} \\ \left(-5-\frac{s}{2}\right) & \left(\frac{3s}{4}+\frac{1}{4}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_o(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{V_{in}(s)}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

em que a igualdade $10I_1(s) = 5V_1(s)$ foi usada para expressar a corrente da fonte dependente em termos das tensões de nó. Aplicando a regra de Cramer, obtemos

$$\frac{V_o(s)}{V_{in}(s)} = \frac{\frac{1}{2}\left(5+\frac{s}{2}\right)}{\left(1+\frac{s}{2}\right)\left(\frac{3s}{4}+\frac{1}{4}\right)-\frac{s}{2}\left(\frac{s}{2}+5\right)} = \frac{2s+20}{s^2-13s+2}$$

Como essa não é a função de transferência desejada, o circuito não satisfaz a especificação.

EXERCÍCIO 17.8-1 Mostre que a função de transferência do circuito da Figura E 17.8-1 é a especificada no enunciado do Exemplo 17.8-1,

$$\frac{V_o(s)}{V_{in}(s)} = \frac{2s - 10}{s^2 + 27s + 2}$$

(A única diferença entre os circuitos das Figuras 17.8-1*a* e E 17.8-1 é o sinal de h_{21}.)

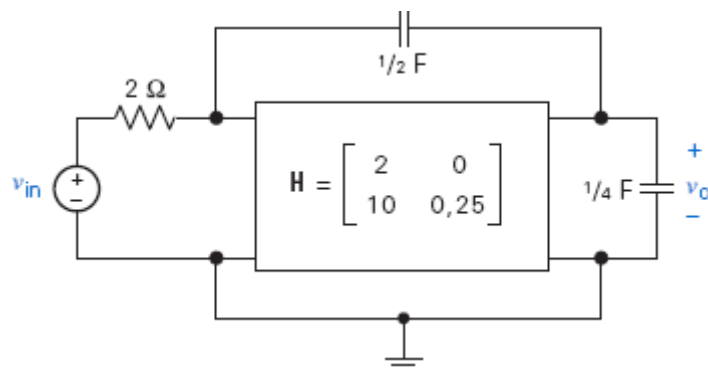



FIGURA E 17.8-1 Versão modificada do circuito da Figura 17.8-1.

17.9 EXEMPLO DE PROJETO Amplificador Transistorizado

A Figura 17.9-1 mostra o circuito equivalente para pequenos sinais de um amplificador transistorizado. De acordo com a folha de especificações, os parâmetros *h* do transistor são

$$h_{ie} = 1250\ \Omega, \quad h_{oe} = 0, \quad h_{fe} = 100 \quad \text{e} \quad h_{re} = 0$$

O valor da resistência R_c deve estar entre 300 Ω e 5000 Ω para assegurar que o transistor seja polarizado corretamente. O ganho para pequenos sinais é definido como

$$A_v = \frac{v_o}{v_{in}}$$

O objetivo é projetar o amplificador para que

$$A_v = -20$$

(Não há garantia de que as especificações possam ser satisfeitas. Parte do problema está em verificar se é possível projetar o amplificador para que $A_v = -20$.)

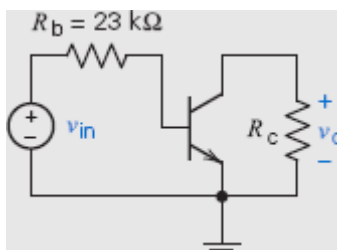



FIGURA 17.9-1 Amplificador transistorizado.

Descreva a Situação e as Hipóteses

1. R_c deve estar entre 300 Ω e 5000 Ω.
2. O transistor foi descrito em termos dos parâmetros *h*. Como se pode ver na Figura 17.9-2*a*, o transistor pode ser considerado um circuito de duas portas representado por parâmetros *h*. A Figura 17.9-2*b* mostra um circuito equivalente do transistor, baseado nos parâmetros *h*. Para esse transistor

em particular, os valores dos parâmetros h são

$$h_{ie} = 1000\ \Omega, \quad h_{oe} = 0, \quad h_{fe} = 100 \quad \text{e} \quad h_{re} = 0$$

Como

$$\frac{1}{h_{oe}} = \infty$$

o resistor o lado direito do circuito equivalente é um circuito aberto. Como

$$h_{re} = 0$$

a fonte de tensão dependente é um curto-circuito. A Figura 17.9-2c mostra o circuito equivalente depois de feitas essas simplificações.

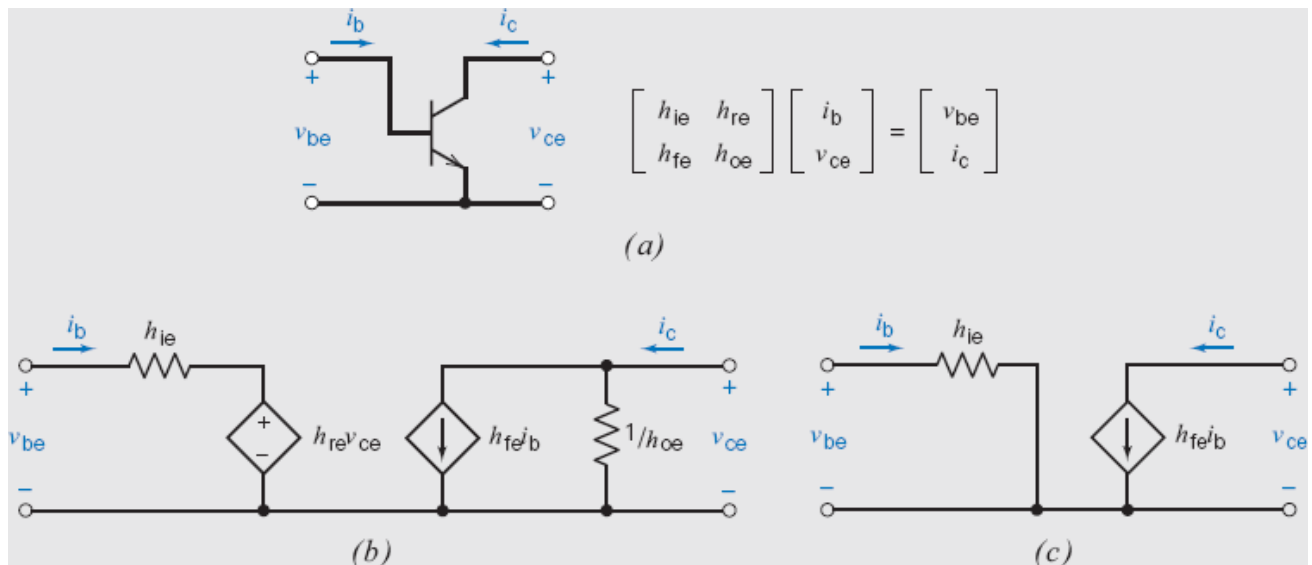



FIGURA 17.9-2 (a) Uso dos parâmetros h para descrever um transistor. (b) Circuito equivalente. (c) Circuito equivalente simplificado com $h_{re} = 0$ e $h_{oe} = 0$.

3. O ganho de tensão deve ser $A_v = -20$.

Estabeleça a Meta

Escolher R_c para que $A_v = -20$.

Formule um Plano

Substituir o transistor da Figura 17.9-1 pelo circuito equivalente da Figura 17.9-2c. Analisar o circuito resultante e obter uma expressão para o ganho de tensão, A_v. Essa expressão deve envolver R_c. Determinar o valor de R_c para que $A_v = -20$. Se o valor de R_c estiver entre 300 Ω e 5000 Ω, o projeto do amplificador estará completo. Se o valor de R_c não estiver entre 300 Ω e 5000 Ω, não será possível satisfazer as especificações.

Execute o Plano

A Figura 17.9-3 mostra o amplificador depois que o transistor foi substituído pelo circuito equivalente. Aplicando a lei de Ohm ao resistor R_c, temos

$$v_o = -R_c 100 i_b$$

em que o sinal negativo foi usado por causa do sentido escolhido para as correntes. Aplicando a LKT à malha da esquerda, temos

$$v_{in} = 23.000 i_b + 1000 i_b$$

e, portanto,

$$A_v = \frac{v_o}{v_{in}} = \frac{-100R_c}{24.000}$$

Finalmente, fazendo $A_v = -20$, obtemos

$$-20 = \frac{-100R_c}{24.000}$$

o que nos dá

$$R_c = 4800\ \Omega$$

Verifique se a Solução Proposta Está Correta

Em primeiro lugar, a resistência $R_c = 4800\ \Omega$ está entre 300 Ω e 5000 Ω. Em segundo lugar, o ganho do circuito da Figura 17.9-3 é

$$\frac{v_o}{v_{in}} = \frac{-h_{fe}R_c}{R_b + h_{ie}} = -\frac{100 \times 4800}{23.000 + 1000} = -20$$

Assim, as duas especificações foram satisfeitas.

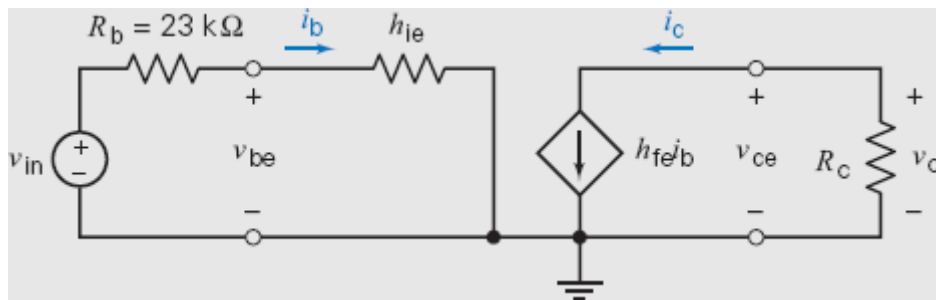



FIGURA 17.9-3 Circuito equivalente do amplificador transistorizado.

17.10 RESUMO

- Uma porta é um par de terminais com a restrição de que a corrente que entra por um dos terminais deve ser igual à corrente que sai pelo outro.
- A modelagem de circuitos ou dispositivos por circuitos de duas portas é usada para descrever o desempenho do circuito ou dispositivo em termos das tensões e correntes nas portas. Como os detalhes internos do circuito ou dispositivo não são incluídos no modelo de duas portas, o modelo de duas portas de um circuito pode ser muito mais simples que o circuito.
- O modelo de duas portas envolve quatro sinais, que correspondem à corrente e à tensão nas duas portas. Dois sinais são tratados como entradas e os outros dois como saídas. Existem seis formas de separar os quatro sinais em sinais de entrada e de saída; existem, portanto, seis conjuntos de parâmetros para os circuitos de duas portas. Os seis conjuntos são chamados de parâmetros de impedância, admitância, híbridos, híbridos inversos, de transmissão e de transmissão inversos. A Tabela 17.3-2 mostra os seis conjuntos de parâmetros.
- A Tabela 17.6-1 mostra as equações usadas para converter um conjunto de parâmetros em outro, como, por exemplo, os parâmetros de impedância em parâmetros híbridos.
- Podemos usar os parâmetros dos circuitos de duas portas para descrever o comportamento de dois ou mais circuitos ligados em paralelo, em série ou em cascata.

Seção 17.2 A Transformação T-Π e os Circuitos de Duas Portas e Três Terminais

P 17.2-1 Determine a resistência equivalente R_{ab} do circuito da Figura P 17.2-1. Use a transformação Π-T como parte do processo de redução.

Resposta: $R_{ab} = 3{,}2\ \Omega$

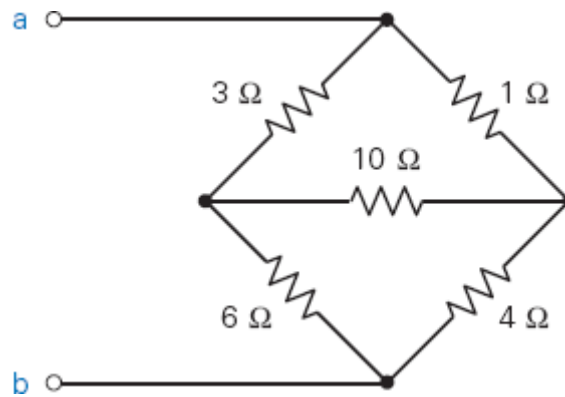



Figura P 17.2-1

P 17.2-2 Repita o Problema P 17.2-1 com a resistência de 6 Ω substituída por uma resistência de 4 Ω e a resistência de 10 Ω substituída por uma resistência de 12 Ω.

P 17.2-3 O circuito de duas portas da Figura P 17.1-1 tem uma fonte de entrada V_s, de resistência interna R_s, ligada aos terminais de entrada, de modo que $V_1 = V_s - I_1R_s$, e uma resistência de carga ligada aos terminais de saída, de modo que $V_2 = -I_2R_L = I_LR_L$. Determine $R_{in} = V_1/I_1$, $A_v = V_2/V_1$, $A_i = -I_2/I_1$ e $A_p = -V_2I_2/V_1I_1$ usando o modelo de parâmetros Z.

P 17.2-4 Use a transformação Δ-Y para determinar a corrente I no circuito da Figura P 17.2-4 para $R_1 = 15\ \Omega$ e $R = 20\ \Omega$.

Resposta: I = 385 mA

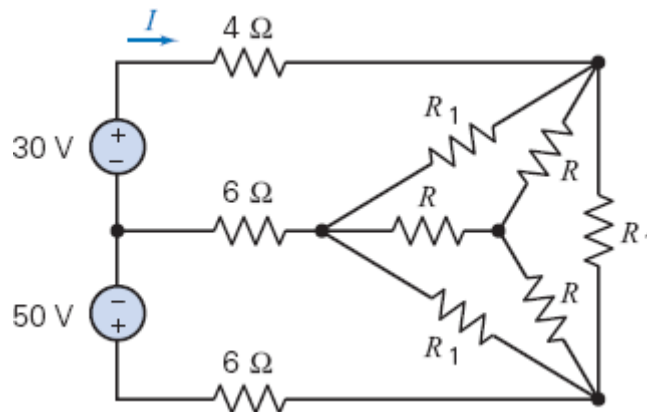



Figura P 17.2-4

P 17.2-5 Use a transformação Y-Δ para determinar R_{in} no circuito da Figura P 17.2-5.

Resposta: $R_{in} = 673{,}85\ \Omega$

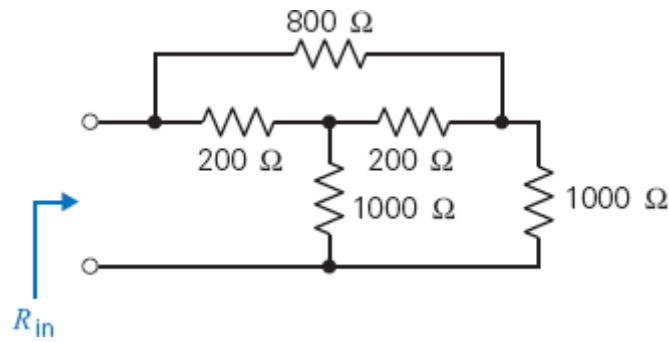



Figura P 17.2-5

Seção 17.3 Equações de Circuitos de Duas Portas

P 17.3-1 Determine os parâmetros Y e os parâmetros Z do circuito de duas portas da Figura P 17.3-1.

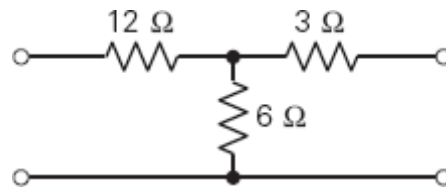



Figura P 17.3-1

P 17.3-2 Determine os parâmetros Z do circuito da Figura P 17.3-2.

Resposta: $Z_{11} = 2 - j4\ \Omega$; $Z_{12} = Z_{21} = -j4\ \Omega$; $Z_{22} = -j2\ \Omega$

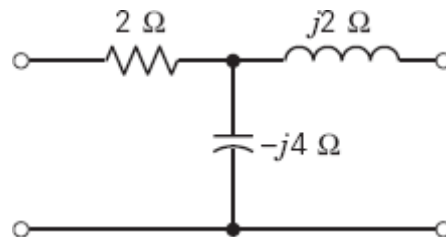



Figura P 17.3-2

P 17.3-3 Determine os parâmetros Y do circuito da Figura P 17.3-3 para $b = 4$, $G_1 = 2$ S, $G_2 = 1$ S e $G_3 = 3$ S.

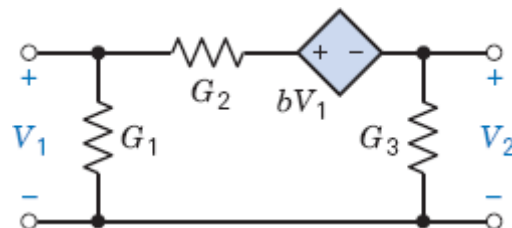



Figura P 17.3-3

P 17.3-4 Determine os parâmetros Y do circuito da Figura P 17.3-4.

Resposta: $Y_{11} = 0,3$ S; $Y_{12} = Y_{21} = -0,1$ S; $Y_{22} = 0,15$ S

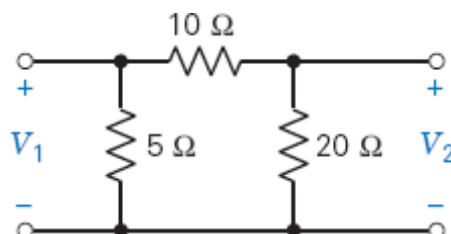



Figura P 17.3-4

P 17.3-5 Determine os parâmetros Y do circuito da Figura P 17.3-5.

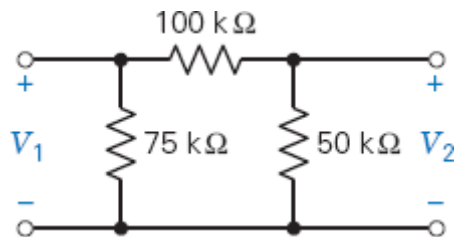



Figura P 17.3-5

P 17.3-6 Determine os parâmetros Z do circuito da Figura P 17.3-6 para o regime estacionário senoidal com $\omega = 3$ rad/s.

Resposta: $Z_{11} = 3 + j\ \Omega$; $Z_{12} = Z_{21} = -j2\ \Omega$; $Z_{22} = -j2\ \Omega$

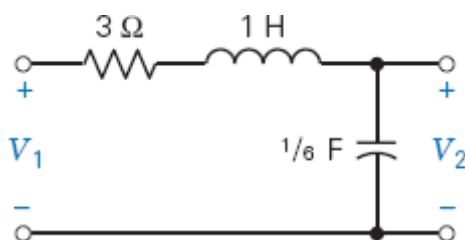



Figura P 17.3-6

P 17.3-7 Determine os parâmetros de impedância do circuito da Figura P 17.3-7 no domínio s (domínio de Laplace).

Resposta: $Z_{11} = (4s + 1)/s$; $Z_{12} = Z_{21} = 1/s$; $Z_{22} = (2s^2 + 1)/s$

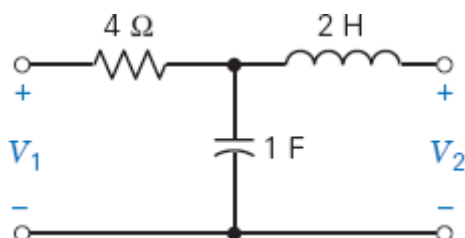



Figura P 17.3-7

P 17.3-8 Determine um circuito de duas portas que seja representado pelos seguintes parâmetros Y:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \dfrac{s+1}{s} & -1 \\ -1 & (s+1) \end{bmatrix}$$

P 17.3-9 Determine um circuito de duas portas com um indutor, um capacitor e dois resistores que seja representado pelos seguintes parâmetros Z:

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} (s^2 + 2s + 2) & 1 \\ 1 & (s^2 + 1) \end{bmatrix}$$

em que $\Delta = s^2 + s + 1$.

P 17.3-10 A Figura P 17.3-10 mostra um circuito de duas portas infinito. Quando os terminais de saída são ligados à resistência característica do circuito R_o, as resistências de carga equivalentes de todos os estágios são iguais. Determine o valor de R_o.

Resposta: $R_o = (\sqrt{3} - 1)R$

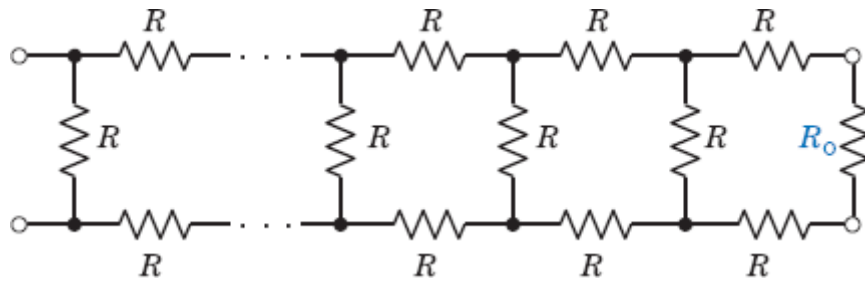



Figura P 17.3-10 Circuito de duas portas infinito.

Seção 17.4 Parâmetros *Z* e *Y* de um Circuito com Fontes Dependentes

P 17.4-1 Determine os parâmetros *Y* do circuito da Figura P 17.4-1.

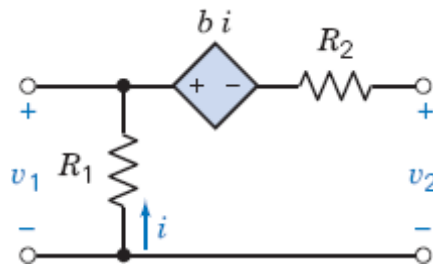



Figura P 17.4-1

P 17.4-2 A Figura P 17.4-2 mostra o circuito de um amplificador eletrônico. Determine os parâmetros de impedância do circuito.

Resposta: $Z_{11} = 4\ \Omega$; $Z_{12} = 3(1 + \alpha)\ \Omega$; $Z_{21} = 3\ \Omega$; $Z_{22} = 5 + 3\alpha\ \Omega$

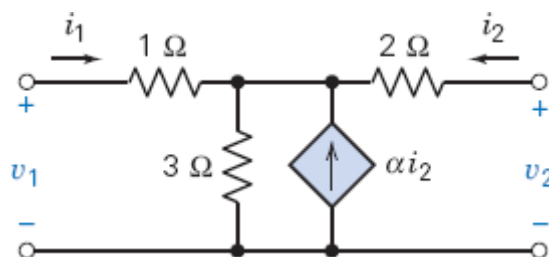



Figura P 17.4-2

P 17.4-3

(a) No circuito da Figura P 17.4-3, determine o modelo *Y* de duas portas usando impedâncias no domínio *s*.

(b) Determine a resposta $v_2(t)$ se uma fonte de corrente $i_1(t) = 1u(t)$ A for ligada aos terminais de entrada.

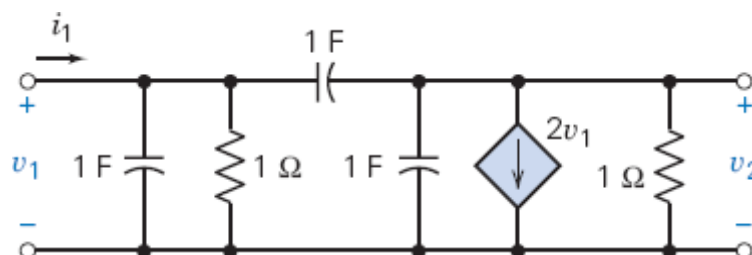



Figura P 17.4-3

P 17.4-4 A Figura P 17.4-4*a* mostra um tipo de coração artificial. O circuito do controlador eletrônico e da bomba aparece na Figura P 17.4-4*b*. Determine os parâmetros de impedância do modelo de duas portas.

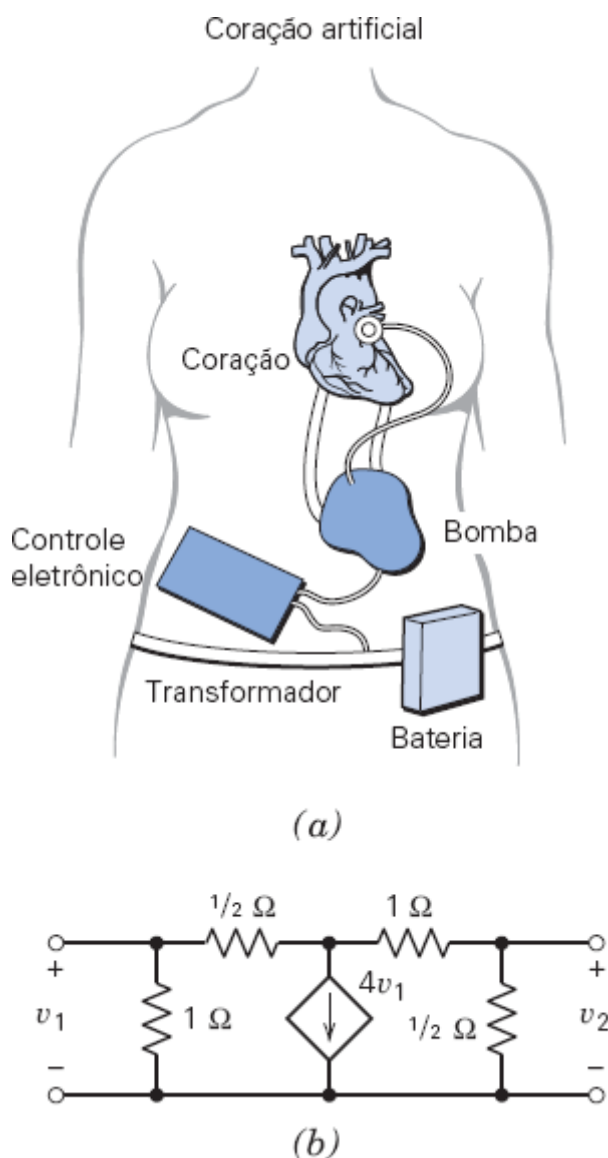



Figura P 17.4-4 (*a*) Coração artificial; (*b*) circuito do controlador e da bomba.

P 17.4-5 Determine os parâmetros *Y* do circuito da Figura P 17.4-5.

Resposta: *Parcial:* $Y_{12} = -1/R_2$; $Y_{21} = -(1 + b)/R_2$

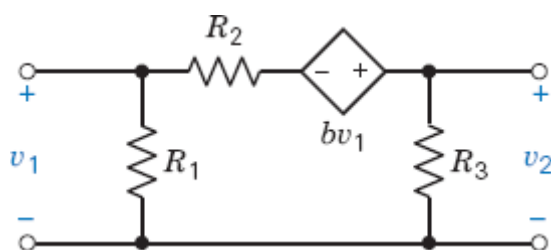



Figura P 17.4-5

Seção 17.5 Parâmetros Híbridos e de Transmissão

P 17.5-1 Determine os parâmetros de transmissão do circuito da Figura P 17.5-1.

Resposta: $A = 1{,}2$; $B = 6{,}8\ \Omega$; $C = 0{,}1$ S; $D = 1{,}4$

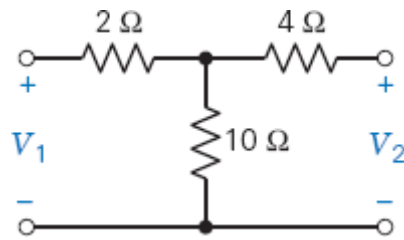



Figura P 17.5-1

P 17.5-2 A Figura P 17.5-2 mostra um circuito com um amplificador operacional e o modelo correspondente. Determine os parâmetros híbridos do modelo e a matriz **H** para R_i = 100 kΩ, $R_1 = R_2$ = 1 MΩ, R_o = 1 kΩ e $A = 10^4$.

Resposta: h_{11} = 600 kΩ, h_{12} = 1/2, $h_{21} = -10^6$ e $h_{22} = 10^{-3}$ S

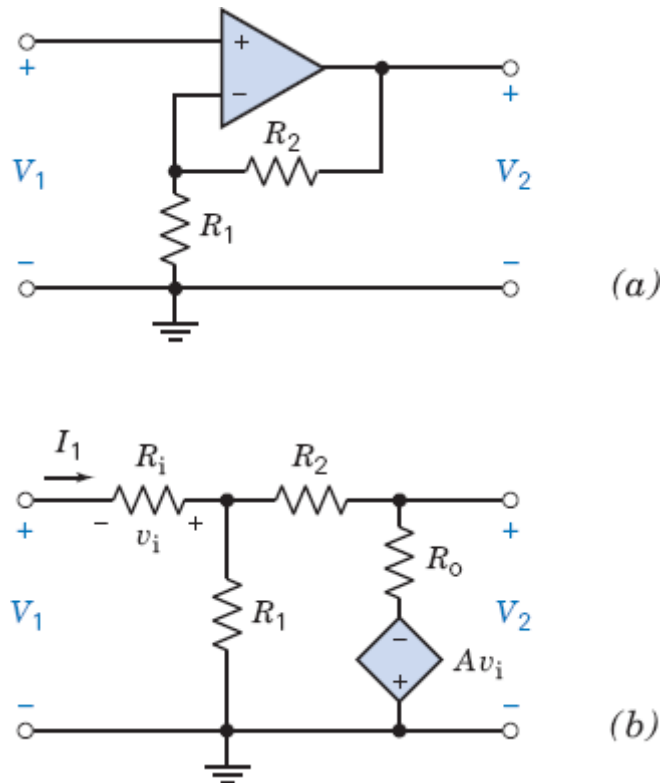



Figura P 17.5-2 (*a*) Circuito com um amplificador operacional; (*b*) modelo do circuito.

P 17.5-3 Determine os parâmetros *h* do transformador ideal da Seção 11.10.

P 17.5-4 Determine os parâmetros *h* do circuito T da Figura P 17.5-4.

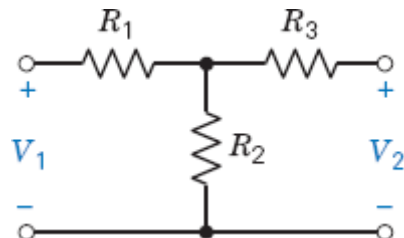



Figura P 17.5-4

P 17.5-5 A Figura P 17.5-5 mostra um modelo simplificado de um transistor de junção bipolar. Determine os parâmetros *h* do circuito.

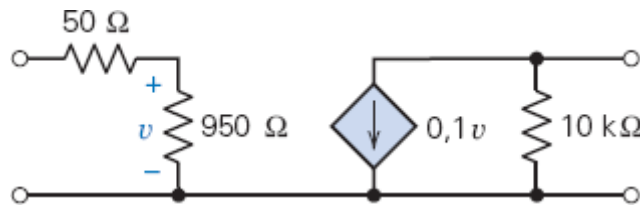



Figura P 17.5-5 Modelo de um transistor de junção bipolar.

Seção 17.6 Relações entre os Parâmetros dos Circuitos de Duas Portas

P 17.6-1 Determine as relações entre os parâmetros Y e os parâmetros h usando as equações de definição dos dois conjuntos de parâmetros.

P 17.6-2 Determine os parâmetros Y de um circuito se os parâmetros Z (em ohms) forem os seguintes:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

P 17.6-3 Determine os parâmetros h de um circuito se os parâmetros Y (em siemens) forem os seguintes:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

P 17.6-4 Um circuito de duas portas possui os seguintes parâmetros Y: $Y_{12} = Y_{21} = -0{,}4$ S; $Y_{11} = 0{,}5$ S; $Y_{22} = 0{,}6$ S. Determine os parâmetros h.

Resposta: $h_{11} = 2\ \Omega$; $h_{21} = -0{,}8$; $h_{12} = 0{,}8$; $h_{22} = 0{,}28$ S

Seção 17.7 Interligação de Circuitos de Duas Portas

P 17.7-1 Ligue em paralelo os circuitos da Figura P 17.7-1 e determine os parâmetros Y da combinação.

Resposta: $Y_{11} = 17/6$; $Y_{12} = Y_{21} = -4/3$; $Y_{22} = 5/3$

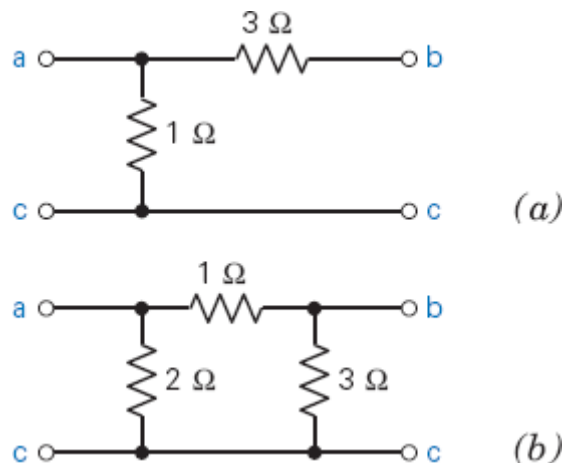



Figura P 17.7-1

P 17.7-2 Determine os parâmetros Y e T do circuito da Figura P 17.7-2 e os parâmetros resultantes da associação de dois circuitos iguais aos da Figura P 17.7-2 (a) em paralelo; (b) em cascata.

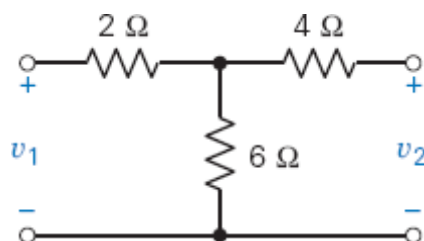



Figura P 17.7-2

P 17.7-3 Determine os parâmetros Y da associação em paralelo dos circuitos das Figuras P 17.7-3*a* e P 17.7-3*b*.

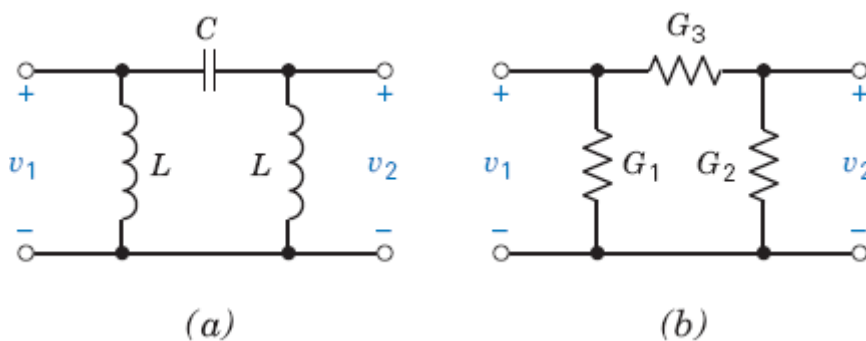



Figura P 17.7-3

Seção 17.8 Como Podemos Testar . . . ?

P 17.8-1 De acordo com um relatório antigo a respeito do circuito da Figura P 17.8-1, Z_{12} = 15 Ω e Y_{11} = 24 mS. Verifique se esses dados estão corretos.

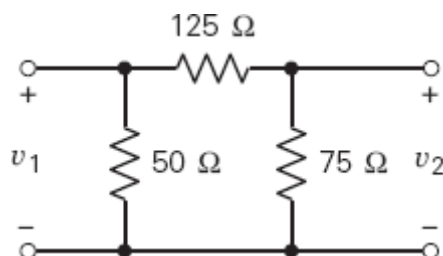



Figura P 17.8-1

P 17.8-2 Um estudante analisou o circuito da Figura P 17.8-2 e calculou que os parâmetros de transmissão, para M = 0,1 H, são $A = 2(s + 10)/s$, $D = A$, $C = 10/s$ e $B = (3s^2 + 80s + 400)/s^2$. Verifique se esses resultados estão corretos.

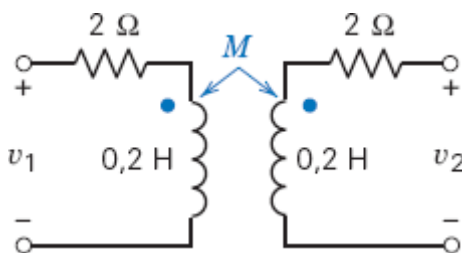



Figura P 17.8-2

Problemas de Projeto

PP 17-1 Escolha os valores de R_1 e R para que R_{in} = 16,6 Ω no circuito da Figura PP 17-1. O projeto exige que R_1 e R sejam menores que 10 Ω.

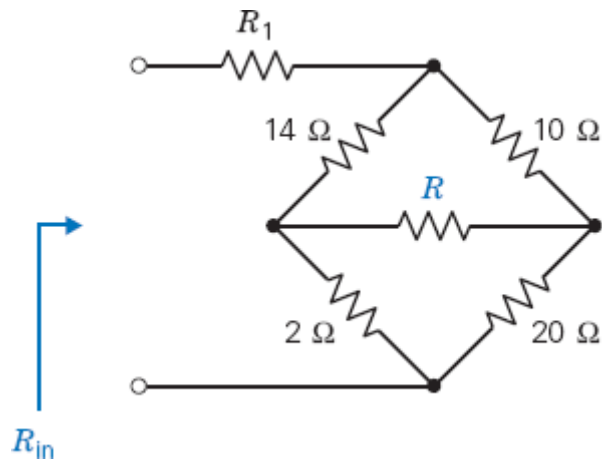



Figura PP 17-1

PP 17-2 Dizemos que o circuito ponte da Figura PP 17-2 está equilibrado se $I = 0$. Determine a relação entre as resistências da ponte para que o circuito esteja equilibrado.

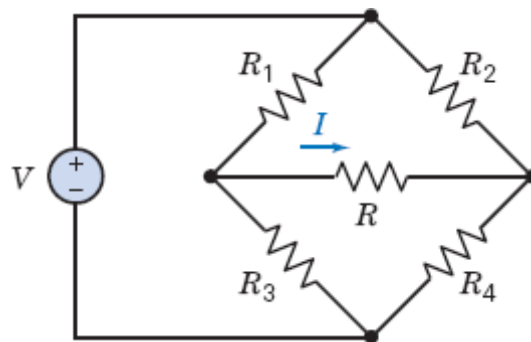



Figura PP 17-2 Circuito ponte.

PP 17-3 A Figura PP 17-3 mostra um modelo híbrido de um amplificador transistorizado que utiliza a configuração emissor comum. Os parâmetros do transistor são $h_{21} = 80$, $h_{11} = 45\ \Omega$, $h_{22} = 12{,}5\ \mu\text{S}$ e $h_{12} = 5 \times 10^{-4}$. Escolha o valor de R_L para que o ganho de corrente seja $i_2/i_1 = 79$ e a resistência de entrada do amplificador seja menor que 10 Ω.

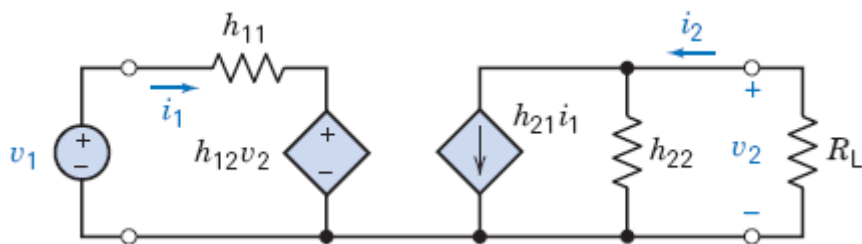



Figura PP 17-3 Modelo de um amplificador transistorizado.

PP 17-4 Um circuito de duas portas é ligado a uma fonte v_s e a uma resistência de carga R_L, como mostra a Figura PP 17-4.

(a) Determine os parâmetros de impedância do circuito de duas portas.

(b) Escolha o valor de R_L para que a potência fornecida a R_L seja a maior possível.

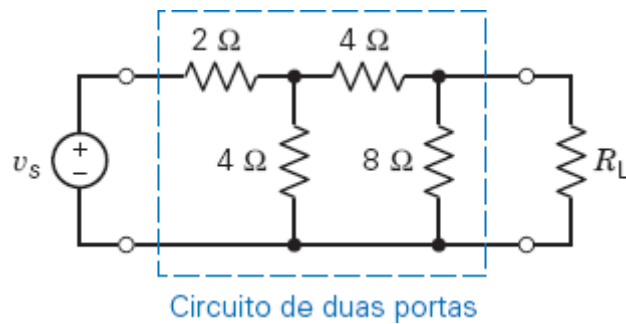



Figura PP 17-4

PP 17-5

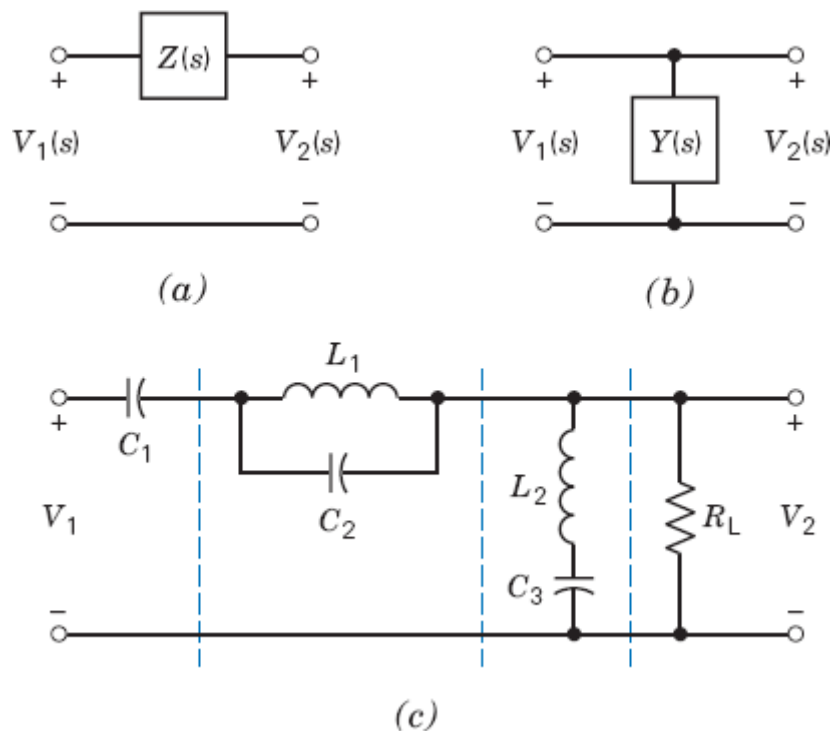
(a) Determine a matriz ABCD (matriz de transmissão) dos circuitos de duas portas das Figuras PP 17-5*a* e PP 17-5*b*.

(b) Use os resultados do item (a) para determinar a matriz ABCD do circuito da Figura PP 17-5*c* no domínio *s*.

(c) Sabendo que $L_1 = (10/\pi)$ mH, $L_2 = (2,5/\pi)$ mH, $C_1 = (0,78/\pi)\ \mu$F, $C_2 = C_3 = (1/\pi)\ \mu$F e $R_L = 100\ \Omega$, determine o ganho de tensão em circuito aberto V_2/V_1 e o ganho de corrente em curto-circuito I_2/I_1 no regime estacionário senoidal para as seguintes frequências: 2,5 kHz, 5,0 kHz, 7,5 kHz, 10 kHz e 12,5 kHz.

Sugestão: Use os elementos apropriados da matriz ABCD. Note também quais são as frequências de ressonância do circuito.

Figura PP 17-5

APÊNDICE A Introdução ao PSpice

A.1 *O PSpice*

O SPICE, um acrônimo de Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis, ou seja, Programa de Simulação com Ênfase em Circuitos Integrados, é um programa de computador para análise numérica de circuitos elétricos. Criado no início da década de 1970 no campus de Berkeley da Universidade da Califórnia, é considerado o programa de simulação de circuitos mais usado no mundo (Perry, 1998). O PSpice é uma versão do SPICE para computadores pessoais desenvolvida pela MicroSim Corporation em 1984 (Tuinenga, 88). O SPICE era um programa baseado em linhas de texto no qual os circuitos eram definidos usando apenas texto e os resultados na simulação eram mostrados na forma de texto. A MicroSim criou um pós-processador gráfico, o Probe, para plotar os resultados do SPICE. Mais tarde, criou também uma interface gráfica chamada Schematics para que os usuários pudessem descrever graficamente os circuitos. O nome do programa de simulação foi mudado de PSpice para PSpice A/D quando se tornou possível simular circuitos com componentes analógicos e digitais. A MicroSim foi comprada pela OrCAD®, que, por sua vez, foi adquirida pela Cadence®. A OrCAD aperfeiçoou a interface Schematics e mudou o nome para Capture. "Usar o PSpice" é uma forma coloquial de designar o uso dos programas Capture, PSpice A/D e Probe para analisar numericamente um circuito elétrico.

A.2 *Inicialização*

O primeiro passo para usar o PSpice é acessar o programa OrCAD Capture. A Figura A.1 mostra a tela de abertura do OrCAD Capture, chamada coloquialmente de tela Capture. (Caso seja necessário, maximize a janela Session Log.) A linha no alto da tela mostra o título do programa, OrCAD Capture CIS – Demo Edition. Logo abaixo está a barra do menu, com as opções File, View, Edit, Options, Window e Help. Abaixo da barra do menu aparece uma linha de botões e abaixo dos botões está uma régua. O espaço de trabalho está situado abaixo da régua. Para especificar o circuito a ser simulado, é preciso desenhá-lo no espaço de trabalho. Abaixo do espaço de trabalho existe uma linha com dois campos para mensagens. O campo da esquerda é particularmente importante porque fornece informações a respeito da tela Capture. Quando, exemplo, o cursor é colocado sobre um dos botões, o campo de mensagens da esquerda explica qual é a função do botão. Save Active Document (Salvar o Documento Ativo), por exemplo, é a função do terceiro botão da esquerda para a direita, como se pode ver na Figura A.1.

Selecione File/New/Project no menu da tela Capture, como mostra a Figura A.2, o que faz aparecer a caixa de diálogo New Project, mostrada na Figura A.3. Selecione Analog or Mixed A/D e entre com um nome e uma localização para o projeto. A localização é o nome da pasta na qual o programa deve armazenar o arquivo do projeto; o nome é o nome que deve receber o arquivo que contém o projeto. Como o programa usa OPJ como sufixo para arquivos de projetos, se escolhermos ExampleCircuit como nome e C:\PSpiceCircuits como localização, o programa armazenará um arquivo chamado ExampleCircuit.opj na pasta C:\PSpiceCircuits.

Clique em OK na caixa de diálogo New Project, o que fecha a caixa de diálogo New Project e faz aparecer caixa de diálogo Create PSpice Project, mostrada na Figura A.4. Selecione Create a blank project e clique em OK para voltar à tela Capture. Note que a tela Capture mudou: as opções Place, Macro, PSpice e Accessories foram acrescentadas à barra do menu, existem mais botões e existe um reticulado no espaço de trabalho.

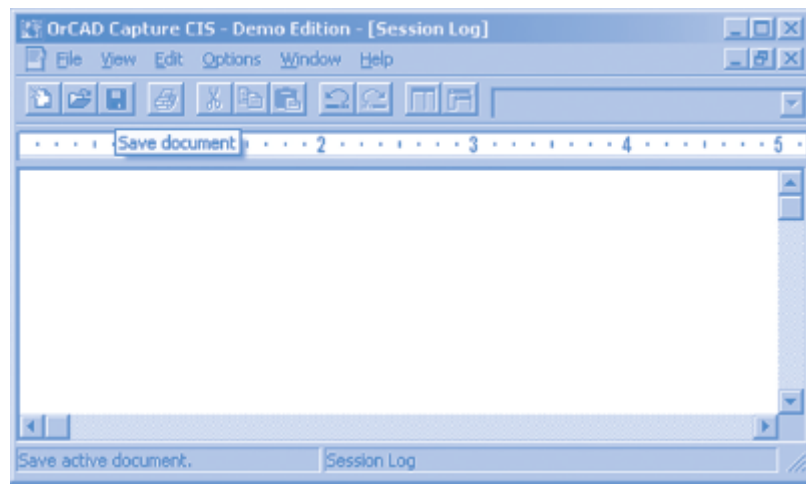



FIGURA A.1 Tela de abertura do programa OrCAD Capture CIS, demo edition, versão 15.7.

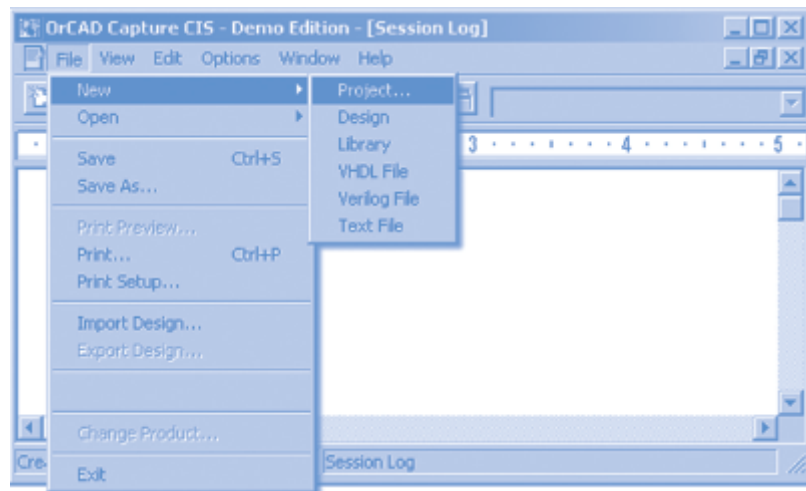



FIGURA A.2 Iniciando um novo projeto no OrCAD Capture.

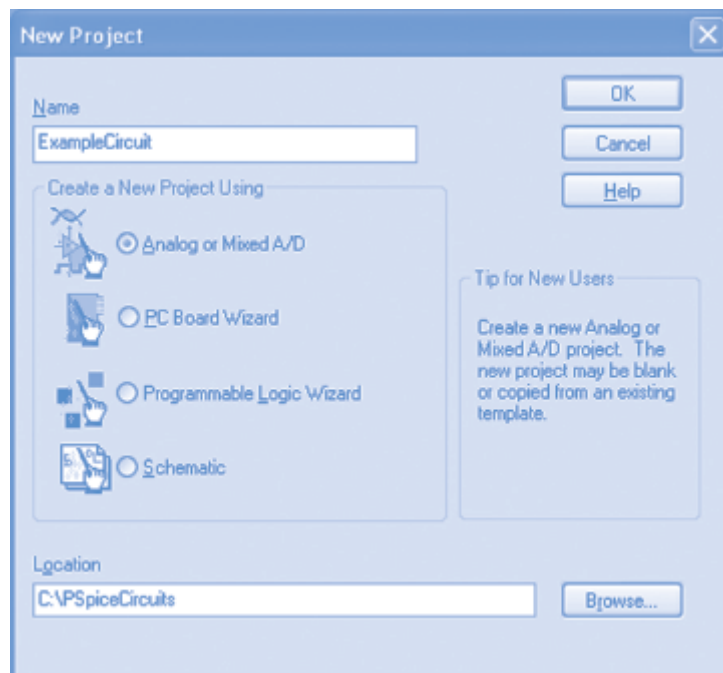



FIGURA A.3 Caixa de diálogo New Project.

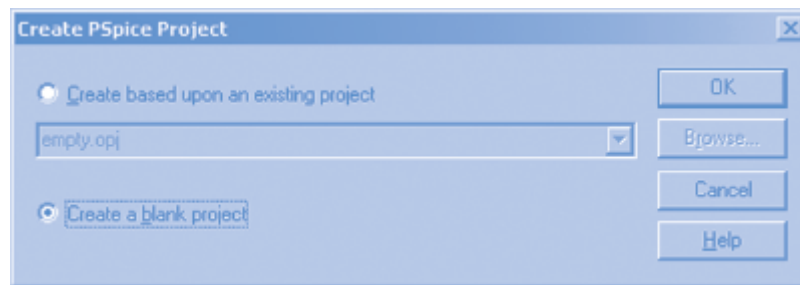



FIGURA A.4 Caixa de diálogo Create PSpice Project.

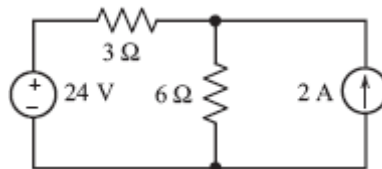



FIGURA A.5 Circuito a ser simulado.

Agora, estamos prontos para executar nossa primeira simulação usando o PSpice. O objetivo será determinar as tensões de nó do circuito da Figura A.5. Para começar, desenhamos o circuito no espaço de trabalho OrCAD Capture.

A.3 *Como Desenhar um Circuito no Espaço de Trabalho OrCAD Capture*

Para desenhar um circuito no espaço de trabalho OrCAD Capture, é preciso fazer três coisas:

1. Colocar os componentes do circuito no espaço de trabalho.
2. Especificar o valor dos componentes, como, por exemplo, a resistência dos resistores.
3. Especificar as ligações entre os componentes.

Para começar, selecione Part/Place no menu da tela Capture para fazer aparecer a caixa de diálogo Place Part, mostrada na Figura A.6. Para obter um resistor, selecione ANALOG na lista de bibliotecas e R na lista de componentes Part List (ou entre com R na caixa de digitação Part). Clique em OK para fechar a caixa de diálogo Place Part e voltar à tela Capture. Ao voltar à tela Capture, o cursor estará atrelado ao símbolo de um resistor. Arraste o resistor até o local desejado do espaço de trabalho e libere-o com um clique do mouse. O cursor ficará atrelado ao símbolo de outro resistor. Clique com o botão da direita para fazer aparecer o menu mostrado na Figura A.7, que permite escolher o valor e orientação do primeiro resistor. Repita o procedimento para o segundo resistor e selecione End Mode para desatrelar o cursor do símbolo de resistor. (Se a biblioteca ANALOG não constar da lista de bibliotecas disponíveis na caixa de diálogo Place Part, clique no botão Add Library para abrir uma caixa de diálogo Browse File, selecione o arquivo analog.olb na pasta PSpice, clique em Open e volta para a caixa de diálogo Place Part.)

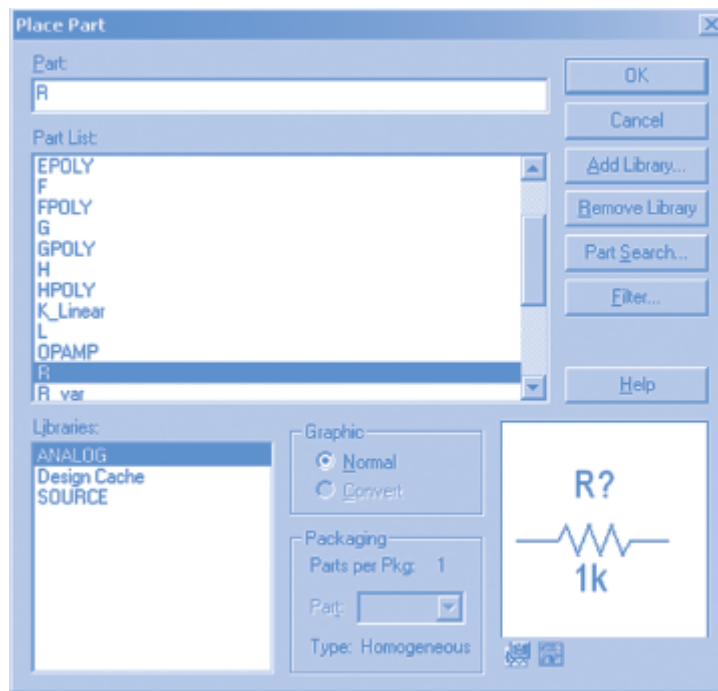



FIGURA A.6 Caixa de diálogo Place Part.

O programa PSpice exige que todos os circuitos possuam um nó de terra. Para colocar um nó de terra no espaço de trabalho, selecione Part/Ground no menu da tela Capture para fazer aparecer a caixa de diálogo Place Ground. Selecione SOURCE na lista de bibliotecas e 0 na lista de componentes (ou entre com 0 na caixa de digitação Part). (Se a biblioteca SOURCE não constar da lista de bibliotecas disponíveis na caixa de diálogo Place Ground, clique no botão Add Library para abrir a caixa de diálogo Browse File, selecione o arquivo source.olb na pasta PSpice, clique em Open a volte para a caixa de diálogo Place Ground.) Coloque o nó de terra no espaço de trabalho. A Figura A.8 Mostra a tela Capture com todos os componentes colocados.

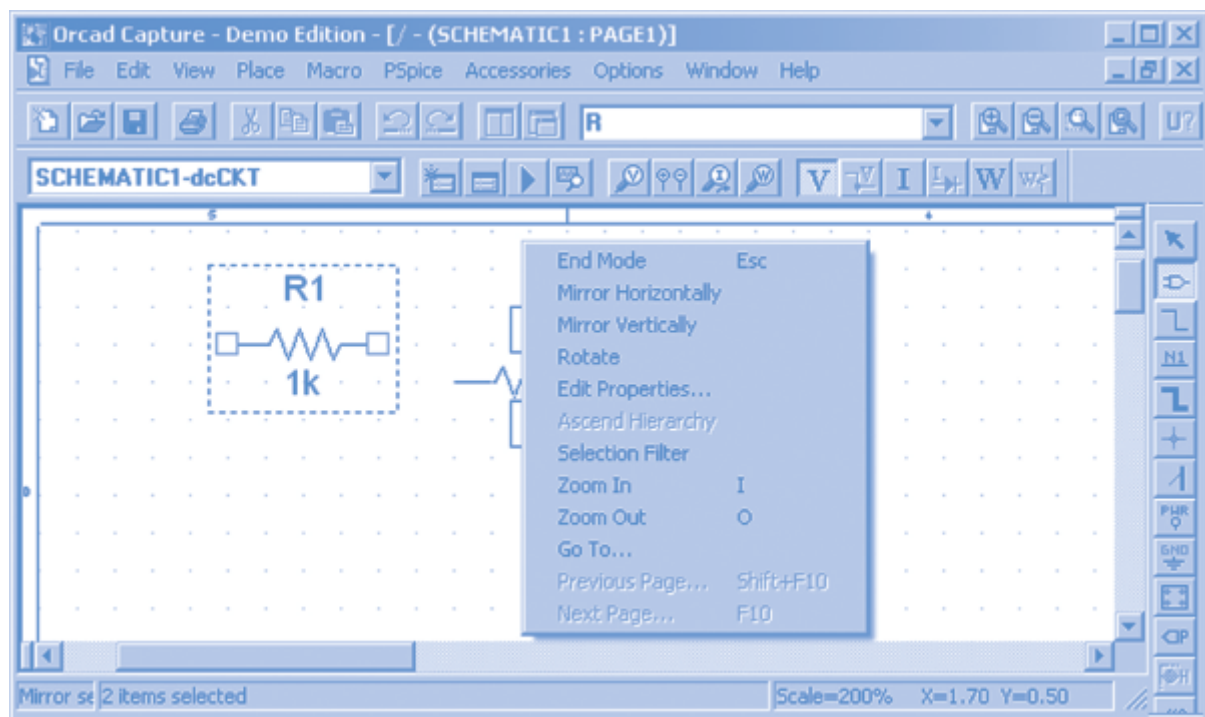



FIGURA A.7 Menu para especificar as propriedades de componentes.

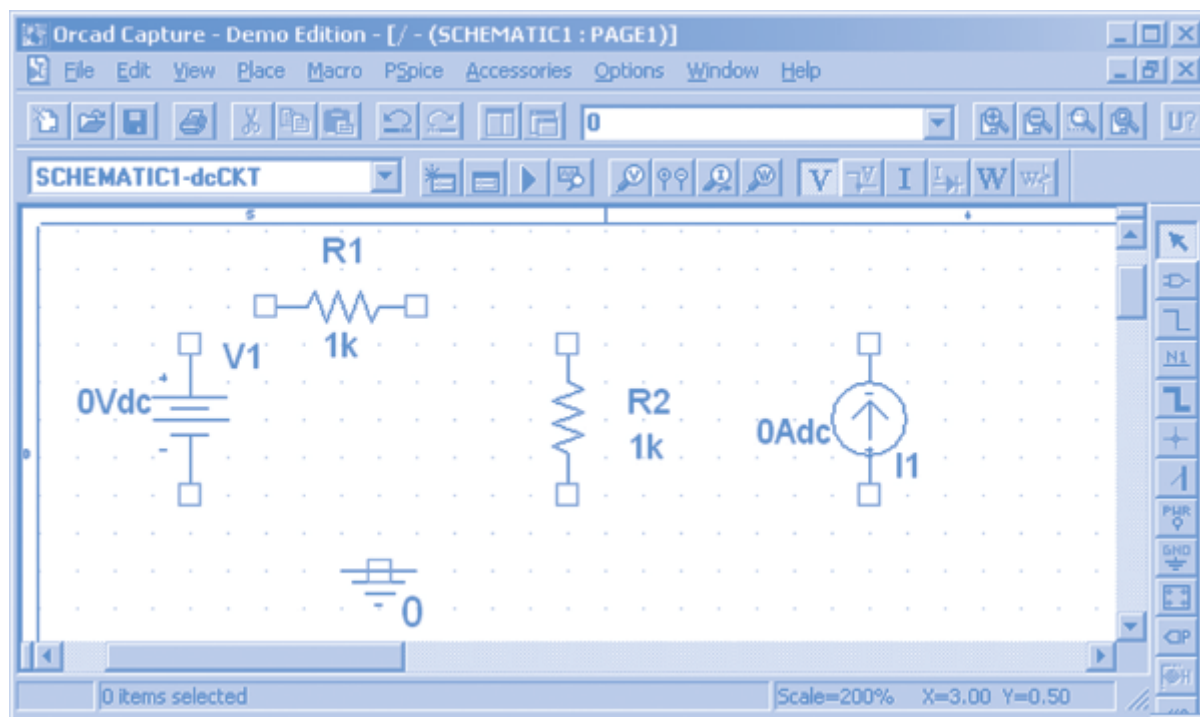



FIGURA A.8 Tela Capture com todos os componentes colocados.

As resistências dos resistores ainda estão com o valor inicial, que é 1k (1 kΩ). Clique em 1k do resistor vertical para selecioná-lo e clique com o botão direito do mouse em qualquer lugar do espaço de trabalho para fazer aparecer o menu mostrado na Figura A.9. Selecione Edit Properties para fazer aparecer a caixa de diálogos Display Properties mostrada na Figura A.10. Mude o valor do resistor de 1k para 3 na caixa de digitação Value. Use o mesmo processo para atribuir o valor correto aos outros componentes do circuito. A Figura A.11 mostra a tela Capture depois de os valores de todos os componentes terem sido ajustados.

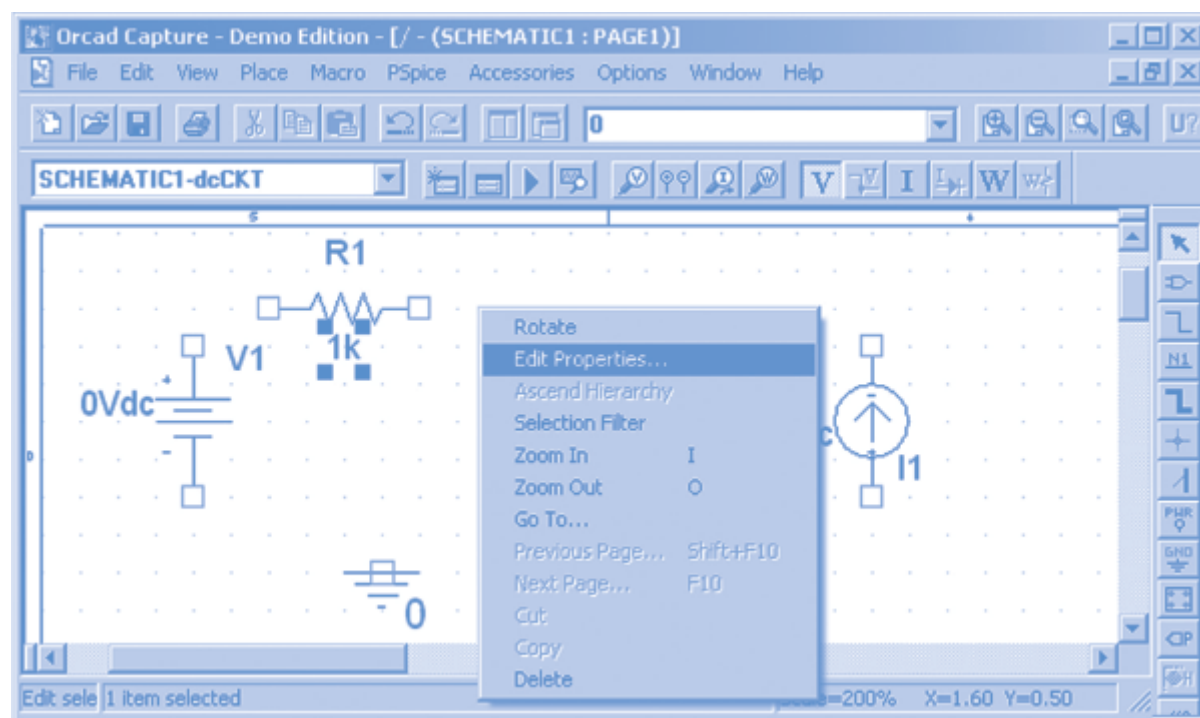



FIGURA A.9 O valor da resistência do resistor horizontal, 1k, está destacado porque foi selecionado com o auxílio do mouse. Um clique com o botão da direita em qualquer lugar do espaço de trabalho faz aparecer o menu mostrado na figura.

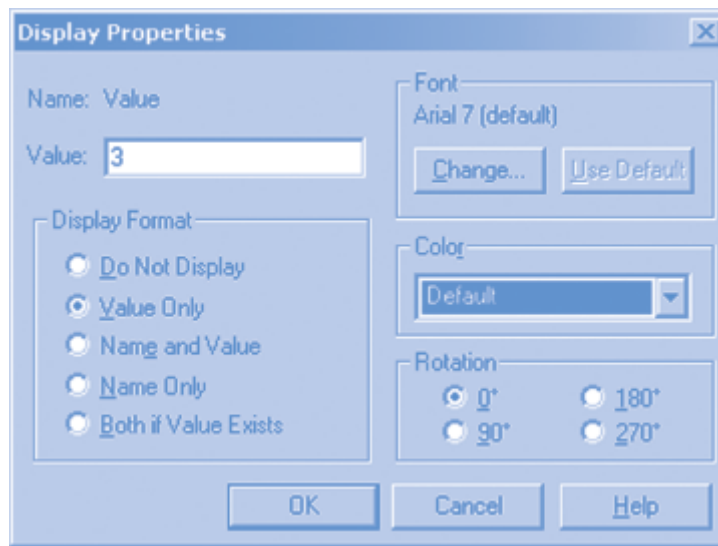



FIGURA A.10 A caixa de diálogo Display Properties.

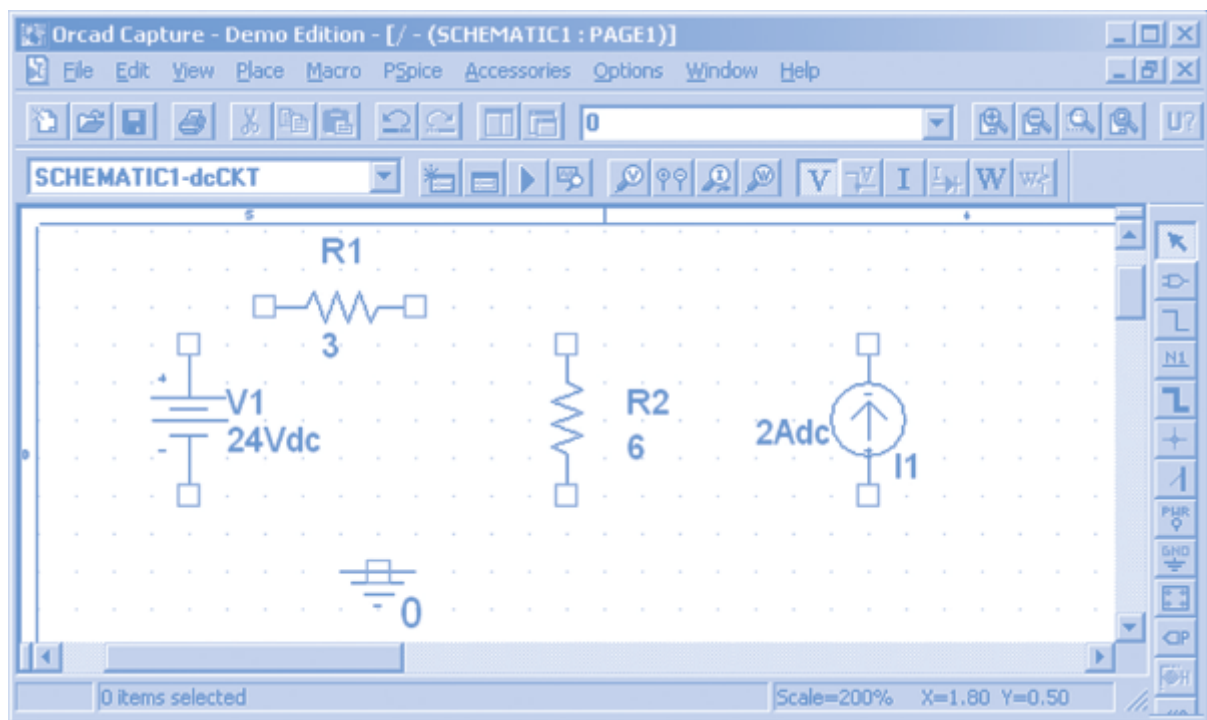



FIGURA A.11 Tela Capture depois de ajustados os valores dos componentes.

Selecione Parts/Wire para ligar os componentes. Note, na Figura A.11, que os terminais dos componentes são assinalados por pequenos quadrados. Para ligar dois terminais, clique em um terminal, desloque o mouse até o outro terminal, mantendo o botão do mouse apertado, e solte o botão. O desenho do fio de ligação acompanha o percurso do mouse, mas o fio é desenhado usando apenas segmentos de reta verticais e horizontais. Fios também podem ser usados para ligar componentes a fios ou para ligar fios entre si. Para sair do modo de colocação de fios, aperte o botão direito do mouse para fazer aparecer um menu e selecione End Mode. A Figura A.12 mostra o circuito completo.

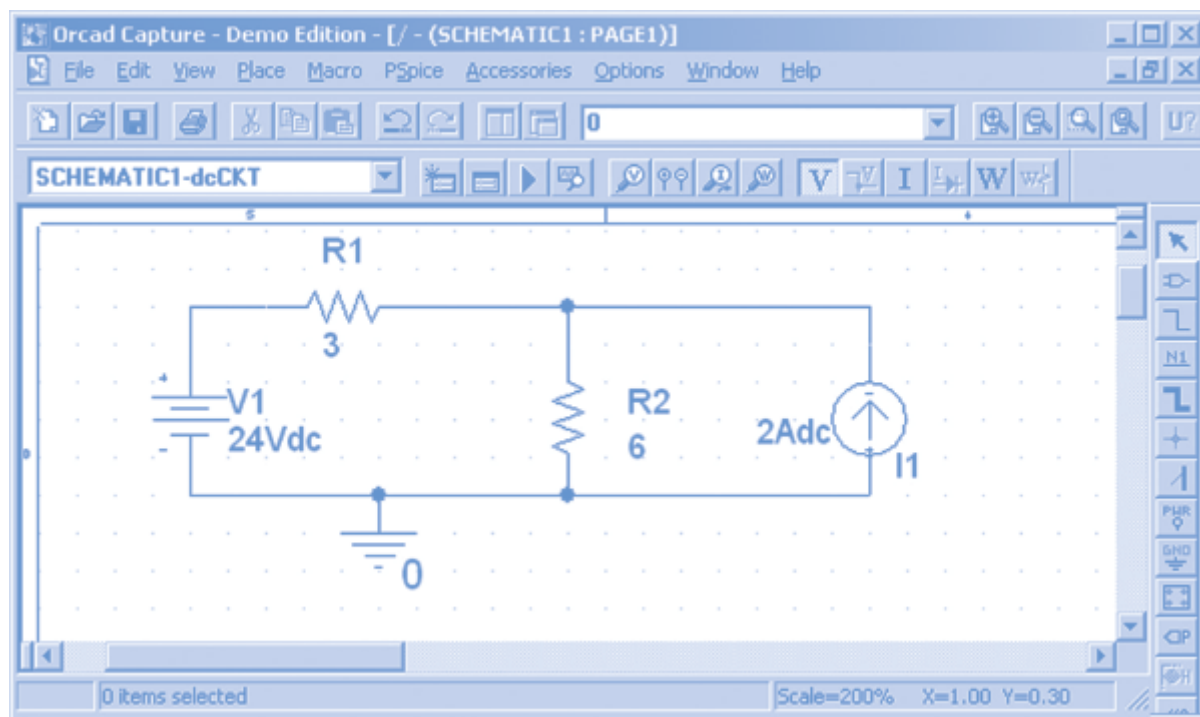



FIGURA A.12 Tela Capture com o circuito da Figura A.5.

A.4 *Como Especificar e Executar a Simulação*

Selecione PSpice/New Simulation Profile no menu da tela Capture para fazer aparecer a caixa de diálogo New Simulation. Entre com um nome, como Circuito1, e clique em Create para fazer aparecer a caixa de diálogo Simulation Settings. Selecione Bias Point na lista Analysis Type e General Settings na lista Options. Clique em OK para fechar a caixa de diálogo Simulation Settings. Selecione PSpice/Run no menu da tela Capture para executar a simulação. O resultado da simulação aparece na Figura A.13.

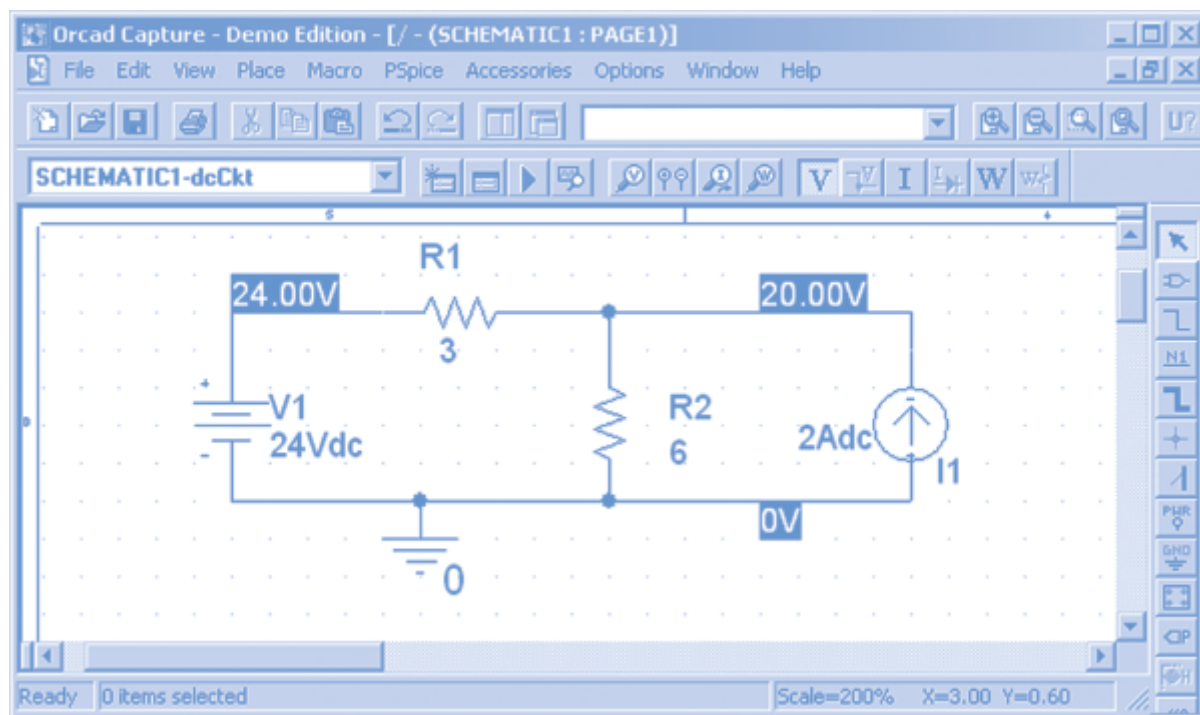



FIGURA A.13 Depois de executada uma simulação, as tensões de nó são indicadas no diagrama do circuito.

APÊNDICE B MATLAB, Matrizes e Números Complexos

Muitos engenheiros usam o programa de computador MATLAB® para executar uma grande variedade de cálculos matemáticos. O MATLAB, um acrônimo de MATrix LABoratory, ou seja, Laboratório de Matrizes, foi criado por uma empresa chamada The Math Works, cujo site na Internet, www.mathworks.com, contém muitas informações sobre o programa. Além disso, o próprio MATLAB é fornecido com um manual completo de instruções, como mostra a Figura B.1.

Neste apêndice, primeiro vamos usar o MATLAB como uma calculadora; em seguida, usaremos o programa para resolver equações envolvendo matrizes e números complexos; finalmente, o MATLAB será usado para plotar funções.

B.1 *Uso do MATLAB Como Calculadora*

Considere a equação

$$C \cdot D = 4A + B \Rightarrow D = \frac{4A + B}{C}$$

Vamos usar o MATLAB para calcular o valor de D sabendo que $A = 4$, $B = 7$ e $C = 6$. Para isso, escrevemos as equações que representam A, B, C e D no espaço de trabalho do MATLAB, usando operações e funções aritméticas disponíveis no MATLAB. As Tabelas B.1 e B.2 mostram as operações aritméticas e algumas das funções disponíveis no MATLAB.

FIGURA B.1 Para ter acesso ao manual do MATLAB, basta selecionar Help no menu da página de abertura do MATLAB.

Tabela B.1 Operações Aritméticas do MATLAB

OPERAÇÃO	SÍMBOLO	EQUAÇÃO	MATLAB
Adição	+	$4 + x$	4 + x
Subtração	–	$4 - x$	4 – x
Multiplicação	*	$4x$	4 * x
Divisão	/	$4/x$	4 / x
Potência	^	4^x	4^x

Tabela B.2 Algumas Funções do MATLAB

FUNÇÃO	EQUAÇÃO	MATLAB
seno	$\operatorname{sen}(x)$	sin (x)
cosseno	$\cos(x)$	cos (x)
tangente	$\tan(x)$	tan (x)
arco seno	$\operatorname{sen}^{-1}(x)$	asin (x)
arco cosseno	$\cos^{-1}(x)$	acos (x)
arco tangente	$\tan^{-1}(x)$	atan (x)
logaritmo decimal	$\log_{10}(x)$	log10 (x)
logaritmo natural	$\ln(x)$	log (x)
exponencial	e^x	exp (x)
raiz quadrada	$\sqrt{x}$	sqrt (x)
valor absoluto	$\lvert x \rvert$	abs (x)

A Figura B.2 mostra o espaço de trabalho do MATLAB. O símbolo ≫ é o cursor do MATLAB. Para indicar que $A = 4$, digitamos

```
A = 4;<Enter>
```

na linha em que existe apenas o cursor. (<Enter> indica a tecla Enter. Se o sinal de ponto e vírgula fosse omitido, o MATLAB mostraria o valor de A na linha seguinte. Como o valor de A já é conhecido, usamos o ponto e vírgula para economizar espaço na tela.) O MATLAB responde ao <Enter> mostrando um cursor na linha seguinte. As equações de B, C e D são digitadas em seguida. (Como, no MATLAB, as multiplicações e divisões têm precedência

em relação às adições e subtrações, o numerador da equação de *D* foi colocado entre parênteses para que a adição fosse realizada antes da divisão.) Note que, como o sinal de ponto e vírgula não foi usado no final da equação de *D*, MATLAB respondeu ao <Enter> mostrando o valor de *D* na linha seguinte.

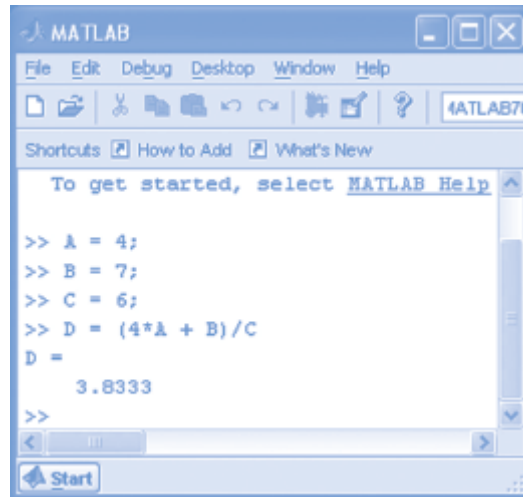



FIGURA B.2 Uso do MATLAB como uma calculadora.

EXEMPLO B.1 Funções Trigonométricas no MATLAB

Calcule

$$\theta = \text{sen}^{-1}(\cos(72°))$$

Solução

O argumento das funções trigonométricas sin (seno), cos (cosseno) e tan (tangente) do MATLAB é um ângulo em radianos e o resultado das funções trigonométricas inversas asin (arco seno), acos (arco cosseno) e atan (arco tangente) é um ângulo em radianos. Como o ângulo do argumento está em graus no enunciado, devemos converter o argumento para radianos. Além disso, vamos converter o resultado para graus. O comando do MATLAB

```
>> theta = (180/pi) * asin(cos(72*pi/180))
```

produz o resultado

```
theta = 18.0000
```

Os multiplicadores pi/180 e 180/pi convertem graus em radianos e radianos em graus, respectivamente. O comando

```
>>phi = (180/pi) * acos(sin(theta*pi/180))
```

produz o resultado

```
phi = 72
```

o que mostra que o resultado está correto.

B.2 *Matrizes, Determinantes e Sistemas de Equações*

Existem muitas situações nas quais os analistas de circuitos têm que lidar com arranjos retangulares de números. Um arranjo retangular de números da forma

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

é conhecido como *matriz*. Os números a_{ij} são chamados de *elementos* da matriz; o índice i indica a linha e j a coluna a que o elemento pertence.

Se a matriz possui m linhas e n colunas, dizemos que se trata uma matriz de *ordem* $m \times n$ ou, simplesmente, de uma matriz $m \times n$. (A expressão "$m \times n$" é lida como "m por n".) Se o número de colunas é igual ao número de linhas (ou seja, se $m = n$), dizemos que se trata de uma *matriz quadrada* de ordem n. As matrizes em geral são representadas por letras maiúsculas em negrito.

Uma matriz que contém apenas uma coluna, ou seja, uma matriz m × 1, é chamada de *matriz coluna* ou, mais frequentemente, de *vetor coluna*. Os vetores coluna em geral são representados por letras minúsculas em negrito, como no seguinte exemplo:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

A soma de duas matrizes, que só é possível para duas matrizes da mesma ordem, é obtida somando os elementos correspondentes das duas matrizes. Assim, se os elementos da matriz A são a_{ij} e os elementos da matriz B são b_{ij}, e se

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$$

os elementos da matriz **C** são dados por

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

A adição de matrizes é comutativa, ou seja,

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

e também é associativa, ou seja,

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$$

O produto de uma matriz A por uma constante α é obtido multiplicando todos os elementos da matriz por α, ou seja,

$$\alpha\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

A multiplicação de duas matrizes, que faz parte da solução de sistemas de equações lineares, só é possível se o número de colunas da primeira matriz for igual ao número de linhas da segunda matriz. Assim, por exemplo, se a matriz A é de ordem $m \times n$ e a matriz B é de ordem $n \times q$, o produto AB é possível e o resultado é uma matriz C de ordem $m \times q$. Os elementos do produto

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB}$$

são calculados multiplicando elemento a elemento os elementos da linha de ordem i da matriz **A** pelos elementos da coluna de ordem j da matriz **B** e somando os resultados para obter o elemento c_{ij}, ou seja,

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{iq}b_{qj} = \sum_{k=1}^{q} a_{ik}b_{kj}$$

Assim, por exemplo, para obter c_{11}, o elemento do canto superior esquerdo da matriz **C**, multiplicamos o primeiro elemento da primeira linha de **A** pelo primeiro elemento da primeira coluna de **B**, o segundo elemento da primeira linha de **A** pelo segundo elemento da primeira coluna de **B** e assim por diante, até esgotarmos a linha e a coluna (o que acontece simultaneamente); em seguida, somamos os produtos. Convém observar que a multiplicação de matrizes não é comutativa, ou seja, em geral,

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$$

EXEMPLO B.2 Matrizes no MATLAB

Calcule

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução

A Figura B.3 mostra como executar esses cálculos usando o MATLAB. Em primeiro lugar, as duas variáveis matriciais

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

devem ser definidas. A Figura B.3 mostra duas formas de definir uma variável matricial. O comando

```
>> A = [2 1 ; 4 2]
```

utiliza um espaço para separar os elementos de cada linha da matriz e um ponto e vírgula para separar as linhas da matriz. O comando

```
>> B = [6 1
        2 1]
```

utiliza um espaço para separar os elementos de cada linha da matriz e um <Enter> para separar as linhas da matriz. (Depois do <Enter>, são usados espaços para alinhar as colunas da matriz **B**.) Os dois comandos usam os símbolos [e] para indicar o início e o final da matriz.

A Figura B.3 mostra que as operações indicadas na Tabela B.1 podem ser efetuadas com matrizes. Vemos que

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{e } \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 3 \\ 30 & 6 \end{bmatrix}$$

FIGURA B.3 Operações com matrizes no MATLAB.

Um sistema de equações lineares

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \tag{B-1}$$

pode ser escrito na forma matricial

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \tag{B-2}$$

enquanto

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \ \text{e} \ \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Frequentemente, estamos interessados em resolver um sistema de equações lineares com o da Eq. B-1. Em outras palavras, dados os valores dos coeficientes a_{ij} e b_{ij}, queremos conhecer o valor das variáveis x_i.

Para fazer isso com o auxílio do MATLAB, expressamos o sistema de equações em forma matricial, como na Eq. B-2, definimos as matrizes A e b e usamos o comando do MATLAB

```
≫ x = A\b
```

O MATLAB responde ao comando fornecendo o valor da matriz **x**.

Exemplo B.3 Solução de Sistemas de Equações Usando o MATLAB

Resolva o seguinte sistema de equações:

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 12$$
$$4x_2 - 2x_3 = -1$$
$$6x_1 - x_2 - x_3 = 0$$

Solução

Em primeiro lugar, escrevemos o sistema de equações na forma

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

em que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 12 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Em seguida, entramos com as matrizes **A** e **b** na janela de comando do MATLAB, como mostra a Figura B.4 e entramos com o comando

```
≫ x = A\b
```

O MATLAB fornece o resultado

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1{,}2407 \\ 2{,}3148 \\ 5{,}1296 \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$x_1 = 1{,}2407,\ x_2 = 2{,}3148 \text{ e } x_1 = 5{,}1296$$

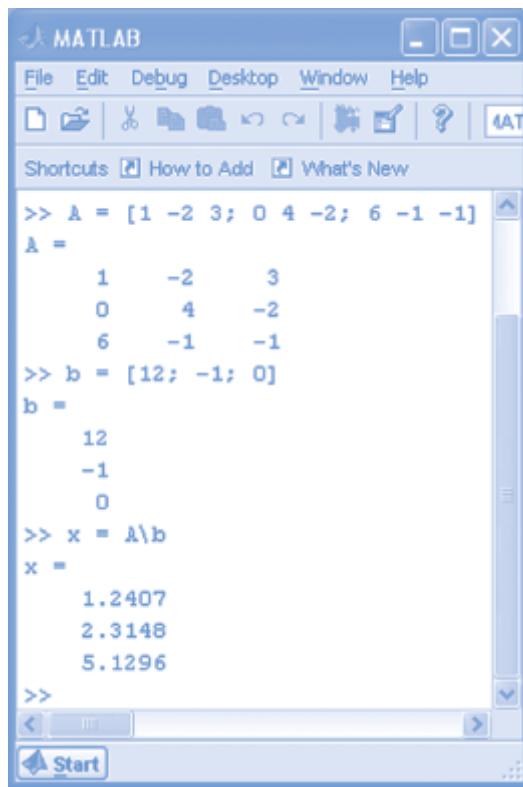



FIGURA B.4 Solução de um sistema de equações usando o MATLAB.

Podemos também resolver sistemas de equações usando a *regra de Cramer*, que envolve determinantes, menores complementares e cofatores. O *determinante* de uma matriz é um número associado a uma matriz quadrada. Para representar o determinante Δ de uma matriz quadrada A, usamos a seguinte notação:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

O determinante de uma matriz 2 × 2 é dado por

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

e o determinante de uma matriz 3 × 3 é dado por

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

Em geral, calculamos o determinante Δ usando cofatores. O determinante da submatriz obtida pela remoção da linha *i* e da coluna *j* uma matriz A é chamado de *menor complementar* do elemento a_{ij} e representado pelo símbolo m_{ij}; o *cofator* c_{ij} é um menor complementar com um sinal associado, dado pela seguinte expressão:

$$C_{ij} = (-1)^{(i+j)}\, m_{ij}$$

A regra para calcular o determinante Δ usando a linha de ordem *i* de uma matriz *n* × *n* é a seguinte:

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_{ij}$$

em que i é um número inteiro tal que $1 \leq i \leq n$. Também é possível calcular Δ usando a coluna j, caso em que

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_{ij}$$

em que j é um número inteiro tal que $1 \leq j \leq n$.

De acordo com a regra de Cramer, o valor da incógnita x_k que satisfaz o sistema de equações da Eq. B-1 é dado por

$$x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}$$

em que Δ é o determinante de **A** e Δ_k é o determinante Δ com a coluna de ordem k substituída pelo vetor coluna **b**.

B.3 *Números Complexos e Operações com Números Complexos*

Um número complexo c é definido como a soma de um número real e um número imaginário, ou seja, um número da forma

$$c = a + jb \tag{B-3}$$

em que a e b são números reais e $j = \sqrt{-1}$ Os números complexos podem ser representados graficamente como pontos em um sistema de coordenadas retangulares, conhecido como *plano complexo*, que possui um eixo real e um eixo imaginário. Na chamada *representação retangular*, mostrada na Figura B.5*a*, os números reais a e b da Eq. B-3 são as coordenadas do ponto c em relação ao eixo real e ao eixo imaginário. O número a é chamado de *parte real* de c e b é chamado de *parte imaginária* de c. Para representar simbolicamente as operações de extrair a parte real e a parte imaginária de um número complexo c, usamos a notação

$$a = \text{Re}\{c\} \quad \text{e} \quad b = \text{Im}\{c\}$$

A Figura B.5*b* mostra outra forma de representar um número complexo c, conhecida como *representação polar*, na qual um segmento de reta é usado para ligar a origem do plano complexo ao ponto que representa o número complexo. O ângulo do segmento de reta, θ, medido no sentido anti-horário a partir do semieixo real positivo, é chamado de *ângulo* do número complexo. O comprimento do segmento de reta, r, é chamado de *módulo* do número complexo.

Na representação polar, usamos a notação

$$c = r \underline{/\theta}$$

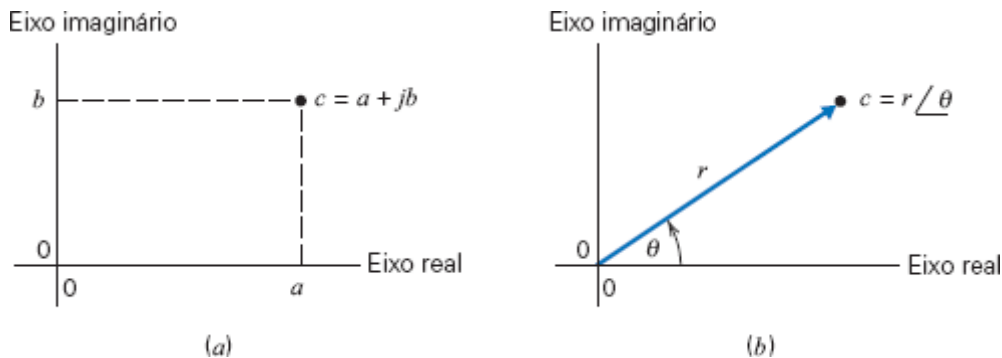



FIGURA B.5 Representação (*a*) retangular e (*b*) polar de um número complexo.

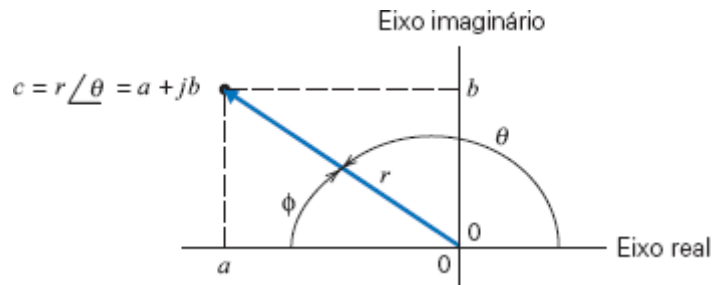



FIGURA B.6 Representação gráfica de um número complexo para o qual Re$\{c\} < 0$.

e, para indicar que r é o módulo e θ é o ângulo do número complexo c, escrevemos

$$r = |c| \quad \text{e} \quad \theta = \angle c$$

A Figura B.6 mostra um número complexo c para o qual Re$\{c\} < 0$. Note que o ângulo de c é θ, e não φ.

Como o mesmo número complexo pode ser escrito na representação retangular e na representação polar, temos

$$a + jb = c = r\angle\theta$$

Comparando as Figuras B.5*a* e B.5*b* e usando relações trigonométricas, obtemos as seguintes equações para converter números complexos da representação retangular para a representação polar e vice-versa:

$$a = r\cos(\theta),\ b = r\ \text{sen}\ (\theta),\ r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

e

$$\theta = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right) & a > 0 \\ 180° - \tan^{-1}\left(\dfrac{b}{-a}\right) & a < 0 \end{cases}$$

Seguem alguns casos especiais:

$$1 = 1\angle 0°,\ j = 1\angle 90°,\ -1 = 1\angle \pm 180° \ \text{e} \ -j = 1\angle -90° = 1\angle 270°$$

Para somar ou subtrair números complexos, é melhor usar a representação retangular, já que, nessa representação, basta somar ou subtrair as partes reais e as partes imaginárias dos dois números:

$$(a + j\,b) + (c + j\,d) = (a + c) + j(b + d)$$

e

$$(a + j\,b) - (c + j\,d) = (a - c) + j(b - d)$$

Para multiplicar ou dividir números complexos, é melhor usar a representação polar, já que, nessa representação, basta multiplicar ou dividir o módulo dos dois números e somar ou subtrair os ângulos:

$$\left(A\angle\theta\right)\left(B\angle\phi\right) = AB\angle(\theta + \phi) \ \text{e} \ \frac{A\angle\theta}{B\angle\phi} = \frac{A}{B}\angle(\theta - \phi)$$

O *complexo conjugado* de um número complexo $c = a + jb$ é representado pelo símbolo c^* e definido pela equação

$$c^* = a - jb$$

Na representação polar, temos

$$c^* = r\angle{-\theta}$$

Uma terceira representação dos números complexos, a representação exponencial, está relacionada com a fórmula de Euler,

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\ \mathrm{sen}\ \theta$$

segundo a qual

$$r\,e^{j\theta} = \mathrm{r}\cos\theta + j\,r\ \mathrm{sen}\ \theta$$

Na representação polar, usando relações trigonométricas, é fácil mostrar que

$$r\angle\theta = r\cos\theta + j\,r\ \mathrm{sen}\ \theta$$

Comparando as duas últimas equações, obtemos a seguinte equivalência entre a representação exponencial e a representação polar de um número complexo:

$$r\,e^{j\theta} = r\angle\theta$$

Como se pode ver, é muito fácil converter um número complexo da representação polar para a representação exponencial e vice-versa. No MATLAB, é mais conveniente trabalhar com os números complexos na representação exponencial do que na representação polar.

Vale a pena chamar a atenção para o fato de que a fórmula de Euler permite expressar as funções seno e cosseno em termos de exponenciais imaginárias:

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{j\theta} + e^{-j\theta}\right)\ \text{e sen}\ \theta = \frac{1}{2j}\left(e^{j\theta} - e^{-j\theta}\right)$$

A Tabela B.3 mostra algumas funções do MATLAB que envolvem números complexos.

Tabela B.3 Funções do MATLAB que Envolvem Números Complexos

FUNÇÃO	EQUAÇÃO	MATLAB
Parte real	Re{c}	real(c)
Parte imaginária	Im{c}	imag(c)
Módulo	$\lvert c\rvert$	abs(c)
Ângulo	$\angle c$	angle(c)
Complexo conjugado	c^*	conj(c)

EXEMPLO B.4 Representação Retangular e Polar de Números Complexos

Expresse $c_1 = 4 - j3$ nas representações exponencial e polar. Expresse $c_2 = 6{,}2\angle{-120^\circ}$ na representação retangular.

Solução

Fazendo as conversões no papel, obtemos

$$c_1 = \sqrt{4^2 + (-3)^2} \angle \tan^{-1}\left(\frac{-3}{4}\right) = 5 \angle -36{,}87^\circ$$

e

$$c_2 = 6{,}2 \cos(-120^\circ) + j6{,}2 \operatorname{sen}(-120^\circ) = -3{,}1 - j5{,}37$$

Na Figura B.7, o MATLAB é usado para fazer as mesmas conversões e os resultados são os mesmos. O papel dos fatores $180/\pi$ e $\pi/180$ é converter radianos em graus e graus em radianos, respectivamente. Note que a funçãoangle(c1) fornece o ângulo de c1 em radianos e que o argumento θ da função exp $(-j^*\theta)$ deve estar em radianos.

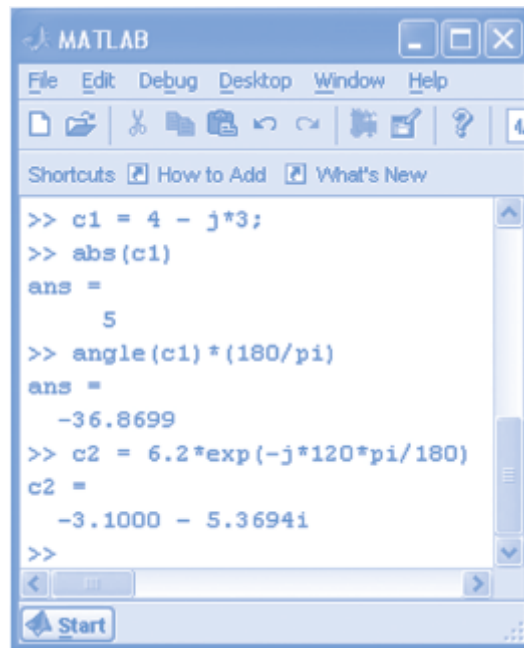



FIGURA B.7 Diferentes representações de números complexos.

EXEMPLO B.5 Operações com Números Complexos

Calcule $c + d$, $c - d$, cd e c/d para $c = 4 - j3$ e $d = 6{,}2 \angle -120^\circ$.

Solução

Para começar, convertemos c para a representação polar e d para a representação retangular:

$$c_1 = \sqrt{4^2 + (-3)^2} \angle \tan^{-1}\left(\frac{-3}{4}\right) = 5 \angle -36{,}87^\circ$$

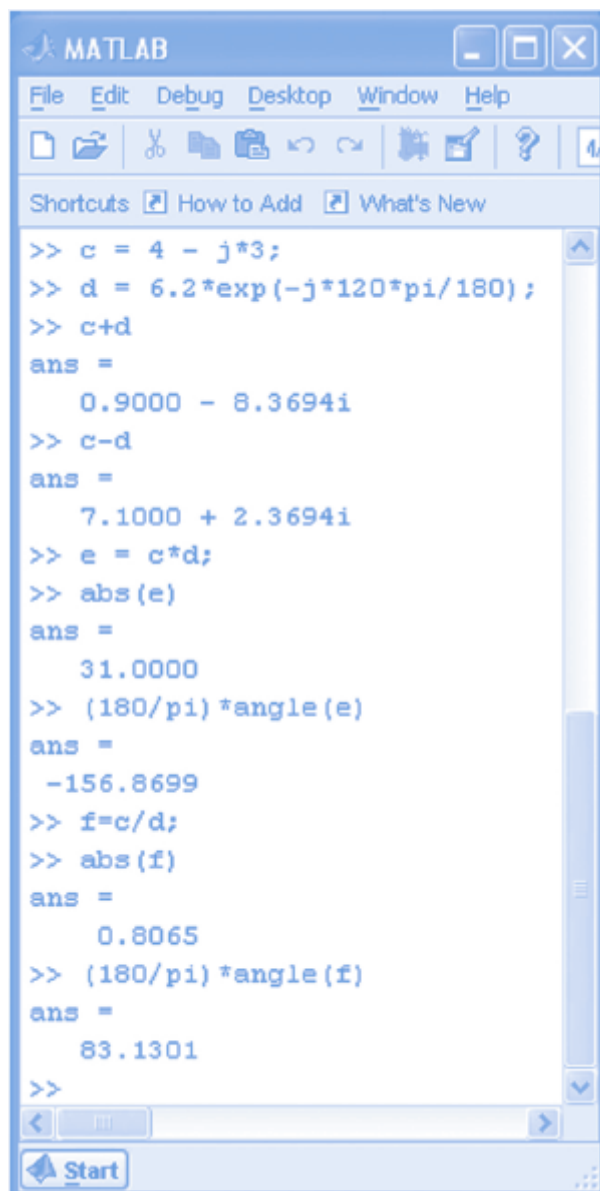
e

$$d = 6{,}2 \cos(-120^\circ) + j6{,}2 \operatorname{sen}(-120^\circ)$$
$$= -3{,}1 - j5{,}37$$

Usando a representação retangular para realizar a adição e a subtração, obtemos

$$c + d = (4 - j3) + (-3{,}1 - j5{,}37)$$
$$= (4 - 3{,}1) + j(-3 - 5{,}37) = 0{,}9 - j8{,}37$$

e

$$\begin{aligned} c-d &= (4-j3)-(-3{,}1-j5{,}37) \\ &= (4+3{,}1)+j(-3-5{,}37) = 7{,}1+j2{,}37 \end{aligned}$$

Usando a representação polar para realizar a multiplicação e a divisão, obtemos

$$\begin{aligned} c\,d &= \left(5\,\angle{-36{,}87^\circ}\right)\left(6{,}2\,\angle{-120^\circ}\right) \\ &= (5 \times 6{,}2)\,\angle(-36{,}87^\circ - 120^\circ) \\ &= 31\,\angle{-156{,}87^\circ} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{c}{d} &= \frac{5\,\angle{-36{,}87^\circ}}{6{,}2\,\angle{-120^\circ}} \\ &= \left(\frac{5}{6{,}2}\right)\angle(-36{,}87^\circ + 120^\circ) \\ &= 0{,}806\,\angle{83{,}13^\circ} \end{aligned}$$

Na Figura B.8, o MATLAB é usado para fazer as mesmas operações e os resultados são os mesmos.

FIGURA B.8 Operações com números complexos.

B.4 *Uso do MATLAB para Plotar Funções*

Considere a equação

$$y = 0{,}2\,x^2 + 1{,}6$$

O comando do MATLAB

```
>> plot(x, y)
```

faz o programa plotar **y** em função de **x**, em que **x** é um vetor coluna, ou seja, uma matriz $1 \times n$ com uma lista de valores igualmente espaçados da variável x, e **y** é um vetor coluna com uma lista de valores correspondentes da variável y.

Para obter uma lista de valores igualmente espaçados da variável *x*, usamos um comando do MATLAB da forma

```
>> x = [xs : dx : xf]
```

em que xs é o valor inicial de x, dx é o incremento de x e xf é o valor final de x. Assim, por exemplo, o comando do MATLAB

```
>> x = [ -5 : 4 : 15]
```

produz a lista

```
>> x = [-5  -1  3  7  11  15
```

Para obter a lista de valores correspondentes da variável y, usamos o comando do MATLAB

```
>> y=0.2*x.^2+1.6
```

que produz a lista

```
>> y =  0.6  1.4  2.2  3.0  3.8  4.6
```

(Observe os símbolos ".^" no comando usado para calcular os valores da variável y. De acordo com a Tabela B.1, "^" é o símbolo usado pelo MATLAB para indicar potenciação; o "." antes de "^" indica que a operação de potenciação deve ser aplicada aos elementos da matriz **x** e não à própria matriz.)

EXEMPLO B.6 Uso do MATLAB para Plotar Funções

Use o MATLAB para mostrar que

$$5{,}61 \cos(100\,t) - 13{,}96 \operatorname{sen}(100\,t) = 15 \cos(100\,t + 68{,}1°)$$

Solução

Os comandos do MATLAB

```
>> t = [0 : 0.001 : 0.12];
>> v1 = 5.61*cos(100*t) - 16.96*sin(100*t);
>> v2 = 15*cos(100*t +68.1*pi/180);
```

```
≫ plot(t,v1,t,v2)
```

produzem o gráfico mostrado na Figura B.9. O comando

```
≫ plot(t,v1,t,v2)
```

faz o MATLAB plotar, no mesmo gráfico, v1 em função de t e v2 em função de t. Como as duas curvas se superpõem, concluímos que v1 e v2 são diferentes formas de expressar a mesma função de t.

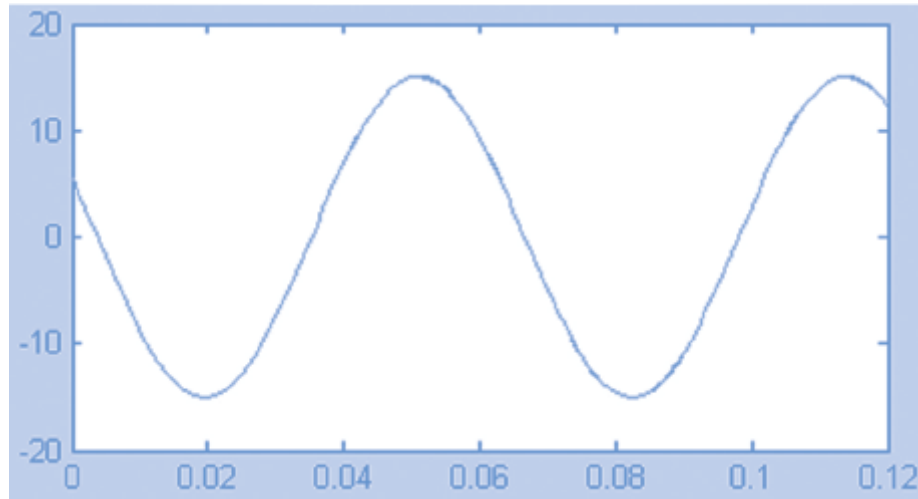



FIGURA B.9 Gráfico do Exemplo B.6.

APÊNDICE C Fórmulas Matemáticas

C.1 Identidades Trigonométricas

1. $\text{sen}\,(-\alpha) = -\,\text{sen}\,\alpha$
2. $\cos\,(-\alpha) = \cos\,\alpha$
3. $\text{sen}\,\alpha = \cos\,(\alpha - 90°) = -\cos\,(\alpha + 90°)$
4. $\cos\,\alpha = -\text{sen}\,(\alpha - 90°) = \text{sen}\,(\alpha + 90°)$
5. $\text{sen}\,\alpha = -\text{sen}\,(\alpha \pm 180°)$
6. $\cos\,\alpha = -\,\cos\,(\alpha \pm 180°)$
7. $\text{sen}(\alpha \pm \beta) = \text{sen}\,\alpha\,\cos\,\beta \pm \cos\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$
8. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\,\alpha\,\cos\,\beta \mp \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$
9. $\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$
10. $\text{sen}\,2\alpha = 2\,\text{sen}\,\alpha\,\cos\,\alpha$
11. $\cos\,2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$
12. $2\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta = \cos\,(\alpha - \beta) - \cos\,(\alpha + \beta)$
13. $2\,\text{sen}\,\alpha\,\cos\,\beta = \text{sen}\,(\alpha + \beta) + \text{sen}\,(\alpha - \beta)$
14. $2\,\cos\,\alpha\,\cos\,\beta = \cos\,(\alpha + \beta) + \cos\,(\alpha - \beta)$
15. $2\,\text{sen}^2\alpha = 1 - \cos\,2\alpha$
16. $2\,\cos^2\alpha = 1 + \cos\,2\alpha$
17. $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

C.2 Derivadas

As letras u e v representam funções de x, enquanto a, b e m são constantes.

1. $\dfrac{d}{dx}(au) = a\dfrac{du}{dx}$
2. $\dfrac{d}{dx}(u + v) = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx}$
3. $\dfrac{d}{dx}(uv) = \dfrac{du}{dx}v + u\dfrac{dv}{dx}$
4. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$

5. $\dfrac{d}{dx}(x^m) = mx^{m-1}$

6. $\dfrac{d}{dx}(e^{ax}) = ae^{ax}$

7. $\dfrac{d}{dx}(\ln x) = \dfrac{1}{x}$

8. $\dfrac{d}{dx}\cos(ax+b) = -a \operatorname{sen}(ax+b)$

9. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{sen}(ax+b) = a\cos(ax+b)$

C.3 *Integrais Indefinidas*

As letras *u* e *v* representam funções de *x*, enquanto *a*, *b* e *m* são constantes.

1. $\displaystyle\int au\,dx = a\int u\,dx$

2. $\displaystyle\int (u+v)\,dx = \int u\,dx + \int v\,dx$

3. $\displaystyle\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$ para $m \neq -1$

4. $\displaystyle\int u\frac{dv}{dx}\,dx = uv - \int v\frac{du}{dx}\,dx$

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x|$

6. $\displaystyle\int \operatorname{sen} ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax$

7. $\displaystyle\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{sen} ax$

8. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 ax\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a}$

9. $\displaystyle\int \cos^2 ax\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a}$

10. $\displaystyle\int \cos ax \operatorname{sen} ax\,dx = \frac{\operatorname{sen}^2 ax}{2a}$

11. $\displaystyle\int x\operatorname{sen} ax\,dx = \frac{\operatorname{sen} ax - ax\cos ax}{a^2}$

12. $\displaystyle\int x\cos ax\,dx = \frac{\cos ax + ax\operatorname{sen} ax}{a^2}$

13. $\displaystyle\int \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx\,dx = \frac{\operatorname{sen}(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\operatorname{sen}(a+b)x}{2(a+b)}$ para $b^2 \neq a^2$

14. $\displaystyle\int \cos ax\cos bx\,dx = \frac{\operatorname{sen}(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\operatorname{sen}(a+b)x}{2(a+b)}$ para $b^2 \neq a^2$

15. $\displaystyle\int \operatorname{sen} ax \cos bx \, dx = -\frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} \quad \text{para} \quad b^2 \neq a^2$

16. $\displaystyle\int e^{ax} \, dx = \frac{1}{a} e^{ax}$

17. $\displaystyle\int x\, e^{ax} \, dx = \frac{ax-1}{a^2} e^{ax}$

18. $\displaystyle\int e^{ax} \operatorname{sen} bx \, dx = \frac{e^{ax}(a \operatorname{sen} bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2}$

19. $\displaystyle\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}(a \cos bx + b \operatorname{sen} bx)}{a^2 + b^2}$

APÊNDICE D O Código de Cores dos Resistores

Os resistores comerciais de baixa potência estão disponíveis em uma série de valores padronizados. A resistência e a tolerância do resistor são indicadas por faixas coloridas. Os tipos mais comuns de resistor são os resistores de carbono e os resistores de filme de carbono.

O código de cores dos resistores utiliza dois dígitos e um multiplicador para indicar o valor da resistência, como mostra a Figura D.1. Uma quarta faixa indica a tolerância. Os valores padrão dos dois primeiros dígitos aparecem na Tabela D.1.

A resistência de um resistor com quatro faixas coloridas é dada por

$$R = (a \times 10 + b)m \pm \text{tolerância}$$

em que a e b são os valores da primeira e da segunda faixa, respectivamente, e m é o valor do multiplicador. Esses valores de resistência são para resistores com tolerância de 2% ou 5%. O código de cores para os valores da resistência aparece na Tabela D.2 e os códigos de cores para os valores do multiplicador e da tolerância aparecem nas Tabelas D.3 e D.4, respectivamente. Considere, por exemplo, um resistor no qual as quatro faixas têm as cores amarela, violeta, laranja e dourada, nessa ordem. A resistência do resistor é

$$R = (4 \times 10 + 7)\ \text{k}\Omega \pm 5\%$$

$$= 47\ \text{k}\Omega \pm 5\%$$

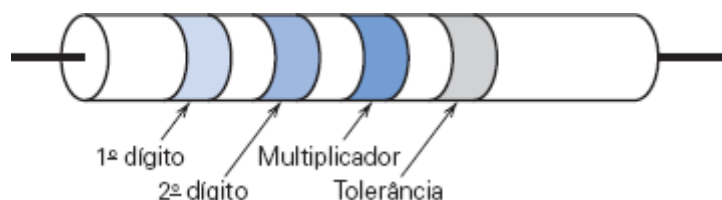



FIGURA D.1 Resistor com quatro faixas coloridas.

Tabela D.1 **Valores Padrão dos Dois Primeiros Dígitos dos Resistores Comerciais com Tolerância de 2% ou 5%**

10	16	27	43	68
11	18	30	47	75
12	20	33	51	82
13	22	36	56	91
15	24	39	62	100

Tabela D.2 **Código de Cores**

0	preto
1	castanho
2	vermelho
3	laranja
4	amarelo
5	verde
6	azul
7	violeta
8	cinza
9	branco

Tabela D.3 Código de Cores dos Multiplicadores

prateado	0,01
dourado	0,1
preto	1
castanho	10
vermelho	100
laranja	1 k
amarelo	10 k
verde	100 k
azul	1 M
violeta	10 M
cinza	100 M

Tabela D.4 Código de Cores das Tolerâncias

vermelho	2%
dourado	5%

prateado	10%
ausente	20%